EXERCICES DU COURS D'OPTIMISATION

Exercices du chapitre 1

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2: Calculer la jacobienne de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (e^x + y^3, y, 3\text{ch}x + \text{sh}y)^\mathsf{T}. \end{array}$$

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$?

Exercice 4: Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$f(t) = (t^2 - 1, 2t)^\mathsf{T} \quad \text{et} \quad g(x_1, x_2) = (x_2, x_1)^\mathsf{T}.$$

1. Calculer $g \circ f$ et en déduire sa différentielle.
2. Retrouver le résultat de la première question à l'aide de la formule de dérivation composée.

Exercice 5: Pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, on pose $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
Déterminer le gradient et la hessienne de f. Cette dernière est-elle semi-définie positive, définie positive ?

Exercice 6: Soient $A \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$. Calculer le gradient et la hessienne de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|Ax - b\|^2. \end{array}$$

Exercice 7: Soit la fonction $x \mapsto y = f(x)$ donnée implicitement par la relation

$$x^3 + y^3 = xy + 1$$

au voisinage de $(1, 1)$. Calculer $f'(1), f''(1), f'''(1)$.

Exercice 8: Soit f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, yz - 1)^\mathsf{T}.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctions $\varphi, \psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que

$$\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ f(x, \varphi(x), \psi(x)) = (0, 0).$$

Déterminer une relation entre φ', ψ' et les dérivées partielles de f.

Exercices du chapitre 2

Exercice 1: Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possède un minimum, alors celui-ci est unique.

Exercice 2: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1],\ f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

On suppose que f admet un minimum relatif en x^*. Montrer qu'il s'agit en fait d'un minimum absolu.

On suppose que f est strictement convexe (i.e. l'inégalité précédente est stricte). Montrer qu'alors le minimum de f est atteint en un unique point.

Exercice 3: Soit le problème suivant :

$$(x^*, y^*) = \operatorname*{argmin}_{x \geq 0, y \geq 0} x^2.$$

Quelles sont les solutions ? Les contraintes sont-elles actives en ces points ?

Exercice 4: On veut savoir quelle est la boîte parallélépipédique de volume maximum, parmi toutes les boîtes de surface fixée. Écrire le problème d'optimisation associé à cette situation concrète.

Exercice 5: On cherche à déterminer la distance entre deux droites de l'espace $\mathbb{R}^3$. Écrire ce problème sous la forme d'un problème d'optimisation.

Exercice 6: Même exercice avec la projection d'un point de $\mathbb{R}^3$ sur un plan.

Exercices du chapitre 3

Exercice 1: Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^4 + 1} - x + 3.$$

1. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Parmi les points critiques, lesquels correspondent à des minima ?

Exercice 2: Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} x^\mathsf{T} A x - b^\mathsf{T} x.$$

1. Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer ce minimum.

Exercice 3: Déterminer les extrema, s'ils existent, des fonctions suivantes :

a. $f(x,y) = ax^2 + by^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$;

b. $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$;

c. $f(x,y) = x^{1/2}y^{1/3} - (x + 2y)$;

d. $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$;

e. $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$;

f. $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$ $(a \geq 0)$.

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}.$$

On fixe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème suivant :

$$\mu^* = \operatorname*{argmax}_{\mu \in \mathbb{R}} \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i) \right].$$

[Indication : on pourra passer au logarithme.]

Exercice 5: Soient $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

Montrer que 0 est le seul point critique de f, que f y atteint un minimum local strict, mais pas global.

Exercice 6: Résoudre le problème de la régression linéaire au sens des moindres carrés énoncé dans le cours.

Exercices du chapitre 4

Exercice 1: Déterminer les extrema de la fonction $U(x,y) = (xy)^a$ $(a \in \mathbb{R})$ sous la contrainte $2x + 3y = 12$.

Exercice 2: Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Déterminer

$$\min_{(x,y) \in T} x^2 + xy + y^2.$$

Exercice 3: Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x + y \leq 1\}$. Déterminer

$$\max_{(x,y) \in D} y.$$

Exercice 4: Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x \geq 0, y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Déterminer

$$\min_{(x,y)\in E} y^3 + x.$$

Exercice 5: Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Déterminer

$$\min_{(x,y)\in F} x^2 - y^2 + 2.$$

Exercice 6: Soit $q \geq p > 1$. Quelle est la valeur maximale de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ sous la contrainte $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = 1$.

