Un modèle de croissance économique

Grégory Vial*

9 février 2006

Résumé

Le but de ce texte est de présenter de manière élémentaire un modèle simple de croissance économique : il s'agit du modèle de Solow, qui ne prend en compte qu'un petit nombre de variables macroéconomiques. Du point de vue mathématique, la dynamique est décrite par une équation différentielle ordinaire.

1 Introduction – Vocabulaire

1.1 Qu'est-ce que la macroéconomie ?

L'objet de la macroéconomie est l'étude des variations temporelles et géographiques de l'activité économique. Elle essaie de répondre, entre autres, aux questions suivantes : pourquoi les revenus sont-ils plus élevés aujourd'hui qu'en 1950 ? Quelles sont les causes des récessions, des dépressions, des disparités entre les pays ?

Tout comme les physiciens ou les biologistes, les macroéconomistes mettent au point des *modèles* qui simplifient la situation réelle et permettent d'en éclairer certains aspects. Les résultats de leurs études aident les décideurs politiques à comprendre l'effet des mesures gouvernementales sur l'économie et à les choisir au mieux.

La macroéconomie est un domaine complexe utilisant un vocabulaire difficile d'accès pour les non initiés. Le but de cette introduction est d'exposer les notions élémentaires dont nous aurons besoin par la suite.

Dans la réalité, tous les indicateurs économiques (taux d'intérêt, investissement, taux d'inflation, consommation, etc.) sont variables et interdépendants. Dans la mise au point d'un modèle, on suppose que seul un petit nombre de quantités varient (*variables endogènes*), toutes les autres étant fixes (*variables exogènes*). Le modèle doit décrire l'évolution des variables endogènes.

1.2 Circuit économique et rémunération

Le diagramme de la figure 1, extrait de [2], résume les échanges d'argent entre les différents acteurs économiques (les ménages, l'état et les entreprises) au travers des trois types de marchés (biens et services, finances et facteurs de production).

Il apparaît que l'épargne des ménages finance les investissements des entreprises et le déficit de l'état. Les entreprises tirent un profit de la vente des biens et services et rémunèrent leurs facteurs de production (leurs employés, actionnaires, fournisseurs).

*Département de Mathématiques, ENS Cachan antenne de Bretagne, Campus de Ker-Lann, 35170 Bruz. gregory.vial@bretagne.ens-cachan.fr

La production de biens et de services dépend d'un grand nombre de variables appelées *facteurs de production* (le nombre d'employés, le capital disponible : machines, locaux, etc.). Si on note Y la production, on appelle *produit marginal* du facteur de production Φ la quantité

$$\mathrm{PM}\Phi := \frac{\partial Y}{\partial \Phi}(\Phi, \ldots) \simeq Y(\Phi + 1, \ldots) - Y(\Phi, \ldots).$$

Les points de suspension remplacent les facteurs de production autres que Φ. Il est environ égal à l'accroissement de production résultant de l'augmentation d'une unité du facteur Φ (on fait ici l'hypothèse que Y varie lentement).

Prenons l'exemple du travail $\Phi = L$, le nombre d'employés. Le produit marginal du travail est la quantité supplémentaire de production réalisée par l'entreprise à l'aide d'une unité supplémentaire de travail. En situation de concurrence, l'entreprise va embaucher tant que l'ajout d'un nouvel employé lui rapporte de l'argent. Si on note W le salaire (supposé égal pour chaque employé) et P le prix de vente unitaire de la production, la variation du profit lors de l'embauche d'un nouvel employé vaut :

$$\Delta\text{profit} = \Delta\text{revenu} - \Delta\text{coût} = P \times \mathrm{PM}L - W.$$

On en déduit que pour si l'entreprise embauche de manière à maximiser son profit, alors

$$\frac{W}{P} = \mathrm{PM}L \quad (W/P \text{ est le salaire réel, mesuré en unités de production}).$$

Cette relation est valable pour tous les facteurs de production, pas seulement pour le travail, elle s'exprime ainsi : "en situation de concurrence, chaque facteur de production reçoit sont produit marginal pour rémunération".

