ENS Cachan Bretagne **Année Scolaire 2009-2010**

Licence de mathématiques - Module ALNU

TP 1 – Interpolation de Lagrange

Théorie.

On considère une fonction $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et une subdivision de l'intervalle $[\alpha,\beta]$: $\alpha \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq \beta$. On appelle *polynôme interpolateur de Lagrange* l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n satisfaisant

$$\forall i = 0, 1, \ldots, n \quad p_n(x_i) = f(x_i).$$

– Si on recherche le polynôme p_n dans la base canonique :

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n.$$

Les relations $p_n(x_i) = f(x_i)$ se traduisent par

$$\forall i = 0, 1, \ldots, n \quad \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = f(x_i).$$

En notant $V_{ij} = x_i^j$, $A_i = a_i$ et $F_i = f(x_i)$, on reconnaît le système linéaire carré

$$VA = F.$$

– On peut aussi exprimer p_n dans la *base de Lagrange* : si L_i désigne le polynôme

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

alors $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ et

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x).$$

Exercice 1. *Construction du polynôme de Lagrange par résolution d'un système linéaire*

Écrire une fonction `lagr` qui calcule les coefficients du polynôme de Lagrange, et dont l'entête est le suivant

```
function A=lagr(x,F),
```

où les arguments d'entrée sont les vecteurs `x` et `F` contenant respectivement les valeurs des x_i et des $f(x_i)$. La fonction retourne le vecteur `A` des coefficients du polynôme p_n.

Écrire ensuite un script qui représente la fonction f et son polynôme d'interpolation sur un même graphique (on pourra utiliser la commande `horner` pour évaluer le polynôme p_n connaissant ses coefficients).

On considérera les fonctions tests suivantes :

- $f(x) = e^x$, $[\alpha, \beta] = [0, 1]$, $x_i = \frac{i}{n}$,
- $f(x) = x^3$, $[\alpha, \beta] = [0, 1]$, $x_i = \frac{i}{n}$,
- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $[\alpha, \beta] = [-5, 5]$, $x_i = -5 + 10\frac{i}{n}$,
- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $[\alpha, \beta] = [-5, 5]$, $x_i = 5\cos\left(\dfrac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$.

Exercice 2. *Construction du polynôme de Lagrange à l'aide de la base de Lagrange*

Écrire une fonction `lagrbis` qui évalue le polynôme de Lagrange par la seconde méthode, selon l'entête suivant :

```
function p=lagrbis(x,F,t).
```

Le vecteur `p` renvoyé contient les valeurs du polynôme p_n en les t_k donnés par le vecteur `t`.

Exercice 3. *Comparaison des deux méthodes précédentes*

Comparer les temps d'exécution des deux méthodes précédentes (on pourra faire un graphe en fonction du degré n).

Exercice 4. *Interpolation paramétrique*

Écrire un script qui demande à l'utilisateur de choisir des points à la souris, et fait passer une courbe *lisse* par ces points.