

Flexion d'une tige composite

Grégory Vial *

3 février 2011

Résumé

On s'intéresse ici à la déformation d'une tige mince composée de deux matériaux distincts. La tige est munie d'un tampon de faible dimension à l'une de ses deux extrémités. Le modèle mathématique étudié est un problème de transmission unidimensionnel faisant intervenir un petit paramètre ε . On effectue une analyse asymptotique quand ε tend vers 0 et on met en œuvre une méthode numérique basée sur une technique de tirs.

Mots-clés : Équation de Laplace, méthode de tirs, analyse asymptotique.

1 Modélisation

1.1 Déformations d'une tige homogène

Soit une tige de longueur ℓ , de section constante, posée sur ses deux extrémités. Elle est soumise à un chargement distribué \vec{f} , dont la résultante \vec{F} est représentée en son centre de gravité sur la figure 1. Sous l'effet du chargement, la tige se déforme.

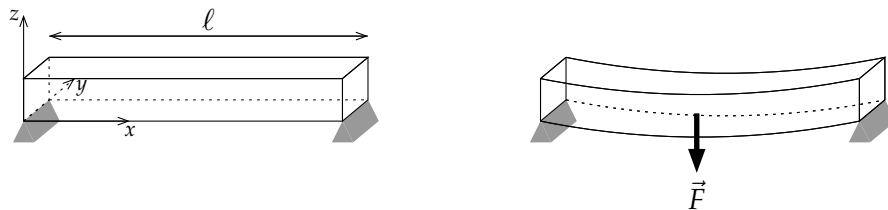


FIGURE 1 – Tige soumise à une force \vec{F} .

On fait l'hypothèse que le déplacement de la tige s'effectue exclusivement dans la direction verticale z . Dans ces conditions, il est suffisant d'étudier ce qui se produit dans le plan $y = 0$. On suppose en outre qu'il n'y a pas de déformation des "tranches" verticales de la poutre. Ainsi on est ramené à un modèle unidimensionnel.

Notons donc $z = u(x)$ la fonction dont le graphe définit la ligne moyenne de la poutre et considérons une portion élémentaire de poutre située entre les abscisses x et $x + \delta x$. Le système étant à l'équilibre, les forces appliquées à cet élément $\delta \ell$ se compensent :

$$-\vec{T}(x) + \vec{T}(x + \delta x) = \vec{f}(x)\delta x, \quad (1)$$

*Département de Mathématiques, ENS Cachan antenne de Bretagne, Campus de Ker-Lann, 35170 Bruz.
gregory.vial@bretagne.ens-cachan.fr

où $-\vec{T}(x)$ est la force appliquée par la partie gauche de la poutre sur l'élément $\delta\ell$ (de même $\vec{T}(x + \delta x)$ pour la partie droite), et $\vec{f}(x)$ la densité linéique de force.

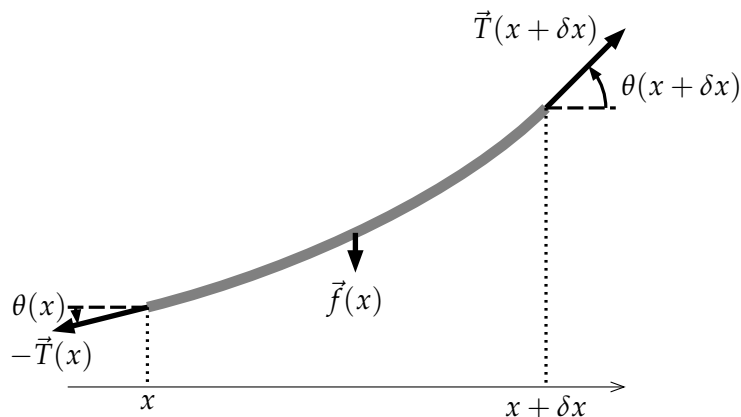


FIGURE 2 – Bilan des forces sur un élément $\delta\ell$.

