

Un modèle de propagation d'un nuage de fumée

Gabriel Caloz* & Grégory Vial†

9 février 2006

Résumé

L'objet de ce document est de présenter à l'aide d'outils élémentaires le problème de transport dans \mathbb{R} . Une modélisation simple de la propagation d'un nuage de fumée conduit à l'équation d'advection-diffusion 1D. On montre l'existence et l'unicité de la solution du problème sans diffusion à l'aide de la méthode des caractéristiques et on s'intéresse ensuite aux aspects numériques. Des simulations motivent l'introduction du schéma up-wind dont on donne une preuve de la stabilité et de la convergence ; le phénomène de diffusion numérique est aussi abordé.

1 Modélisation

On considère la situation suivante, extraite de [3, chap. 2] : une usine rejette à l'instant initial une fumée toxique qui, sous l'effet du vent, va se propager aux habitations voisines. On souhaite connaître la densité de la fumée lorsque celle-ci atteint une maison, pour en estimer la nocivité.

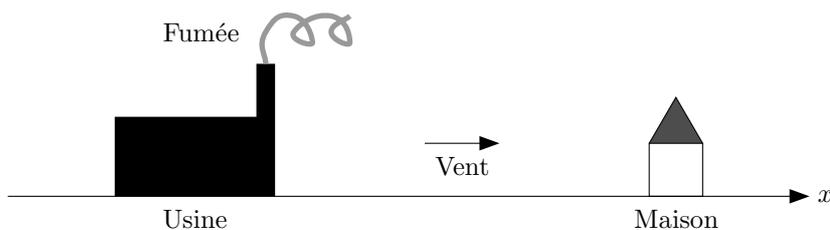


FIG. 1 – Propagation de la fumée émise par une usine

Afin d'écrire un modèle mathématique simple, on fait l'hypothèse que le phénomène est mono-dimensionnel, c'est-à-dire que la vitesse du vent est selon un axe horizontal, voir figure 1.

On introduit les quantités suivantes :

- la concentration de la fumée au point x et au temps t est notée $c(x, t)$;
- la vitesse du vent au point x et au temps t est notée $u(x, t)$.

*UFR de Mathématiques, Bât. 22, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex. gabriel.caloz@univ-rennes1.fr

†Département de Mathématiques, ENS Cachan antenne de Bretagne, Campus de Ker-Lann, 35170 Bruz. gregory.vial@bretagne.ens-cachan.fr

On suppose que la vitesse du vent est une donnée, ainsi que la distribution de fumée à l'instant initial : $u(x, t)$ et $c(x, 0) = c_0(x)$ sont connus (précisément, la concentration initiale $c_0(x)$ correspond à l'émission de l'usine ; il est naturel de supposer que c_0 est à support compact).

On cherche à déterminer la concentration $c(x, t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout temps $t > 0$. On fait l'hypothèse que la fonction $c(x, t)$ est régulière : on suppose $c \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ pour la suite. De plus, on prendra $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

Afin de déterminer les équations vérifiées par $c(x, t)$, on fait le bilan des entrées-sorties dans un "volume" de contrôle $D = (x, x + \delta x)$: soit $V(t)$ la quantité de fumée contenue dans D à l'instant t ,

$$V(t) = \int_D c(\xi, t) d\xi. \quad (1)$$

Dans un intervalle de temps $(t, t + \delta t)$, la variation de quantité de fumée dans le volume D est due

- à l'effet du vent qui "ajoute" de la fumée en x et en "enlève" en $x + \delta x$: cette contribution est proportionnelle à la vitesse du vent, à la densité de fumée au point considéré (qu'on considère constantes sur l'intervalle de temps considéré) et, bien sûr, à la durée δt . Elle s'écrit :

$$[u(x, t)c(x, t) - u(x + \delta x, t)c(x + \delta x, t)] \delta t. \quad (2)$$

- au phénomène de diffusion qui tend, même en l'absence de vent, à ce que le nuage de fumée s'étale dans l'espace. Cette contribution a pour expression

$$[j(x, t) - j(x + \delta x, t)] \delta t, \quad (3)$$

le flux j est donné par une loi empirique : la loi de Fick. L'expression de j est la suivante, elle exprime la tendance de la fumée à se déplacer des endroits de forte concentration vers ceux de faible concentration :

$$j(x, t) = -k \frac{\partial c}{\partial x}(x, t). \quad (4)$$

Le nombre réel k est appelé coefficient de diffusion, et dépend du type de fumée, ainsi que du milieu de propagation.

