



HDR / ENS CACHAN - BRETAGNE
sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne
pour obtenir
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
Mention : Mathématiques

présentée par
Grégory Vial
Préparée à l'Unité Mixte de Recherche 6625
Institut de recherche mathématique de Rennes

Perturbations singulières de problèmes elliptiques, analyse asymptotique et calcul scientifique

Habilitation soutenue le 21 juin 2010
Composition du jury :

Grégoire ALLAIRE,
Professeur à l'École Polytechnique (Palaiseau) / *rapporteur*
Éric BONNETIER,
Professeur à l'Université Joseph Fourier (Grenoble) / *rapporteur*
Michael VOGELIUS,
Professeur à Rutgers (Piscataway, USA) / *rapporteur*

François ALOUGES,
Professeur à l'École Polytechnique (Palaiseau) / *examineur*
Monique DAUGE,
Directrice de Recherches à l'IRMAR (Rennes) / *examinatrice*
Arnaud DEBUSSCHE,
Professeur à l'ENS Cachan - Bretagne (Bruz) / *examineur*
Michel PIERRE,
Professeur à l'ENS Cachan - Bretagne (Bruz) / *examineur*

Table des matières

Introduction	5
1 Analyse asymptotique de problèmes elliptiques	7
1.1 Contexte	7
1.2 Superposition multi-échelle et développements raccordés	8
1.3 Problèmes de couches minces	12
1.3.1 Motivations	12
1.3.2 Cas modèle : l'équation de Laplace	12
1.3.3 Flexion d'une plaque mince avec raidisseur	14
1.4 Interaction entre perturbations	18
1.5 Perspectives	20
2 Méthodes numériques pour la prise en compte de micro-défauts en mécanique	23
2.1 Contexte	23
2.2 Représentation asymptotique	23
2.3 Couplage avec un modèle à discontinuité forte	28
2.4 Conditions aux limites approchées pour les profils	29
2.5 Perspectives	31
3 Programmation pour le calcul scientifique	33
3.1 Contexte	33
3.2 La bibliothèque éléments finis MÉLINA	33
3.3 Calcul des profils pour la mécanique numérique	34
3.4 Utilisation des éléments finis de haut degré	36
3.4.1 Problèmes de singularités	36
3.4.2 Problèmes d'oscillations	37
3.4.3 Problèmes d'interface	38
3.5 Exploitation de résultats numériques	40
3.5.1 Réseau d'électrodes et matricage cellulaire	40
3.5.2 Partitions minimales et partitions nodales	41
3.6 Perspectives	42
Références bibliographiques	49

Introduction

Ce rapport fait la synthèse de mon activité de recherche en analyse appliquée et calcul scientifique. On retrouve une certaine homogénéité dans ces travaux, en particulier en ce qui concerne les outils : analyse asymptotique des problèmes elliptiques, méthodes d'éléments finis d'ordre élevé. Les applications, en revanche, sont le fait de rencontres scientifiques et présentent naturellement une plus grande diversité.

La première partie de ce mémoire concerne l'analyse asymptotique de certains problèmes de perturbation singulière pour les EDP elliptiques. Ce travail s'inscrit dans la continuité de mon travail de thèse sur les conditions aux limites approchées pour un problème de couche mince en domaine non régulier. Les équations considérées sont classiques (équation de Laplace, de Kirchhoff-Love ou de Navier), mais la difficulté réside dans la géométrie sur laquelle elles sont posées : couches minces, inclusions, perturbations du bord. La technique développée est *l'analyse multi-échelle*, rebaptisée *superposition multi-échelle* dans ce rapport pour ne pas laisser penser qu'elle est la seule à pouvoir décrire un phénomène présentant plusieurs échelles. Une des contributions a d'ailleurs consisté dans [DTV09] à comparer cette approche avec la méthode des développements asymptotiques raccordés, très populaire dans les applications. De nombreux résultats nouveaux ont pu être établis dans le cas des problèmes de remplacement d'une couche mince par une condition aux limites approchée, voir [Via05, CCDV06, RV08, RV10].

D'autre part, des problèmes d'inclusions ou de perforation au bord ont été envisagés avec ces techniques asymptotiques dans [DV05, BNDTV09]. Dans le cadre du projet ANR Jeunes Chercheurs MACADAM, les résultats ont été appliqués aux équations de l'élasticité linéaire. Il s'agit de prédire l'initiation d'une fissure dans un matériau présentant des inhomogénéités de surface, voir [DV07, BDVV08, BNBD⁺10]. Un des points-clés de ce travail concerne le calcul de *profils* définis dans des domaines non bornés. La recherche de conditions aux limites approchées pour résoudre numériquement de tels problèmes nous a amenés à considérer un problème de Ventcel sans condition de signe, nécessitant une analyse pseudo-différentielle, voir [BNDHV10b].

De nombreux calculs numériques ont été menés dans le cas modèle des équations de Laplace, et de l'élasticité linéaire (où la représentation asymptotique a été couplée avec un modèle à discontinuité forte pour la description de l'endommagement). Ces simulations, adossées à la bibliothèque de calculs éléments finis MÉLINA [Mar10], ont nécessité (et permis...) des développements nouveaux : éléments finis de haut degré [CDMV03], intégrands, etc. Grâce à ces nouvelles fonctionnalités, le code a été enrichi de nouvelles

applications : problèmes de partitions minimales [BNHV10], analyse de la supraconductivité dans des sections polygonales [BNDMV07], résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard [GMV10] ou encore optimisation de la forme d'un réseau d'électrodes pour le matricage cellulaire [PV10].

Analyse asymptotique de problèmes elliptiques

1.1 Contexte

Dans de nombreuses situations physiques, on est amené à considérer des problèmes où intervient un petit paramètre ε , souvent lié à la géométrie du matériau considéré. C'est le cas pour un objet conducteur recouvert d'une fine couche diélectrique, un assemblage par une pellicule de colle, un canal dont le fond présente des petites rugosités, un métal avec des aspérités à sa surface ou un matériau contenant des inhomogénéités, etc. Ces questions interviennent dans tous les champs d'application : propagation d'ondes, mécanique des structures, acoustique, thermique, mécanique des fluides. . .

La complexité des problèmes a conduit à de riches développements mathématiques sur ces sujets. De multiples techniques ont été introduites pour décrire le comportement asymptotique de la solution u_ε d'une équation aux dérivées partielles dépendant d'un petit paramètre ε . La finalité de l'étude consiste à obtenir un développement asymptotique de u_ε lorsque ε tend vers 0 (ou du moins les premiers termes). Parmi les techniques propres aux problèmes aux limites elliptiques, on peut en distinguer deux : la méthode des *développements asymptotiques raccordés*, et la *superposition multi-échelle*, détaillées au paragraphe 1.2. Si la première, popularisée par Van Dyke [Van75], est très largement répandue dans les applications, la seconde est souvent utilisée dans les travaux mathématiques car plus facile à justifier.

On se concentre ici sur certains problèmes de perturbations singulières provenant de la géométrie du domaine dans lequel est défini l'équation aux dérivées partielles. Le livre [MNP00] constitue une référence générale sur ce type de problèmes pour des perturbations locales (inclusions ou trous, congés de raccordement. . .) ou non locales, telles les couches minces. Les perturbations locales peuvent être traitées dans le cadre de la théorie du potentiel, voir [VV00, BHB06, ABC⁺08, AKLZ10] ou des développements multi-échelle, en particulier en présence de singularités [NO93, CD96, BMNP01]. Quant aux couches minces, elles ont fait l'objet d'une étude intensive en raison de leur importance dans les applications en acoustique et électromagnétisme – voir [EN93, BL96, ALG98, AHH00, HJ01, AKS06, CCDV06, JT06, BL08, Poi08, CH09] – ou en mécanique – voir [SP74,

LD91, LT92, GKL99, MS03, KMO04, AMM06, RV08, Rah08]. On peut citer aussi les problèmes de frontière rugueuse, qui relèvent de la même problématique cf. [APV98, JM01, ACG06, MV07, BFNW08, Mil09, BM10]. Mentionnons enfin les problèmes d’homogénéisation qui sont apparentés aux précédents même si des techniques de nature différente sont généralement employées, voir par exemple [CD99, DM93, All02].

Le chapitre qui suit expose quelques contributions de l’auteur et ses collaborateurs à l’étude asymptotique de perturbations géométriques pour des problèmes elliptiques. La première partie concernant les techniques de développement asymptotique dans un cas modèle est volontairement détaillée pour permettre de s’y appuyer dans la suite en vue de traiter des problèmes plus complexes.

On fait ici la synthèse des articles [Via05, CCDV06, RV08, DTV09, RV10] avec G. Caroz, M. Costabel, M. Dauge, L. Rahmani et S. Tordeux, qui font suite à mes travaux de thèse, et [DV05, DV07, BNDTV07] effectués en collaboration avec V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine et S. Tordeux dans le cadre du projet MACADAM.

1.2 Superposition multi-échelle et développements raccordés

Considérons un problème aux limites, dont la solution est notée u_ε , mettant en jeu deux échelles d’espace. L’échelle naturelle – en la variable \mathbf{x} – décrit le comportement *régulier* de la solution tandis que l’échelle rapide – en variable \mathbf{x}/ε – correspond à un comportement *singulier* de couche limite près de l’origine.

La technique des *développements asymptotiques raccordés* consiste à représenter u_ε de deux manières différentes, selon qu’on est proche ou loin de l’origine :

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \begin{cases} \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) u^k(\mathbf{x}) & \text{loin de l'origine,} \\ \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) U^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) & \text{près de l'origine,} \end{cases} \quad (1.1)$$

où les fonctions u^k et U^k ne dépendent pas de ε , et la famille $(\delta_k(\varepsilon))_k$ définit l’échelle du développement asymptotique (par exemple $\delta_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$ pour un développement en puissances entières). Aucun des deux développements (1.1) n’est valide dans tout le domaine ; ils doivent coïncider dans une zone intermédiaire au moyen de *conditions de raccord*, voir [Van75, II’92].

La technique de *superposition multi-échelle* vise à obtenir un développement global dans tout le domaine sous la forme

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \zeta(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) v^k(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x}) \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) V^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}), \quad (1.2)$$

où ζ et χ sont des fonctions de troncature régulières satisfaisant

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{loin de l'origine,} \\ 1 & \text{près de l'origine,} \end{cases} \quad \zeta(y) = \begin{cases} 1 & \text{loin de l'origine,} \\ 0 & \text{près de l'origine.} \end{cases}$$

L’inconvénient majeur de la technique de superposition réside dans la dépendance des termes v^k et V^k en les fonctions de troncature, alors que les termes u^k et U^k sont

intrinsèques au problème. En revanche, il est plus aisé de donner un sens précis à la formule (1.2) en raison de son caractère global.

Dans [DTV09], avec M. Dauge et S. Tordeux, nous avons construit les développements asymptotiques selon les deux techniques, et les avons comparés. Le problème modèle étudié est volontairement simple : $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ est la solution du problème de Laplace $-\Delta u_\varepsilon = f$ dans un ouvert bidimensionnel Ω_ε , polygone dont un des coins – supposé situé en l’origine – a été “rabotté” ou “arrondi” à l’échelle ε , cf. FIG. 1.1. La solution u_0 du problème limite présente des *singularités* en l’origine, dépendant de l’angle α du domaine Ω_0 en ce sommet ; suivant la théorie de la régularité des problèmes à coins [Kon67, Gri85, Dau88, NP94], elles sont données en coordonnées polaires par $s^{k\lambda}(\mathbf{x}) = r^{k\lambda} \sin(k\lambda\theta)$, où $\lambda = \pi/\alpha$:

$$u_0(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K b_k^0 s^{k\lambda}(\mathbf{x}) + o_{\mathbf{x} \rightarrow 0}(|\mathbf{x}|^K). \quad (1.3)$$

Les scalaires b_k^0 sont appelés *coefficients de singularité*. L’exposant de singularité λ fournit l’échelle du développement asymptotique, comme on va le voir ci-dessous.

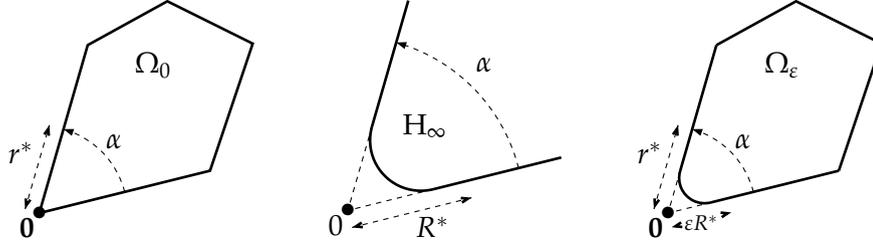


FIGURE 1.1 – Exemple de domaine perturbé $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cap \varepsilon H_\infty$.

Superposition multi-échelle

La méthode de superposition est constructive, et peut être assimilée à une *prédiction-correction* : partant de la solution limite $v^0 = u_0$, on forme le reste $r_0^\varepsilon = u_\varepsilon - v^0$ qui satisfait $-\Delta r_0^\varepsilon = 0$ dans Ω_ε mais présente une trace non-nulle au voisinage de l’origine. Précisément, en utilisant le développement (1.3) et l’homogénéité des fonctions singulières, on peut écrire pour ε petit

$$r_0^\varepsilon(\varepsilon \mathbf{X}) = -u_0(\varepsilon \mathbf{X}) \simeq -\varepsilon^\lambda b_1^0 s^\lambda(\mathbf{X}).$$

Pour corriger ce premier terme résiduel, on introduit un *profil*, défini dans le domaine limite en variable rapide $\mathbf{X} = \mathbf{x}/\varepsilon$:

$$H_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega_\varepsilon}{\varepsilon},$$

solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta V^\lambda = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ V^\lambda(\mathbf{X}) = -b_1^0 s^\lambda(\mathbf{X}) & \text{pour } X \in \partial H_\infty, \\ V^\lambda(\mathbf{X}) \rightarrow 0 & \text{lorsque } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.4)$$

Ainsi, on peut former un début de développement asymptotique sous la forme

$$u_0(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x})\varepsilon V^\lambda\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

où la fonction χ permet de localiser le profil au voisinage de l'origine afin de conserver la condition de Dirichlet homogène sur le reste du bord du domaine. Posant $r_1^\varepsilon = u_\varepsilon - u_0(\mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x})\varepsilon V^\lambda(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$, on vérifie aisément que

$$r_1^\varepsilon = \mathcal{O}_{\mathbf{x} \rightarrow 0}(|\mathbf{x}|^{2\lambda}),$$

si bien que la condition de Dirichlet est satisfaite à un ordre supérieur par rapport à r_0^ε . Bien sûr, la troncature induit une erreur dans l'équation de Laplace, qu'il faut corriger à son tour. On peut développer le profil V^λ lorsque \mathbf{X} tend vers l'infini :

$$V^\lambda(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^K B_k^1 \mathfrak{s}^{-k\lambda}(\mathbf{X}) + o_{|\mathbf{X}| \rightarrow \infty} |\mathbf{X}|^{-K}, \quad (1.5)$$

avec $B_k^1 \in \mathbb{R}$, voir [Néd01, Kon67] et en déduire

$$-\Delta r_1^\varepsilon \simeq -\varepsilon^{2\lambda} B_1^1 [\Delta, \chi] \mathfrak{s}^{-\lambda}.$$

Ici encore, un cran est gagné dans les puissances de ε . En itérant le processus, on construit le développement complet sous la forme

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^K \varepsilon^{k\lambda} v^{k\lambda}(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^K \varepsilon^{k\lambda} V^{k\lambda}(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + r_K^\varepsilon,$$

où le reste r_K^ε satisfait $\|r_K^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{K\lambda})$, cette dernière étant obtenue à l'aide d'estimations *a priori*¹. Notons que seule une fonction de troncature est ici nécessaire grâce à l'inclusion $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_0$. Dans le cas général, la partie du développement en variable lente est multipliée par $\zeta(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ pour en gommer le comportement local en l'origine.