2 Le modèle de Solow

Nous allons présenter un modèle simplifié de croissance économique, dû à R. Solow et T. W. Swan (1956). La présentation qui suit est inspirée de [2, 1, 3].

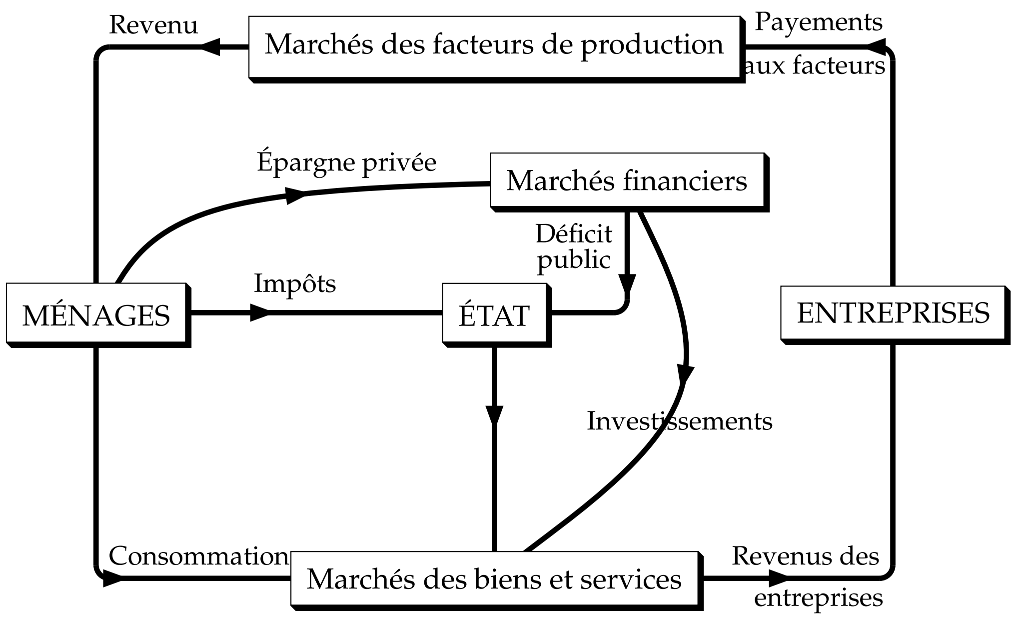

FIG. 1 – Circuit monétaire au travers de l'économie.

2.1 Facteurs de production et fonction de production

On suppose que la production Y des entreprises est subordonnée à la quantité de capital K dont elles disposent, de la force de travail L ainsi que des connaissances A, qui mesurent l'efficacité du travail. La fonction qui, aux facteurs de production K, L, A, associe la production Y est appelée *fonction de production*. On fait plusieurs hypothèses sur la fonction de production :

- (H1) La production ne dépend que du capital K et du travail effectif AL.
- (H2) La production a des rendements d'échelle constants, c'est-à-dire que si on multiplie les quantités de capital et de travail effectif par une constante positive, la production est multipliée par le même facteur.

En termes mathématiques, ces hypothèses peuvent être reformulées comme suit :

- (H1) $Y = F(K, AL)$.
- (H2) $\forall \lambda \geq 0, \quad F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL)$.

L'hypothèse (H1) permet d'écrire

$$Y = F(K, AL) = AL\,F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) \Longrightarrow y = f(k) \quad \text{avec } y = \frac{Y}{AL} \text{ et } k = \frac{K}{AL},$$

si on a posé $f(\cdot) = F(\cdot, 1)$ la *fonction de production intensive*. La quantité y est la production par unité de travail effectif, k le capital par unité de travail effectif.

On fait habituellement les hypothèses suivantes sur la forme intensive de la fonction de production :

- (H3) $\forall k > 0,\ f'(k) > 0$ et $f''(k) < 0$.
- (H4) $f(0) = 0, \lim\limits_{k \to 0} f'(k) = +\infty$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} f'(k) = 0$ (conditions d'Inada).