Le bilan sur le volume $D = (x, x + \delta x)$ pendant l'intervalle de temps $(t, t + \delta t)$ s'écrit finalement

$$V(t + \delta t) - V(t) = \left[u(x, t)c(x, t) - u(x + \delta x, t)c(x + \delta x, t) + k \left(\frac{\partial c}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \right) \right] \delta t.$$

Comme la fonction c est supposée régulière, alors $t \mapsto V(t)$ est dérivable si bien qu'on peut faire tendre δt vers 0 dans l'expression précédente :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t) = - \int_D \frac{\partial(u c)}{\partial x}(\xi, t) d\xi + k \int_D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(\xi, t) d\xi. \quad (5)$$

Toujours à l'aide de l'hypothèse de régularité faite sur c , on peut dériver sous l'intégrale dans l'expression (1) donnant $V(t)$ pour obtenir

$$\forall t > 0 \quad \int_D \left[\frac{\partial c}{\partial t}(\xi, t) + \frac{\partial(u c)}{\partial x}(\xi, t) - k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(\xi, t) \right] d\xi = 0. \quad (6)$$

On fait maintenant tendre δx vers 0 de telle sorte que le volume D se réduit peu à peu au point x . Or, pour toute fonction φ continue sur \mathbb{R} , on peut écrire

$$\frac{1}{\delta x} \int_D \varphi(\zeta) d\zeta = \int_0^1 \varphi(x + s\delta x) ds \longrightarrow \varphi(x) \quad \text{quand } \delta x \rightarrow 0. \quad (7)$$

Comme, pour tout $t > 0$, l'intégrand de l'expression (6) est continu, on obtient à la limite

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(uc)}{\partial x}(x, t) - k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t) = 0. \quad (8)$$

L'équation (8) est appelée *équation d'advection-diffusion* ou de *transport-diffusion*. Elle est assortie de la condition initiale

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad c(x, 0) = c_0(x). \quad (9)$$

2 Analyse mathématique de l'équation de transport sans diffusion

Le but de ce paragraphe est l'étude de l'existence et de l'unicité pour l'équation sans diffusion ($k = 0$).

2.1 Cas où la vitesse du vent est constante

On suppose ici que la vitesse du vent est constante (en temps et en espace) : pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $u(x, t) = u \in \mathbb{R}$. L'équation s'écrit donc

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + u \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ c(x, 0) = c_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (10)$$

On va employer la méthode dite *des caractéristiques* : on cherche une fonction $\mathbf{x}(t)$ telle que c soit constante sur les courbes $(\mathbf{x}(t), t)$. Supposons donc c solution de l'équation (10) et posons $\phi(t) = c(\mathbf{x}(t), t)$, on cherche $\mathbf{x}(t)$ de sorte que ϕ soit constante. Par dérivation composée,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= \frac{\partial c}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{x}'(t) \frac{\partial c}{\partial x}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= [u - \mathbf{x}'(t)] \frac{\partial c}{\partial x}(\mathbf{x}(t), t), \end{aligned}$$

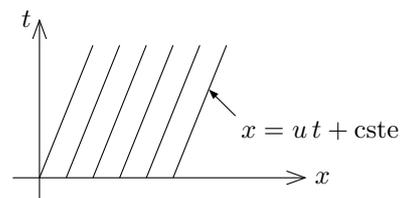
qui est nul si $\mathbf{x}'(t) = u$. On en déduit les courbes, appelées caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (10) :

$$\mathbf{x}(t) = ut + \text{constante}. \quad (11)$$

Réciproquement, il est facile de vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad c(x, t) = c_0(x - ut). \quad (12)$$

Cette expression permet d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité.



Théorème 1 Si $c_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors le problème (10) admet une unique solution c de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad c(x, t) = c_0(x - ut). \quad (13)$$

La formule (13) s'interprète ainsi : la donnée initiale est transportée le long des caractéristiques sans modification. Dans les termes de notre modèle, cela signifie qu'en l'absence de diffusion, la fumée arrive à hauteur de la maison avec la même concentration qu'à son émission.