Développements raccordés

L'échelle $(\varepsilon^{k\lambda})_k$ ayant été mise en évidence par la méthode précédente, on postule un *ansatz* de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^{k\lambda} u^{k\lambda}(\mathbf{x}) \quad \text{loin de l'origine,} \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{k\lambda} U^{k\lambda}(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \quad \text{près de l'origine.} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

En injectant ces expressions dans le problème satisfait par u_ε , et en utilisant des développements du type (1.3) et (1.5), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u^{k\lambda} = f \delta_k^0 \quad \text{dans } \Omega_0, \\ u^{k\lambda} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U^{k\lambda} = 0 \quad \text{dans } H_\infty, \\ U^{k\lambda} = 0 \quad \text{sur } \partial H_\infty. \end{array} \right.$$

On a bien sûr $u^0 = u_0$, solution du problème limite. Quant aux termes suivants, ils ne sauraient être variationnels sans être nuls... Il faut donc autoriser une explosion en l'origine pour $u^{k\lambda}$ et une croissance à l'infini pour $V^{k\lambda}$. En développant selon les fonctions

1. Insistons sur le fait que les développements asymptotiques présentés sont généralement des séries non-convergentes. La notion de convergence au sens des développements asymptotiques signifie que le reste d'ordre K converge vers 0 lorsque ε tend vers 0, ce d'autant plus rapidement que K est grand.

singulières (croissantes et décroissantes), on peut rechercher les termes sous la forme

$$\begin{cases} u^{k\lambda} &= \sum_{p \geq 1} \left[a_p^k \mathfrak{s}^{-p\lambda} + c_p^k \mathfrak{s}^{p\lambda} \right], \\ U^{k\lambda} &= \sum_{p \geq 1} \left[A_p^k \mathfrak{s}^{p\lambda} + C_p^k \mathfrak{s}^{-p\lambda} \right]. \end{cases}$$

Si l'on souhaite que les deux développements (1.6) coïncident dans la zone intermédiaire $|\mathbf{x}| \ll 1$ et $|\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}| \gg 1$, on obtient les conditions de raccord (en utilisant l'homogénéité des fonctions singulières)

$$\begin{cases} a_p^k &= C_p^{(k-p)} \quad (0 \text{ si } k < p), \\ A_p^k &= c_p^{(k-p)} \quad (0 \text{ si } k < p). \end{cases}$$

Le développement (1.6) peut-être justifié par une technique proche de la superposition multi-échelle. En effet, on peut construire une approximation globale dans Ω_ε via la formule

$$u_\varepsilon = \zeta\left(\frac{\mathbf{x}}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{k=0}^K \varepsilon^{k\lambda} u^{k\lambda}(\mathbf{x}) + \left(1 - \zeta\left(\frac{\mathbf{x}}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{k=0}^K \varepsilon^{k\lambda} U^{k\lambda}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \rho_K^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

où η_ε définit la région intermédiaire : $\eta_\varepsilon \rightarrow 0$ et $\eta_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow +\infty$. L'estimation du reste obtenue dans le cas le plus favorable ($\eta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$) s'écrit

$$\|\rho_K^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{K\lambda/2}).$$

Comparaison des deux techniques

On a déjà souligné la dépendance des termes $v^{k\lambda}$, $V^{k\lambda}$ du développement par superposition multi-échelle vis-à-vis des fonctions de troncature, comme le montre l'apparition de commutateurs $[\Delta, \chi]$ dans la construction. On a aussi vu que seule une technique de superposition permet de définir une approximation globale, et par là d'obtenir des estimations d'erreur. L'analyse rigoureuse dans le cas des développements raccordés apparaît pour la première fois dans [Tor04, JT06].

Chaque technique présente des spécificités, mais il est possible de relier les deux développements obtenus. Il est facile de vérifier que les termes coïncident localement (en raison de l'estimation optimale de l'erreur sur le reste r_K^ε) :

$$u^{k\lambda} = v^{k\lambda} \text{ loin de l'origine} \quad \text{et} \quad U^{k\lambda} = V^{k\lambda} \text{ près de l'origine.}$$

Plus précisément, ils diffèrent de la partie non-variationnelle des termes des développements raccordés :

$$\begin{cases} v^{k\lambda}(\mathbf{x}) &= u^{k\lambda}(\mathbf{x}) - (1 - \chi(\mathbf{x})) \sum_{p=1}^{k-1} a_p^k \mathfrak{s}^{-p\lambda}(\mathbf{x}), \\ V^{k\lambda}(y) &= U^{k\lambda}(y) - \chi(y) \sum_{p=1}^k A_p^k \mathfrak{s}^{p\lambda}(y). \end{cases}$$

Il existe toute une famille de développements situés entre la situation variationnelle des $v^{k\lambda}$, $V^{k\lambda}$ et le cas totalement non-variationnel donné par $u^{k\lambda}$, $U^{k\lambda}$.

1.3 Problèmes de couches minces

1.3.1 Motivations

Contrairement au problème modèle du “coin arrondi”, les problèmes de couche mince ne sont pas des perturbations locales de la géométrie. Elles ne sont pas pour autant nécessairement plus difficiles à traiter, notamment dans le cas d’un domaine régulier. Il s’agit d’effectuer un changement d’échelle pour se ramener à une couche d’épaisseur fixe, le paramètre ε apparaissant alors dans les équations (dont la complexité peut s’accroître notablement en raison des termes dus à la courbure).

La motivation principale pour obtenir un développement asymptotique dans le cas des couches minces est la recherche d’un modèle approché ne faisant plus intervenir la couche. Cette dernière est remplacée par une condition aux limites approchée (parfois appelée *condition d’impédance*) dont l’effet est le même à un ordre donné. Le problème approché est plus simple à résoudre numériquement car ne nécessite pas de maillage à l’échelle de la couche mince, voir par exemple [EN93, BL96, HJ01, CCDV06].

1.3.2 Cas modèle : l’équation de Laplace

De manière habituelle, le problème a d’abord été étudié dans le cadre de l’équation de Laplace. Il s’agit de trouver $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ satisfaisant

$$-\operatorname{div}(a(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x})) = f(x) \text{ dans } \Omega^\varepsilon,$$

où le domaine est défini par $\Omega^\varepsilon = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma \cup \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$, la conductivité $a(\mathbf{x})$ est constante sur chaque sous-domaine :

$$a(\mathbf{x}) = a_{\text{int}} \text{ dans } \Omega_{\text{int}}, \quad a(\mathbf{x}) = a_{\text{ext}} \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon,$$

et la donnée f est nulle dans $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$. La couche mince $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ est obtenue par dilatation de la frontière Γ dans la direction normale sortante, voir Fig. 1.2. Il s’agit d’un problème de

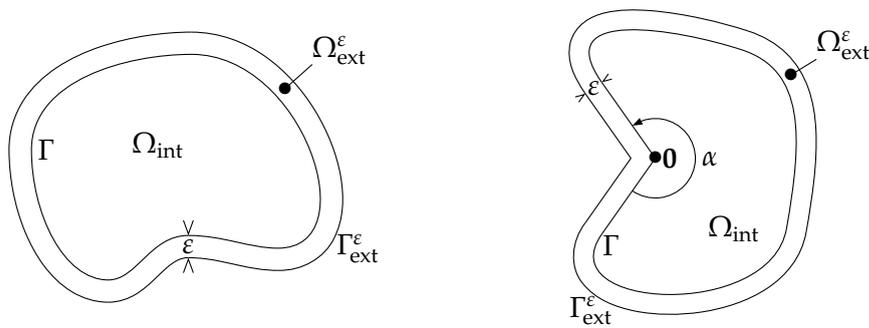


FIGURE 1.2 – Domaines avec couche mince (cas régulier et singulier).

transmission fortement coercif relevant de la théorie variationnelle, satisfaisant l’estimation *a priori* suivante, avec une constante C indépendante de ε :

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Cas d’un domaine régulier

À l’aide des coordonnées (s, y) du repère de Frénet (s est l’abscisse curviligne sur Γ), la couche mince $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ peut être représentée par le produit cartésien $\Gamma \times (0, \varepsilon)$. En posant $Y =$

y/ε , le laplacien se développe en puissances de ε : $\Delta_{\mathbf{x}} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k-2} L_{s,Y}^k$, où les opérateurs différentiels $L_{s,Y}^k$ ne dépendent pas de ε . En injectant l'*ansatz*

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k u^k(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k U^k(s, y/\varepsilon) & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \end{cases} \quad (1.7)$$

dans les équations obtenues, on obtient une famille de problèmes définissant u^k et U^k via une résolution alternée entre les domaines intérieur et extérieur (les opérateurs associés sont $\Delta_{\mathbf{x}}$ et $L_{s,Y}^0 = \partial_Y^2$, respectivement). À l'aide d'estimations *a priori* (indépendantes de ε), on montre des estimations optimales du reste du développement.

L'étude des premiers termes permet d'identifier (et de justifier) des conditions aux limites approchées rendant compte de l'effet de la couche mince à un ordre plus ou moins élevé. Les trois premiers problèmes approchés s'écrivent $-\operatorname{div}(a(\mathbf{x})\nabla v_\varepsilon^i(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$ dans Ω ($i = 0, 1, 2$), avec la condition suivante sur Γ : $v_\varepsilon^0 = 0$ (ordre 0), $v_\varepsilon^1 + \gamma \varepsilon \partial_{\mathbf{n}} v_\varepsilon^1 = 0$ (ordre 1), $(1 + \frac{\kappa(\mathbf{x})}{2} \varepsilon^2) v_\varepsilon^2 + \gamma \varepsilon \partial_{\mathbf{n}} v_\varepsilon^2 = 0$ (ordre 2). Le coefficient $\gamma = a_{\text{int}}/a_{\text{ext}}$ est le ratio des valeurs de la fonction $a(\mathbf{x})$ entre les deux sous-domaines, et $\kappa(\mathbf{x})$ la courbure au point $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Par comparaison du développement asymptotique de u_ε avec ceux des v_ε^i , on peut montrer les estimations suivantes en norme d'énergie

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega_{\text{int}})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{i+1}).$$

Cas d'un domaine à coin

Le cas où la frontière Γ n'est pas régulière est beaucoup plus délicat. Dans [CCDV06], on a considéré un domaine présentant une singularité conique d'ouverture α , cf. FIG. 1.2. Dans la suite, on suppose que le quotient π/α n'est pas rationnel, pour des raisons techniques (des termes supplémentaires en $\log \varepsilon$ peuvent apparaître dans le cas général). La dérivation d'un développement asymptotique comme dans le cas régulier n'est plus possible en raison des singularités de coin apparaissant dans les termes successifs. Une analyse de régularité permet de comprendre ce phénomène : le problème intérieur présente les singularités du problème de Dirichlet, correspondant aux exposants $\pi/\alpha\mathbb{Z}$, alors que le problème de transmission a ses singularités propres (pour lesquelles les exposants ne sont pas connus analytiquement). De ce fait, la résolution alternée entre les domaines intérieur et extérieur ne permet pas de capturer les singularités réelles du problème résolu par u_ε : le coin doit être vu *de l'intérieur et de l'extérieur*. Des situations similaires avaient été rencontrées pour d'autres problèmes, cf. [CD96, BMNP01].

On a montré qu'il était possible de construire un développement (en puissances non-entières de ε) à l'aide d'une correction au coin par des *profils* adaptés. Ces profils sont définis dans le domaine non-borné \mathbf{H}_∞ obtenu par *blow up* au voisinage du coin $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{H}_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega^\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Il s'agit d'un secteur angulaire d'ouverture α , avec couche d'épaisseur 1, voir FIG. 1.3.

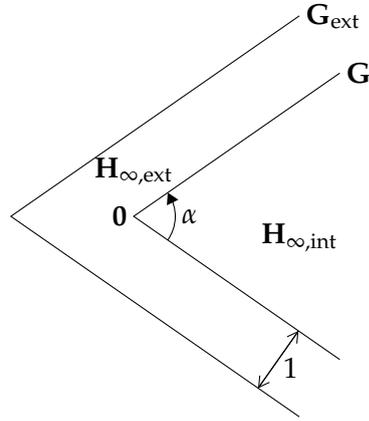


FIGURE 1.3 – Le domaine infini \mathbf{H}_∞ .

Les premiers termes du développement s'écrivent dans Ω_{int} :

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon^\lambda \chi(\mathbf{x}) W^\lambda\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \dots$$

où u_0 est la solution du problème limite (comme dans le cas régulier), $\lambda = \pi/\alpha$ le premier exposant de singularité, χ une fonction de troncature de localisation au coin, et W^λ est défini par

$$-\operatorname{div}\left(A(\mathbf{X})\nabla W^\lambda(\mathbf{X})\right) = 0 \text{ dans } \mathbf{H}_\infty,$$

avec la condition à l'infini $W^\lambda(\mathbf{X}) \sim R^\lambda \sin(\lambda\theta)$, en coordonnées polaires. La fonction A vaut a_{int} dans $\mathbf{H}_{\infty,int}$, a_{ext} dans $\mathbf{H}_{\infty,ext}$.

Insistons sur le fait que la construction des profils est nettement plus délicate ici que dans le cas du problème du "coin arrondi". Le domaine ne possède en effet pas la même homogénéité car il mêle un domaine conique avec des "bandes" cartésiennes. Cette différence – apparemment technique – soulève des questions non triviales pour l'obtention du développement des profils en l'infini car l'outil de la transformée de Mellin doit être adapté.

Le développement obtenu permet d'analyser la performance de la condition d'impédance d'ordre 1 dans le cas non-régulier. Dans [Via05], on a montré l'estimation suivante

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon^1\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_{int})} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\min(3,2\lambda)}\right),$$

qui fait apparaître une perte d'ordre par rapport au cas régulier pour des angles rentrants ($\alpha > \pi$). Ce résultat peut toutefois être considéré positivement, puisqu'il valide la convergence des conditions aux limites approchées pour des domaines non-réguliers (certes avec un taux moins élevé), situation dans laquelle elles sont utilisées fréquemment dans les applications.

La question de modifier la condition d'impédance pour retrouver une convergence en ε^2 est toujours ouverte.

