

Optimisation et chaînette

Grégory Vial*

2 juin 2008

Résumé

On s'intéresse ici la mise en œuvre de méthodes d'optimisation pour le problème de la chaînette. Il s'agit de trouver la forme prise par une corde suspendue par ses extrémités et soumise à son seul poids.

Mots-clés : Optimisation, pénalisation, méthode de gradient, extrema liés, méthode de Newton.

1 Le problème de la chaînette

1.1 Description du problème

La photo de gauche sur la figure 1 présente la cathédrale de Barcelone *Sagrada Familia*. L'architecte Antoni Gaudi (1852-1926), qui en est à l'origine, utilisait des maquettes dites *funiculaires* pour obtenir une représentation avant construction. Le principe est simple : un système de cordes lestées par des poids prend la forme inversée du bâtiment.

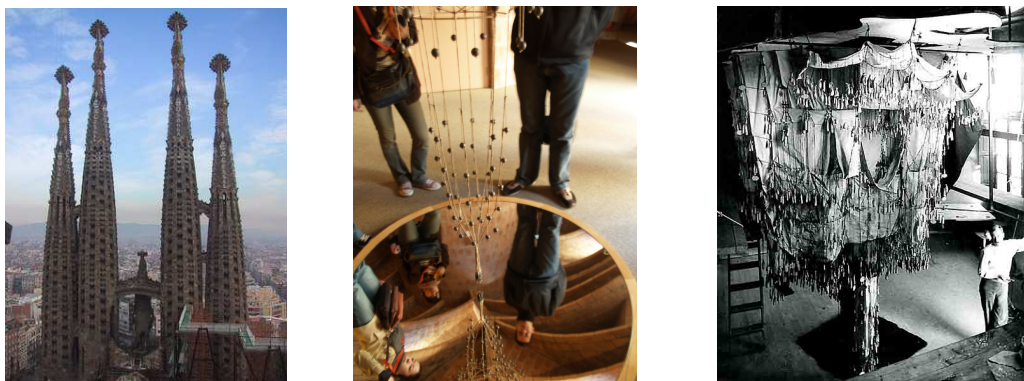


FIG. 1 – La *Sagrada Familia* de Gaudi (Barcelone) et des maquettes funiculaires.

L'objet de ce texte est l'étude de la forme prise par une corde soumise à son poids qui, par révolution autour d'un axe vertical, fournira la surface prise par les dômes de Gaudi. Ce problème-modèle est bien connu, et a intéressé les mathématiciens dès le XVII^e siècle (Bernoulli, Leibnitz et Huygens, en particulier). On peut montrer que la forme d'une telle courbe est une *chaînette*, dont l'équation fait intervenir un cosinus hyperbolique.

Afin de modéliser mathématiquement le problème, on introduit un repère dans lequel la courbe recherchée est définie par une fonction f , voir figure 2. Si on suppose que la

*Département de Mathématiques, ENS Cachan antenne de Bretagne, Campus de Ker-Lann, 35170 Bruz.
gregory.vial@bretagne.ens-cachan.fr

corde est soumise à son seul poids, seule la pesanteur contribue à l'énergie mécanique du système. Dans un élément de longueur $\delta\ell$ situé entre les points d'abscisses x et $x + \delta x$ (voir encore figure 2) l'énergie potentielle élémentaire s'écrit au premier ordre

$$\delta H(f) = \rho \delta\ell g f(x) = \rho g f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \delta x,$$

où ρ est la masse linéique de la corde, et g l'intensité de la pesanteur. L'énergie potentielle globale de la corde a donc pour expression (dans la suite, on supposera $\rho g = 1$)

$$H(f) = \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (1)$$



FIG. 2 – Repère de définition et élément de longueur

La corde prend une position qui tend à minimiser cette énergie potentielle, sous les contraintes de longueur et de fixation en $x = 0$ et $x = 1$. Précisément, on est conduit au problème de minimisation suivant

$$\min \{ H(f) ; f(0) = f(1) = 0 \text{ et } L(f) = \ell_0 \}, \quad (2)$$

où l'énergie potentielle H est définie par (1) et la longueur a pour expression

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (3)$$

On est capable d'obtenir explicitement la solution du problème (2) à l'aide du calcul des variations. Par exemples, pour $\ell_0 = 2 \sinh(1/2)$, la fonction f^* qui réalise le minimum est donnée par

$$f^*(x) = \cosh(x - \frac{1}{2}) - \cosh \frac{1}{2}.$$

Dans la suite, on s'intéresse à la mise en œuvre d'algorithmes d'optimisation pour la résolution du problème (2). La problématique est académique, mais permet de valider les méthodes numériques dans le but de les utiliser ensuite dans des cas où la solution optimale est inconnue.

1.2 Discrétisation du problème

Pour utiliser des algorithmes d'optimisation en dimension finie, on introduit un entier N et un pas de discrétisation $h = 1/(N + 1)$. La subdivision uniforme (x_i) est définie par $x_i = ih$ pour $i = 0, 1, \dots, N + 1$, et la fonction f sera représentée par ses valeurs sur cette grille :

$$Y_i \simeq f(x_i).$$

Les contraintes de fixation imposent évidemment $Y_0 = Y_{N+1} = 0$, et l'optimisation porte ainsi sur le vecteur $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \in \mathbb{R}^N$.