Ces conditions sont naturelles : la production est une fonction croissante du capital, mais la concavité signifie que la production augmente d'autant moins vite que le capital est élevé. (H4) impose que le produit marginal du capital est très grand pour un stock de capital très bas et qu'il tend à s'annuler quand le stock de capital augmente.

La formule d'Euler pour les fonctions 1-homogènes fournit :

$$F(K, AL) = K\frac{\partial F}{\partial K}(K, AL) + AL\frac{\partial F}{\partial AL}(K, AL) = \mathrm{PM}K \times K + \mathrm{PM}(AL) \times AL.$$

Si on suppose les marchés concurrentiels, le salaire (en unités de production) de chaque facteur est égal à son produit marginal. Ainsi $\mathrm{PM}K \times K$ est la rémunération du capital et $\mathrm{PM}(AL) \times AL$ est la rémunération du travail effectif.

Ainsi la vente de la production permet de rémunérer le capital (coût de l'usure des machines ou loyers par exemple) et le travail (salaire des employés). Mais alors, le profit est nul ! Cela ne signifie pas qu'il n'y ait pas de bénéfices, en effet les propriétaires des entreprises possèdent généralement les biens d'équipement (bâtiments, par exemple) donc une partie de la rémunération du capital contribue à leurs bénéfices.

La figure 2 représente la part du revenu du travail dans le revenu total. Elle a été construite à partir des données des comptes nationaux américains. Ce graphique fait apparaître que la part du travail est constante à environ 0.7. En termes mathématiques, cela signifie :

$$\mathrm{PM}(AL) \times AL = 0.7 \times Y \quad \text{et} \quad \mathrm{PM}K \times K = 0.3 \times Y.$$

Cette observation nous conduit à faire l'hypothèse suivante :

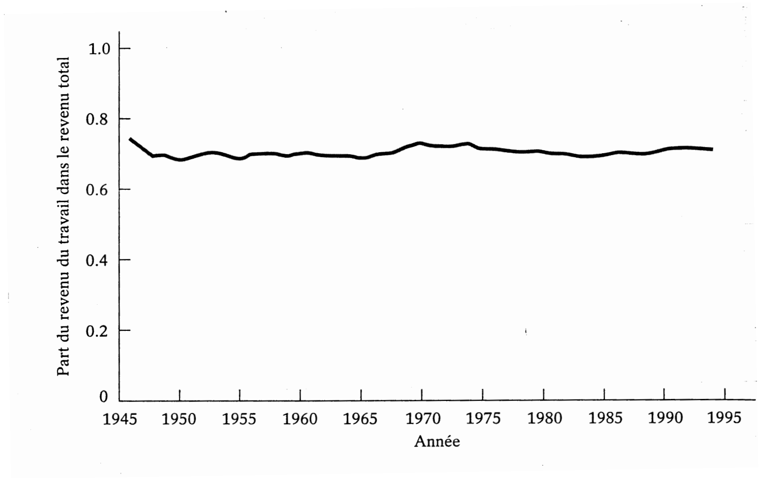

FIG. 2 – Part du revenu du travail dans le revenu total (extrait de [2]).

- (H5) Il existe $\alpha \in (0,1)$ tel que PM$K \times K = \alpha \times Y$ et PM$(AL) \times AL = (1-\alpha) \times Y$.

Pour les états-Unis, α vaut environ 0.3. Les hypothèses (H1)–(H5) permettent de déterminer la forme intensive de la fonction de production :

Théorème. *F vérifie les 5 hypothèses* (H1)–(H5) *si et seulement si*

$$F(K, AL) = cK^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}.$$

PREUVE. Par définition de f,

$$F(K, AL) = AL\, f\left(\frac{K}{AL}\right).$$

Par dérivation par rapport à K, on obtient :

$$\text{PM}K = f'\left(\frac{K}{AL}\right).$$

Or l'hypothèse (H5) permet d'écrire $K \times \text{PM}K = \alpha F(K, AL)$ d'où

$$kf'(k) = f(k) \quad \text{si } k = \frac{K}{AL}.$$

On en déduit que, pour $k > 0$, $f(k) = c\,k^{\alpha}$ où c est une constante, donc K a bien la forme annoncée. La réciproque est une simple vérification. ∎

La fonction $F(K, AL) = cK^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$ est appelée fonction de Cobb-Douglas.