1.3.3 Flexion d'une plaque mince avec raidisseur

Avec L. Rahmani, on a généralisé dans [RV08, RV10] ces résultats au cas d'une plaque en flexion munie de raidisseurs minces sur son bord. Le contexte géométrique est celui

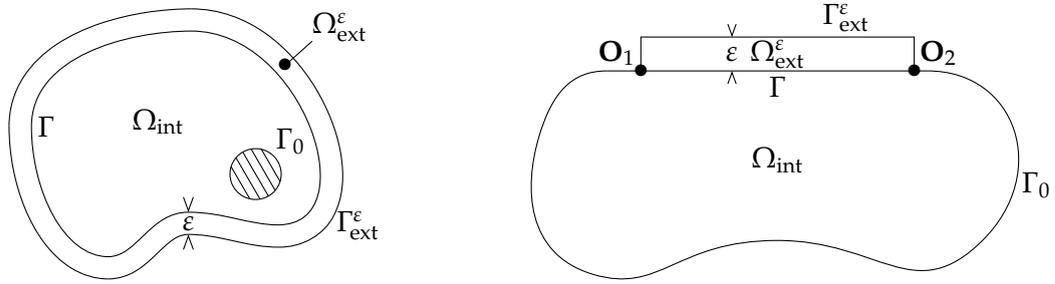


FIGURE 1.4 – The plate Ω_{int} stiffened by $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$.

de la figure 1.4 (cas régulier, à gauche) : le domaine Ω_{int} représente la plaque, et $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ le raidisseur d'épaisseur ε . On se place dans le cadre du modèle de Kirchhoff-Love qui décrit le déplacement en flexion de la plaque $u_\varepsilon \in H^2(\Omega^\varepsilon)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\text{int}} \Delta^2 u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ D_{\text{ext}} \Delta^2 u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ [M(u_\varepsilon)] = [T(u_\varepsilon)] = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ M(u_\varepsilon) = T(u_\varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ u_\varepsilon = \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

la condition d'encastrement sur Γ_0 est ajoutée pour éviter la prise en compte – technique – des déplacements rigides. Les opérateurs M et T sont dits *moment de flexion* et *force de cisaillement*, respectivement :

$$\begin{aligned} M &= D [\Delta + (1 - \nu) (2n_1 n_2 \partial_{12} - n_1^2 \partial_2^2 - n_2^2 \partial_1^2)], \\ T &= D [\partial_n \Delta + (1 - \nu) \partial_\tau ((n_1^2 - n_2^2) \partial_{12} + n_1 n_2 (\partial_2^2 - \partial_1^2))]. \end{aligned}$$

Le coefficient D , constant sur chaque sous-domaine, s'exprime en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν (caractéristiques du matériau composant chaque partie) sous la forme

$$D = \frac{2E}{3(1 - \nu^2)}.$$

Pour prendre en compte le fort différentiel entre les matériaux composant la plaque et le raidisseur, on considère le cas où

$$E_{\text{int}} = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad E_{\text{ext}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}),$$

le raidisseur est ainsi à la fois très mince et très raide. Le problème (1.8) est associé à une forme bilinéaire coercive sur $H^2(\Omega^\varepsilon)$. Ici encore, on a une estimation *a priori* uniforme en ε .

Cas d'un raidisseur entourant un domaine régulier

Dans [RV08], on considère la situation de gauche sur la figure 1.4 : le raidisseur est présent sur la totalité du bord Γ de Ω_{int} , supposé régulier. On a généralisé les techniques utilisées pour le laplacien au problème de flexion (1.8). La technicité est bien plus grande, mais

on peut encore construire un développement asymptotique complet de la forme (1.7). Il permet d'identifier et de valider, de la même manière que dans [Via05], des conditions aux limites approchées. Le première d'entre-elles s'écrit

$$M(v_\varepsilon) + Q_0(v_\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad T(v_\varepsilon) + P_0(v_\varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

où les opérateurs P_0 et Q_0 sont donnés par

$$\begin{aligned} Q_0 &= -D_{\text{ext}} \left[2(1 - \nu_{\text{ext}}) \partial_s (\partial_s \partial_{\mathbf{n}} - c(s) \partial_s) - (1 - \nu_{\text{ext}}^2) c(s) (\partial_s^2 + c(s) \partial_{\mathbf{n}}) \right], \\ P_0 &= -D_{\text{ext}} \left[(1 - \nu_{\text{ext}}^2) \partial_s^2 (\partial_s^2 + c(s) \partial_{\mathbf{n}}) + 2(1 - \nu_{\text{ext}}) \partial_s [c(s) (\partial_s \partial_{\mathbf{n}} - c(s) \partial_s)] \right], \end{aligned}$$

la variable s désignant l'abscisse curviligne sur Γ et $\partial_{\mathbf{n}}$ la dérivée normale extérieure. Le problème ainsi obtenu pour v_ε est associé à une forme bilinéaire coercive sur $H^2(\Omega_{\text{int}})$. Il est donc bien posé, et on a l'estimation suivante :

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_{\text{int}})} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Cas d'un raidisseur sur une portion du bord

Dans [RV10], on s'intéresse au cas où le raidisseur n'est présent que sur une partie du bord Γ , situation qui s'apparente au cas irrégulier de la figure 1.2 (l'angle à prendre en compte est alors $\alpha = \pi$). Le comportement singulier du problème limite $\varepsilon = 0$ est dû au changement de conditions au bord aux points de raccord \mathbf{O}_1 et \mathbf{O}_2 , cf. FIG. 1.4. On se restreint au cas où le module d'Young est constant de l'ordre $\mathcal{O}(1)$ dans chaque sous-domaine (voir § 1.5 pour le cas – plus réaliste – où $E_{\text{ext}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$). Par ailleurs, pour simplifier les calculs, on suppose que le raidisseur est situé sur une portion plane du bord.

En raison des singularités du problème limite, une correction de type *profil* doit ici encore être apportée pour construire le développement asymptotique. Le domaine modèle dans lequel sont définis les profils est un demi-plan muni d'une demi-bande infinie d'épaisseur 1, voir FIG. 1.5. La construction de ces profils est plus délicate pour cet opé-

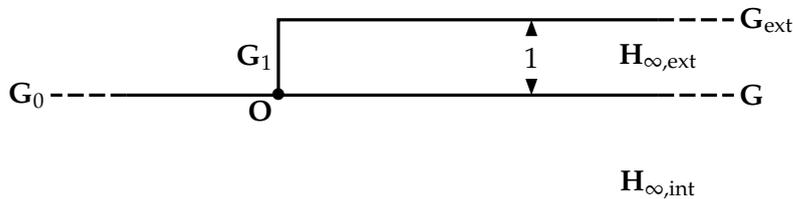


FIGURE 1.5 – Le domaine \mathbf{H}_∞ dans le cas d'un raidisseur partiel.

rateur que pour le laplacien. L'ensemble des exposants de singularité du problème limite est donné par – voir [Kon67, BR80, Gri85, Dau88, Nic93]

$$\mathfrak{S} = \left\{ \frac{1}{2} + k \pm i\eta_0 ; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

où η_0 est défini par

$$\eta_0 = \frac{1}{\pi} \log \left[\frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)} + \sqrt{\left(\frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)} \right)^2 - 1} \right].$$

Pour un exposant de singularité $\lambda \in \mathfrak{S}$ donné, on note \mathfrak{s}^λ la fonction singulière associée. Le profil V^λ résout alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\text{int}} \Delta^2 V^\lambda = f \quad \text{dans } \mathbf{H}_{\infty, \text{int}}, \\ D_{\text{ext}} \Delta^2 V^\lambda = 0 \quad \text{dans } \mathbf{H}_{\infty, \text{ext}}, \\ [M(V^\lambda)] = [T(V^\lambda)] = 0 \quad \text{sur } \mathbf{G}, \\ M(V^\lambda) = T(V^\lambda) = 0 \quad \text{sur } \mathbf{G}_{\text{ext}}, \\ V^\lambda = \partial_{\mathbf{n}} V^\lambda = 0 \quad \text{sur } \mathbf{G}_0 \cup \mathbf{G}_1, \\ V^\lambda \sim \mathfrak{s}^\lambda \quad \text{à l'infini.} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

On peut montrer que ce problème est bien posé dans l'espace à poids

$$\mathfrak{W} = \left\{ V ; \frac{V}{\langle \mathbf{x} \rangle^2} \in L^2(\mathbf{H}_\infty), \frac{\nabla V}{\langle \mathbf{x} \rangle} \in L^2(\mathbf{H}_\infty), \partial^\alpha V \in L^2(\mathbf{H}_\infty) \text{ pour } |\alpha| = 2, \right. \\ \left. \text{et } V = 0 ; \partial_\nu V = 0 \text{ sur } \mathbf{G}_+ \cup \mathbf{G}_- \right\}.$$

À l'aide d'une transformation de Mellin (polaire dans $\mathbf{H}_{\infty, \text{int}}$, cartésienne dans $\mathbf{H}_{\infty, \text{ext}}$), on peut obtenir le développement suivant pour V^λ (écrit ici dans le domaine intérieur) :

$$V^\lambda = \mathfrak{s}^\lambda + \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{S} \\ -P < \text{Re } \mu < \text{Re } \lambda}} V^{\lambda, \mu} + \mathcal{O}(R^{-P}), \quad \text{lorsque } R \rightarrow \infty,$$

où $V^{\lambda, \mu}$ sont donnés en coordonnées polaires par $V^{\lambda, \mu}(r, \theta) = r^\mu \sum_{\ell, \text{finie}} \phi_\ell(\theta) \log^\ell r$ avec des fonctions ϕ_ℓ régulières (tous les exposants de \mathfrak{S} n'apparaissent en fait pas dans la somme).

Le développement asymptotique de la solution u_ε du problème (1.8) prend alors la forme suivante : pour tout entier K (fixant la précision-cible),

$$u_{\varepsilon, \text{int}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^K \varepsilon^k u_{\text{int}}^{k, N-k}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^2 \chi(r_i) \sum_{k=0}^K \varepsilon^k \left(\sum_{\lambda \in \mathfrak{S}(N-k)} c_{k, \lambda} [\log \varepsilon] \varepsilon^\lambda V_{\text{int}}^\lambda \left(\frac{r_i}{\varepsilon}, \theta_i \right) \right) \\ + r_{\varepsilon, \text{int}}^K(\mathbf{x}),$$

$$u_{\varepsilon, \text{ext}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^K \varepsilon^k U_{\text{ext}}^{k, N-k} \left(x, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \sum_{i=1}^2 \chi(r_i) \sum_{k=0}^K \varepsilon^k \left(\sum_{\lambda \in \mathfrak{S}(N-k)} c_{k, \lambda} [\log \varepsilon] \varepsilon^\lambda V_{\text{ext}}^\lambda \left(\frac{r_i}{\varepsilon}, \theta_i \right) \right) \\ + r_{\varepsilon, \text{ext}}^K(\mathbf{x}),$$

où $\mathbf{x} = (x, y)$ et (r_i, θ_i) sont les coordonnées polaires centrées en \mathbf{O}_i . Les termes $u_{\text{int}}^{k, N-k}$ et $U_{\text{ext}}^{k, N-k}$ sont réguliers jusqu'aux bord, plats au voisinage des points \mathbf{O}_i comme r_i^{N-k} . Les scalaires $c_{k, \lambda} [\log \varepsilon]$ présentent une dépendance polynomiale en ε . Enfin, on a les estimations suivantes (optimales) pour les restes d'ordre K :

$$\|r_{\varepsilon, \text{int}}^K\|_{\mathbf{H}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^K \log^K \varepsilon).$$

1.4 Interaction entre perturbations

Considérons le problème simple suivant : soient Ω_0 et ω deux domaines bornés contenant l'origine. Pour $\varepsilon > 0$ petit, on pose

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \varepsilon\bar{\omega}.$$

Le domaine Ω_ε obtenu est une perturbation du domaine initial Ω_0 par une petite inclusion de taille ε et de forme ω , cf. FIG. 1.6 (gauche).

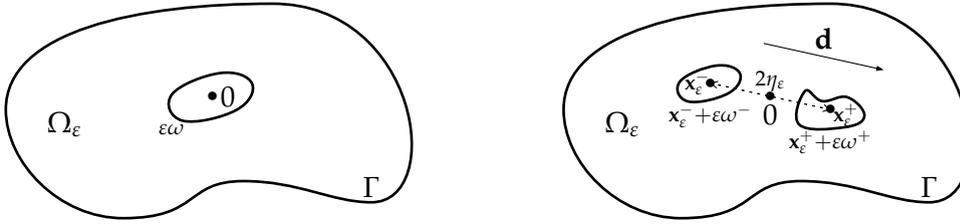


FIGURE 1.6 – Petites inclusions.

On considère le problème modèle : trouver $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega_0, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon\partial\omega. \end{cases} \quad (1.10)$$

Le problème est très similaire à celui présenté au paragraphe 1.2, le domaine “explosé” étant ici le domaine extérieur $\mathbf{H}_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$.

Dans [DV05], on a décrit l’influence d’une telle perturbation au bord, i.e. l’origine $\mathbf{0}$ est ici supposée située au bord du domaine Ω_0 , sur l’énergie de Dirichlet

$$j(\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Lorsque le bord du domaine est plan au voisinage de l’inclusion, un développement asymptotique complet peut être construit. Les profils mis en jeu sont définis dans le demi plan perturbé à l’échelle 1 : $\mathbf{H}_\infty = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{\omega}$. On montre alors la formule asymptotique

$$j(\varepsilon) = j(0) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_{\mathbf{H}_\infty} |\nabla u_0(\mathbf{0})|^2 + o(\varepsilon^2), \quad (1.11)$$

où le scalaire $\mathcal{A}_{\mathbf{H}_\infty}$ est une quantité géométrique ne dépendant que de la forme du domaine modèle ω .

Le cas d’un bord courbe est plus délicat puisque le domaine Ω_0 n’est alors plus localement stable par l’homothétie $\mathbf{X} = \mathbf{x}/\varepsilon$. Dans [DV07], on a validé un développement asymptotique à l’ordre 2 qui permet de justifier encore la formule (1.11).

Ces développements sont fréquemment utilisés dans les calculs numériques pour l’optimisation de forme, via la méthode dite *optimisation topologique*, voir [SŽ99, LS00]. Il s’agit d’évaluer la pertinence d’effectuer une inclusion en un point du domaine dans le but de faire décroître une certaine quantité. Une formule asymptotique du type (1.11)

permet de répondre à cette question². Dans la pratique, le calcul est effectué pour tous les points de Ω_0 situés sur une grille, et un trou est percé en chacun de ceux où la formule asymptotique prédit que c'est favorable. Toutefois, on peut s'interroger sur le fait que les contributions des différentes perforations ont été traitées individuellement. Lorsque deux inclusions sont proches, un couplage peut avoir lieu, et avoir une influence sur l'asymptotique. Cette remarque, ainsi que d'autres motivations issues des applications en mécanique cf. §2, nous ont conduits à étudier les interactions entre inclusions proches.

Il est aisé d'obtenir quelques premiers résultats en exploitant l'analyse précédente du cas d'une seule inclusion. Considérons deux inclusions $\varepsilon\omega^+$, $\varepsilon\omega^-$ distantes de $2\eta_\varepsilon$ (centrées en \mathbf{x}_ε^- et \mathbf{x}_ε^+ , respectivement), cf. FIG. 1.6 (droite).

Cas d'inclusions éloignées

Si $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$, on peut justifier qu'un développement asymptotique à l'ordre 2 est fourni par la superposition des contributions individuelles des deux inclusions :

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \left[\chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon^-) V^-\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon^-}{\varepsilon}\right) + \chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon^+) V^+\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon^+}{\varepsilon}\right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (1.12)$$

où la fonction χ est une troncature qui vaut 1 près de $\mathbf{0}$ et les profils V^\pm sont définis par

$$\begin{cases} -\Delta V^\pm = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}^\pm, \\ \partial_{\mathbf{n}} V^\pm = -\nabla u_0(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\omega^\pm, \\ V^\pm \rightarrow 0 & \text{à l'infini.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Cas d'inclusions aussi proches que petites

Si $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$, on peut considérer les deux inclusions comme formant un seul motif et raisonner comme s'il n'y avait qu'une seule inclusion. Le développement (1.11) n'est plus valable, mais on doit écrire

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \chi(\mathbf{x}) W\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (1.14)$$

où W résout un problème similaire à (1.13) dans le plan privé des deux inclusions à l'échelle 1.

Cas d'inclusions modérément proches

Dans [BNDTV09], on s'est intéressé au cas intermédiaire où les deux inclusions sont distantes de $2\eta_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$.

