

# Étude d'un système mécanique en rotation

Grégory Vial\*

9 février 2006

## Résumé

On considère un cerceau de forme circulaire animé d'un mouvement de rotation à vitesse uniforme autour d'un de ses diamètres (qu'on suppose orienté selon la verticale). Une bille peut se déplacer sur le cerceau (cf. figure 1); on cherche à connaître la position de la bille en régime stationnaire, en fonction de la vitesse de rotation du cerceau. Cette présentation est très largement inspirée de [2].

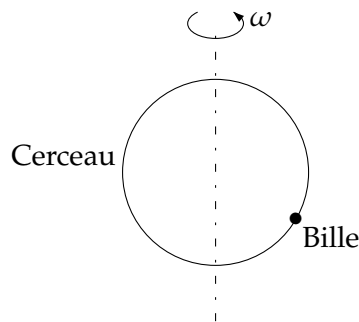


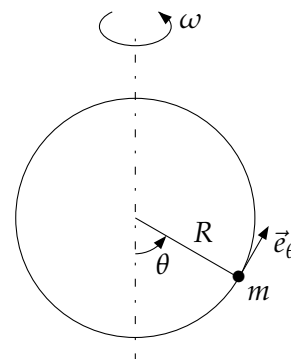
FIG. 1 – Le système mécanique.

## 1 Modélisation

On fait les hypothèses suivantes :

- la bille est assimilée à un point matériel, de masse  $m$  ;
- elle se déplace avec frottements sur le cerceau, proportionnels à sa vitesse ;
- on néglige les frottements dans l'air.

On note  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation du cerceau,  $R$  son rayon et la bille est repérée par l'angle qu'elle forme avec la verticale,  $\theta$ .



Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille s'écrit :

$$m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{f}, \quad (1)$$

\*Département de Mathématiques, ENS Cachan antenne de Bretagne, Campus de Ker-Lann, 35170 Bruz.  
gregory.vial@bretagne.ens-cachan.fr

où  $\vec{P}$  et  $\vec{f}$  sont le poids de la bille et la réaction du cerceau, respectivement. Puisqu'on travaille dans le repère mobile lié au cerceau, l'accélération  $\gamma$  doit prendre en compte l'accélération d'entraînement : la composante tangentielle a pour expression

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{e}_\theta = R \ddot{\theta} - R \omega^2 \cos \theta \sin \theta. \quad (2)$$

Quant aux forces extérieures  $P$  et  $f$ , elles ont pour composantes tangentielles respectives

$$\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = -mg \sin \theta \quad \text{et} \quad \vec{f} \cdot \vec{e}_\theta = -\nu R \dot{\theta}, \quad (3)$$

cette dernière correspond aux frottements de la bille sur le cerceau,  $\nu$  est un coefficient d'intensité. En projetant l'équation (1) selon l'axe tangentiel  $\vec{e}_\theta$ , on obtient l'équation différentielle du second ordre

$$mR \ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \nu R \dot{\theta} + R \omega^2 \cos \theta \sin \theta. \quad (4)$$

Dans un but d'adimensionnement, on pose  $\psi(t) = \theta \left( \sqrt{\frac{R}{g}} t \right)$  et l'équation (4) devient

$$\ddot{\psi} = -\sin \psi + \lambda \sin(2\psi) - \mu \dot{\psi}, \quad (5)$$

avec

$$\lambda = \frac{\omega^2 R}{2g} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\nu}{m} \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (6)$$

L'étude qui suit concerne la dépendance des solutions de l'équation différentielle (5) vis à vis du paramètre  $\lambda > 0$ ; on considère que  $\mu$  est une constante strictement positive.

## 2 Étude des points stationnaires

Il est facile de vérifier que la solution  $\psi_\lambda$  de l'équation (5) (assortie des conditions initiales *ad hoc*) est définie pour tout temps  $t > 0$ . On montre aussi que  $\psi_\lambda$  dépend du paramètre  $\lambda$  de manière  $\mathcal{C}^\infty$ , voir [3] par exemple.

Il est naturel d'étudier les points d'équilibre du système afin de déterminer les positions de la bille en régime stationnaire. Il s'agit des couples  $(\psi, \dot{\psi})$  tels que  $\dot{\psi} = 0$  et  $-\sin \psi + \lambda \sin(2\psi) = 0$ ; deux situations se présentent :

- si  $\lambda > \frac{1}{2}$ , il y a cinq points d'équilibre

$$\psi^* = \pm\pi, \quad \psi^* = 0 \quad \text{et} \quad \psi^* = \pm \arccos \frac{1}{2\lambda}; \quad (7)$$