Exercice 7: Résoudre le problème posé dans le chapitre 2 (§2.3).

Exercice 8: Résoudre les exercices 4, 5 et 6 du chapitre 2.

Exercice 9: Trouver les triangles d'aire maximum inscrits dans un cercle.

Exercice 10: Soient $n_1, \dots, n_k$ des entiers naturels de somme $N > 0$ et $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}.$$

Maximiser f sur l'ensemble

$$\Lambda_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ ; \ \sum_{i=1}^{k} x_i = 1 \text{ et } \forall i,\ x_i \geq 0\}.$$

Exercices du chapitre 5

Exercice 1: Écrire la méthode du gradient à pas fixe pour les problèmes :

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} (x^4 + x^2 - 1) \ ;$$

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{0\leq x\leq 1} e^x.$$

Exercice 2: Écrire la méthode de Newton pour le problème suivant :

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} (x^4 + x^2 - 1).$$

Exercice 3: Montrer que la convergence de la méthode de Newton est quadratique :

$$\exists c > 0,\ \|x^{k+1} - x^*\| \leq c\|x^k - x^*\|^2.$$

EXERCICES DU COURS D'OPTIMISATION

Correction des exercices du chapitre 1

Exercice 1: La fonction f est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons que f est dérivable en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{e^h - 1 - h}{h^2} \longrightarrow \frac{1}{2},$$

quand h tend vers 0 (cela provient du développement limité de e^h en 0). Ainsi f est dérivable en 0 ; il suffit de vérifier que f' est continue en 0. Or, pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}.$$

En utilisant encore le développement limité de l'exponentielle en 0, on voit que $f'(x)$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand $x \to 0$, ce qui achève la preuve : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2: La jacobienne de f est donnée par

$$\begin{pmatrix} e^x & 3y^2 \\ 0 & 1 \\ 3\mathrm{sh}x & \mathrm{ch}y \end{pmatrix}.$$

Exercice 3: La fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car elle n'est pas continue en 0. En effet, $f(x,x) = \frac{1}{2}$ pour tout réel x, qui ne converge pas vers $0 = f(0,0)$ quand x tend vers 0.

Cet exemple montre qu'il ne suffit pas de regarder une fonction de deux variables dans chacune des directions de la base canonique : pour tout x fixé, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (de même que la fonction $x \mapsto f(x,y)$).

Exercice 4:

1. La fonction $\varphi = g \circ f$ est donnée par $\varphi(t) = (2t, t^2-1)^\mathsf{T}$. Sa différentielle en $t \in \mathbb{R}$ est égale au vecteur

$$d\varphi(t) = (2, 2t)^\mathsf{T}.$$

2. La formule de dérivation composée fournit $d\varphi(t) = dg\big(f(t)\big).df(t)$. On évalue ensuite les différentielles des fonctions g et f :

$$dg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad df(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de calculer la produit $dg\big(f(t)\big).df(t)$ pour retrouver l'expression de la question précédente.

Exercice 5: Le gradient de f est donné par

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right)^{\mathsf{T}},$$

avec $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. La hessienne est la matrice

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \frac{1}{r^5}\left(\begin{array}{ccc} 2x^2-y^2-z^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 2y^2-x^2-z^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 2z^2-x^2-y^2 \end{array}\right).$$

Ell n'est, en général, ni semi-définie positive, ni semi-définie négative. En effet, $\nabla^2 f(x,0,0)$ possède des coefficients diagonaux de signes différents.

Exercice 6: Le gradient de f est donné par $\nabla f(x) = 2(A^\top Ax - A^\top b)$. La hessienne vaut $\nabla^2 f(x) = 2A^\top A$, elle est constante, semi-définie positive (même définie positive si A est de rang maximal).

Exercice 7: Notons g la fonction $g(x,y) = x^3+y^3-xy-1$. Le théorème de la fonction implicite s'applique bien au point $(1,1)$ (solution de $g(x,y)=0$) :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - x,$$

qui vaut $2 \neq 0$ en $(1,1)$. La fonction f est donc bien définie (et de classe $\mathscr{C}^1$) dans un voisinage de $x=1$.