On a montré qu'un développement asymptotique complet pouvait être construit en puissances entières de ε et ε^α , de la forme (le développement est ici écrit sans fonction de

2. Dans le cas de l'énergie de Dirichlet, la formule (1.11) laisse penser que la réponse est la même quelle que soit la position du trou, i.e. de l'origine $\mathbf{0}$. En fait, il faut garder à l'esprit que les problèmes d'optimisation de forme comportent généralement des contraintes, par exemple de volume et qu'il faut donc prendre en compte la perte de volume entre Ω_0 et Ω_ε .

troncature, les traces sur le bord $\partial\Omega_0$ étant relevées par les termes $v_{p+\alpha q}$) :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] \\ &\quad + \varepsilon \left[\varepsilon^\alpha \left[V_\alpha^- \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_\alpha^+ \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + \varepsilon \left[V_1^- \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_1^+ \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] \right] \\ &\quad + \sum_{(p,q) \in K_n} \varepsilon^{p+\alpha q} v_{p+\alpha q}(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{(p,q) \in K_n} \varepsilon^{p+\alpha q} \left[V_{p+\alpha q}^- \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_{p+\alpha q}^+ \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] r_\varepsilon^n(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

avec

$$K_n = \left\{ (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p \geq 0, q \geq -\frac{3}{2}p + 2, q \geq -p \text{ et } p + \alpha q \leq n \right\}.$$

On a l'estimation suivante du reste :

$$\|r_\varepsilon^n\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^n).$$

Les termes du développement correspondent aux contributions suivantes :

- ◇ *profils en variable rapide* $V_{p+\alpha q}^\pm$: ils prennent en compte le développement de Taylor de u_0 en $\mathbf{0}$, ainsi que leur interaction mutuelle. V^\pm relève la trace de V^\mp sur le bord de l'autre inclusion $x_\varepsilon^\pm + \varepsilon\partial\omega^\pm$,
- ◇ *correcteurs en variable lente* $v_{p+\alpha q}$: ils relèvent la trace des profils sur le bord extérieur $\partial\Omega_0$.

En particulier, on remarque que le début du développement coïncide avec (1.12), mais le reste est détérioré. En effet, le premier reste r_ε^1 est d'ordre $\varepsilon^{\min(1+\alpha, 3-2\alpha)} \gg \varepsilon^2$. On peut distinguer deux régimes :

- ◇ pour $\alpha < 2/3$, les inclusions sont peu proches l'une de l'autre. Le terme principal du reste r_ε^1 provient du développement de Taylor de u_0 en l'origine $\mathbf{0}$,
- ◇ pour $2/3 < \alpha < 1$, les inclusions sont plus proches. Le reste est principalement dû à l'interaction des profils V_0^- et V_0^+ .

On a aussi traité le cas où l'une des deux inclusions est proche du bord du domaine, problème similaire à ceux étudiés dans [BV00, CV03, BHB06, AKLZ10]. Une extension aux équations de l'élasticité linéaire est présentée dans la partie suivante, donnant lieu à des calculs numériques en mécanique de la rupture.

1.5 Perspectives

De nombreuses pistes restent à explorer. Dans le cadre de l'interaction entre inclusions, le cas de deux inclusions très proches, i.e. de taille ε et distantes de ε^α avec $\alpha > 1$ est en cours. Trois domaines limites sont à considérer :

- ◇ le domaine sans inclusion :

$$\Omega_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon,$$

- ◇ le domaine "explosé" à l'échelle ε , consistant en les deux inclusions à l'échelle 1, tangentes l'une à l'autre :

$$\mathbf{H}_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega_\varepsilon}{\varepsilon},$$

- ◇ le domaine “explosé” à l’échelle ε^α , qui est une bande d’épaisseur 1 (les droites la définissant correspondant aux plans tangents des inclusions) :

$$\mathbf{B}_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega_\varepsilon}{\varepsilon^\alpha},$$

Par ailleurs, on peut poursuivre l’étude de l’asymptotique du problème (1.8) dans le cas non-régulier avec un module d’Young en ε^{-1} dans le raidisseur. Les problèmes définissant les profils dépendent alors eux-mêmes du paramètre, et l’on doit gérer un double développement ($\varepsilon \rightarrow 0$ et $\mathbf{X} \rightarrow +\infty$). La question de l’efficacité des conditions aux limites approchées doit aussi être quantifiée dans ce cas, comme il a été fait pour le laplacien.

En outre, même dans le cas de l’équation de Laplace, il serait particulièrement utile pour les applications de déterminer une modification des conditions aux limites approchées au voisinage d’un point singulier, afin de retrouver un ordre de convergence plus élevé. Cette question est difficile et pourrait être envisagée d’un point de vue numérique, en lien avec les développements à l’infini des profils.

Méthodes numériques pour la prise en compte de micro-défauts en mécanique

2.1 Contexte

Ce travail s'inscrit dans le cadre du projet ANR Jeunes Chercheurs MACADAM et plus particulièrement dans une collaboration avec D. Brancherie, mécanicienne à l'UTC. Il concerne la mécanique de la rupture, domaine particulièrement actif du point de vue numérique. De nombreuses méthodes pour décrire l'initiation et la propagation de fissures ont été développées, voir par exemple [WI90, Oli95, DBDI05, CLP⁺07, KMZ08, BFM08, CFM09]. La très utilisée méthode XFEM consiste en une méthode d'éléments finis où l'espace d'approximation est enrichi de fonctions indicatrices pour traiter les discontinuités dues à la fissuration, et de fonctions singulières en front de fissure.

Notre objectif est d'étudier le comportement à rupture des structures comportant des petits défauts de surface. Ces perturbations ont un effet important sur l'apparition des zones de fissuration. Afin de ne pas mailler la géométrie réelle – qui en nécessiterait une description fine – on souhaite utiliser un modèle asymptotique (voir § 2.2) dont l'approximation peut être calculée sur un maillage assez grossier. L'information obtenue est alors couplée à un modèle d'endommagement (cf. § 2.3). Au paragraphe 2.4, on s'intéresse plus particulièrement à l'approximation des profils apparaissant dans la représentation asymptotique.

Ce chapitre fait la synthèse des articles [DV07, BNDTV09, BNDHV10b] et [BDVV08, BNBD⁺10], en collaboration avec V. Bonnaillie-Noël, D. Brancherie, M. Dambrine, F. Hérau, S. Tordeux et P. Villon.

2.2 Représentation asymptotique

On considère un matériau soumis à des contraintes mécaniques, et présentant des aspérités, cavités ou inhomogénéités de surface. Lorsque les sollicitations augmentent, on souhaite déterminer où vont avoir lieu les fissurations, ainsi que leur évolution. La

géométrie comporte deux échelles et, comme on l'a déjà souligné, un calcul numérique direct requiert un raffinement de maillage important au voisinage des défauts, qui peut alourdir fortement la durée de simulation. On préfère recourir à un modèle simplifié faisant intervenir le matériau sans défaut.

Dans [DV07, BDVV08], on a étendu les résultats asymptotiques présentés dans le paragraphe 1.4 aux équations de l'élasticité linéaire. Précisément, on considère les équations de Navier dans un domaine borné Ω_ε présentant un défaut en son bord :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u}_\varepsilon - (\lambda + \mu)\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f} \text{ sur } \Omega_\varepsilon, \\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}^D \text{ sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ici encore, le domaine Ω_ε est obtenu à partir du domaine limite Ω_0 à l'aide d'un motif auto-similaire centré en $\mathbf{0}$, donné par le domaine semi-infini $\mathbf{H}_\infty : \Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \varepsilon\mathbf{H}_\infty$, cf. Fig. 2.1. Pour des raisons techniques, on suppose que le bord de Ω_0 coïncide avec un

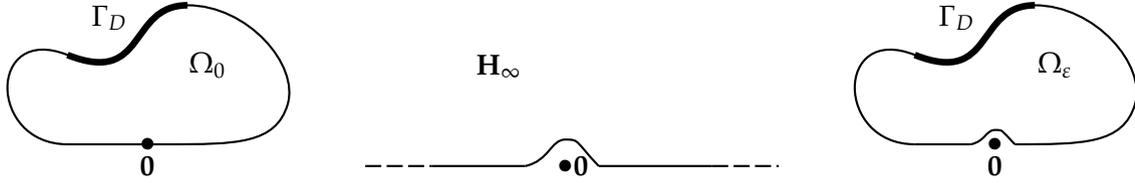


FIGURE 2.1 – Les domaines Ω_0 , \mathbf{H}_∞ et Ω_ε .

segment de droite au voisinage du point $\mathbf{0}$, et que les chargements \mathbf{f} et \mathbf{g} s'annulent au voisinage de ce point. Au premier ordre, \mathbf{u}_ε s'écrit

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \varepsilon \left[\alpha_1 \mathbf{V}_1 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \alpha_2 \mathbf{V}_2 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right], \quad (2.2)$$

où \mathbf{u}_0 est la solution sur le domaine non perturbé Ω_0 , et les réels α_1, α_2 sont donnés par

$$\alpha_1 = \sigma_{11}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{0}) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \sigma_{12}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{0}). \quad (2.3)$$

Les *profils* \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 sont solutions de problèmes de Navier sans chargement distribué dans \mathbf{H}_∞ avec des conditions de Neumann (dans le problème suivant, $\ell = 1$ ou 2) :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{V}_\ell - (\lambda + \mu)\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}_\ell = \mathbf{0} \text{ sur } \mathbf{H}_\infty, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_\ell) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{G}_\ell \text{ sur } \partial\mathbf{H}_\infty, \\ \mathbf{V}_\ell \rightarrow \mathbf{0} \text{ en l'infini.} \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{n}_1, 0)$ et $\mathbf{G}_2 = (0, \mathbf{n}_1)$, où \mathbf{n}_1 est la première composante de la normale extérieure à \mathbf{H}_∞ .

La méthode numérique proposée repose sur la représentation (2.2). Le terme limite \mathbf{u}_0 est calculé sur le domaine Ω_0 (qui peut être maillé relativement grossièrement). Bien sûr on doit encore résoudre les problèmes (2.4) pour déterminer les profils \mathbf{V}_ℓ . Il faut veiller à ce que ce calcul ne soit pas trop coûteux, sous peine de perdre tout le bénéfice de la simplification du modèle. Si, dans le cas de l'équation de Laplace en dimension 2, des

méthodes *ad hoc* peuvent être employées cf. [BNDTV09], ce n'est pas le cas pour les équations de Navier. Notons aussi que les solutions de (2.4) ne sont pas connues explicitement même dans le cas où l'inclusion est semi-circulaire.

Pour résoudre (2.4), on tronque le domaine \mathbf{H}_∞ au rayon $R > 0$ en posant

$$\mathbf{H}_\infty^R = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H}_\infty ; |\mathbf{x}| < R\}.$$

Nous avons pour l'instant utilisé la méthode la plus naïve, consistant à imposer une condition de Dirichlet homogène sur la frontière artificielle $\Gamma_R = \partial\mathbf{H}_\infty^R \setminus \partial\mathbf{H}_\infty$. Cette condition peut être considérée comme une condition aux limites approchée d'ordre 0, voir § 2.4 pour une discussion autour de conditions d'ordre plus élevé. On pourrait envisager d'autres approches, vu la décroissance des profils en l'infini, comme le couplage avec une méthode de représentation intégrale, voir par exemple [LVLH92].

La formule (2.2) fournit une approximation à l'ordre ε^2 du champ de déplacement à partir de celui dans le domaine non perturbé et des profils, qui sont intrinsèques au motif de perturbation. Dans le cas de plusieurs inclusions, on peut étendre les résultats obtenus dans [BNDTV09] pour l'équation de Laplace au cas des équations de Navier : si les inclusions sont relativement proches les unes des autres – i.e. à distance ε^α avec $\alpha < 1$ – il suffit de superposer leurs contributions respectives (l'erreur commise est certes détériorée, mais reste négligeable vis-à-vis de ε).

Afin de valider la stratégie numérique, on considère le cas-test de la figure 2.2, où le matériau est sollicité en traction selon l'axe horizontal. Les deux défauts en $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ sont de forme semi-circulaire, de rayons respectifs de 2 mm et 1 mm ; la distance $\mathbf{0}_1\mathbf{0}_2$ vaut 30 mm. Notons que les profils sont calculés une seule fois pour les deux inclusions, car

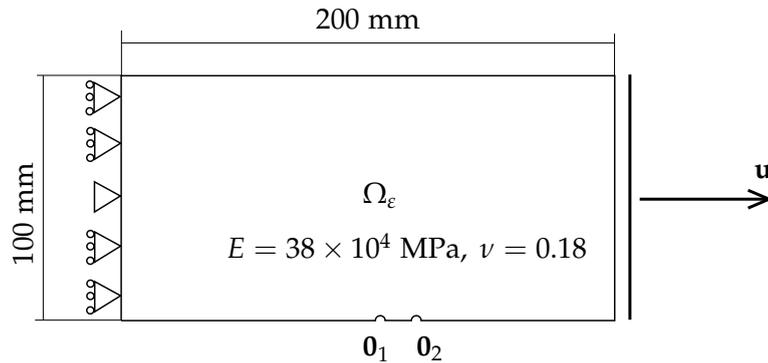


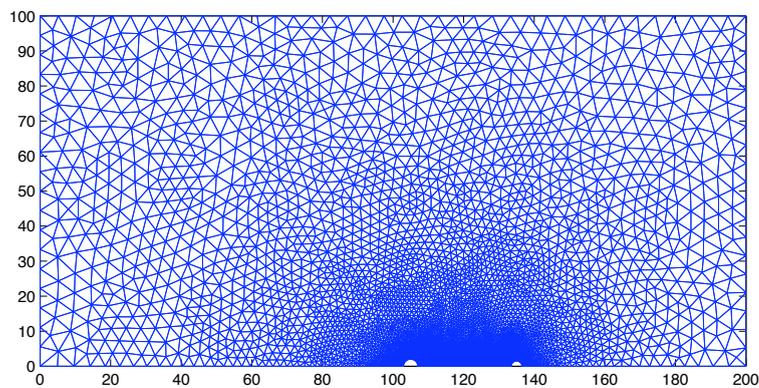
FIGURE 2.2 – Définition du problème test.

elles partagent le même motif \mathbf{H}_∞ . Il suffit donc de superposer les contributions selon la formule (2.2).

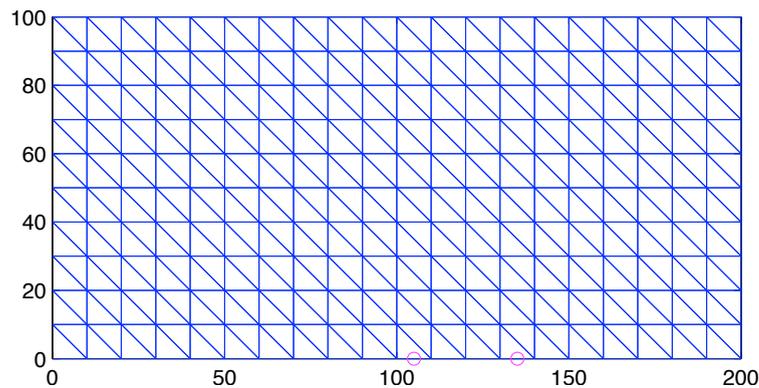
Le calcul des profils a été effectué avec la bibliothèque de calculs éléments finis MÉ-LINA [Mar10] (voir chapitre suivant pour plus de détails). L'approximation du déplacement \mathbf{u}_ε a utilisé un code de calcul développé par D. Brancherie. Si la formule de superposition (2.2) est commode du point de vue mathématique, il est apparu qu'il était plus simple techniquement de reconstruire l'approximation de \mathbf{u}_ε un peu différemment. On a procédé à un enrichissement cinématique de la base éléments finis par les profils, la perturbation étant prise en compte par des formules de quadrature adaptées localement.