2.2 Dynamique du modèle

Les quantités Y, K, L, A évoluent au cours du temps. Les variations de K, L et A sont données par des lois empiriques issues de l'observation. On suppose que le travail et la connaissance suivent une progression exponentielle :

$$L(t) = L_0 e^{nt} \quad \text{et} \quad A(t) = A_0 e^{gt}. \tag{1}$$

La variation du capital est constituée de l'investissement (qui l'accroît) et de la déprécia-

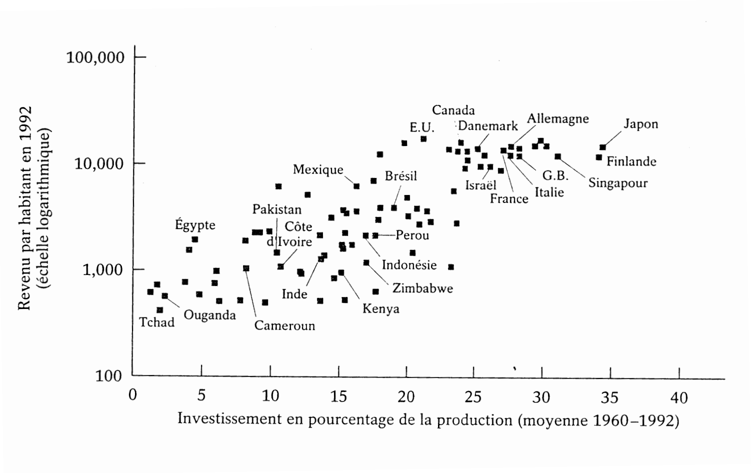

FIG. 3 – Données internationales sur les taux d'investissement (extrait de [2]).

tion (qui le diminue). On suppose la dépréciation proportionnelle au stock de capital. Quant à l'investissement, on postule qu'il est proportionnel à la production (voir figure 3). Mathématiquement, cela s'exprime comme suit :

$$K'(t) = sY(t) - \delta K(t). \tag{2}$$

On fait l'hypothèse $n + g + \delta > 0$. Déterminons maintenant la dynamique de k :

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{K'(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}\Big[A(t)L'(t) + L(t)A'(t)\Big] \\ &= \frac{K'(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{L'(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{A'(t)}{A(t)}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (1) et (2), on obtient :

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t). \tag{3}$$

La quantité $(n + g + \delta)k$ est appelée *investissement de point mort*. L'équation (3) est une équation différentielle autonome, elle décrit l'évolution du capital par unité de travail effectif au cours du temps. L'objet du paragraphe suivant est l'étude de cette équation du point de vue qualitatif. Les questions auxquelles il nous faudra répondre sont les suivantes : est-ce que le capital tend vers un état d'équilibre ? quelle est l'incidence du capital initial ? le modèle rend-il compte de la réalité, permet-il d'expliquer certains phénomènes observés ?

2.3 étude mathématique

L'objet de ce paragraphe est l'étude de l'équation différentielle (3). En dehors de $k = 0$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour assurer l'existence locale d'une solution. La figure 4 donne l'allure de la fonction définissant l'équation différentielle (3).