Par définition de f, $x^3 + (f(x))^3 = xf(x)+1$. On dérive cette expression :

$$6x + 3(f(x))^2 f'(x) = f(x) + xf'(x)$$

et l'évalue en $x=1$:

$$6 + 3f'(1) = 1 + f'(1) \Longrightarrow f'(1) = -1.$$

Le calcul de $f''(1)$ et $f'''(x)$ est similaire, les valeurs trouvées sont :

$$f''(1) = -7 \quad \text{et} \quad f'''(1) = -105.$$

Exercice 8: Il s'agit d'appliquer le théorème de la fonction implicite autour du point $(0,1,1)$. Il suffit de vérifier que la dérivé partielle par rapport à y,z est inversible. Elle vaut

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial z}(0,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{inversible car de déterminant 4.}$$

Pour déterminer les dérivées de φ et ψ, il suffit de dériver la relation $f(x,\varphi(x),\psi(x)) = (0,0)$. On obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x),\psi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,\varphi(x),\psi(x))\psi'(x) = (0,0).$$

L'évaluation de cette expression en $x=0$ fournit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2\varphi'(0) & - & 2\psi'(0) & = & -2 \\ \varphi'(0) & + & \psi'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est, bien sûr, la transposée de la matrice vue plus haut qui intervient ici (dont on a vu qu'elle était inversible). La résolution donne

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{2} \qquad \psi'(0) = \frac{1}{2}.$$

EXERCICES DU COURS D'OPTIMISATION

Correction des exercices du chapitre 2

Exercice 1: Supposons que m_1 et m_2 soient deux minima de f. Il existe alors deux réels x_1 et x_2 pour lesquels m_1 et m_2 sont atteints, respectivement. Comme m_1 est un minimum, alors $m_1 = f(x_1) \leq f(x)$ pour tout x. En prenant $x = x_2$, on déduit que $m_1 \leq m_2$. De manière analogue, on montre que $m_2 \leq m_1$, si bien que $m_1 = m_2$.

Exercice 2: Par hypothèse, il existe un intervalle $I = [x^* - \eta, x^* + \eta]$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$.

Soit alors $x \in \mathbb{R}$, différent de x^* ; on pose $t = \frac{\eta}{x - x^*}$, si bien que $x^* + \eta = (1-t)x^* + tx$. L'hypothèse de convexité permet d'écrire

$$f(x^* + \eta) \leq (1-t)f(x^*) + tf(x). \tag{1}$$

Or f est minimum en x^* sur l'intervalle $[x^* - \eta, x^* + \eta]$, d'où $f(x^*) \leq f(x^* + \eta)$. L'inégalité (1) devient donc

$$f(x^*) \leq (1-t)f(x^*) + tf(x)$$

soit $tf(x^*) \leq tf(x)$. Comme t est strictement positif, on conclut que $f(x^*) \leq f(x)$, ce qui prouve bien que f atteint en x^* un minimum absolu.

On suppose maintenant que f est strictement convexe. Pour montrer que f atteint son minimum en un unique point, considérons $\bar{x}$ et x^* tels que

$$f(\bar{x}) = f(x^*) = \min f = m.$$

On note alors $x = \frac{x + x^*}{2}$ et on applique l'inégalité de stricte convexité pour $t = \frac{1}{2}$. On obtient

$$f(x) < \frac{1}{2}f(\bar{x}) + \frac{1}{2}f(x^*) = m,$$

ce qui contredit le fait que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3: Il est clair que la fonction x^2 est minimale pour $x = 0$ (et y quelconque). Le problème de minimisation proposé admet donc une infinité de solutions données par $(0, y)$ avec $y \geq 0$. En tous ces points, la contrainte $x \geq 0$ est serrée. Quant à la contrainte $y \geq 0$, elle n'est serrée qu'au point $(0, 0)$.

Exercice 4: Si on note ℓ, h, p les dimensions du parallélépipède, alors le volume est donné par

$$V = \ell hp$$

et la surface par

$$S = 2\ell h + 2\ell p + 2hp.$$

Si on note $2S_0$ la surface qu'on a fixé pour le parallélépipède, alors le problème d'optimisation s'écrit

$$\max_{\substack{\ell h + \ell p + hp = S_0 \\ \ell, h, p \geq 0}} (\ell h p)$$

EXERCICES DU COURS D'OPTIMISATION

Correction des exercices du chapitre 3

Exercice 1:

1. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$ donc elle admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.
2. On dérive f :
$$f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}} - 1$$
On résout l'équation $f'(x) = 0$, c'est-à-dire $2x^3 = \sqrt{x^4+1}$, ou encore $x > 0$ et $4x^6 = x^4 + 1$. En posant $u = x^2$, on est ramené à l'étude des racines positives de l'équation $4u^3 - u^2 - 1 = 0$. L'étude de la fonction $u \mapsto 4u^3 - u^2 - 1$ montre qu'il existe une unique solution $u_0 > 0$, d'où un unique point critique $\sqrt{u_0}$.
3. On calcule f'' :
$$f''(x) = \frac{6x^2}{\sqrt{x^4+1}} - \frac{4x^6}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^6+6x^2}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}.$$
Comme $f''(\sqrt{(u_0)}) > 0$ (car $u_0 > 0$), alors f admet en $\sqrt{u_0}$ un minimum local. C'est le seul minimum local de f sur $\mathbb{R}$ donc il coïncide avec le minimum global de f.

Exercice 2:

1. Soit λ la plus petite valeur propre de A ($\lambda > 0$ car A est symétrique définie positive). Alors pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $x^\mathsf{T} Ax \geq \lambda \|x\|^2$ (pour voir cela, diagonaliser A). On en déduit
$$f(x) \geq \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 - \|b\|\|x\| \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } \|x\| \to +\infty.$$
Comme, de plus, f est continue sur $\mathbb{R}^n$, elle admet un minimum global.
2. Le minimiseur x est nécessairement point critique. Or $\nabla f(x) = Ax - b$, donc $x = A^{-1}b$, unique.
Il s'agit bien d'un minimum car la hessienne vaut A, elle est définie positive.

Exercice 3:

a. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$.
Le seul point critique est donc $(0,0)$ et on doit distinguer selon les signes de a et b pour étudier la matrice hessienne. On écarte les cas où a ou b est nul, dont l'analyse est immédiate.
– si $a > 0$ et $b > 0$, alors la Hessienne est définie positive, donc f admet en $(0,0)$ un minimum local (en fait global).

– si $a < 0$ et $b < 0$, alors la Hessienne est définie négative, donc f admet en $(0,0)$ un maximum local (en fait global).
– si a et b sont de signe contraire, alors f admet en $(0,0)$ un point selle.

b. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 2y - 3x \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
Le seul point critique est $(0,0)$ et la Hessienne ayant pour valeurs propres 5 et -1, il s'agit d'un point selle.

c. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y^{1/3} x^{-1/2} - 1 \\ \frac{1}{3} x^{1/2} y^{-2/3} - 2 \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^{1/3}}{4x^{3/2}} & \frac{1}{6x^{1/2}y^{2/3}} \\ \frac{1}{6x^{1/2}y^{2/3}} & \frac{-2x^{1/2}}{9y^{5/3}} \end{pmatrix}$.
Le point critique est donné par $(x^*, y^*) = (24^{-2}, 12^{-3})$. La Hessienne en ce point s'écrit

$$\nabla^2 f(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -288 & 576 \\ 576 & -2304 \end{pmatrix} = 288 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont de signe contraire (le déterminant est négatif). On a donc affaire à un point selle.

d. $\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2(1+y^2)} \begin{pmatrix} y(1-x^2) \\ x(1-y^2) \end{pmatrix}$ et

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy(x^2-3)}{(1+x^2)^3(1+y^2)} & \frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \\ \frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} & \frac{2xy(y^2-3)}{(1+x^2)(1+y^2)^3} \end{pmatrix}.$$

Les points critiques sont $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ et $(-1,-1)$.

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(1,1) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(1,-1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(-1,1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(-1,-1) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $(0,0)$ correspond à un point selle (valeurs propres 1 et -1), $(1,1)$ et $(-1,-1)$ à des maxima locaux, et $(1,-1)$ et $(-1,1)$ à des minima locaux.

e. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2+1-x^2}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$ et

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^3} \begin{pmatrix} x(x^2-3y^2-3) & y(3x^2-y^2-1) \\ y(3x^2-y^2-1) & x(x^2-3y^2+1) \end{pmatrix}.$$

Il y a deux points critiques : $(1,0)$ et $(-1,0)$, en lesquels on évalue le Hessienne :

$$\nabla^2 f(1,0) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(-1,0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que f admet un minimum relatif en $(-1,0)$ et un maximum relatif en $(1,0)$.

f. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 2x + 2ay \\ 2x^2y + 2y + 2ax \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2+2 & 4xy+2a \\ 4xy+2a & 2x^2+2 \end{pmatrix}$.