Afin d'assurer la stabilité du schéma, on doit relier les degrés de liberté additionnels par une stratégie "maître-esclave". Notons que ce calcul ne nécessite pas l'évaluation des contraintes limites α_ℓ , voir formules (2.3).

La figure 2.3 montre deux maillages : le premier, fin, discrétise le domaine perturbé Ω_ε et est utilisé pour calculer la solution de référence \mathbf{u}_ε à des fins de comparaison. Le second maillage Ω_0 assez grossièrement et permet de mettre en œuvre la méthode numérique basée sur la représentation asymptotique (2.2). Les solutions sont comparées sur la figure 2.4 : l'erreur relative (calculée à l'aide de la solution de référence \mathbf{u}_ε) est de l'ordre de 0.25%.

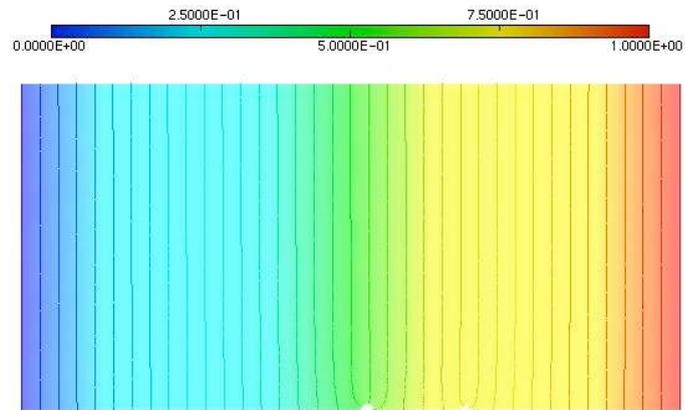


(a) maillage fin

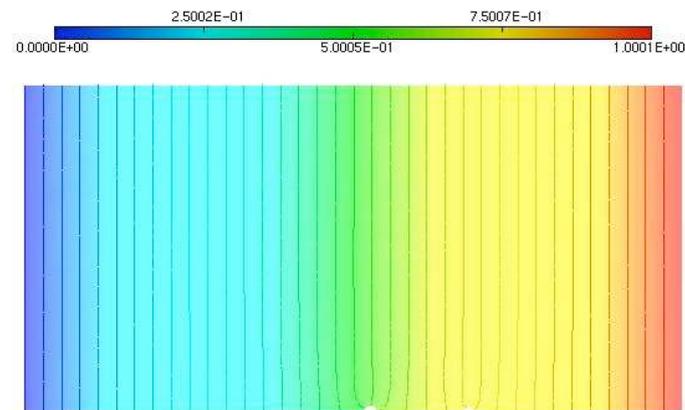


(b) maillage grossier

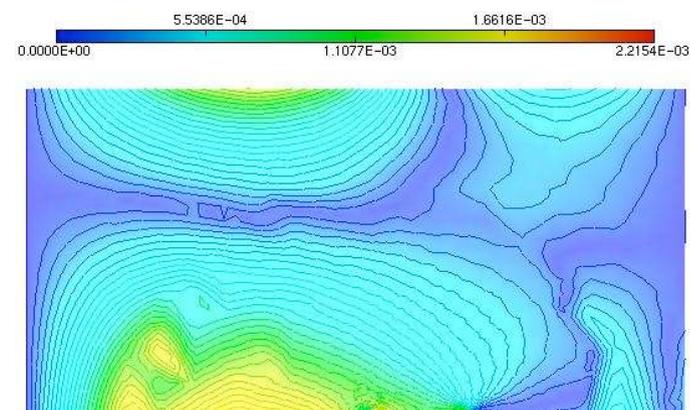
FIGURE 2.3 – Maillages utilisés



(a) Calcul de référence sur maillage fin



(b) Calcul avec enrichissement



(c) Carte de l'erreur relative

FIGURE 2.4 – Déplacements u_x obtenus : (a) par calcul standard sur un maillage fin, et (b) avec enrichissement. Le graphe (c) présente la carte de l'erreur relative.

2.3 Couplage avec un modèle à discontinuité forte

La représentation simplifiée (2.2) permet d'obtenir une approximation à moindre coût de la solution \mathbf{u}_ε du problème (2.1). Ce calcul est utilisé pour décrire les zones de localisation de contraintes à l'aide d'un *modèle à discontinuité forte* (Strong Discontinuity Approach, SDA), voir [SOA93, Oli95, DBDI05]. Cette méthode ne vise pas à représenter la géométrie réelle des fissures, mais indique, pour chaque élément du maillage que rencontre la fissure, une direction de fracture (rien n'assure la continuité de la ligne globale). La description est moins fine qu'avec d'autres types de méthodes, mais présente l'avantage d'être peu sensible au maillage.

Comme dans les méthodes XFEM, la base nodale des éléments finis est enrichie de fonctions de Heavyside pour prendre en compte les discontinuités de fissures. De ce fait, l'espace d'approximation ne coïncide pas avec celui utilisé pour le calcul de \mathbf{u}_ε , où l'enrichissement utilisait les profils pré-calculés. On a donc adopté une stratégie de transfert de champ entre les deux discrétisations, basée sur un critère énergétique.

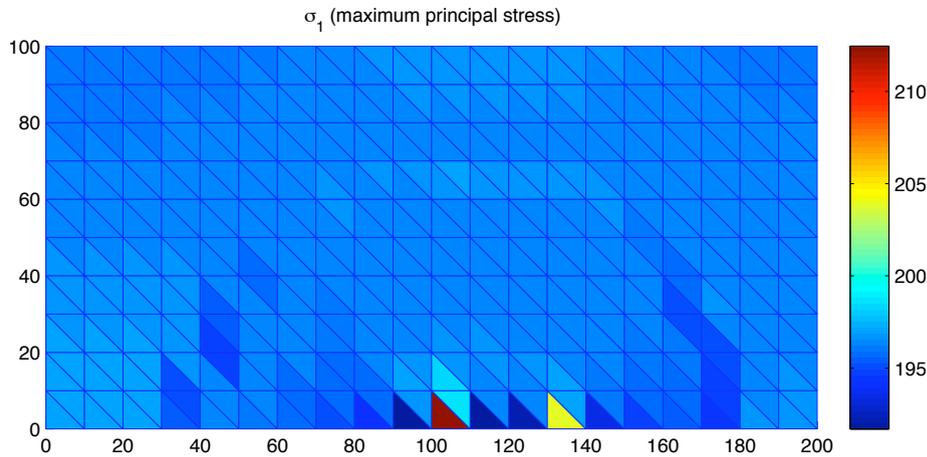


FIGURE 2.5 – Contraintes principales maximales reconstruites.

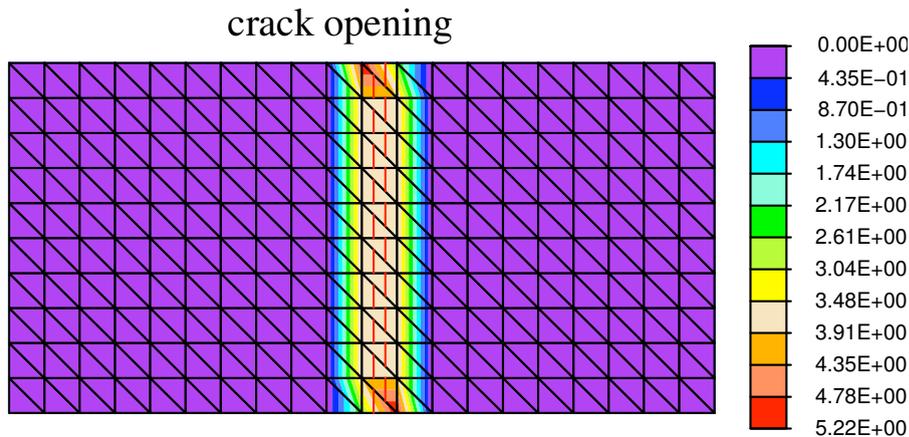


FIGURE 2.6 – Discontinuités introduites et ouverture de fissure.

Les figures 2.5, 2.6 présentent les résultats obtenus dans le cas d'un maillage cartésien : la ligne de fissuration s'ouvre à partir de l'inclusion la plus grosse (la seconde inclusion ne donne pas lieu à fissuration). Sur la figure 2.7, on présente un résultat dans un cas non structuré où l'on voit que la ligne de discontinuité reste quasi verticale malgré la mauvaise qualité du maillage.

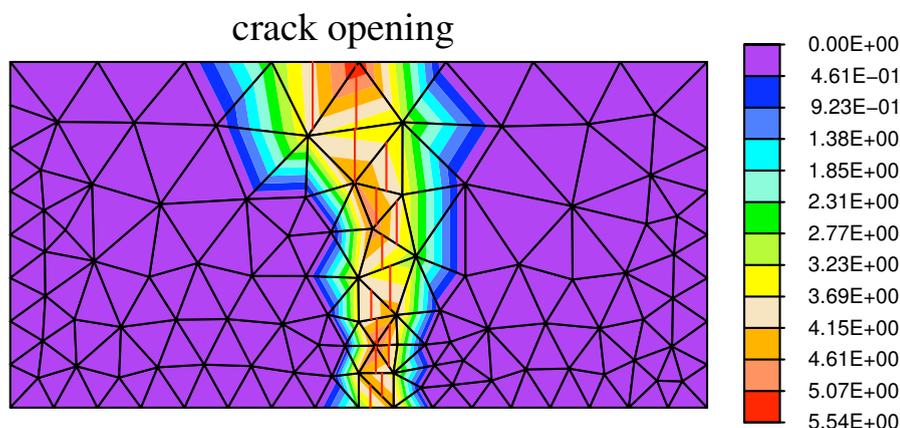


FIGURE 2.7 – Ouverture de fissure dans le cas d'un maillage non structuré.

2.4 Conditions aux limites approchées pour les profils

On a vu plus haut que le calcul des profils – voir équations (1.13) et (2.4) – est un point essentiel des méthodes numériques proposées. Il faut tout à la fois une approximation précise et peu coûteuse. Le fait d'utiliser une conditions aux limites artificielle de type "Dirichlet homogène" impose de prendre de grands rayons de troncature, et donc un temps de calcul plus important. On résume ici un travail effectué dans [BNDHV10b] qui représente un premier pas vers l'obtention et la validation d'une condition aux limites améliorée pour les équations de Navier. La recherche de telles conditions est liée aux problèmes de couches minces, voir [EN93, BL96, HJ01], ou de parois rugueuses, voir [APV98, JM01, ACG06], ou encore de conditions absorbantes pour les phénomènes propagatifs, voir par exemple [EM77, Giv91, HR95].

Cas de l'équation de Laplace

On considère le problème modèle suivant dans le domaine extérieur $\mathbf{H}_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$:

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_{\mathbf{n}} V = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\omega, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini,} \end{cases} \quad (2.5)$$

où ω est un domaine borné de \mathbb{R}^2 , \mathbf{n} désigne le vecteur normal extérieur, et \mathbf{g} est une fonction vectorielle régulière donnée. On note $\mathbf{H}_\infty^R = \mathbf{H}_\infty \cap B_R$ le domaine tronqué (B_R

désigne la boule centrée en $\mathbf{0}$ de rayon R), et V^0 la solution du problème avec conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta V^0 = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty^R, \\ \partial_{\mathbf{n}} V^0 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\omega, \\ V^0 = 0 & \text{sur } \partial B_R. \end{cases} \quad (2.6)$$

Au vu de la décroissance $V(\mathbf{X}) = \mathcal{O}(|\mathbf{X}|^{-1})$ en l'infini, on peut montrer l'estimation

$$\|V - V^0\|_{\mathbf{H}^1(\mathbf{H}_\infty^R)} = \mathcal{O}(R^{-1}),$$

d'où un choix de R très grand si l'on souhaite obtenir une bonne précision. Une méthode pour déterminer des conditions aux limites approchées d'ordre plus élevé consiste à utiliser un développement précisé en l'infini du type (1.5), qui peut être obtenu dans le cas particulier de l'équation de Laplace à l'aide de séries de Fourier :

$$V(\mathbf{X}) = \frac{a_1}{|\mathbf{X}|} \cos(\theta) + \frac{b_1}{|\mathbf{X}|} \sin(\theta) + \frac{a_2}{|\mathbf{X}|^2} \cos(2\theta) + \frac{b_2}{|\mathbf{X}|^2} \sin(2\theta) + \dots$$

On cherche alors une relation différentielle qui annule les premiers termes de ce développement. Le domaine étant borné par une boule, la dérivée normale est radiale si bien qu'un calcul simple conduit aux conditions suivantes :

- ◇ *Ordre 1* : $V^1 + R\partial_{\mathbf{n}}V^1 = 0$,
- ◇ *Ordre 2* : $V^2 + \frac{3R}{2}\partial_{\mathbf{n}}V^2 - \frac{R^2}{2}\Delta_{\tau}V^2 = 0$.

La condition d'ordre 1 est de type Robin-Fourier, celle d'ordre 2 de type Ventcel. Toutes-deux conduisent à des problèmes variationnels bien posés, et on a les estimations

$$\|V - V^i\|_{\mathbf{H}^1(\mathbf{H}_\infty^R)} = \mathcal{O}(R^{-i-1}) \quad (i = 0, 1, 2).$$

Dans [BNDTV09], des calculs numériques ont été menés pour comparer ces conditions (une méthode basée sur l'inversion conforme $z \mapsto z^{-1}$ est aussi testée).

Vers une condition d'ordre 1 en élasticité

Dans le cas des équations de Navier – cf. problème (2.4) – on peut encore écrire un développement en l'infini et chercher à améliorer la condition à imposer sur la frontière artificielle. La condition obtenue s'écrit alors – voir [BNDHV10a]

$$\sigma(\mathbf{V}^1)\mathbf{n} + \frac{1}{R} \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V}^1 + \frac{1}{R} \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta_{\tau} \mathbf{V}^1 = 0. \quad (2.7)$$

La forme bilinéaire associée n'est plus coercive et le problème ne relève plus de la théorie variationnelle. Dans [BNDHV10b], on a étudié un cas modèle qui présente la même difficulté :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u + \beta \Delta_{\tau} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $\alpha, \beta > 0$. Il s'agit encore d'un problème de type Ventcel, mais le coefficient β a le "mauvais" signe. Si Ω est le disque unité de \mathbb{R}^2 , un calcul direct à l'aide de séries de Fourier montre que le problème (2.8) admet une unique solution sous la condition (nécessaire et suffisante)

$$\alpha \notin \{\beta n^2 - n ; n \in \mathbb{N}\}.$$

Pour étudier le cas général, on note Λ l'opérateur de Dirichlet à Neumann sur $\partial\Omega$: si v désigne le relèvement harmonique de g dans Ω , alors $\Lambda g = \partial_{\mathbf{n}} v|_{\partial\Omega}$. Après relèvement du second membre f , le problème (2.8) se réécrit comme une équation non-locale sur le bord $\partial\Omega$:

$$\beta \Delta_{\tau} u + \Lambda u + \alpha u = \varphi. \quad (2.9)$$

De cette manière, le problème apparaît comme une perturbation pseudo-différentielle de l'opérateur de Laplace Beltrami. La théorie de Fredholm s'applique et le problème (2.9) admet une unique solution en dehors d'une condition sur les coefficients, du type $\alpha \neq \alpha_n$, où (α_n) est une suite croissant vers l'infini (qui dépend de β , supposé fixé).

Dans le contexte des conditions aux limites artificielles, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_{\infty}^R, \\ \partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u + \beta \Delta_{\tau} u = 0 & \text{sur } \partial B_R, \\ u = g & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (2.10)$$

où la condition de Ventcel précédente a été utilisée comme condition "absorbante" sur la frontière ∂B_R . On a montré que le problème (2.10) est bien posé si R est suffisamment grand. Des simulations numériques laissent penser qu'il n'est pas nécessaire de choisir R très grand pour avoir existence et unicité d'une solution.