2.2 Cas où la vitesse du vent est variable

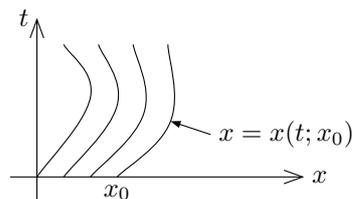
On récrit l'équation sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) c(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ c(x, 0) = c_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (14)$$

On a laissé dans le premier membre la partie principale de l'opérateur (celle qui comporte les dérivées d'ordre le plus élevé). Comme au paragraphe précédent, on recherche les caractéristiques ; ce qui conduit à résoudre l'équation différentielle

$$\mathbf{x}'(t) = u(\mathbf{x}(t), t). \quad (15)$$

Afin d'assurer l'existence globale de solutions pour (15), on suppose la fonction u lipschitzienne par rapport à sa première variable. Soit alors $\mathbf{x}(t; x_0)$ la valeur au temps t de la solution de l'équation (15) satisfaisant la condition initiale $\mathbf{x}(0; x_0) = x_0$.



On pose $\phi(t) = c(\mathbf{x}(t; x_0), t)$, alors on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}(t; x_0), t) \phi(t), \quad (16)$$

qui s'intègre en

$$\forall t > 0 \quad \phi(t) = \phi(0) \exp \left[-\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}(s; x_0), s) ds \right]. \quad (17)$$

D'où finalement

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad c(\mathbf{x}(t; x_0), t) = c_0(x_0) \exp \left[-\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}(s; x_0), s) ds \right]. \quad (18)$$

Comme plus haut, on peut à partir de cette formule déduire un résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 2 Soit $c_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ vérifiant la condition de Lipschitz :

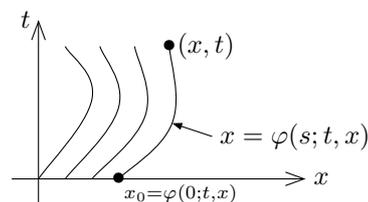
$$\exists L > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad |u(x, t) - u(y, t)| \leq L|x - y|. \quad (19)$$

Alors l'équation (14) admet une unique solution $c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

Preuve. Il suffit de vérifier que la relation (18) définit la solution pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, ce qui est lié au fait que les caractéristiques recouvrent le demi-plan $t > 0$ tout-entier. On va chercher le pied de la caractéristique en résolvant l'équation différentielle (15) "à l'envers".

L'hypothèse de Lipschitz sur u permet de définir globalement les solutions de l'équation différentielle (15). Pour (x, t) fixé, on note $\varphi(s; t, x)$ la valeur au temps $s \in \mathbb{R}$ de la solution satisfaisant la condition initiale

$$\varphi(t; t, x) = x.$$



Si on pose $x_0 = \varphi(0; t, x)$, alors $x(s; x_0) = \varphi(s; t, x)$ et $x(t; x_0) = x$. Ainsi la relation (18) se réécrit :

$$c(x, t) = c_0(\varphi(0; t, x)) \exp \left[- \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(s; t, x), s) ds \right], \quad (20)$$

qui détermine bien $c(x, t)$ de manière unique pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. Il suffit de vérifier la régularité de la fonction c ainsi définie, ce qui se résume à s'assurer que $(s, x, t) \mapsto \varphi(s; x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 . C'est un résultat classique de régularité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux données initiales, voir [1] ou [6]. ■

REMARQUES.

- la formule (18) permet de vérifier aisément que la solution $c(x, t)$ reste positive ou nulle dès que la donnée initiale l'est. Cette propriété est très importante en terme de modélisation, car c représente une concentration ;
- la méthode des caractéristiques n'opère plus dans le cas où $k \neq 0$ car l'équation aux dérivées partielles change de type. Pour plus de détails sur les lois de conservations, on pourra consulter [5].