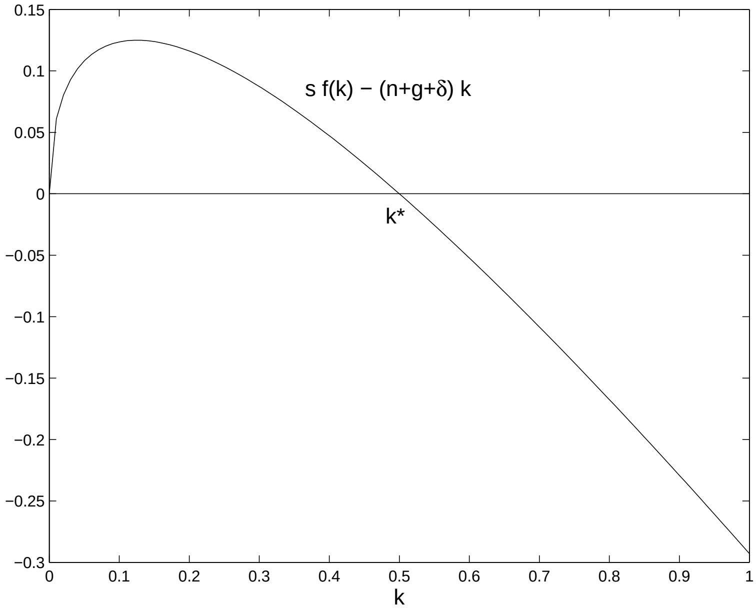

FIG. 4 – La fonction $k \mapsto sf(k) - (n+g+\delta)k$

2.3.1 Comportement qualitatif de $k(t)$

Une étude simple de la fonction second membre montre que l'équation (3) admet deux points d'équilibre : 0 et k^* solution de $sf(k^*) = (n+g+\delta)k^*$. Si $0 < k(0) < k^*$, alors k croît et est borné par k^* car c'est un point d'équilibre. On en déduit l'existence globale et la convergence de $k(t)$ vers le seul point d'équilibre possible : k^*. La même raisonnement permet de montrer que $k(t) \longrightarrow k^*$ quand $k(0) > k^*$.

L'état d'équilibre $k = k^*$ correspond à une production $Y = ALf(k^*)$ dont le taux de croissance est donc le même que celui de AL, c'est-à-dire $n + g$.

Le figure 5 présente la solution $k(t)$ obtenue par intégration numérique de l'équation différentielle (3) à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. La convergence vers l'état d'équilibre k^* y apparaît clairement.

2.3.2 Effet d'une modification du taux d'épargne

Il est aisé de vérifier que k^* est croissant en fonction de s. Ainsi une hausse du taux d'épargne induit une hausse du capital à l'équilibre. Ce phénomène est satisfaisant puisque le taux d'épargne est égal aux taux d'investissement.

2.3.3 Règle d'or de l'accumulation du capital

Déterminons la consommation par unité de travail effectif c^* à l'équilibre :

$$c^* = f(k^*) - sf(k^*) = f(k^*) - (n+g+\delta)k^*$$

La fonction $s \mapsto k^*$ est une fonction croissante dérivable, on peut donc écrire :

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \Big[f'(k^*) - (n+g+\delta)\Big]\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

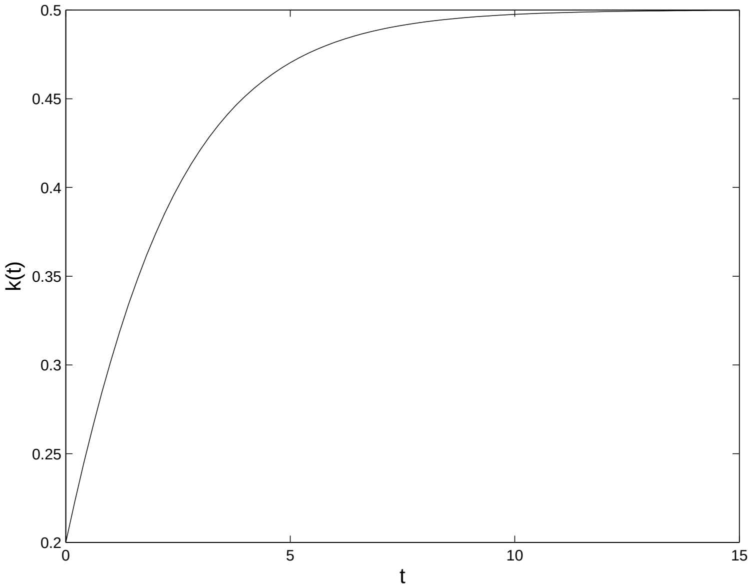

FIG. 5 – Solution $k(t)$ de l'équation (3).

si bien que c^* est maximum quand $f'(k^*) = (n + g + \delta)$ (cette équation possède une unique solution, vu l'hypothèse de concavité de f). Cette condition équivaut à la suivante :

$$\text{PM}K = n + g + \delta$$

Cette équation est appelée *règle d'or d'accumulation du capital* : elle définit de niveau k^*_{or} qui maximise la consommation – aussi parfois appelé *bien-être* en économie – des ménages.

