ENS Cachan Bretagne **Année Scolaire 2009-2010**

Licence de mathématiques - Module ALNU

TP numéro 7 - Méthodes de la puissance et de la puissance inverse

Partie 1. *Méthode de la puissance*

Soit A une matrice carrée d'ordre d. On définit la méthode de la puissance de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \textit{Initialisation :} & x^{(0)} \textit{ donné} \\ & q^{(0)} = x^{(0)}/\|x^{(0)}\| \\ & \\ \textit{Itérations : } k \geq 0 & x^{(k)} = Aq^{(k-1)} \\ & \lambda^{(k)}(j) = x^{(k)}(j)/q^{(k-1)}(j) \text{ pour } j = 1, \ldots, d \\ & q^{(k)} = x^{(k)}/\|x^{(k)}\| \end{array}$$

Théorème. Soit A une matrice carrée d'ordre d, diagonalisable dont la valeur propre de plus grand module λ_1 est unique. Si $q^{(0)}$ n'est pas orthogonal au sous espace propre associé à λ_1, alors la suite construite précédemment vérifie :

1. $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|}\right)^k q^{(k)}$ est un vecteur propre de norme unité associé à λ_1,
2. $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \|Aq^{(k)}\| = |\lambda_1|$,
3. $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{(k+1)}(j)}{q^{(k)}(j)} = \lambda_1$ pour $1 \leq j \leq d$ si $q^{(k)}(j) \neq 0$.

- Écrire un programme qui, étant donnés une matrice A, un vecteur $x^{(0)}$ et un entier N, construit les suites de vecteurs $x^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$ et $q^{(k)}$ pour $k = 1, 2, \ldots, N$.
- On testera le programme avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad N = 10.$$

  Tracer l'évolution des composantes de $\lambda^{(k)}$ et de $\|x^{(k)}\|_2$ en fonction de k pour $1 \leq k \leq N$. Que peut-on en déduire ?
- Tester de même le script avec le vecteur initial $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ et $N = 100$. Tracer l'évolution des composantes de $\lambda^{(k)}$ et de $\|x^{(k)}\|_2$ en fonction de k pour $1 \leq k \leq N$.
- Écrire un nouveau programme qui prend comme argument A, $x^{(0)}$ et une tolérance TOL, analogue au programme précédent, mais qui utilise cette fois un critère d'arrêt sur la convergence de la valeur propre.
  Tester ce programme avec le vecteur initial $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ et une tolérance de 10^{-5}.

Partie 2. *Méthode de la puissance inverse*

Cette méthode permet d'obtenir la valeur propre de plus petit module de la matrice A en appliquant la méthode de la puissance à la matrice A^{-1}.

$$\begin{array}{ll}
\textit{Initialisation :} & x^{(0)} \textit{ donné} \\
 & q^{(0)} = x^{(0)}/\|x^{(0)}\|_\infty \\
 & \\
\textit{Itérations : } k \geq 0 & \text{Calculer } x^{(k)} \text{ en résolvant } Ax^{(k)} = q^{(k-1)} \\
 & \gamma^{(k)} = x^{(k)}(i) \text{ où } |x^{(k)}(i)| = \|x^{(k)}\|_\infty \\
 & q^{(k)} = x^{(k)}/\gamma^{(k)}
\end{array}$$

Proposition. Soit A une matrice diagonalisable. Si λ est la valeur propre unique de plus petit module de A et si $q^{(0)}$ n'est pas orthogonal au sous-espace propre associé à λ, alors la direction de $q^{(k)}$ tend vers celle du sous-espace associé à λ et

$$\lim_{k\to\infty} \gamma^{(k)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Écrire un programme qui, étant donnés une matrice A, un vecteur $x^{(0)}$ et un entier N, construit les suites de vecteurs $x^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$ et $q^{(k)}$ pour $k = 1, 2, \ldots, N$.
- Donner $x^{(6)}$ puis $x^{(100)}$ dans les deux données initiales suivantes : $x^{(0)} = (1, 1, 1, 0)^T$ et $x^{(0)} = (1, 0, 1, 0)^T$.
  Tracer l'évolution de $1/\|x^{(k)}\|_\infty$ en fonction de k pour $k = 1, 2, \ldots, N$..
- Soit μ un réel donné. En considérant la matrice $A - \mu I$, proposer un algorithme qui permet de calculer l'ensemble des valeurs propres de A.