**ENSAI** **2004-2005**

**Première année**

**Examen d'optimisation**

**(Grégory Vial)**

**Durée : 2H**

**Sans documents ni calculatrice**

---

*Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies.*

---

**Question de cours** Soient $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. On considère le problème d'optimisation $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in A} f(x)$, où $A = \{x : g_1(x) = g_2(x) = 0\}$.

(a) On suppose que $x^* \in A$ vérifie $\nabla f(x^*) = 0$ ; $x^*$ est-il un point critique pour le problème ?

(b) Comment s'écrit la condition de qualification des contraintes en un point $x^* \in A$ ?

**Exercice 1.** Déterminer les extrema relatifs sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$f(x, y) = x^4 + 4y^2 - 9x^2y^2.$$

**Exercice 2.** Déterminer les extrema relatifs sur $\mathbb{R}^3$ de la fonction

$$f(x, y, z) = z(e^x - 1) - y^2.$$

**Exercice 3.** Soit $A$ une matrice réelle de taille $10 \times 100$ (i.e. 10 lignes et 100 colonnes) et $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^{10}$. On considère le problème d'optimisation

$$x^* = \underset{Ax=b}{\operatorname{argmin}} \|x\|^2, \tag{1}$$

où $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_{100}^2$, si $x = (x_1, \ldots, x_{100}) \in \mathbb{R}^{100}$.

(a) On suppose que la matrice $AA^\mathsf{T}$ est inversible. Montrer qu'alors les vecteurs-lignes de $A$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{100}$, et que la condition de qualification des contraintes est satisfaite en tout point.

(b) Montrer que les points critiques vérifient une équation du type

$$x + A^\mathsf{T}\lambda = 0,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^{10}$. En déduire qu'il existe un unique point critique et qu'il est donné par

$$x^* = A^\mathsf{T}(AA^\mathsf{T})^{-1}b.$$

(c) Proposer une interprétation géométrique du problème (1).

**Exercice 4.** Un artisan souhaite installer son atelier en Charente Maritime, à quelques dizaines de kilomètres au sud de Niort, précisément dans la région rectangulaire délimitée par la carte de la figure 1. D'autre part, son activité nécessite des matières premières provenant des villages avoisinants de Marsais et Saint Félix, si bien qu'il souhaite être proche de ces deux localités. Enfin, la proximité de l'autoroute est aussi un critère important, car elle permet un accès aisé aux grandes villes les plus proches.

Afin de modéliser mathématiquement le problème, on introduit le repère cartésien tel que le rectangle délimité par la carte soit défini par (les distances sont exprimées en kilomètres)

$$0 \leq x \leq 18 \text{ et } 0 \leq y \leq 11.$$

Les coordonnées des villages de Marsais et Saint Félix sont $(10, 7)$ et $(10, 3)$, respectivement. Quant à l'autoroute, on suppose qu'elle est située sur la droite d'équation $x = 18$.
On introduit la fonction coût suivante :

$$F(x, y) = (x - 10)^2 + (y - 7)^2 + (x - 10)^2 + (y - 3)^2 + 20(18 - x).$$

On recherche les coordonnées $(x, y)$ du futur atelier, telles que la fonction $F$ soit minimale. On considère donc le problème de minimisation

$$(x^*, y^*) = \underset{\substack{0 \leq x \leq 18 \\ 0 \leq y \leq 11}}{\operatorname{argmin}} F(x, y). \tag{2}$$

(a) Justifier l'expression de la fonction $F$.

(b) Justifier l'existence d'une solution pour le problème (2).

(c) Étudier la condition de qualification des contraintes.

(d) Déterminer les points critiques.

(e) Calculer la Hessienne du Lagrangien et résoudre le problème (2).

(f) Dans quel village ou lieu-dit l'artisan a-t-il intérêt à s'installer ?

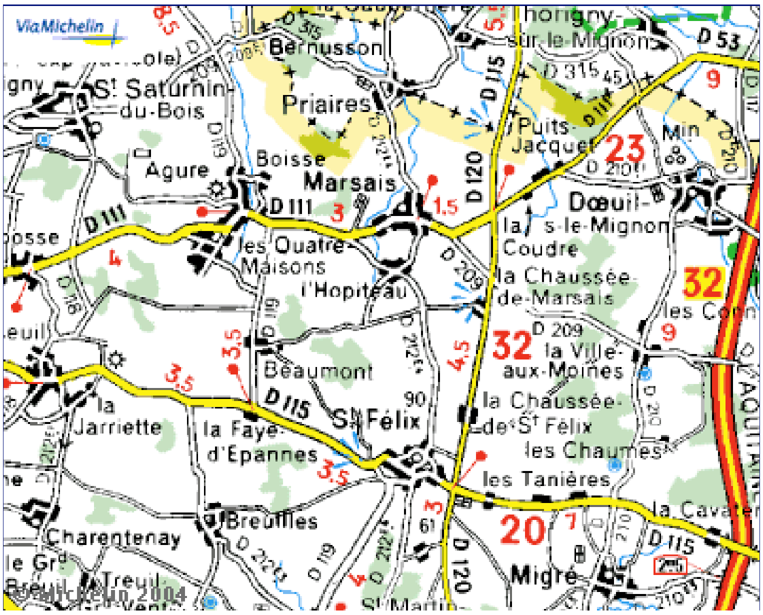

FIG. 1 – Carte Michelin de la zone concernée.