3 Résolution numérique

3.1 Méthode des caractéristiques pour l'équation sans diffusion

La méthode des caractéristiques (18) fournit un algorithme numérique pour le calcul approché de la solution $c(x, t)$. En effet, x et t étant fixées, il suffit de résoudre, à l'aide d'une méthode d'intégration (Euler ou Runge-Kutta, par exemple) l'équation (15) définissant la caractéristique et d'évaluer $c(x, t)$ à l'aide de la formule (18) (l'intégrale peut être calculée à l'aide de la formule des trapèzes).

La figure 2 présente le résultat obtenu par cette méthode pour les données suivantes :

$$c_0(x) = (1 - |x - 1|) \mathbb{I}_{[0,2]}(x) \quad \text{et} \quad u(x, t) = 3(1 - t). \quad (21)$$

On a utilisé la méthode d'Euler explicite pour la détermination de la caractéristique, et la méthode des trapèzes pour l'évaluation de la formule (18) (pas d'espace 10^{-1} , pas de temps 6×10^{-2}).

On observe sur le graphe de la figure 2 que la donnée initiale "chapeau" est transportée dans le sens des x positifs dans un premier temps (pour $t < 1$ car la vitesse est positive) et dans le sens contraire ensuite.

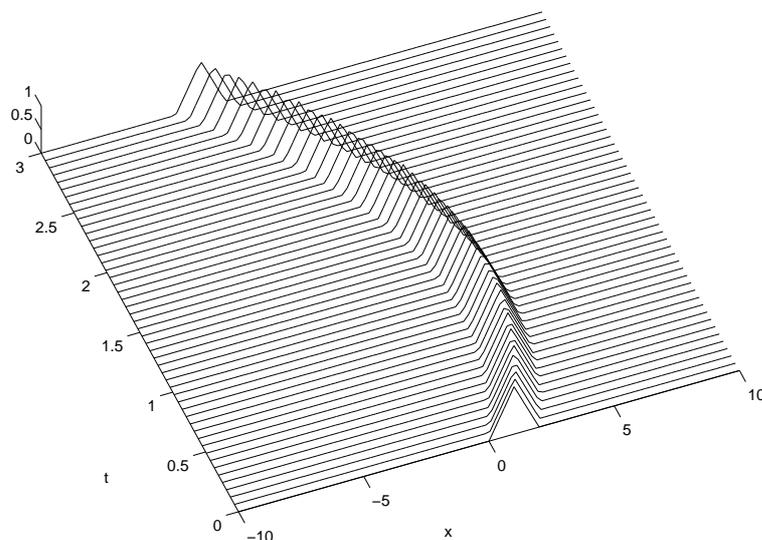


FIG. 2 – Solution obtenue par la méthode des caractéristiques.

Notons que la méthode précédente possède les défauts suivants :

- elle permet aisément la détermination de la solution en un point x à un instant donné t , mais n'est guère adaptée au calcul de la solution pour un grand nombre de valeurs de t ou x (le coût est assez important car chaque calcul nécessite la détermination de la caractéristique) ;
- elle ne se généralise pas au cas où intervient la diffusion (i.e. $k \neq 0$) car la représentation de la solution comme intégrale le long des caractéristiques n'est plus valide. En effet, l'équation aux dérivées partielles change de type (elle n'est plus hyperbolique, mais parabolique, voir [2] par exemple).

3.2 Méthode de différences finies pour l'équation d'advection-diffusion

Une méthode générale pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles consiste à remplacer les dérivées (spatiales et temporelles) par des taux d'accroissement. On parle de méthode de *différences finies* ; pour une étude détaillée dans le cas d'une équation de transport, on renvoie à [2, 4].

3.2.1 En l'absence de diffusion

CAS D'UNE VITESSE u CONSTANTE

Considérons tout d'abord l'équation de transport avec vitesse constante (10). Soient un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$; pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$ et on recherche une approximation c_j^n de $c(x_j, t_n)$. Remplaçant les dérivées partielles par les différences finies suivantes

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x_j, t_n) \simeq \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial c}{\partial x}(x_j, t_n) \simeq \frac{c_j^n - c_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad (22)$$

on obtient le schéma

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad c_j^{n+1} = c_j^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_j^n - c_{j-1}^n), \quad (23)$$

où u est la vitesse (supposée ici constante). L'algorithme est initialisé par la condition $\forall j \in \mathbb{Z}, c_j^0 = c_0(x_j)$. On dit qu'un tel schéma est *explicite* (en temps) car on peut calculer directement $(c_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ à partir de la donnée de $(c_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$.