On obtient une version discrète du problème (2)

$$\min \{H_N(Y) ; L_N(Y) = \ell_0\}, \quad (4)$$

où les fonctionnelles H_N et L_N définies sur \mathbb{R}^N sont les approximations respectives de H et L par la méthode des rectangles (avec la convention $Y_0 = Y_{N+1} = 0$)

$$H_N(Y) = \sum_{i=0}^N Y_i \sqrt{h^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2} \quad \text{et} \quad L_N(Y) = \sum_{i=0}^N \sqrt{h^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2}.$$

2 Fonctionnelle pénalisée et algorithme du gradient

À cause de la contrainte de longueur, l'utilisation d'un algorithme de gradient projeté est malaisée pour résoudre le problème (4). On va donc minimiser la fonctionnelle pénalisée suivante sur \mathbb{R}^N tout entier

$$F_\varepsilon(Y) = H_N(Y) + \frac{1}{\varepsilon} (L_N(Y) - \ell_0)^2.$$

La différentiation de H_N et L_N est requise pour mettre en place une méthode de gradient.

Avec la notation $\varphi_k = \sqrt{h^2 + (Y_{k+1} - Y_k)^2}$ pour $k = 1, \dots, N$, on obtient

$$\frac{\partial H_N}{\partial Y_k}(Y) = \varphi_k - \frac{Y_k(Y_{k+1} - Y_k)}{\varphi_k} + \frac{Y_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})}{\varphi_{k-1}}$$

$$\frac{\partial L_N}{\partial Y_k}(Y) = -\frac{Y_{k+1} - Y_k}{\varphi_k} + \frac{Y_k - Y_{k-1}}{\varphi_{k-1}}$$

La figure 3 présente les résultats obtenus pour différentes itérations de la méthode du gradient à pas fixe appliquée à la fonctionnelle pénalisée F_ε . La méthode se résume à l'itération

$$Y^{n+1} = Y^n - \varrho \nabla F_\varepsilon(Y^n).$$

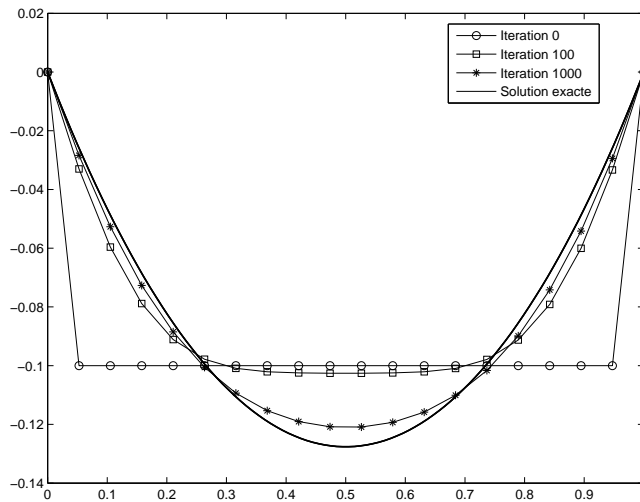


FIG. 3 – Courbes obtenues par la méthode de gradient pénalisé avec les paramètres $N = 18$, $\varepsilon = 10^{-3}$ et $\varrho = 5 \cdot 10^{-4}$.

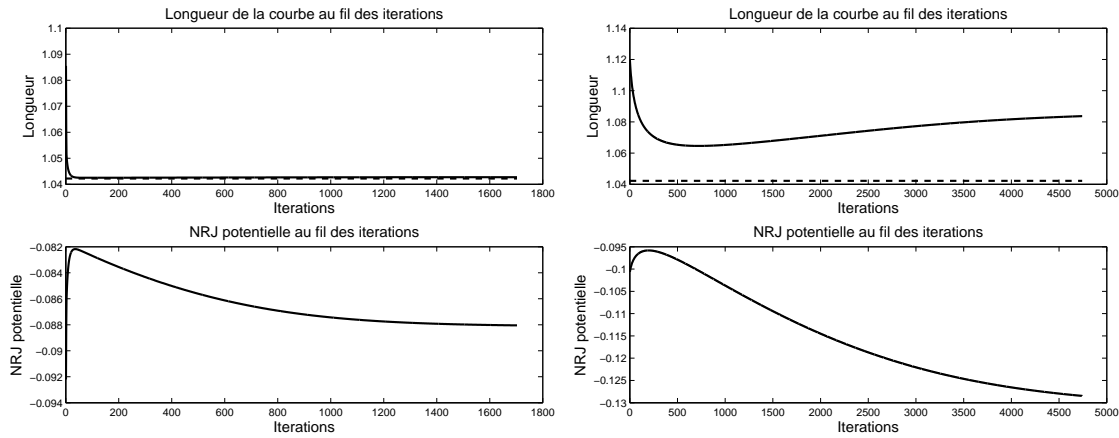


FIG. 4 – Historiques de convergence pour la méthode de gradient pénalisé avec les paramètres $N = 18$, $\rho = 5 \cdot 10^{-4}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$ (gauche) ou $\varepsilon = 10^{-1}$ (droite).