**FIN DE L'ÉNONCÉ**

**Barème indicatif :**

— Question de cours : 3 points
— Exercice 1 : 3 points
— Exercice 2 : 3 points
— Exercice 3 : 5 points
— Exercice 4 : 6 points

**CORRECTION EXAMEN D'OPTIMISATION**

**Question de cours**

(a) $x^*$ est un point critique, associé à des multiplicateurs de Lagrange nuls.

(b) La condition s'écrit : $\nabla g_1(x^*)$ et $\nabla g_2(x^*)$ ne sont pas proportionnels.

**Exercice 1.** Les points critiques vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} 4x^3-18xy^2=0 \\ 8y-18x^2y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x(x^2-9y^2)=0 \\ 2y(4-9x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x=y=0) \text{ ou } (x=\pm\tfrac{2}{3}, y=\pm\tfrac{2\sqrt{2}}{9}).$$

La Hessienne vaut

$$\nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2-18y^2 & -36xy \\ -36xy & 8-18x^2 \end{pmatrix}.$$

En $(0,0)$, la Hessienne est seulement semi-définie positive, on ne peut pas conclure à l'aide du cours (on peut montrer qu'il s'agit bien d'un minimum en effectuant le changement de variable $X=x^2, Y=y^2$).
En $(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{9})$, la matrice admet des valeurs propres de signe distinct, il s'agit de points-selles.

**Exercice 2** Les points critiques vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} ze^x=0 \\ -2y=0 \\ e^x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right. .$$

La Hessienne est donnée par

$$\nabla^2 f(x,y,z)=\begin{pmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -2 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si bien qu'en $(0,0,0)$, elle vaut

$$\nabla^2 f(0,0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Ses valeurs propres sont $-2,-1,1$, il s'agit donc d'un point-selle.

**Exercice 3**

(a) Si les vecteurs lignes de $A$ sont liés, alors il existe des coefficients $x_i$ tels que

$$\sum_{i=1}^{10} A_{ij}x_i = 0 \text{ pour tout } j=1,\ldots,100.$$

Cette relation signifie $A^\mathsf{T}x=0$, où $x$ désigne le vecteur $(x_1,\ldots,x_{10})$. On en déduit $AA^\mathsf{T}x=0$, ce qui est interdit car $AA^\mathsf{T}$ est inversible.
Les contraintes sont de type "égalité", la CQC revient à vérifier que les gradients des fonctions-contraintes sont linéairement indépendants. Or ces vecteurs sont précisément les lignes de la matrice $A$, donc la CQC est vérifiée en tout point.

(b) D'après le théorème des extrema liés, les points critiques satisfont

$$2x + A^\mathsf{T}\mu = 0,$$

d'où le résultat avec $\lambda = \frac{\mu}{2}$.
En multipliant cette égalité par $A$ à gauche, et tenant compte de $Ax=b$, on obtient $b+AA^\mathsf{T}\lambda=0$, d'où $\lambda=-(AA^\mathsf{T})^{-1}b$. On en déduit alors $x^*=-A^\mathsf{T}\lambda = A^\mathsf{T}(AA^\mathsf{T})^{-1}b$.

(c) $x^*$ est la projection de 0 sur le sous-espace affine $Ax = b$.

**Exercice 4**
(a) La fonction $F$ peut s'exprimer en termes de distances :

$$F(x, y) = \text{distance à Marsais } + \text{ distance à St Félix } + 20 \times \text{distance à l'autoroute},$$

il s'agit bien des trois distances qu'on cherche à minimiser (noter qu'un poids plus important est affecté à l'autoroute).

(b) L'ensemble des contraintes est un rectangle fermé borné, donc compact ; la fonction $F$ étant continue, il y a existence d'une solution.

(c) Il suffit de considérer les quatre gradients des fonctions contraintes (qui sont constants) ; la CQC est satisfaite en tout point du bord.

(d) Le Lagrangien est donné par

$$\mathscr{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = F(x, y) - \mu_1 x - \mu_2 y + \mu_3(x - 18) + \mu_4(y - 11).$$

Les points critiques vérifient donc

$$\begin{cases} 2(x-10) + 2(x-10) - 20 - \mu_1 + \mu_3 = 0 \\ 2(y-7) + 2(y-3) - \mu_2 + \mu_4 = 0 \\ \mu_1 x = 0 \\ \mu_2 y = 0 \\ \mu_3(x-18) = 0 \\ \mu_4(y-11) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \end{cases}$$

Seul $x = 15, y = 5$ est point critique, associé à des multiplicateurs tous nuls.

(e) La Hessienne du Lagrangien au point critique $(15, 5)$ vaut $4I_2$, elle est définie positive donc il s'agit d'un minimum. Les valeurs $x = 15, y = 5$ sont donc les valeurs recherchées. Cette étude n'est en fait pas nécessaire puisqu'on a montré l'existence d'une solution à la question (b), et qu'il n'y a qu'un seul point critique et que les contraintes sont qualifiées en tout point.

(f) L'endroit "idéal" se situe donc à 3 kilomètres à l'ouest de l'autoroute, et à mi-distance verticale des deux villages de Marsais et St Félix : le lieu-dit *La Ville-aux-Moines* convient parfaitement.