2.5 Perspectives

Il reste à étudier la condition (2.7) dans le cadre de l'élasticité linéaire. Les techniques pseudo-différentielles utilisées pour le problème modèle Laplace-Ventcel doivent pouvoir s'étendre, et on attend des résultats similaires. Une étude numérique est aussi en cours pour valider l'ordre de la condition aux limites approchée. Le calcul des profils ainsi amélioré sera alors intégré à la méthode numérique pour l'étude complète de fissuration.

Une extension au cas tri-dimensionnel est aussi envisagée, permettant de considérer des problèmes plus proches de la réalité. Si les aspects théoriques semblent se prolonger dans difficulté majeure, il n'en va pas de même des codes de calcul pour lesquels un investissement important est nécessaire.

Programmation pour le calcul scientifique

3.1 Contexte

Les travaux de nature théorique présentés dans les deux parties précédentes trouvent leur motivation dans la nécessité de simplifier le modèle mathématique en vue du calcul numérique. Ainsi une grande partie de mon activité de recherche consiste en la mise en place de codes de calcul pour tester les méthodes proposées ou valider des résultats asymptotiques.

La plupart des calculs numériques effectués s'appuie sur la bibliothèque de calcul éléments finis MÉLINA [Mar10], développée par D. Martin. Si une partie des résultats présentés ici concernent naturellement les thèmes développés précédemment (mécanique de la rupture, modèles asymptotiques – voir §3.3 et §3.4.1), d'autres calculs ont été menés, issus de rencontres scientifiques et n'ayant d'autre lien entre-eux que la nécessité d'un calcul robuste et précis. Ainsi, ont été abordés des problèmes aussi différents que l'analyse de la supraconductivité en domaine polygonal (§3.4.2), la séparation de phase dans un mélange binaire (§3.4.3), l'optimisation de forme pour le matriçage cellulaire (§3.5.1) ou l'utilisation de simulations numériques pour tester des conjectures dans un problème de partitions minimales (§3.5.2).

On fait ici la synthèse des articles [CDMV03, Via05, BNDMV07, BDVV08, BNDTV09, BNHV10, PV10, GMV10], en collaboration avec V. Bonnaillie-Noël, D. Brancherie, M. Costabel, M. Dambrine, M. Dauge, L. Goudenège, B. Helffer, D. Martin, M. Pierre, S. Tordeux, P. Villon.

3.2 La bibliothèque éléments finis MÉLINA

Développée au sein de l'IRMAR et de l'ENSTA, MÉLINA s'inscrit dans le cadre des bibliothèques universitaires pour le calcul par éléments finis comme FreeFem, GetFEM++, OFELI, etc. C'est la version Fortran 77 (1986-2010) qui a été utilisée ici, mais signalons qu'une version C++ totalement refondue est déjà en partie opérationnelle, et sera prochainement disponible.

La caractéristique principale de MÉLINA est sa modularité, qui permet à l'utilisateur de personnaliser cet outil en un logiciel dédié à une tâche particulière. Les problèmes sont définis directement à l'aide de leur formulation faible, et ne sont pas choisis parmi une liste pré-définie. De nouveaux intégrands peuvent être introduits, de même que de nouveaux éléments finis ou d'autres méthodes de résolution. Ainsi, il est possible de traiter une gamme très large de problèmes.

Parmi les bibliothèques éléments finis, MÉLINA est une des rares à proposer des éléments de haut (voire très haut) degré (jusqu'à 64 pour les éléments tensoriels). Cette fonctionnalité a été introduite lors de mes travaux de thèse, et a été utilisée sur de nombreux problèmes. Ce chapitre expose les résultats obtenus avec cet outil dans différents domaines d'application.

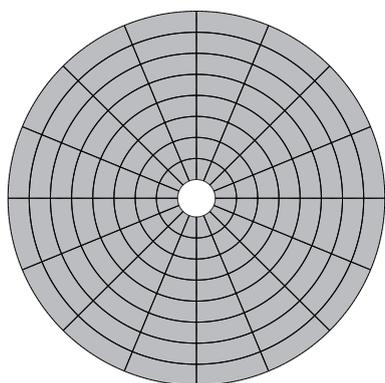
MÉLINA a été utilisé dans bien d'autres applications (en électromagnétisme en particulier). Pour plus de détails, on renvoie au site web [Mar10], section "Pressbook".

3.3 Calcul des profils pour la mécanique numérique

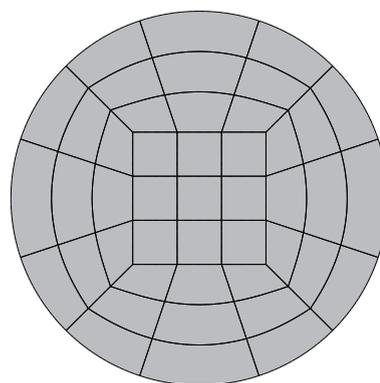
On a décrit dans le chapitre 2 une méthode numérique pour le calcul à rupture d'une structure fragile. On détaille ici quelques aspects liés au calcul numérique des profils.

Le calcul des profils en domaine non borné (voir problèmes (2.4) ou (2.5) pages 24 et 29, respectivement) est un ingrédient essentiel des méthodes asymptotiques proposées. Les profils sont intrinsèques à la géométrie des inclusions, ils peuvent être considérés comme le résultat du couplage entre le motif local de perturbation et la géométrie sectorielle à l'infini (dans le cas d'une inclusion, l'angle du secteur vaut 2π). De fait, il faut prendre en compte de manière précise à la fois la géométrie de la perturbation, et le comportement en l'infini.

Comme il a été signalé plus haut, le comportement à l'infini est généralement pris en compte par une condition sur une frontière circulaire fictive au rayon R . Quant à la géométrie locale, elle nécessite une approximation fine qui requiert un grand nombre d'éléments si l'on se restreint à une approximation de degré 1 ou 2.



(a) Maillage du domaine tronqué à $R = 10$.



(b) Maillage pour la méthode d'inversion.

FIGURE 3.1 – Maillages utilisés pour le calcul des profils.

Sur la figure 3.1 (gauche), on représente un maillage utilisé pour une méthode de conditions aux limites approchées avec $R = 10$ (dans le cas d'une inclusion circulaire). La représentation géométrique est réalisée avec des polynômes Q_8 . L'utilisation d'un maillage de haut degré permet la réduction du nombre d'éléments (ici 128) tout en assurant une excellente précision géométrique.

Dans le cas de l'équation de Laplace (2.5), on a testé une méthode particulière basée sur l'inversion $\varphi : z \mapsto z^{-1}$. L'équation $-\Delta V = 0$ reste inchangée, la donnée de Neumann est transportée, et la condition à l'infini devient une condition de Dirichlet ponctuelle en l'origine. L'intérêt est évidemment d'être ramené à un domaine borné, dont un maillage Q_8 est représenté sur la figure 3.1 (droite).

Sur la figure 3.2, on représente l'erreur commise (par rapport à la solution exacte, connue explicitement dans le cas d'une inclusion circulaire) dans le calcul du profil en fonction du degré d'interpolation de la méthode de Galerkin (le degré d'approximation géométrique, quant à lui, reste égal 8). Les conditions aux limites approchées sont celles données page 30.

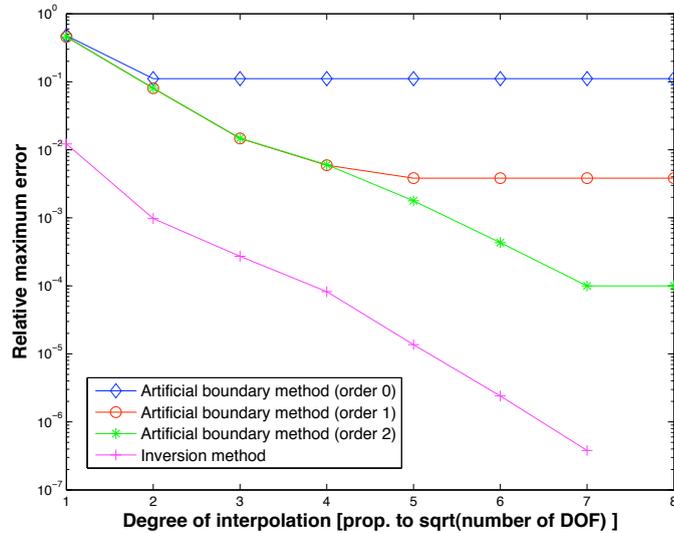


FIGURE 3.2 – Comparaison inversion / conditions aux limites approchées.

On observe un phénomène de saturation pour la méthode utilisant des conditions aux limites approchées, à un niveau d'autant plus bas que la condition est précise. La méthode d'inversion est plus précise, mais est difficilement généralisable à d'autres cas, par exemple en élasticité.

Pour le couplage représentation asymptotique / modèle à discontinuité forte (voir 2.3 page 28), les valeurs des profils sont utilisées pour l'enrichissement cinématique de l'espace d'approximation. Bien sûr, les maillages ne coïncident pas, et un transfert est nécessaire sur la grille utilisée par la méthode à discontinuité forte. Si les profils ont été calculés sur une grille régulière (comme le maillage polaire à gauche de la figure 3.1), la projection n'est pas difficile. Dans le cas général, une méthode utilisant un *bucket sort* a été mise en œuvre.

3.4 Utilisation des éléments finis de haut degré

Dans cette partie, on présente trois situations où l'utilisation d'éléments finis de haut degré a permis un calcul précis en temps court, là où l'emploi d'éléments \mathbb{P}_1 aurait nécessité un temps de calcul prohibitif.

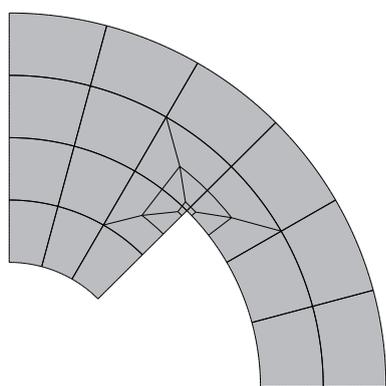
3.4.1 Problèmes de singularités

Dans [CDMV03], nous avons utilisé pour la première fois les possibilités offertes par les éléments de haut degré pour le calcul de modes propres pour les équations de Maxwell harmoniques. Si l'on considère la formulation variationnelle

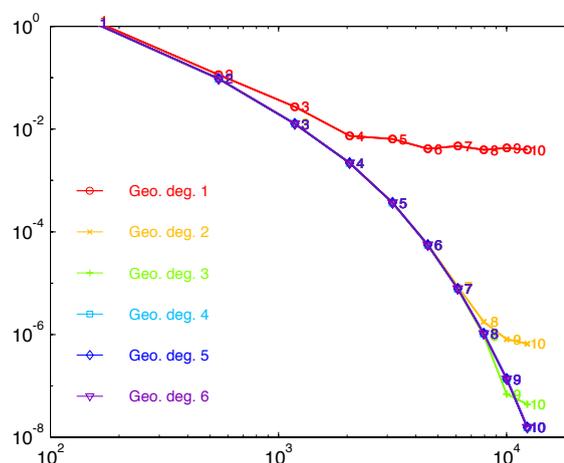
$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

la discrétisation directe nécessite l'emploi des éléments d'arête introduits dans [Néd80]. Une méthode classique pour permettre l'utilisation d'éléments finis nodaux consiste en la régularisation par un terme en $\mathbf{div} \mathbf{u} \, \mathbf{div} \mathbf{v}$, cf. [HL96]. Toutefois, dans le cas d'un domaine Ω non-régulier, il a été montré dans [Cos91] que l'espace d'approximation discret n'est pas dense dans l'espace continu. Une méthode introduisant un poids lié à la distance aux points de singularité dans le terme de régularisation est proposée dans [CD02].

La figure 3.3 montre les résultats d'approximation obtenus pour le calcul de la première valeur propre dans un domaine bi-dimensionnel avec un coin rentrant pour différents degrés d'approximation géométrique et fonctionnel.



(a) Maillage du domaine.



(b) Erreur relative sur la première valeur propre.

FIGURE 3.3 – Calculs de régularisation à poids pour les équations de Maxwell.

Ici encore, le fait de travailler avec des maillages de haut degré (la frontière du domaine discret est polynomiale par morceaux) permet de retrouver une approximation aussi bonne que prévue par la théorie. Comme souvent, la mauvaise représentation de la géométrie au niveau discret est un facteur limitant. Notons aussi que les points d'interpolation sont choisis aux abscisses de Gauss-Lobatto pour éviter un phénomène de Runge (qui apparaît à partir des degrés 6-8) détériorant significativement les résultats.

Mentionnons enfin que le raffinement géométrique au voisinage du coin, lié à une interpolation de haut degré, permet de retrouver des résultats de convergence similaires à ceux existant pour des domaines réguliers, voir [Mel02]. Cette stratégie a été utilisée dans [Via05] pour valider l'ordre de convergence des conditions d'impédance dans les domaines à coins.

3.4.2 Problèmes d'oscillations

Dans [BNDMV07], il s'agit de calculer les modes propres de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique en limite semi-classique dans un domaine borné Ω :

$$P_h \phi_h = \lambda_h \phi_h \quad \text{avec } P_h = -(h\nabla - i\mathcal{A})^2 \quad (+ \text{conditions naturelles}).$$

Lorsque h tend vers 0, la première fonction propre se concentre à l'échelle \sqrt{h} près du point de courbure maximale (cas où Ω est régulier) ou du sommet d'angle minimum (cas polygonal). Des oscillations à l'échelle h apparaissent aussi, rendant les calculs numériques extrêmement délicats. Une approche standard avec éléments finis \mathbb{P}_1 et raffinement échoue. En effet, la phase des fonctions propres oscille fortement dans tout le domaine (pas seulement là où le module se concentre) et il est indispensable de capturer toutes ces oscillations pour obtenir une approximation raisonnable du module, pourtant non-oscillant... On a montré qu'une stratégie en p -version (augmentation du degré des éléments finis, plutôt que réduction du pas de maillage) fournit d'excellents résultats. Les figures 3.4 et 3.5 montrent la première fonction propre obtenue avec environ 4000 éléments Q_1 et 4 éléments Q_{20} (1764 degrés de liberté).

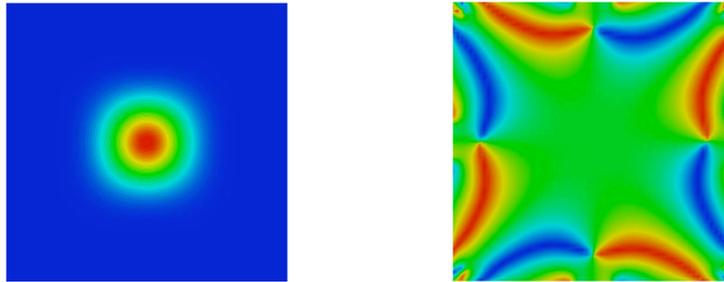


FIGURE 3.4 – Première fonction propre avec 3969 éléments Q_1 (module et phase).

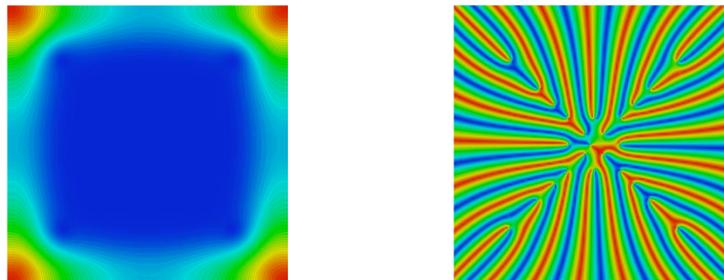


FIGURE 3.5 – Première fonction propre avec 4 éléments Q_{20} (module et phase).