Les points critiques satisfont $x(1+y^2)+ay = 0$ et $(y(1+x^2)+ax = 0$. Si $a = 0$, alors le seul point critique est $(0,0)$. Si $a > 0$ et $y = 0$, alors nécessairement, $x = 0$, d'où $(0,0)$ point critique. Si $a > 0$ et y non nul, alors on a $\frac{x}{y} = \frac{-a}{1+y^2} = \frac{-a}{1+x^2}$, d'où $x^2 = y^2$,soit $x = \pm y$. Le cas $x = y$ ne fournit pas de point critique car alors $x(x^2 + a + 1) = 0$ n'a pas de solution. Il reste $x = -y$ pour lequel les points critiques sont définis par $x(x^2 - a + 1) = 0$, qui possède comme solution $x = \pm\sqrt{a-1}$ seulement pour $a \geq 1$ (pas de point critique si $a < 1$.

Résumons :

- si $a = 0$: un seul point critique $(0,0)$.
- si $0 < a < 1$: pas de point critique.
- si $a \geq 1$: deux points critiques $(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$ et $-(-\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$ (confondus avec l'origine pour $a = 1$).

Pour $a = 0$, il suffit d'étudier le Hessienne en $(0,0)$:

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc il s'agit d'un minimum local.

Pour $a \geq 1$,

$$\nabla^2 f(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}) = \nabla^2 f(-\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1}) = 2\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 2-a & a \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut $16(a-1) > 0$ et la trace $4a > 0$, donc les deux valeurs propres sont strictement positives. On conclut que f admet en les deux points critiques des minima relatifs.

Exercice 4: Pour x un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on note $\phi(x)$ l'expression

$$\phi(x) = -\log\left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_i-\mu)^2}{2} + \frac{1}{2}\log(2\pi)\right].$$

Ainsi, le problème de maximisation proposé correspond à la minimisation sur $\mathbb{R}^n$ de la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

On calcule le gradient et la hessienne de ψ :

$$\nabla\psi(x) = (2x_1 - \mu, 2x_2 - \mu, \ldots, 2x_n - \mu) \quad \text{et} \quad \nabla^2\psi(x) = 2I_n.$$

Le seul point critique est défini par $x_i = \mu$ pour tout i. Il correspond à un minimum local car la Hessienne est définie positive ; il est facile de voir que ce minimum est global.

EXERCICES DU COURS D'OPTIMISATION

Correction des exercices du chapitre 4

Exercice 1: Le Lagrangien est défini par $\mathscr{L}(x,y,\lambda) = x^\alpha y^\alpha + \lambda(2x+3y-12)$. L'hypothèse de qualification des contraintes est vérifiée en tout point, car le gradient de la fonction définissant la contrainte vaut $(2,3)^\mathsf{T}$, qui est non-nul. Il suffit donc d'étudier les points critiques : ils satisfont

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha x^{\alpha-1}y^\alpha + 2\lambda & = & 0 \\ \alpha x^\alpha y^{\alpha-1} + 3\lambda & = & 0 \\ 2x+3y & = & 12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\frac{\alpha}{2}x^{\alpha-1}y^\alpha \\ \alpha x^\alpha y^{\alpha-1} & = & \frac{3\alpha}{2}x^{\alpha-1}y^\alpha \\ 2x+3y & = & 12 \end{array}\right.$$

La seconde équation s'écrit $\alpha x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}(x-\frac{3}{2}y)=0$. Si $\alpha > 1$, alors $x=0$ ou $y=0$ conviennent : ils fournissent les deux points critiques $(0,4)$ et $(6,0)$, pour chacun desquels le multiplicateur λ est nul. Quelle que soit la valeur de α, $x=\frac{3}{2}y$ est possible, et l'équation $2x+3y=12$ donne $x=3$ et $y=2$, avec la valeur $\lambda = -\alpha 6^{\alpha-1}$.

Si $\alpha \leq 2$, la fonction $x^\alpha y^\alpha$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ pour $x=0$ ou $y=0$. L'étude des points critiques $(0,4)$ et $(6,0)$ doit être faite "à la main" dans le cas $1 < \alpha \leq 2$. On ne considère donc que le cas $\alpha > 2$ pour ces deux points critiques. En ce qui concerne le point $(3,2)$, son étude peut être effectuée pour toute valeur du paramètre α.

Une étude complémentaire est nécessaire pour conclure.