- si  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ , il y a trois points d'équilibre

$$\psi^* = \pm\pi \quad \text{et} \quad \psi^* = 0. \quad (8)$$

La situation est résumée par le schéma de la figure 2. Afin d'étudier la stabilité des points d'équilibre, on linéarise l'équation différentielle (5) autour de chacun d'entre eux :

- autour de  $\psi^* = 0$ , on obtient

$$\ddot{\psi} + \mu \dot{\psi} + (1 - 2\lambda) \psi = 0, \quad (9)$$

dont les solutions sont stables si  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  et instables pour  $\lambda > \frac{1}{2}$ ;

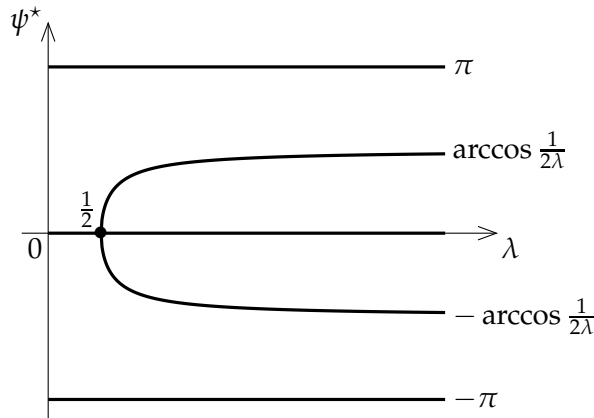


FIG. 2 – Diagramme des points d'équilibre pour l'équation (5).

– autour de  $\psi^* = \pm\pi$ , l'équation devient

$$\ddot{\psi} + \mu \dot{\psi} - (1 + 2\lambda) \psi = 0, \quad (10)$$

dont les solutions sont instables quelle que soit la valeur du paramètre  $\lambda$  ;

– autour de  $\psi^* = \pm \arccos \frac{1}{2\lambda}$  ( $\lambda > \frac{1}{2}$ ), le système linéarisé s'écrit

$$\ddot{\psi} + \mu \dot{\psi} + \frac{4\lambda^2 - 1}{2\lambda} \psi = 0, \quad (11)$$

dont les solutions sont stables.

On peut montrer la stabilité du point stationnaire 0 pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  en utilisant l'énergie mécanique

$$E = \frac{\dot{\psi}^2}{2} - \cos \psi + \frac{\lambda}{2} \cos(2\psi) = \frac{\dot{\psi}^2}{2} + \lambda \left( \cos \psi - \frac{1}{2\lambda} \right)^2 - \frac{1}{4\lambda} - \frac{\lambda}{2} \quad (12)$$

qui décroît le long des trajectoires car le système est dissipatif.

### 3 Résultats numériques

Si les équations linéarisées (9)-(11) peuvent être résolues de manière analytique, on doit recourir à une approximation numérique pour l'équation non-linéaire (5). On a choisi ici la classique méthode de Runge et Kutta d'ordre 4 (RK4) qui fournit une excellente approximation même pour des pas de temps assez grossiers ; toutes les simulations exposées dans ce paragraphe ont été effectuées avec un pas  $\delta t = 0.1$ .

La figure 3 présente les graphes des solutions  $\psi$  de l'équation (5) sous les conditions initiales  $\psi(0) = 0.1$  et  $\dot{\psi}(0) = 0$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  entre 0.9 et 1.1.

La figure 4 rassemble les graphes des solutions obtenues pour les valeurs  $\lambda = 0.25, 0.5$  et  $0.75$ . On observe des comportements différents pour de mêmes valeurs initiales  $\psi(0) = 0.1$  et  $\dot{\psi}(0) = 0$ , qui corroborent l'étude de stabilité faite au paragraphe précédent.

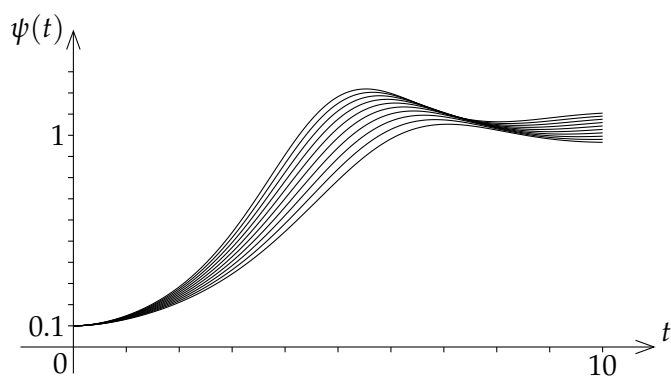


FIG. 3 – Trajectoires depuis  $\psi(0) = 0.1$  et  $\dot{\psi}(0) = 0$  pour dix valeurs de  $\lambda$  entre 0.9 et 1.1.

