Comptabilité nationale

Grégory Vial*

25 novembre 2008

Résumé

La comptabilité nationale est un domaine qui souhaite modéliser l'activité économique d'un pays en prenant en compte l'interdépendance de ses différentes branches afin d'en expliquer, d'en prévoir l'évolution. Cette étude peut aider les pouvoirs publics à trouver des solutions pour relancer certains domaines de l'économie.

Le modèle suivant décrit de manière simple le fonctionnement d'une économie productive. Cette présentation est inspirée de [1] ; pour une étude économique plus précise, on pourra consulter le problème II de [3].

Mots-cls : Problème aux valeurs propres, matrices positives, méthode de puissance.

1 Le modèle linéaire de Leontiev

On suppose que l'activité économique du pays est divisée en n branches distinctes. La branche B^i produit un bien unique P^i qu'aucune autre branche ne produit. Pour fabriquer une unité de bien P^i, la branche B^i utilise a_{ij} unités de bien P^j, et ℓ_i travailleurs, payés au salaire w (supposé le même pour toutes les branches).

Si on note π_j le prix unitaire de vente du produit P^j

- le coût de production d'une unité de bien P^i est $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{ij}\pi_j + w\ell_i$;
- le chiffre d'affaires de la branche B^i est π_i.

Les branches de production ne suffisent pas à consommer tous les biens, on considère que les biens restants sont consommés par les travailleurs, qui y consacrent l'intégralité de leur salaire. Si on note c_j la quantité de bien P^j consommée par un travailleur, il vient

$$w = \sum_{j=1}^n c_j\pi_j,$$

si bien que le coût de production de la branche B^i s'écrit

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + \ell_i c_j)\pi_j.$$

Si on note B la matrice de coefficient générique $B_{ij} = a_{ij} + \ell_i c_j$, et $\pi = (\pi_i)_{1\le i\le n}$ le vecteur des prix, alors le coût de production d'une unité de bien P^i vaut $(B\pi)_i$, $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $B\pi$. La matrice B est appelée *matrice socio-technique*.

*Département de Mathématiques, ENS Cachan antenne de Bretagne, Campus de Ker-Lann, 35170 Bruz. gregory.vial@bretagne.ens-cachan.fr

On se propose d'étudier la question suivante : existe-t-il un prix qui équilibre la croissance, c'est-à-dire tel que les bénéfices relatifs de chaque branche soient égaux ?

2 Équilibre de la croissance

2.1 Mise en équation

On recherche un système de prix π pour lequel le profit relatif de chaque branche est le même. Le profit relatif de la branche B^i est donné par

$$\tau_i = \frac{\pi_i - (B\pi)_i}{(B\pi)_i},$$

si bien que la condition $\tau_1 = \cdots = \tau_n = \tau$ (avec $\tau > 0$ car on cherche à ce que chaque branche soit rentable) équivaut à

$$B\pi = \frac{1}{1+\tau}\pi \quad \text{avec } \tau > 0. \tag{1}$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres.

2.2 Résolution mathématique

Tout d'abord, il faut vérifier que le problème (1) admet une solution. Cela revient à savoir si la matrice B admet une valeur propre dans l'intervalle $(0, 1)$ correspondant à un vecteur propre dont les éléments sont positifs (car c'est un vecteur de prix) ?

Le théorème suivant fournit un cadre permettant de répondre à ces interrogations :

Théorème 1 (Perron-Frobénius, forme faible) *Soit M une matrice carrée à coefficients strictement positifs. Alors le rayon spectral de M, $\rho(M)$, est valeur propre de M, de multiplicité 1 et admet un vecteur propre associé strictement positif.*
De plus, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M, telle que $|\lambda| = \rho(M)$, alors $\lambda = \rho(M)$.

Si tous les coefficients de la matrice B sont strictement positifs (cette hypothèse sera discutée plus bas), ce résultat assure l'existence d'un système de prix π à composantes strictement positives qui vérifié la relation (1) avec $\frac{1}{1+\tau} = \rho(B)$. Le lemme suivant donne une condition qui implique $\tau \in (0, 1)$:

Lemme 1 *Soit M une matrice à coefficients positifs ou nuls. On suppose qu'il existe un vecteur x, à composantes strictement positives, tel que $Mx < x$ (au sens où chaque composante vérifie l'inégalité). Alors le rayon spectral de M est strictement inférieur à 1.*

PREUVE. On note D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = x_i$. Alors D est inversible. La matrice $A = D^{-1}MD$ a tous ses coefficients positifs ou nuls ; la relation $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ fournit

$$\rho(M) \leq \max_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}x_j = \max_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}(Mx)_i,$$

qui est strictement inférieur à 1 par hypothèse. ∎

L'hypothèse d'existence de $x > 0$ tel que $Mx < x$ correspond à un système de prix qui rend toutes les branches de l'économie rentables, elle est tout-à-fait naturelle. En revanche, il n'en va pas de même pour la condition de stricte-positivité des coefficients de la matrice B. En effet, il est fort probable que chaque branche ne soit pas dépendante de toutes les autres, et en particulier d'elle-même. Toutefois, le résultat du théorème 1 ne subsiste pas si on suppose seulement positifs ou nuls les coefficients de la matrice. Il apparaît qu'une hypothèse supplémentaire est requise :

