ENS Cachan Bretagne **Année Scolaire 2009-2010**

Licence de mathématiques - Module ALNU

TP numéro 4

Partie 1. *Mise en œuvre de l'algorithme de Gauss*

Le but de cette partie est de mettre en œuvre l'algorithme de Gauss pour la résolution d'un système linéaire carré.

- on testera différentes stratégies de pivot ;
- on utilisera l'algorithme pour obtenir la factorisation LU d'une matrice ;
- on vérifiera la conservation du profil ;
- on évaluera les temps d'exécution en fonction de la taille de la matrice.

Les matrices suivantes de taille $d \times d$ pourront servir dans les tests :

- A telle que $A_{1j} = A_{i1} = 1 = A_{ii}$ pour tous i, j et 0 sinon.
- B telle que $A_{dj} = A_{id} = 1 = A_{ii}$ pour tous i, j et 0 sinon.

Partie 2. *Application à la résolution d'un problème aux limites*

Dans cette partie, on cherche à résoudre le problème suivant : étant données des fonctions a et f continues, on recherche une fonction u, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$, satisfaisant

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Pour cela, on discrétise l'intervalle $[0, 1]$ en

$$x_i = ih \quad (i = 0, 1, \dots, N+1) \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{N+1}.$$

On note alors u_i l'approximation de $u(x_i)$ obtenue par *différences finies*, i.e. en remplaçant les dérivées par des taux d'accroissement :

$$\forall i = 1, 2, \dots, N, \quad \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + a(x_i)u_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad u_0 = u_{N+1} = 0.$$

En notant U le vecteur $(u_i)_{1 \leq i \leq N}$, F le vecteur $(f(x_i))_{1 \leq i \leq N}$ et $a_i = a(x_i)$, on récrit le problème sous la forme d'un système linéaire $AU = F$, où la matrice A est définie par

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_N \end{pmatrix}$$

On peut montrer que, si a est une fonction positive, la matrice A est symétrique définie positive, donc inversible.

Écrire un programme qui définissent la matrice A, calculent le vecteur solution U correspondant (on pourra représenter U graphiquement par la fonction affine par morceaux qu'il définit, et le comparer à la solution exacte du problème différentiel dans un cas particulier où elle est connue).

Partie 3. *Application à un problème de moindres carrés*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et un entier naturel n, on recherche un polynôme p_n, de degré au plus n tel que la quantité suivante soit minimale :

$$\int_0^1 |f(x) - p_n(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

- Montrer que le problème est équivalent à

$$\forall q \in \mathbb{P}_n, \int_0^1 p_n(x)q(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

- Montrer que la recherche des coefficients de p_n dans la base canonique de $\mathbb{P}_n$ revient à la résolution d'un système linéaire qu'on résoudra à l'aide de l'algorithme de la partie 1 (on fera varier n et on observera l'évolution de p_n).