ENS Cachan Bretagne **Année Scolaire 2009-2010**

Licence de mathématiques - Module ALNU

TP numéro 5 - Méthodes itératives

Présentation. Le but de ce TP est de comparer quelques méthodes itératives pour résoudre le système $Ax = b$.

Principe : On écrit la matrice A sous la forme $A = M - N$ avec M “facile” à inverser et on construit la suite

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n & \text{donné,} \\ Mx_{k+1} = Nx_k + b. \end{cases}$$

La matrice $M^{-1}N$ est appelée matrice d'itération.

Écrivons $A = D - E - F$ avec
D la partie diagonale de A : $D = (A_{ij}\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$,
$-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A : $E_{ij} = -A_{ij}$ si $i > j$, 0 sinon,
$-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A : $F_{ij} = -A_{ij}$ si $i < j$, 0 sinon.

Méthode de Jacobi : $M = D$ et $N = E + F$.

Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$.

Méthode de relaxation : $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$ avec $\omega \in \mathbb{R}_*^+$.

Partie 1. *Comparaison des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation*

Soit la matrice carrée A de taille n, tridiagonale, définie par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ecrire des fonctions qui implémentent les trois méthodes citées ci-dessus.
- Application : utiliser ces trois méthodes sur la matrice A et le second membre $B = (1, 0, \dots, 0, 1)^T$, pour $n = 10$. On effectuera 100 itérations. Dans le cas de la méthode de relaxation, on choisira $\omega = \frac{3}{2}$.
- Dans le cas où $n = 20$, déterminer le paramètre optimal dans la méthode de relaxation, en représentant le rayon spectral de la matrice d'itération obtenue en fonction de ω.
- Pour différentes valeurs de n, comparer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision de 10^{-12} entre la solution approchée et la solution exacte. Quelle relation y a t-il entre le nombre d'itérations et le rayon spectral ?

Partie 2. *Quelques contre-exemples*

- Vérifier que la matrice
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}$$
est définie positive, mais que la méthode de Jacobi ne converge pas.
- Vérifier que la méthode de Jacobi appliquée à la matrice
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
converge, mais que la méthode de Gauss-Seidel diverge.
- Vérifier que la méthode de Gauss-Seidel appliquée à la matrice
$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
converge, mais que la méthode de Jacobi diverge.