On voit ainsi que la méthode numérique Q_1 fournit un résultat qui n'est pas celui attendu : la fonction approchée correspond à un mode propre faiblement oscillant, mais d'un niveau plus élevé que la fonction oscillante obtenue par calcul Q_{20} .

3.4.3 Problèmes d'interface

Dans [GMV10], on présente des résultats de simulations numériques pour la séparation de phase d'un mélange binaire. Le phénomène est modélisé par une fonction d'état u (valant 1 et -1 pour les deux phases pures) satisfaisant l'équation de Cahn-Hilliard dans un domaine borné Ω :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta w & \text{dans } \Omega, \\ w = \psi(u) - \varepsilon^2 \Delta u & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = \partial_n w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où le terme non linéaire $\psi(u)$ est donné par

$$\psi(u) = \alpha u + \beta \log \frac{1+u}{1-u} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Dans beaucoup de travaux, on remplace cette expression par un développement limité du logarithme, évitant ainsi les difficultés liées aux singularités en ± 1 , dont le modèle à l'ordre 3 s'écrit

$$\psi(u) = u^3 - u.$$

On a utilisé une méthode d'éléments finis mixte pour éviter la programmation d'éléments conformes- H^2 (par exemple nodaux \mathcal{C}^1 , présents dans très peu de codes numériques). Parmi les aspects abordés, on en distingue ici deux.

Influence du remplacement du logarithme par un polynôme dans le terme non linéaire

On considère le cas mono-dimensionnel $\Omega = (0, 1)$. La figure 3.6 représente l'erreur commise par une approximation polynomiale du logarithme (l'abscisse est le temps, l'ordonnée le logarithme décimal de l'erreur en norme L^2) pour différents degrés. Il apparaît en particulier que l'approximation par un polynôme de degré 3 est peu précise.

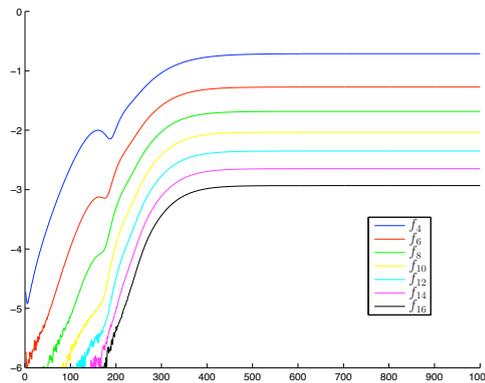


FIGURE 3.6 – Erreur L^2 entre la solution avec logarithme et la solution avec approximation polynomiale f_k de degré $k - 1$.

Décomposition spinodale

Sur la figure 3.7, on présente l'état du mélange en 6 instants différents. Partant d'une répartition aléatoire des deux composants, on assiste à une séparation de phase, nommée *décomposition spinodale*. Par la suite, la longueur de l'interface va tendre à être minimisée, jusqu'à devenir une ligne droite. Notons que les calculs doivent être précis (on a utilisé ici des éléments finis quadrangulaires de degré jusqu'à 10), ce d'autant que le paramètre ε est petit (ε mesure l'épaisseur de l'interface).

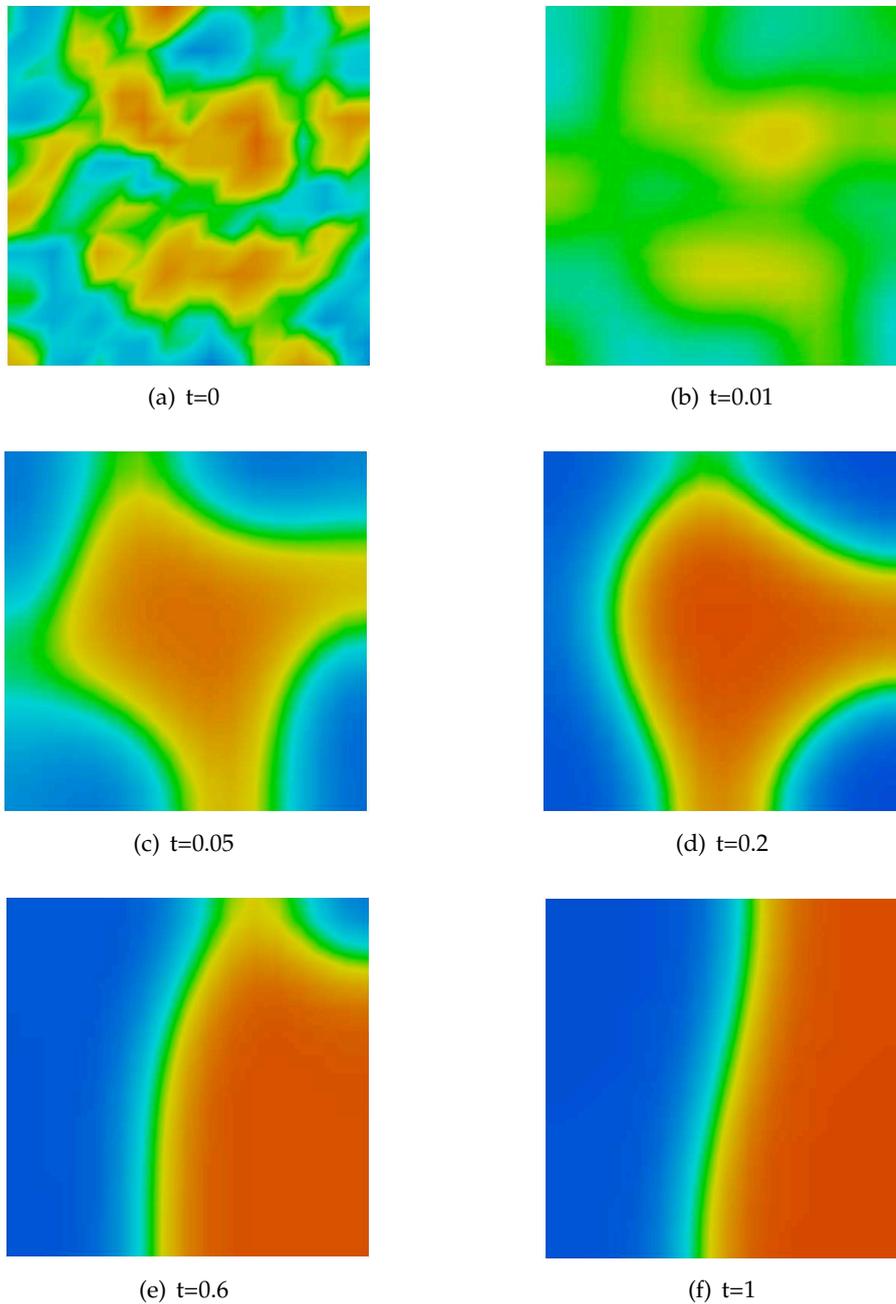


FIGURE 3.7 – Décomposition spinodale

3.5 Exploitation de résultats numériques

3.5.1 Réseau d'électrodes et matriçage cellulaire

Dans [PV10], on s'est intéressé à un microsysteme permettant le positionnement de cellules selon un réseau en vue d'un traitement individuel (transfert de gène, par exemple), voir [HP91, MHG99, FFP⁺03]. La méthode s'appuie sur la force de *diélectrophorèse* que subit une cellule lorsqu'elle est soumise à un champ électrique non-uniforme. Précisément, pour une cellule sphérique de rayon r dans un milieu de permittivité ϵ_m , la force de diélectrophorèse s'exprime en fonction du carré du champ appliqué E comme

$$\mathbf{F} = 2\pi\epsilon_m r^3 \text{Re}[K] \nabla(E^2),$$

où le signe de la partie réelle de K (*facteur de Clausius-Mosotti*, dépendant des permittivités de la cellule et du milieu) détermine le sens de la force. Dans le cas de la diélectrophorèse *négative* ($\text{Re}[K] < 0$), les cellules ont tendance à se positionner dans les minima de champ, cf. FIG. 3.8.

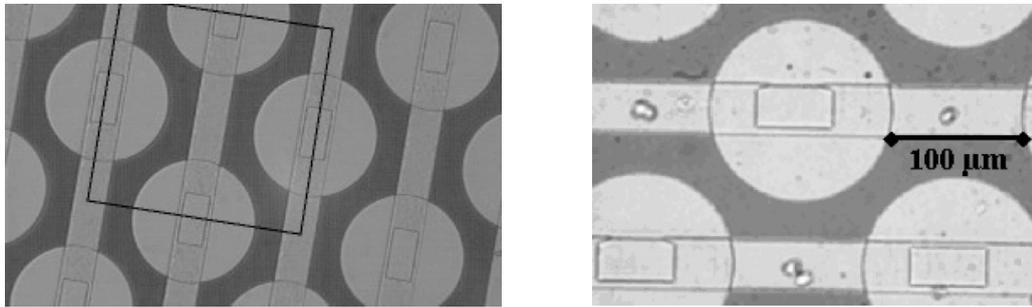


FIGURE 3.8 – Un réseau d'électrodes rondes interdigitées.

Dès lors, il s'agit de déterminer la géométrie du réseau d'électrodes pour minimiser le temps d'accès des cellules aux minima de champ. Du point de vue mathématique, il est possible d'exprimer le temps de positionnement en fonction du carré du champ électrique appliqué. On montre que les conditions d'optimalité peuvent se réduire à un problème mono-dimensionnel et conduisent à l'équation intégrale d'Abel

$$\int_0^1 \frac{u(t)}{\sqrt{|x-t|}} dt = \text{cste},$$

d'où on peut extraire u , et donc le champ optimum à appliquer. On a ensuite mis en œuvre une méthode de variation de frontière pour déterminer une géométrie d'électrodes permettant d'approcher ce champ optimum (au sens des moindres carrés). Un résultat avec une spline comportant 5 points de contrôle est visible sur la figure 3.9. Cette approche pourtant relativement élémentaire permet un gain d'environ 20% sur le temps de positionnement.

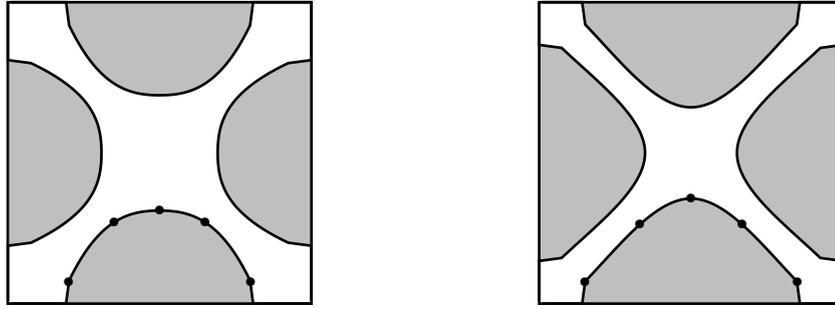


FIGURE 3.9 – Électrodes rondes de référence (gauche) et électrodes optimisées (droite).

3.5.2 Partitions minimales et partitions nodales

Dans [BNHV10], on s'intéresse à un problème de partitionnement optimal. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 fixé, et soit $\mathcal{D} = (D_i)_{i=1,\dots,k}$ une partition de Ω en k sous-domaines. Les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Dirichlet sur un domaine ω sont notées :

$$\lambda_1(\omega) < \lambda_2(\omega) \leq \lambda_3(\omega) \leq \dots$$

et $\Lambda(\mathcal{D})$ est défini comme la plus grande première valeur propre sur la partition \mathcal{D} :

$$\Lambda(\mathcal{D}) = \max_{i=1,\dots,k} \lambda_1(D_i).$$

On considère alors le problème d'optimisation

$$\mathfrak{L}_k := \min \{ \Lambda(\mathcal{D}) ; \mathcal{D} \text{ est une } k\text{-partition de } \Omega \}. \quad (3.1)$$

Ce problème a été largement étudié d'un point de vue théorique, voir [BBH98, CTV03, HHOT09] par exemple. On peut montrer qu'il existe une partition minimale selon la définition précédente, ainsi que des propriétés qualitatives : les frontières de la partition minimale sont des courbes régulières, sauf en un nombre fini de points, où elles sont des unions de telles courbes se coupant à angles égaux.

Une des questions intéressantes concerne les liens entre partitions minimales et partitions nodales (i.e. partitions fournies par les changements de signe des vecteurs propres sur Ω). S'il est facile de vérifier que ces notions coïncident lorsque $k = 2$:

$$\mathfrak{L}_2 = \lambda_2(\Omega),$$

la question reste ouverte dès que $k \geq 3$, même pour des géométries simples comme le carré ou le disque. Dans [BNHV10], on a effectué des calculs numériques visant à étudier cette question.

On décrit ici un des résultats obtenus : considérons un domaine Ω présentant un axe de symétrie. On se restreint aux partitions symétriques (il n'est pas évident toutefois que la partition minimale le soit...). En coupant selon l'axe de symétrie, on considère le problème mixte Dirichlet-Neumann posé sur le demi-domaine Ω^+ , voir FIG. 3.10 :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{dans } \Omega^+, \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi = 0 & \text{sur } [x_0, b], \\ \varphi = 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.2)$$

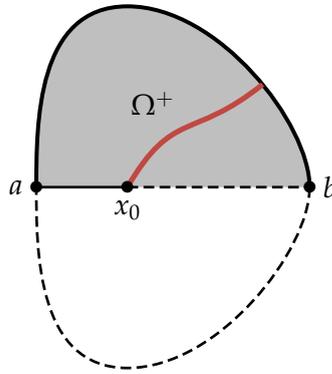


FIGURE 3.10 – Le problème mixte Dirichlet-Neumann.

Si on parvient à trouver x_0 tel que la ligne nodale du deuxième vecteur propre pour le problème (3.2) parte de x_0 pour atteindre le bord de Ω , alors on aura un candidat pour la 3-partition minimale de Ω après symétrisation.

Dans le cas du carré unité $\Omega = (0, 1)^2$, les partitions données sur la figure 3.10 sont proposées comme partitions minimales du carré unité – elles ont même valeur $\Lambda(\mathcal{D})$.

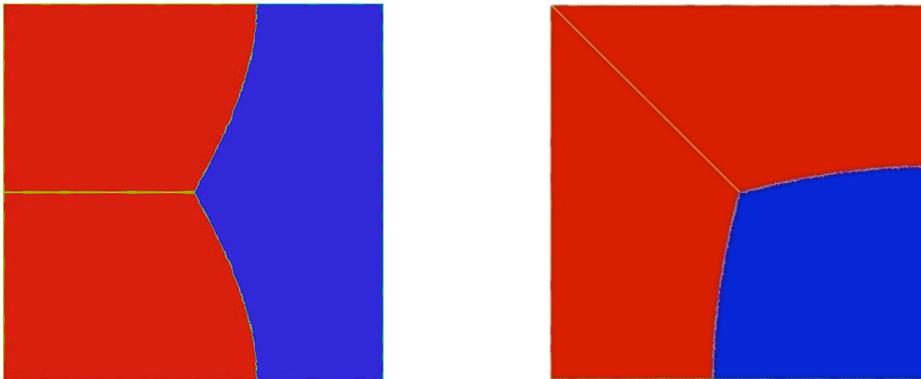


FIGURE 3.11 – Partitions candidates pour \mathcal{L}_3 .

