ENS Cachan Bretagne **Année Scolaire 2009-2010**

Licence de mathématiques - Module ALNU

TP numéro 6 - Méthodes de gradient pour la résolution des systèmes linéaires

Partie 1. *Méthode du gradient à pas fixe*

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la fonctionnelle définie par

$$J(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle B, X\rangle,$$

où $B = (1, 0, \ldots, 0, 1)^T$ et A est la matrice carrée A tridiagonale, définie par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Rappeler l'algorithme de la méthode du gradient à pas fixe.
- On choisit $n = 20$. Tester la convergence de l'algorithme en fonction de la valeur du pas ρ. Vérifier que la meilleur valeur du pas est $\rho_c = \frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$ (où $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de A).
- Vérifier que dans le cas $\rho = \rho_c$, la convergence est géométrique, de raison $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$, où κ est le conditionnement de A en norme 2.

Partie 2. *Méthode du gradient à pas optimal*

- Rappeler l'algorithme de la méthode du gradient à pas optimal.
- Appliquer cet algorithme à la minimisation de la fonctionnelle J définie ci-dessus.
- Vérifier que l'algorithme converge géométriquement, avec une raison égale à $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$.

Partie 3. *Méthode du gradient conjugué*

On définit l'algorithme de la méthode du gradient conjugué de la façon suivante :

Initialisation :	$x^{(0)}$ *donné*, ε *donné*	
	$r^{(0)} = b - A \cdot x^{(0)}$	*(résidu initial)*
	$p^{(0)} = r^{(0)}$	*(direction de descente initiale)*
	$\theta_0 = \langle p^{(0)}, r^{(0)}\rangle$	
Itérations : $k \geq 0$	$\alpha_k = \theta_k / \langle A \cdot p^{(k)}\,,\, p^{(k)}\rangle$	*(taux dans la direction de descente)*
	$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k\, p^{(k)}$	*(mise à jour de la solution)*
	$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k\, A \cdot p^{(k)}$	*(résidu à l'itération* $k+1$*)*
	Arrêt des itérations : $\|r^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$?	
	$\theta_{k+1} = \|r^{(k+1)}\|^2$	
	$\beta_{k+1} = \theta_{k+1}/\theta_k$	
	$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_{k+1}\, p^{(k)}$	*(nouvelle direction de descente)*

- Appliquer cet algorithme à la minimisation de la fonctionnelle J définie précédemment.
- En combien d'itérations converge la méthode ?