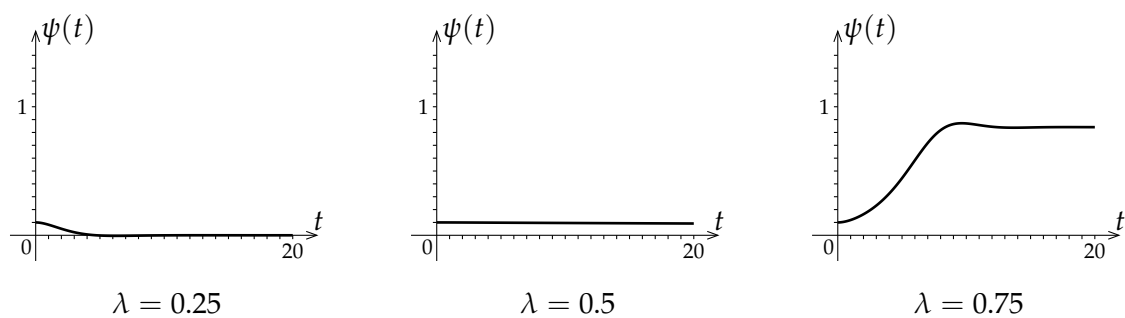


FIG. 4 – Trajectoire pour  $\psi(0) = 0.1$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0$  et diverses valeurs de  $\lambda$ .

## 4 Prolongement : vers la théorie de la bifurcation

Le point d'équilibre  $\psi^* = 0$  correspond pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  à un croisement du diagramme 2 ; le comportement physique du système mécanique change à son voisinage, on dit qu'il s'agit d'un *point de bifurcation*. Si les calculs ont pu être effectués explicitement dans le cas étudié aux paragraphes précédents, ce n'est pas toujours le cas. Aussi une théorie a-t-elle été développée autour de la notion de bifurcation.

Considérons le cas général d'une équation différentielle autonome

$$u'_\lambda(t) = F(\lambda, u_\lambda(t)), t > 0 \quad \text{avec} \quad u'_\lambda(0) \text{ donné}, \quad (13)$$

avec  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  régulière. On suppose que pour toute valeur du paramètre  $\lambda$ , le point  $u^* = 0$  est stationnaire (on peut toujours se ramener à cette situation). Il s'agit de déterminer si  $(\lambda^*, u^* = 0)$  est un point de bifurcation.

On introduit l'équation aux points critiques :

$$F(\lambda, u) = 0 \quad (E_\lambda)$$

et l'ensemble des solutions  $S_\lambda = \{u \text{ satisfait } (E_\lambda)\}$ . On a bien sûr  $0 \in S_\lambda$  pour tout  $\lambda$ .

**Définition 1** On dit que  $(\lambda^*, 0)$  est un point de bifurcation s'il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\lambda^*$  et une fonction régulière  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\forall \lambda \in \mathcal{U} \setminus \{\lambda^*\}, x(\lambda) \in S_\lambda \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad x(\lambda^*) = 0. \quad (14)$$

On donne ici les résultats dans le cas de la dimension  $n = 1$ . Il est facile de donner une condition nécessaire à l'aide du théorème des fonctions implicites :

**Proposition 1 (condition nécessaire dans le cas  $n = 1$ )** Si  $(\lambda^*, 0)$  est un point de bifurcation, alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda^*, 0) = 0. \quad (15)$$

Réciproquement, on peut donner une condition suffisante :

**Proposition 2 (condition suffisante dans le cas  $n = 1$ )** Si  $\lambda^*$  satisfait

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda^*, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}(\lambda^*, 0) \neq 0, \quad (16)$$

alors  $(\lambda^*, 0)$  est un point de bifurcation.

Ces énoncés se généralisent en dimension supérieure et permettent de retrouver dans le cas  $n = 2$  les résultats des paragraphes précédents. Pour plus de précisions, on pourra consulter [1].

## Références

- [1] S. N. CHOW, J. K. HALE. *Methods of bifurcation theory*, volume 251 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science]*. Springer-Verlag, New York 1982.
- [2] J. RAPPAZ. Théorie de la bifurcation. Notes de cours EPFL, Lausanne.
- [3] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC. *Eléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, Paris 1995.

---

### Suggestions. (le candidat est libre de ne pas les suivre)

1. on pourra détailler la modélisation du problème, en particulier l'expression de l'accélération (2) ;
2. on pourra justifier l'étude de stabilité des points d'équilibre ;
3. on pourra commenter les graphes des figures 3 et 4 ;
4. on pourra programmer une méthode de résolution numérique de l'équation différentielle (5) et observer le comportement des solutions en fonction de  $\lambda$ . Il est suggéré de mettre en évidence le comportement de la trajectoire  $\psi$  en temps long ;
5. on pourra interpréter dans les termes du modèle les résultats mathématiques obtenus.