La figure 3 présente la solution approchée en fonction de x et t dans le cas d'une vitesse u constante égale à 1 (les pas de temps et d'espace valent respectivement 10^{-2} et 2×10^{-2}). L'approximation obtenue est conforme à la solution exacte $c(x, t) = c_0(x - ut)$. Notons cependant que le motif initial (triangulaire) est lissé au fil des itérations. On parle de *diffusion numérique*, phénomène qui s'estompe quand on abaisse le pas d'espace Δx .

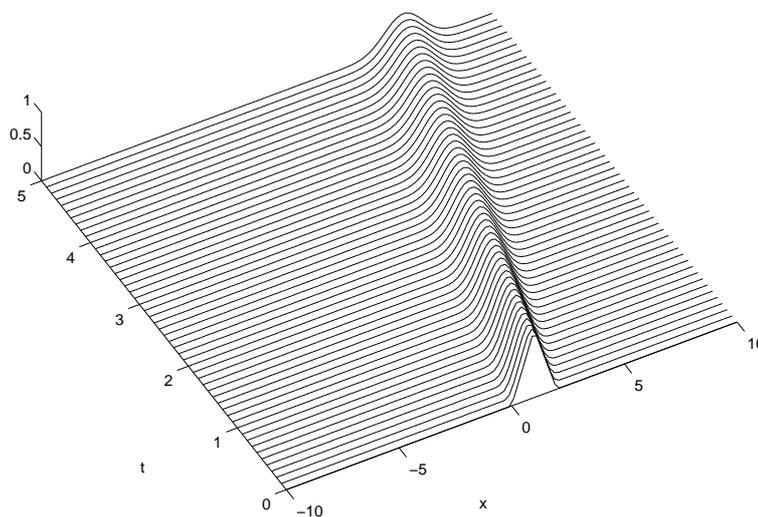


FIG. 3 – Solution obtenue avec le schéma (23), $u = 1$, $\Delta t = 10^{-2}$ et $\Delta x = 2 \times 10^{-2}$.

Quelques simulations numériques pour différents jeux de paramètres mettent en évidence l'importance du nombre $\sigma = u\Delta t / \Delta x$:

- tant que σ reste dans l'intervalle $[0, 1]$, le comportement qualitatif de la solution approchée est correct ;
- pour des valeurs de σ négatives ou supérieures à 1, la solution numérique "explose" (i.e. elle prend des valeurs très grandes et n'est plus proche de la solution exacte).

Précisément, on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 3 On suppose que $\sigma = u\Delta t / \Delta x \in [0, 1]$ et que la solution c est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, avec ses dérivées partielles d'ordre 2 bornées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Alors le schéma (23) est convergent, au sens suivant : on fixe $N \in \mathbb{N}$ et on pose $T = N\Delta t$, il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\max_{0 \leq n \leq N} \sup_{j \in \mathbb{Z}} |c(x_j, t_n) - c_j^n| \leq C T (\Delta t + \Delta x). \quad (24)$$

Preuve. On procède à une analyse de stabilité et consistance (à rapprocher de l'étude des schémas numériques pour la résolution des équations différentielles, voir [1]) :

Stabilité

On considère c_j^n vérifiant le schéma (23) et κ_j^n satisfaisant $\kappa_j^0 = c_j^0 = c_0(x_j)$ et le schéma perturbé

$$\kappa_j^{n+1} = \kappa_j^n - \sigma(\kappa_j^n - \kappa_{j-1}^n) + \mu_j^n. \quad (25)$$

Par linéarité, la différence $e_j^n = c_j^n - \kappa_j^n$ vérifie la relation de récurrence

$$e_j^{n+1} = (1 - \sigma)e_j^n + \sigma e_{j-1}^n + \mu_j^n \quad (26)$$

Notant enfin $\varepsilon^n = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |e_j^n|$, l'hypothèse $\sigma \in [0, 1]$ permet de montrer l'estimation

$$\varepsilon^n \leq \varepsilon^{n-1} + \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\mu_j^{n-1}| \leq \sum_{0 \leq k < N} \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\mu_j^k|, \quad (27)$$

pour $n \leq N$, qui constitue un résultat de stabilité.