Enfin, on suppose que les déplacements de la poutre sont faibles par rapport à la position de référence rectiligne. La projection de l'égalité (1) selon l'axe horizontal fournit

$$-T(x) \cos(\theta(x)) + T(x + \delta x) \cos(\theta(x + \delta x)) = 0,$$

où $T(\cdot)$ désigne la norme du vecteur $\vec{T}(\cdot)$. Ainsi $k = T(x) \cos(\theta(x))$ est une constante indépendante de x . On projette ensuite selon la direction verticale pour obtenir

$$-T(x) \sin(\theta(x)) + T(x + \delta x) \sin(\theta(x + \delta x)) = f(x)\delta x,$$

qui s'écrit aussi

$$-T(x) \cos(\theta(x)) \tan(\theta(x)) + T(x + \delta x) \cos(\theta(x + \delta x)) \tan(\theta(x + \delta x)) = f(x)\delta x,$$

soit au premier ordre

$$-k \frac{d}{dx} (\tan \theta(x)) = f(x).$$

Or $\tan(\theta(x)) = u'(x)$, d'où on déduit l'équation

$$-ku''(x) = f(x).$$

Le paramètre k mesure la rigidité de la tige et dépend du matériau de celle-ci. Les conditions aux limites correspondant au fait que la tige est posée à ses deux extrémités s'écrivent $u(0) = u(\ell) = 0$, elle sont appelées *conditions de Dirichlet*.

1.2 Cas d'une tige composite

La figure 3 représente une tige métallique (en gris) dont une extrémité est recouverte d'un tampon en caoutchouc (en noir) ; la tige est posée sur ses deux extrémités. On assimile ce dispositif à une tige composite dont les deux matériaux ont des caractéristiques élastiques distinctes.



FIGURE 3 – La tige posée.

Un chargement f est appliqué sur la tige, qui se déforme. On désigne par x la position selon l'axe de la tige : la partie métallique correspond au segment $[0, 1]$ et le tampon est représenté par l'intervalle $[1, 1 + \varepsilon]$, où le paramètre ε est petit. On note $u_\varepsilon(x)$ le déplacement vertical de la tige à l'abscisse x et on suppose que l'amplitude de la déformation est faible, si bien que la situation peut-être modélisée par les équations suivantes.

$$\begin{cases} -\alpha u_\varepsilon''(x) = f(x) & \text{pour } 0 < x < 1, \\ -u_\varepsilon''(x) = f(x) & \text{pour } 1 < x < 1 + \varepsilon, \\ u_\varepsilon(1^-) = u_\varepsilon(1^+) & \text{et } \alpha u_\varepsilon'(1^-) = u_\varepsilon'(1^+) + \gamma, \\ u_\varepsilon(0) = 0 & \text{et } u_\varepsilon(1 + \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

La condition de transmission $\alpha u_\varepsilon'(1^-) = u_\varepsilon'(1^+) + \gamma$ rend compte de la différence de comportement des deux matériaux qui composent la tige (α est un réel strictement positif). Le réel γ vaut naturellement 0, mais l'étude mathématique nécessitera de considérer des valeurs non nulles.

2 Analyse mathématique du problème de transmission

On suppose la fonction f continue, et on recherche une fonction u_ε , de classe \mathcal{C}^2 sur chacun des intervalles $[0, 1]$ et $[1, 1 + \varepsilon]$, solution du problème (2).

Par intégrations successives, on obtient

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \int_t^1 f(s) \, ds \, dt + Ax + B, & 0 < x < 1 \\ u_\varepsilon(x) = \int_x^{1+\varepsilon} \int_1^t f(s) \, ds \, dt + C(1 + \varepsilon - x) + D, & 1 < x < 1 + \varepsilon. \end{cases} \quad (3)$$

Les conditions aux limites en 0 et $1 + \varepsilon$ fournissent $B = D = 0$. Les constantes A et C sont déterminées à l'aide des conditions de transmission en $x = 1$: $u_\varepsilon(1^-) = u_\varepsilon(1^+)$ fournit $A - \varepsilon C = F(t)$ avec

$$F(t) = \int_1^{1+\varepsilon} \int_1^t f(s) \, ds \, dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \int_t^1 f(s) \, ds \, dt.$$

La condition $\alpha u_\varepsilon'(1^-) = u_\varepsilon'(1^+) + \gamma$ se traduit par $\alpha A = -C + \gamma$. Comme $1 + \varepsilon\alpha > 0$, on peut déterminer A et C de manière unique.