3.6 Perspectives

Une version C++ de la bibliothèque MÉLINA sera bientôt rendue publique par D. Martin. Un travail de test sur des applications variées sera nécessaire, ainsi que des contributions dans le domaine du maillage : création et visualisation de maillages de haut degré, projection entre maillages, etc. Ce travail de soutien d'un code de calcul pérenne est essentiel, il permet la mise en œuvre de calculs numériques conséquents sans en imposer la programmation complète.

Concernant les applications décrites, de nombreux prolongements sont envisagés ; certains sont déjà en cours de développement. Citons, entre autres, le cas de l'équation de Cahn-Hilliard avec bruit blanc, la validation d'une condition aux limites approchée d'ordre 1 pour le calcul de profils en élasticité, l'étude de la supraconductivité en dimension 3, etc.

Bibliographie

- [ABC⁺08] H. Ammari, E. Bonnetier, Y. Capdeboscq, M. Tanter, and M. Fink. Electrical impedance tomography by elastic deformation. *SIAM J. Appl. Math.*, 68(6) :1557–1573, 2008.
- [ACG06] Y. Amirat, G. A. Chechkin, and R. R. Gadyl'shin. Asymptotics of simple eigenvalues and eigenfunctions for the Laplace operator in a domain with oscillating boundary. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 46(1) :102–115, 2006.
- [AHH00] H. Ammari, L. Halpern, and K. Hamdache. Asymptotic behaviour of thin ferromagnetic films. *Asymptot. Anal.*, 24(3-4) :277–294, 2000.
- [AKLZ10] H. Ammari, H. Kang, M. Lim, and H. Zribi. Layer potential techniques in spectral analysis. part i : complete asymptotic expansions for eigenvalues of the laplacian in domains with small inclusions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362 :2901–2922, 2010.
- [AKS06] H. Ammari, H. Kang, and F. Santosa. Scattering of electromagnetic waves by thin dielectric planar structures. *SIAM J. Math. Anal.*, 38(4) :1329–1342 (electronic), 2006.
- [ALG98] H. Ammari and C. Latiri-Grouz. Approximate boundary conditions for thin periodic coatings. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Golden, CO, 1998)*, pages 297–301. SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [All02] G. Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [AMM06] A. Ait Moussa and J. Messaho. Limit behavior of an oscillating thin layer. In *Proceedings of the 2005 Oujda International Conference on Nonlinear Analysis*, volume 14 of *Electron. J. Differ. Equ. Conf.*, pages 21–33 (electronic), San M.os, TX, 2006. Southwest Texas State Univ.
- [APV98] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *J. Comput. Phys.*, 147(1) :187–218, 1998.
- [BBH98] D. Bucur, G. Buttazzo, and A. Henrot. Existence results for some optimal partition problems. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 8(2) :571–579, 1998.

- [BDVV08] D. Brancherie, M. Dambrine, P. Villon, and G. Vial. Effect of surface defects on structure failure : a two-scale approach. *Eur. J. Comp. Mech.*, 17(5-7) :613–624, 2008.
- [BFM08] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. The variational approach to fracture. *J. Elasticity*, 91(1-3) :5–148, 2008.
- [BFNW08] D. Bucur, E. Feireisl, Š. Nečasová, and J. Wolf. On the asymptotic limit of the Navier-Stokes system on domains with rough boundaries. *J. Differential Equations*, 244(11) :2890–2908, 2008.
- [BHB06] M. F. Ben Hassen and E. Bonnetier. An asymptotic formula for the voltage potential in a perturbed ϵ -periodic composite medium containing misplaced inclusions of size ϵ . *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 136(4) :669–700, 2006.
- [BL96] A. Bendali and K. Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [BL08] A. Bendali and K. Lemrabet. Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell. *Asymptot. Anal.*, 57(3-4) :199–227, 2008.
- [BM10] D. Bresch and V. Milišić. High order multi-scale wall-laws, part i : The periodic case. *Quart. Appl. Math.*, posted on M.h 10, 2010 PII S0033-569X-10-01135-0 (to appear in print), 2010.
- [BMNP01] M. Boursard, A. Maghnoouji, S. Nicaise, and L. Paquet. Asymptotic expansion of the solution of a mixed Dirichlet-Ventcel problem with a small parameter. *Asymptot. Anal.*, 28(3-4) :241–278, 2001.
- [BNBD⁺10] V. Bonnaillie-Noël, D. Brancherie, M. Dambrine, S. Tordeux, and G. Vial. Effect of micro-defects on structure failure : coupling asymptotic analysis and strong discontinuity approach. *Eur. J. Comp. Mech.*, à paraître, 2010.
- [BNDHV10a] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, F. Hérau, and G. Vial. Absorbing conditions for the linear elasticity equations. *en préparation*, 2010.
- [BNDHV10b] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, F. Hérau, and G. Vial. On generalized Ventcel’s type boundary conditions for laplace operator in a bounded domain. *SIMA*, à paraître, 2010.
- [BNDMV07] V. Bonnaillie-Noël, M. Dauge, D. Martin, and G. Vial. Computations of the first eigenpairs for the Schrödinger operator with magnetic field. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(37-40) :3841–3858, 2007.
- [BNDTV07] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, S. Tordeux, and G. Vial. On moderately close inclusions for the Laplace equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(11) :609–614, 2007.
- [BNDTV09] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, S. Tordeux, and G. Vial. Interactions between moderately close inclusions for the Laplace equation. *M3AS*, 19(10) :1853–1882, 2009.

- [BNHV10] V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer, and G. Vial. Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions. *COCV*, 16(1) :221–246, 2010.
- [BR80] H. Blum and R. Rannacher. On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2(4) :556–581, 1980.
- [BV00] E. Bonnetier and M. Vogelius. An elliptic regularity result for a composite medium with “touching” fibers of circular cross-section. *SIAM J. Math. Anal.*, 31(3) :651–677 (electronic), 2000.
- [CCDV06] G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge, and G. Vial. Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. *Asymptotic Analysis*, 50(1, 2) :121–173, 2006.
- [CD96] M. Costabel and M. Dauge. A singularly perturbed mixed boundary value problem. *Comm. Partial Differential Equations*, 21 :1919–1949, 1996.
- [CD99] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to homogenization*, volume 17 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999.
- [CD02] M. Costabel and M. Dauge. Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains. A rehabilitation of nodal finite elements. *Numer. Math.*, 93(2) :239–277, 2002.
- [CDMV03] M. Costabel, M. Dauge, D. Martin, and G. Vial. Weighted regularization of Maxwell equations : computations in curvilinear polygons. In *Numerical mathematics and advanced applications*, pages 273–280. Springer Italia, Milan, 2003.
- [CFM09] A. Chambolle, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. When and how do cracks propagate? *J. Mech. Phys. Solids*, 57(9) :1614–1622, 2009.
- [CH09] S. Chun and J. S. Hesthaven. High-order accurate thin layer approximations for time-domain electromagnetics. I. General metal backed coatings. *J. Comput. Appl. Math.*, 231(2) :598–611, 2009.
- [CLP⁺07] E. Chahine, P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard, and M. Salaün. Study of some optimal XFEM type methods. In *Advances in meshfree techniques*, volume 5 of *Comput. Methods Appl. Sci.*, pages 27–38. Springer, Dordrecht, 2007.
- [Cos91] M. Costabel. A coercive bilinear form for Maxwell’s equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 157(2) :527–541, 1991.
- [CTV03] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues. *Journal of Funct. Anal.*, 198 :160–196, 2003.
- [CV03] Y. Capdeboscq and M. Vogelius. A general representation formula for boundary voltage perturbations caused by internal conductivity inhomogeneities of low volume fraction. *M2AN*, 37(1) :159–173, jan 2003.
- [Dau88] M. Dauge. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains – Smoothness and Asymptotics of Solutions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

- [DBDI05] N. Dominguez, D. Brancherie, L. Davenne, and A. Ibrahimbegović. Prediction of crack pattern distribution in reinforced concrete by coupling a strong discontinuity model of concrete cracking and a bond slip of reinforcement model. *Engin. Comput.*, 22(5–6) :558–581, 2005.
- [DM93] G. Dal Maso. *An introduction to Γ -convergence*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [DTV09] M. Dauge, S. Tordeux, and G. Vial. Self-similar perturbation near a corner : matching versus multiscale expansions for a model problem. *To appear*, 2009.
- [DV05] M. Dambrine and G. Vial. On the influence of a boundary perforation on the dirichlet energy. *Control and Cybernetics*, 34(1) :117–136, 2005.
- [DV07] M. Dambrine and G. Vial. A multiscale correction method for local singular perturbations of the boundary. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 41(1) :111–127, 2007.
- [EM77] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139) :629–651, 1977.
- [EN93] B. Engquist and J. C. Nedelec. Effective boundary conditions for electromagnetic scattering in thin layers. Rapport interne 278, CMAP, 1993.
- [FFP⁺03] M. Frénéa, S. Faure, B. Pioufle, P. Coquet, and H. Fujita. Positioning living cells on a high-density electrode array by negative dielectrophoresis. *Materials Science and Engineering : C*, 23(5) :597–603, 2003.
- [Giv91] D. Givoli. Nonreflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 94(1) :1–29, 1991.
- [GKL99] G. Geymonat, F. Krasucki, and S. Lenci. Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. *Math. Mech. Solids*, 4(2) :201–225, 1999.
- [GMV10] L. Goudenège, D. Martin, and G. Vial. High order finite element calculations for the deterministic Cahn-Hilliard equation. en révision, 2010.
- [Gri85] P. Grisvard. *Boundary value problems in non-smooth domains*. Pitman, London, 1985.
- [HHOT09] B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, and S. Terracini. Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26 :101–138, 2009.
- [HJ01] H. Haddar and P. Joly. Effective boundary conditions for thin ferromagnetic coatings. Asymptotic analysis of the 1D model. *Asymptot. Anal.*, 27(2) :127–160, 2001.
- [HL96] C. Hazard and M. Lenoir. On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell’s equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(6) :1597–1630, 1996.
- [HP91] Y. Huang and R. Pethig. Electrode design for negative dielectrophoresis. *Measurement Science and Technology*, 2(12) :1142–1146, 1991.

- [HR95] L. Halpern and J. Rauch. Absorbing boundary conditions for diffusion equations. *Numer. Math.*, 71(2) :185–224, 1995.
- [Il'92] A. M. Il'in. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. *Translations of Mathematical Monographs*, 1992.
- [JM01] W. Jäger and A. Mikelić. On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow. *J. Differential Equations*, 170(1) :96–122, 2001.
- [JT06] P. Joly and S. Tordeux. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots i : The asymptotic expansion. *Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal*, 5(1) :304–336, 2006.
- [KMO04] F. Krasucki, A. Münch, and Y. Ousset. Mathematical analysis of nonlinear bonded joint models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(4) :535–556, 2004.
- [KMZ08] D. Knees, A. Mielke, and C. Zanini. On the inviscid limit of a model for crack propagation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(9) :1529–1569, 2008.
- [Kon67] V. A. Kondrat'ev. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 16 :227–313, 1967.
- [LD91] H. Le Dret. *Problèmes variationnels dans les multi-domaines*, volume 19 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1991. Modélisation des jonctions et applications. [Modeling of junctions and applications].
- [LS00] T. Lewiński and J. Sokołowski. Topological derivative for nucleation of non-circular voids. The Neumann problem. In *Differential geometric methods in the control of partial differential equations (Boulder, CO, 1999)*, volume 268 of *Contemp. Math.*, pages 341–361. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [LT92] K. Lemrabet and D. Teniou. Vibrations d'une plaque mince avec raidisseur sur le bord. *Maghreb Math. Rev.*, 2(1) :27–41, 1992.
- [LVLH92] M. Lenoir, M. Vullierme-Ledard, and C. Hazard. Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(3) :579–608, 1992.
- [Mar10] D. Martin. MÉLINA, bibliothèque de calculs éléments finis.
<http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>, 1986–2010.
- [Mel02] J. M. Melenk. *hp-finite element methods for singular perturbations*, volume 1796 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [MHG99] H. Morgan, M. Hughes, and N. Green. Separation of submicron bioparticles by dielectrophoresis. *Biophysical journal*, 77(1) :516–525, 1999.
- [Mil09] V. Milišić. Very weak estimates for a rough Poisson-Dirichlet problem with natural vertical boundary conditions. *Methods Appl. Anal.*, 16(2) :157–185, 2009.

- [MNP00] Vladimir G. Maz'ya, Sergey A. Nazarov, and B. A. Plamenevskij. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*. Birkhäuser, Berlin, 2000.
- [MS03] M. Mabrouk and H. Samadi. Linear and semi-linear reinforcement problems by thin layers. *Z. Angew. Math. Phys.*, 54(2) :349–375, 2003.
- [MV07] A. Madureira and F. Valentin. Asymptotics of the Poisson problem in domains with curved rough boundaries. *SIAM J. Math. Anal.*, 38(5) :1450–1473 (electronic), 2006/07.
- [Néd80] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in \mathbf{R}^3 . *Numer. Math.*, 35(3) :315–341, 1980.
- [Néd01] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2001. Integral representations for harmonic problems.
- [Nic93] S. Nicaise. *Polygonal interface problems*, volume 39 of *Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik [Methods and Procedures in Mathematical Physics]*. Verlag Peter D. Lang, Frankfurt am Main, 1993.
- [NO93] S. A. Nazarov and M. V. Olyushin. Perturbation of the eigenvalues of the Neumann problem due to the variation of the domain boundary. *Algebra i Analiz*, 5(2) :169–188, 1993.
- [NP94] S. A. Nazarov and B. A. Plamenevsky. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, volume 13 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [Oli95] J. Olivier. Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Comput. Mech.*, 17(1–2) :49–61, 1995.
- [Poi08] C. Poignard. Asymptotics for steady-state voltage potentials in a bidimensional highly contrasted medium with thin layer. *Math. Methods Appl. Sci.*, 31(4) :443–479, 2008.
- [PV10] M. Pierre and G. Vial. Best design for a fastest cells selecting process. *DCDS-S*, à paraître, 2010.
- [Rah08] L. Rahmani. The effect of a thin layer on a nonlinear thermoelastic plate. *Appl. Math. Sci. (Ruse)*, 2(49-52) :2489–2499, 2008.
- [RV08] L. Rahmani and G. Vial. Reinforcement of a thin plate by a thin layer. *Math. Methods Appl. Sci.*, 31(3) :315–338, 2008.
- [RV10] L. Rahmani and G. Vial. Multi-scale asymptotic expansion for a singular problem of a free plate with thin stiffener. en préparation, 2010.
- [SOA93] J.C. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuity induced by strain softening solutions in rate-independent solids. *J. Comput. Mech.*, 12 :277–296, 1993.
- [SP74] E. Sánchez-Palencia. Problèmes de perturbations liés aux phénomènes de conduction à travers des couches minces de grande résistivité. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 53 :251–269, 1974.

- [SŻ99] J. Sokołowski and A. Żochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 37(4) :1251–1272 (electronic), 1999.
- [Tor04] S. Tordeux. Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes. *Thèse de doctorat.*, 2004.
- [Van75] M. VanDyke. Perturbation methods in fluid mechanics. *The Parabolic Press.*, 1975.
- [Via05] G. Vial. Efficiency of approximate boundary conditions for corner domains coated with thin layers. *CR. Acad. Sci.*, 340 :215–220, January 2005.
- [VV00] M. S. Vogelius and D. Volkov. Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(4) :723–748, 2000.
- [WI90] E.L. Wilson and A. Ibrahimbegović. Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses. *Finite Elem. Anal. Des.*, 7 :229–241, 1990.



École normale supérieure de Cachan - Antenne de Bretagne

Campus de Ker Lann - Avenue Robert Schuman - 35170 BRUZ

Tél : +33(0)2 99 05 93 00 - Fax : +33(0)2 99 05 93 29