ENS Cachan Bretagne **Année Scolaire 2009-2010**

Licence de mathématiques - Module ALNU

TP numéro 3

Exercice 1. *Boules associées à différentes normes*

Écrire un script permettant de représenter la boule unité dans $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|.\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. On pourra suivre la démarche suivante : effectuer un tirage au hasard de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la commande `rand`, puis représenter sur la même figure chaque vecteur normalisé $\vec{v}$ par le segment $[OM]$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$.
Représenter la boule unité pour les valeurs de $p = 0.5 : 0.5 : 4$, puis $p = \infty$.

Exercice 2. *Normes usuelles*

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculer les quantités : $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_{\mathrm{F}}$. Tracer la fonction $\lambda \mapsto \|(\lambda I - A)^{-1}\|$ et indiquer les valeurs propres de A sur le dessin.

Exercice 3. *Normes subordonnées*

La fonction `norm(A,p)` définit la norme matricielle $\|A\|_p$ uniquement pour $p = 1, 2$, 'inf' et 'fro'. Pour les autres $p \in [1, \infty]$ il n'existe pas de formule pour calculer la norme. On se propose de définir une fonction `NormeMC` qui donne une approximation de la norme matricielle

$$\|A\|_p = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

pour tout $p \in [1, \infty]$. Les lettres `MC` correspondent à “Monte Carlo” et indiquent qu'on utilise une méthode basée sur le hasard.
Idée : On choisit N vecteurs au hasard et on prend le max de $\|Ax\|_p / \|x\|_p$ sur cet ensemble. Pour N très grand, on devrait trouver une bonne approximation de $\|A\|_p$. Les trois arguments de la fonction sont :
- `A` : une matrice quelconque
- `p` : un nombre dans $[1, \infty]$
- `N` : le nombre de tirages.

Écrire la fonction `function np=NormeMC(A,p,N)` qui calculera une approximation de $\|A\|_p$ suivant la méthode proposée ci-dessus.
Comparer `NormeMC(A,p,N)` et `norm(A,p)` pour $p = 1, 2$ et ∞. Proposer une valeur de N par défaut.
Étudier la dépendance de la norme $\|A\|_p$ relativement à p. À cet effet, on pourra construire la fonction `Depnorme(A,pmax)` qui affichera la norme $\|A\|_p$ pour $1 \leq p \leq pmax$.
Tester la fonction ci-dessus pour $pmax = 50$ et différentes matrices `A` (e.g. `[1 2 ; 1 3]`, `[1 2 ; 3 1]`, matrice de Van-Der-Monde).

Exercice 4. *Rayon spectral*

Dans **Scilab**, le rayon spectral ρ d'une matrice A est donné par la commande

$$\texttt{rho} = \texttt{max}(\texttt{abs}(\texttt{spec}(\texttt{A}))).$$

Le but de l'exercice est de visualiser la convergence de

$$(\|A^k\|_p)^{1/k} \quad \text{vers } \rho \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Écrire une fonction `Convnormep(A,p,n)` qui affiche une approximation de

$$\Big(\|A^k\|_p\Big)^{1/k}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

sachant que $\|.\|_p$ est calculée à l'aide de N tirages.
Faire des expériences avec plusieurs matrices `A` et avec plusieurs valeurs pour `p`.

Exercice 5. *Inversion à l'aide d'une série géométrique*

On se propose de calculer de manière approchée l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.02 & 0. & 0.04 \\ 0.08 & 0.33 & 0.08 & -0.07 \\ 0.04 & 0.01 & 0.27 & -0.07 \\ 0.02 & -0.03 & 0. & 0.23 \end{pmatrix}$$

en l'écrivant sous la forme $A = I - B$ à partir de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} B^k$.

a. Vérifier que $\det(B)$ vaut environ 0.2682.

b. A quelle condition suffisante sur $||B||_\infty$ cette série converge-t-elle ? Est-elle vérifiée dans le cas présent ?

c. On pose $S_p(A) = \sum_{k=0}^p B^k$. Vérifier que

$$||A^{-1} - S_p(A)||_\infty \leq \frac{||B||_\infty^{p+1}}{1 - ||B||_\infty} \equiv \varepsilon_p.$$

Écrire les fonctions `Sp(A,p)` et `Epsilonp(A,p)` calculant respectivement $S_p(A)$ et ε_p.

d. Tracer sur le même graphique les courbes $||A^{-1} - S_p(A)||_\infty$ et ε_p en fonction de p (prendre `p=[1:50]`). Pour quelle valeur de p a-t-on une approximation de A^{-1} à 10^{-3} près ? Donner la valeur de ε_p correspondante.