La méthode fournit une approximation raisonnable de la solution exacte en un millier d'itérations environ. La figure 4 laisse apparaître l'influence du paramètre de pénalisation ε : dans le cas d'un ε trop grossier, la pénalisation n'est pas assez forte, et la longueur de la corde obtenue est supérieure à celle prescrite, ce qui permet d'abaisser l'énergie potentielle, mais ne respecte plus la contrainte !

Le choix du paramètre ρ est crucial lui-aussi – et lié à la valeur de ε . Une valeur trop grande de ρ peut faire diverger l'algorithme, et une valeur trop faible en ralentit la convergence.

3 Équations d'Euler-Lagrange et méthode de Newton

Une autre approche pour résoudre le problème (4) consiste à rechercher les points critiques, i.e. solutions des équations d'Euler-Lagrange. En effet, si Y^* désigne la solution du problème de minimisation, il existe un multiplicateur $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla H_N(Y^*) + 2\lambda^* \nabla L_N(Y^*) = 0 \\ L_N(Y^*) = \ell_0. \end{cases} \quad (5)$$

Il est possible d'utiliser la méthode de Newton pour résoudre le système d'équations précédentes. Bien sûr, cela nécessite le calcul des hessiennes de H_N et L_N . Ces dernières sont tri-diagonales :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_N}{\partial Y_k \partial Y_k}(Y) = \frac{3Y_k - 2Y_{k+1}}{\varphi_k} - \frac{Y_k(Y_{k+1} - Y_k)^2}{\varphi_k^3} + \frac{Y_{k-1}}{\varphi_{k-1}} - \frac{Y_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})^2}{\varphi_{k-1}^3} \\ \frac{\partial^2 H_N}{\partial Y_k \partial Y_{k-1}}(Y) = \frac{Y_k - 2Y_{k-1}}{\varphi_{k-1}} + \frac{Y_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})^2}{\varphi_{k-1}^3} \\ \frac{\partial^2 H_N}{\partial Y_k \partial Y_{k+1}}(Y) = \frac{Y_{k+1} - 2Y_k}{\varphi_k} + \frac{Y_k(Y_{k+1} - Y_k)^2}{\varphi_k^3} \end{cases}$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial^2 L_N}{\partial Y_k \partial Y_k}(Y) &= \frac{1}{\varphi_k} - \frac{(Y_{k+1} - Y_k)^2}{\varphi_k^3} + \frac{1}{\varphi_{k-1}} - \frac{(Y_k - Y_{k-1})^2}{\varphi_{k-1}^3} \\ \frac{\partial^2 L_N}{\partial Y_k \partial Y_{k-1}}(Y) &= -\frac{1}{\varphi_{k-1}} + \frac{(Y_k - Y_{k-1})^2}{\varphi_{k-1}^3} \\ \frac{\partial^2 L_N}{\partial Y_k \partial Y_{k+1}}(Y) &= -\frac{1}{\varphi_k} + \frac{(Y_{k+1} - Y_k)^2}{\varphi_k^3} \end{aligned} \right.$$

La figure 5 présente les courbes obtenues à l'aide de la méthode de Newton pour la recherche des points critiques (équations (5)). La convergence est beaucoup plus rapide que pour la méthode du gradient : 7 itérations suffisent pour obtenir une précision inférieure 10^{-3} (en norme uniforme sur $[0, 1]$).

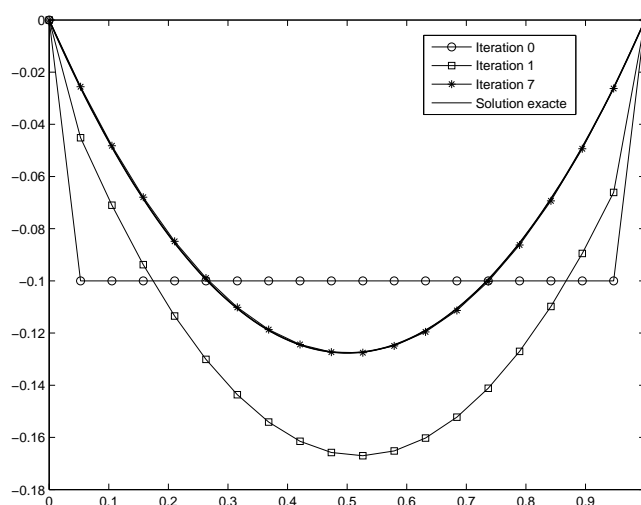


FIG. 5 – Courbes obtenues par la méthode de Newton pour $N = 18$.

Suggestions. (le candidat est libre de ne pas les suivre)

1. on pourra discuter la discrétisation choisie (expressions des fonctionnelles H_N et L_N) et en proposer d'autres, plus précises.
2. on pourra s'intéresser à l'existence pour le problème (4) ;
3. on pourra préciser l'obtention des équations d'Euler-Lagrange (5) ;
4. on pourra préciser les critères d'arrêt possibles pour les différents algorithmes.