Par ailleurs, on peut obtenir une estimation a priori pour le problème (2) en multipliant les équations différentielles par u_ε et en intégrant par parties :

$$\int_0^1 \alpha u_\varepsilon'^2 \, dx + \int_1^{1+\varepsilon} u_\varepsilon'^2 \, dx = \int_0^{1+\varepsilon} f u_\varepsilon \, dx + \gamma u_\varepsilon(1). \quad (4)$$

Or, puisque $u_\varepsilon(0) = 0$, on peut écrire une inégalité de Poincaré :

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{E},0,1+\varepsilon} := \left[\|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,1+\varepsilon)}^2 + \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,1+\varepsilon)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,1+\varepsilon)},$$

avec C indépendante de ε . D'autre part, il existe une constante, encore notée C , indépendante de ε , telle que

$$|u_\varepsilon(1)| \leq C \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{E},0,1+\varepsilon}$$

si bien que (4) donne l'estimation de la norme de u_ε dans \mathcal{E} par la norme L^2 de f et la valeur absolue de γ , cf. (5).

En conclusion, on a montré le résultat suivant.

Théorème 1 *Le problème (2) admet une solution unique u_ε , de classe \mathcal{C}^2 sur chacun des intervalles $[0, 1]$ et $[1, 1 + \varepsilon]$. De plus, il existe une constante C , indépendante de ε , telle que*

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{E},0,1+\varepsilon} \leq C \left[\|f\|_{L^2(0,1+\varepsilon)} + |\gamma| \right]. \quad (5)$$

3 Résolution numérique

Ce paragraphe est dédié à l'approximation numérique de la solution du problème (2). Soient N, n deux naturels, notons $H, h > 0$ les deux pas d'espace donnés par

$$NH = 1 \quad \text{et} \quad nh = \varepsilon;$$

on définit une subdivision $(x_i) \cup (X_j)$ de l'intervalle $[0, 1 + \varepsilon]$ comme suit :

$$\forall i = 0, \dots, N, x_i = iH \quad \text{et} \quad \forall j = 0, \dots, n, X_j = 1 + jh.$$

On note $y = \text{edoso1}(y_0, dt, t_0, T)$ un solveur de pas dt de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$\forall t \in (t_0, T), y'(t) = \Psi(t, y(t)) \quad ; \quad y(t_0) = y_0.$$

En posant $y(t) = (u(t), u'(t))$, les équations différentielles du problème (2) se mettent sous la forme précédente.

On résout alors le problème (2) à l'aide de l'algorithme de la figure 4.

La figure 5 représente l'approximation obtenue pour $u(x)$ avec les données suivantes :

$$\varepsilon = \frac{1}{10}, \quad \alpha = \frac{1}{10}, \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs des paramètres de l'algorithme sont les suivantes : le solveur EDO choisi est $\text{edoso1} = \text{euler}$, et les paramètres valent $H = \frac{1}{10}$, et $h = \frac{\varepsilon}{10}$.

1. On fixe $y_0 = (0, 0)$ et on résout – à l'aide de `edoso1(y0, H, 0, 1)` – l'équation

$$\begin{cases} -\alpha u''(x) = f(x) & (0 < x < 1), \\ u(0) = 0; u'(0) = 0. \end{cases}$$

On note p l'approximation obtenue pour $u(1)$ et q celle de $u'(1)$.

2. On fixe $y_0 = (p, \alpha q)$ et on résout l'équation suivante à l'aide de `edoso1(y0, h, 1, 1 + epsilon)`

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & (1 < x < 1 + \varepsilon), \\ u(1) = p; u'(1) = \alpha q. \end{cases}$$

On note alors a l'approximation de $u(1 + \varepsilon)$.