Consistance

Si l'on choisit $\kappa_j^n = c(x_j, t_n)$, solution du problème continu, il est aisé de vérifier à l'aide de développements de Taylor que κ_j^n satisfait le schéma perturbé (25) avec

$$|\mu_j^n| \leq C \Delta t (\Delta t + \Delta x), \quad (28)$$

et

$$C = \max \left(\sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} \right|; \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right| \right). \quad (29)$$

Convergence.

En combinant les deux points précédents, et notant l'égalité $T = N\Delta t$, il vient

$$\forall n \leq N \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}} |c(x_j, t_n) - c_j^n| \leq C T (\Delta t + \Delta x), \quad (30)$$

qui est bien le résultat annoncé. ■

La condition $\sigma \in [0, 1]$ s'appelle *condition CFL (Courant-Friedrichs-Lévy)*. Elle peut s'interpréter comme suit : le calcul de l'approximation $c(x_j, t_n)$, c_j^n , nécessite celui de c_{j-1}^{n-1} et c_j^{n-1} , et ainsi de suite, si bien que seul un nombre fini de valeurs c_l^k est utilisées. Le domaine, dit d'influence, ainsi délimité est un triangle, cf. figure 4. Il est raisonnable de penser que la solution numérique ne pourra être correcte qu'à condition que la caractéristique issue de (x_j, t_n) soit intérieure au domaine d'influence : on retrouve la condition $0 \leq \sigma \leq 1$.

La condition $\sigma \leq 1$ signifie $\Delta t < \Delta x$, si bien que le pas d'espace doit être petit si l'on veut une bonne représentation spatiale de la solution. Quant à $\sigma \geq 0$, elle correspond à l'adéquation du décentrement pour l'approximation de la dérivée spatiale avec le signe de la vitesse. Il est possible de mettre au point un schéma adaptatif, nommé *schéma upwind*. Ce schéma s'appliquant naturellement au cas d'une vitesse variable, on l'expose dans ce cas.

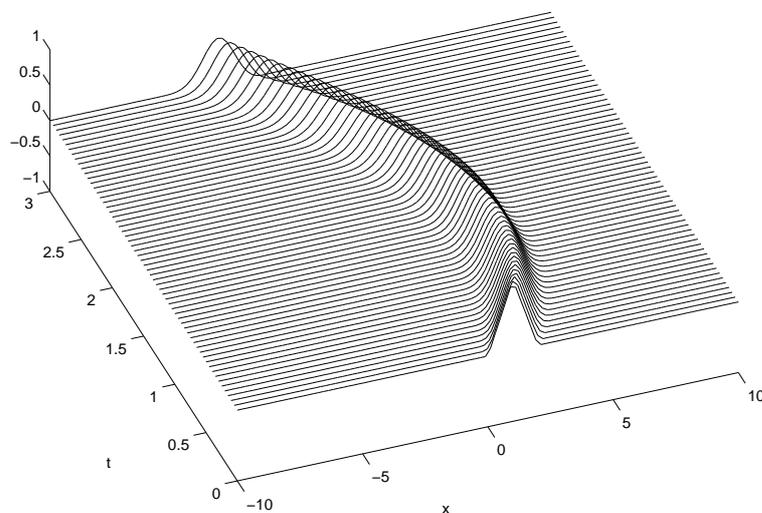


FIG. 5 – Solution obtenue avec le schéma upwind (32), avec une vitesse $u(x, t) = 3(1 - t)$ et les valeurs des paramètres $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$ et $\Delta x = 2 \times 10^{-1}$.

Références

- [1] M. CROUZEIX, A. L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris 1984.
- [2] D. EUVRARD. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur*. Enseignement de la Physique : Mathématiques pour la Physique. Masson, Paris 1994.
- [3] A. FRIEDMAN, W. LITTMAN. *Industrial mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA 1994. A course in solving real-world problems, with contributions by Bernardo Cockburn.
- [4] J. RAPPAZ, M. PICASSO. *Introduction à l'analyse numérique*. Mathématiques. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne 1998.
- [5] D. SERRE. *Systèmes de lois de conservation. I. Fondations*. Diderot Editeur, Paris 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc.
- [6] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, Paris 1995.