Définition 1 *Soit M une matrice carrée. M est dite irréductible (ou indécomposable) s'il n'existe pas de matrice de permutation Σ telle que*

$$\Sigma M \Sigma^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \quad \textit{avec } B \textit{ et } C \textit{ blocs carrés.}$$

Théorème 2 (Perron-Frobénius, forme forte) *Soit M une matrice irréductible, à coefficients positifs ou nuls. Alors le rayon spectral $\rho(M)$ est valeur propre de M, de multiplicité 1, associée à un vecteur propre strictement positif.*

Pour la démonstration des théorèmes de Perron-Frobénius, on pourra se reporter à [2] ou [4]. L'hypothèse d'irréductibilité est cohérente avec le modèle étudié. En effet, elle impose que chaque bien intervienne, de manière directe ou indirecte, dans la production de tous les autres. Si tel n'est pas le cas, c'est qu'on peut isoler une "sous-économie" autosuffisante, dont la production apparaît comme un facteur externe aux branches restantes de l'économie. Le problème est alors dédoublé (ou multiplié, selon le nombre de composantes irréductibles de la matrice socio-technique). L'exemple suivant, dans lequel on ne considère que 4 branches, détaille cette situation.

Exemple 1 *soit la matrice socio-technique suivante :*

$$B = \left[\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline S & S \end{array}\right] \quad \textit{avec } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Du point de vue économique, cela signifie que les branches 3 et 4 ne consomment pas les produits 1 et 2. La condition d'équilibre économique entre les quatre branches s'écrit :

$$B\pi = \frac{1}{1+\tau}\pi$$

Or les valeurs propres de B sont 1 et -1. Le sous-espace propre associé à 1 est engendré par $(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$. Ce qui impose un taux de croissance $\tau = 0$ et des prix nuls pour les produits 3 et 4 !

Ce résultat signifie qu'on ne peut pas trouver de système de prix qui équilibre la croissance. On peut, en revanche, trouver un système de prix qui équilibre la croissance des branches 1 et 2 d'une part et celle des branches 3 et 4 d'autre part ($p = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ convient).

3 Calcul numérique

Dans les cas concrets, la matrice B contient plusieurs centaines de lignes, voire plusieurs milliers si on cherche à modéliser l'activité économique mondiale. Elle n'est jamais symétrique : la consommation en bien P^i de la branche B^j n'a aucun lien avec la consommation en bien P^j de la branche B^i. En revanche, si on numérote correctement les branches, la matrice B est souvent creuse et structurée, c'est-à-dire qu'un assez grand nombre de coefficients sont nuls et que les autres coefficients se repartissent plus ou moins autour de la diagonale (il est nécessaire pour cela que des branches interdépendantes aient des numéros voisins).

Ces considérations excluent l'utilisation des nombreuses méthodes pour le calcul des valeurs propres des matrices symétrique. D'autre part, on n'a besoin que du rayon spectral de la matrice et du vecteur propre associé. La méthode de la puissance est donc adaptée.

Algorithme 1 (Algorithme de la méthode de la puissance)

```
x=ones(n,1);
err=1;
tol=1e-12;
nbiter=0;
itermax=100;

while (err>tol)&(nbiter<itermax)
  nbiter=nbiter+1;
  xt=x;
  x=A*x;
  x=x/norm(x);
  err=norm(xt-x);
end
lambda=mean(A*x./x);
```

Exemple numérique. On considère l'économie française en 1980 agrégée à 5 branches :

1. agriculture et industrie agro-alimentaire ;
2. énergie ;
3. produits industriels ;
4. bâtiment ;
5. services marchands.

La matrice technique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.0663 & 0.2755 & 0.0153 & 0.1378 \\ 0 & 0 & 0.0459 & 0.0255 & 0.1072 \\ 0.1072 & 0.3521 & 0 & 0.0255 & 0.7246 \\ 0 & 0.0612 & 0.5052 & 0 & 0.2858 \\ 0.2909 & 0.2551 & 0.5256 & 0.0663 & 0 \end{pmatrix}.$$

(source : [3].*)*

La méthode de la puissance, partant du vecteur $x^0 = (1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, fournit en 34 itérations la solution (arrondis par excès à 10^{-4} près)

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.2949 \\ 0.1164 \\ 0.5688 \\ 0.5356 \\ 0.5377 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda = 0.8367$$

Le taux de profit est donc $\tau = \frac{1}{\lambda} - 1 = 19,52\%$ pour chaque branche.

Références

[1] F. C. CHATELIN. *Valeurs propres de matrices*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris 1988.

[2] R. A. HORN, C. R. JOHNSON. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge 1990. Corrected reprint of the 1985 original.

[3] J. PISANI-FERRY, H. STERDYNIAK, P. VILLA. *Problèmes de macroéconomie*. Collection "Économie et Statistiques avancées". Economica, Paris 1984.

[4] D. SERRE. *Les Matrices : Théorie et pratique*. Collection Masson sciences. Dunod, Paris 2001.