3. On répète les deux étapes précédentes en choisissant $y_0 = (0, 1)$; soit alors b l'approximation de $u(1 + \varepsilon)$ obtenue.
4. On pose $y_0 = (0, \frac{a}{a-b})$ et on répète les étapes 1. et 2. pour cette valeur initiale. L'approximation obtenue correspond au problème (2).

FIGURE 4 – Méthode de tir pour la résolution numérique du problème (2).

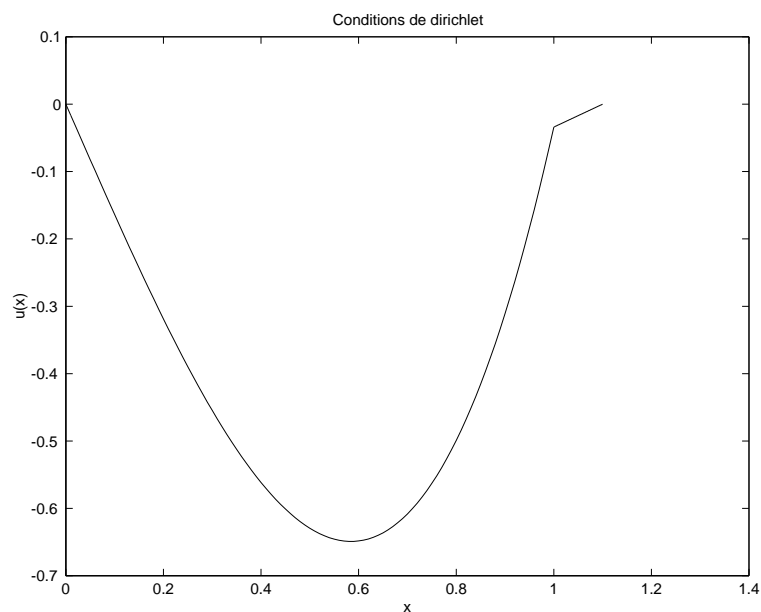


FIGURE 5 – Déformation de la tige composite.

4 Analyse asymptotique

4.1 Adimensionnement

L'objet de ce paragraphe est l'étude du problème (2) quand ε tend vers 0. Dans un but de simplification, on suppose que la fonction c est constante, que $\gamma = 0$, et enfin que $f(x) = 0$ pour $x > 1$. On introduit, dans l'intervalle $[1, 1 + \varepsilon]$ le changement de variable suivant

$$X = 1 + \frac{x-1}{\varepsilon},$$

si bien que X parcourt le segment $[1, 2]$. On note U_ε la fonction telle que

$$\forall x \in [1, 1 + \varepsilon], U_\varepsilon(X) = u_\varepsilon(x).$$

Dans le domaine adimensionné $[0, 1] \cup [1, 2]$, les équations (2) se réécrivent comme suit.

$$\begin{cases} -\alpha u_\varepsilon''(x) = f(x) & \text{pour } 0 < x < 1, \\ -U_\varepsilon''(X) = 0 & \text{pour } 1 < X < 2, \\ u_\varepsilon(1) = U_\varepsilon(1) \text{ et } \alpha \varepsilon u_\varepsilon'(1) = U_\varepsilon'(1), \\ u_\varepsilon(0) = 0 \text{ et } U_\varepsilon(2) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

On cherche un développement asymptotique de la solution sous la forme

$$u_\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_n,$$

avec

$$\begin{aligned} u_n(x) & \text{ est indépendant de } \varepsilon, \text{ pour } x \text{ dans } [0, 1], \\ u_n(x) = U_n(X) & \text{ avec } U_n \text{ indépendant de } \varepsilon, \text{ pour } x \text{ dans } [1, 1 + \varepsilon]. \end{aligned}$$

En injectant ces expressions dans les équations (6), on obtient deux problèmes découplés :

$$\begin{cases} -U_n''(X) = 0 & \text{pour } 1 < X < 2, \\ U_n'(1) = \alpha u_{n-1}'(1), \\ U_n(2) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

avec la convention $U^p = u^p = 0$ pour p strictement négatif.

$$\begin{cases} -\alpha u_n''(x) = f(x) \delta_0^n & \text{pour } 0 < x < 1, \\ u_n(0) = 0, \\ u_n(1) = U_n(1), \end{cases} \quad (8)$$

où δ_0^n désigne le symbole de Kronecker.