2.4 Conclusions, critique du modèle

La conclusion principale de l'étude du modèle de Solow est la suivante : quel que soit le stock de capital initial, l'économie converge vers un état d'équilibre où la croissance s'effectue aux taux $n + g$, taux de croissance du travail effectif AL. En particulier, ce taux ne dépend pas du taux d'épargne s, ce qui tend à prouver que toute politique économique basée sur une variation des taux d'intérêt est inefficace, enlevant ainsi une part de crédibilité à notre modèle...

D'autre part, le tableau 1 montre les taux de croissance de différents pays et on n'observe la convergence de ces taux que par groupes de pays (les pays industrialisés comme les états-Unis et l'Europe occidentale, les nouvelles économies d'Asie du Sud-est, les pays pauvres). On appelle ces groupes des *clubs de croissance*.

Ces données nous poussent à remettre en cause le fait que $n + g$ soit une variable exogène (dictée de l'extérieur). En effet si les différents clubs de croissance n'ont pas la même efficacité de travail, il est naturel de supposer que cette variable est endogène (elle dépend de la production et du capital). Des modèle de croissance endogène ont été développés pour pallier cette imperfection (voir [3]).

Faut-il alors rejeter le modèle de Solow ? Certainement pas, car il fournit une première explication de la croissance. De plus le caractère exogène du taux de productivité du travail est valable pour certaines situations : le cas de l'Europe occidentale après la deuxième guerre mondiale en témoigne. En effet les technologies étaient importées des états-Unis afin d'accélérer la reconstruction.

Références

[1] R. J. BARRO, X. SALA-I MARTIN. *La croissance économique*. Collection Sciences économiques. Ediscience, Paris 1996.

[2] G. N. MANKIW. *Macroéconomie*. Ouvertures économiques. De Boeck Université, Paris, Bruxelles 1999.

[3] D. ROMER. *Macroéconomie approfondie*. Collection Sciences économiques. Ediscience, Paris 1997.

Suggestions. *(le candidat est libre de ne pas les suivre)*

1. on pourra préciser l'étude de l'équation différentielle (3) ;
2. on pourra commenter les résultats théoriques précédents à l'aide de simulations numériques.
3. on pourra discuter la validité du modèle et essayer de proposer des améliorations ; une approche basée sur des calculs numériques pourra être envisagée.

Pays	**Croissance moyenne annuelle du PIB** (%)		**PIB par habitant** (dollars constants 1990)		
	1950-73	1973-99	1950	1973	1999
France	5.0	2.2	5 221	12 940	19 845
Allemagne	6.0	2.0	4 905	15 068	20 408
Royaume-Uni	3.0	1.9	6 847	11 992	18 554
Italie	5.6	2.4	3 425	10 409	17 730
Espagne	6.8	2.5	2 397	8 739	14 500
Portugal	5.7	2.8	2 132	7 568	1 3182
Pays-Bas	4.7	2.4	5 731	12 555	19 972
Suède	3.7	1.9	6 738	13 494	19 248
états-Unis	3.9	2.9	9 573	16 607	25 955
Japon	9.2	2.9	1 873	11 017	19 905
Russie	4.8	−1.2	2 834	6 058	4 225
Brésil	6.8	3.8	1 673	3 913	5 279
Argentine	3.8	1.8	4 987	7 970	8 761
Maroc	2.7	4.0	1 579	1 604	2 491
Corée	7.6	7.5	876	2 840	13 796
Taïwan	9.3	7.6	922	3 669	16 354
Chine	5.1	8.7	439	839	3 302
Inde	3.7	5.1	597	853	1 851
Nigeria	5.2	2.5	621	1 141	1 030
Afrique du Sud	4.9	2.1	2 251	3 924	3 603

TAB. 1 – Taux de croissances comparés.