4.2 Construction du développement

Pour $n = 0$, les équations (7) montrent que U_0 est nul. Quant à u_0 , il est solution de

$$\begin{cases} -\alpha u_0''(x) = f(x) & \text{pour } 0 < x < 1, \\ u_0(0) = 0, \\ u_0(1) = 0, \end{cases}$$

problème de Dirichlet qui admet une unique solution. Au rang 1, U_1 résout

$$\begin{cases} -U_1''(X) = 0 & \text{pour } 1 < X < 2, \\ U_1'(1) = \alpha u_0'(1), \\ U_1(2) = 0. \end{cases}$$

si bien que $U_1(X) = \alpha u_0'(1)(X - 2)$. On peut reporter la valeur en 1 pour déterminer u_1 :

$$\begin{cases} -\alpha u_1''(x) = 0 & \text{pour } 0 < x < 1, \\ u_1(0) = 0, \\ u_1(1) = -\alpha u_0'(1). \end{cases}$$

Le procédé permet de construire de proche en proche les termes du développement asymptotique de la solution du problème (2).

4.3 Convergence du développement asymptotique

Théorème 2 Soit $N \in \mathbb{N}$. On note r_ε^N le reste du développement asymptotique de u_ε :

$$r_\varepsilon^N = u_\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n.$$

Alors, il existe une constante C , dépendant de N mais pas de ε , telle que

$$\|r_\varepsilon^N\|_{\mathcal{E},0,1} + \sqrt{\varepsilon} \|r_\varepsilon^N\|_{\mathcal{E},1,1+\varepsilon} \leq C\varepsilon^{N+1}.$$

PREUVE. Par construction, le reste $r = r_\varepsilon^N$ résout le problème suivant

$$\begin{cases} -\alpha r''(x) = 0 & \text{pour } 0 < x < 1, \\ -r''(x) = 0 & \text{pour } 1 < x < 1 + \varepsilon, \\ r(1^-) = r(1^+) \quad \text{et} \quad \alpha r'(1^-) = r'(1^+) + \alpha \varepsilon^N u_N'(1^-), \\ r(0) = 0 \quad \text{et} \quad r(1 + \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

L'estimation a priori donnée au théorème 1 permet d'écrire

$$\|r\|_{\mathcal{E},0,1+\varepsilon} \leq C\varepsilon^N.$$

On peut améliorer ce résultat en écrivant

$$r_\varepsilon^N = r_\varepsilon^{N+1} + \varepsilon^{N+1} u_{N+1},$$

et en raisonnant sur chacun des deux intervalles $[0, 1]$ et $[1, 1 + \varepsilon]$ – il faut bien sûr passer de la variable x à la variable X pour obtenir l'estimation extérieure car la suite (U_n) ne dépend pas de ε . ■

Références

- [1] M. CROUZEIX, A. L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris 1984.
- [2] B. ENGQUIST, J. C. NEDELEC. Effective boundary conditions for electromagnetic scattering in thin layers. Rapport interne 278, CMAP 1993.

Suggestions. (le candidat est libre de ne pas les suivre)

1. on pourra expliquer le procédé de construction du développement asymptotique ;
2. on pourra préciser et justifier la méthode numérique décrite rapidement dans le texte. En particulier, on pourra commenter l'utilisation du terme "méthode de tirs" pour le qualifier. On pourra remarquer que l'application qui, à β , associe la valeur de a obtenue après les étapes 1. et 2. en partant de $y_0 = (0, \beta)$, est affine ;
3. on pourra comparer numériquement la solution du système initial par méthode de tirs sur $[0, 1]$ avec l'approximation asymptotique $u_0 + \varepsilon u_1$ décrite au paragraphe 4.2 ;
4. on pourra comparer la méthode proposée avec une autre méthode numérique, par exemple par différences finies, ou une intégration numérique basée sur les expressions (3).