Exercice 2: Le Lagrangien est défini par

$$\mathscr{L}(x,y,\nu_1,\nu_2,\nu_3) = x^2+xy+y^2-\nu_1 x - \nu_2 y + \nu_3(x+y-1).$$

On détermine les points critiques : ils sont solutions de

$$\begin{aligned} 2x+y-\nu_1+\nu_2 &= 0 \quad (1)\\ x+2y-\nu_2+\nu_3 &= 0 \quad (2)\\ \nu_1 x &= 0 \quad (3)\\ \nu_2 y &= 0 \quad (4)\\ \nu_3(x+y-1) &= 0 \quad (5)\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3 &\geq 0 \quad (6) \end{aligned}$$

On fait une étude de cas, à l'aide des relations d'exclusion :

- Si $x=0$,
  - ⋄ si $y=0$, alors $\nu_3=0$ d'après (5). À l'aide de (1) et (2), on en déduit que $\nu_1=\nu_2=0$. **D'où le candidat $x=0, y=0, \nu_1=\nu_2=\nu_3=0$.**

◇ sinon, $\nu_2 = 0$, si bien que (5) donne $\nu_3(y-1) = 0$.

– si $\nu_3 = 0$, alors (2) conduit à $y = 0$ et (1) donne $\nu_1 = 0$. On obtient le même point candidat que précédemment.

– sinon, $y = 1$ et (2) implique $2 + \nu_3 = 0$, ce qui est impossible vu $\nu_3 \geq 0$.

- sinon, $\nu_1 = 0$.

◇ si $y = 0$, alors (5) impose $\nu_3(x-1) = 0$.

– si $\nu_3 = 0$, alors (1) donne $x = 0$ et (2) $\nu_2 = 0$.

– sinon, $x = 1$ et (1) implique $2 + \nu_2 = 0$, impossible car $\nu_2 \geq 0$.

◇ sinon, $\nu_2 = 0$ et (1) et (2) fournissent $x = y = 0$. On déduit alors de (5) que $\nu_3 = 0$. Finalement, on obtient encore le même point critique.

On détermine les points où le (CQC) n'est pas satisfaite : il s'agit de savoir s'il existe un vecteur $d = (d_1, d_2)^\mathsf{T}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcrll} x = 0 & \Longrightarrow & (-1,0)d < 0 & i.e. & d_1 > 0, \\ y = 0 & \Longrightarrow & (0,-1)d < 0 & i.e. & d_2 > 0, \\ x + y = 1 & \Longrightarrow & (1,1)d < 0 & i.e. & d_1 + d_2 > 0. \end{array}\right.$$

On peut toujours trouver un tel d, car les trois contraintes ne sauraient être satisfaites simultanément et si deux d'entre-elles sont actives, il est facile d'ajuster d_1 et d_2. La condition de qualification des contraintes est donc satisfaite en tout point.

Par compacité, il y a existence d'une solution ; puisqu'il n'y a qu'un seul point critique, c'est la solution recherchée.

Exercice 3: Le Lagrangien est donné par $\mathscr{L}(x, y, \nu_1, \nu_2) = -y + \nu_1(x^2 - y) + \nu_2(x + y - 1)$.

- Les points critiques sont

$$(x_-, y_-) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{associé à} \quad \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \nu_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$(x_+, y_+) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{associé à} \quad \nu_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \nu_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

- La Condition de Qualification des Contraintes s'écrit : trouver un vecteur $d = (d_1, d_2)^\mathsf{T}$ tel que

$$(x^2 = y \Rightarrow 2d_1x - d_2 < 0) \text{ et } (x + y = 1 \Rightarrow d_1 + d_2 < 0).$$

On peut trouver un tel d si une seule des contraintes est serrée. Il reste à étudier le cas où les deux contraintes sont actives, ce qui correspond aux deux points critiques trouvés.

◇ en (x_-, y_-), $2x_- < -2$ si bien que $d_1 = 1$ et $d_2 = -2$ conviennent ;

◇ en (x_+, y_+), $d_1 = -1$ et $d_2 = 0$ conviennent.

En conclusion, la CQC est vérifiée en tout point.

On peut vérifier “à la main” (par exemple graphiquement) que (x_+, y_+) est la solution recherchée.

Exercice 4: Le Lagrangien est donné par

$$\mathscr{L}(x, y, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = y^3 + x + \nu_1(x^2 - y) - \nu_2 x + \nu_3(y - \sqrt{1 - x^2}).$$

- Étude des points critiques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1+2x\nu_1-\nu_2+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\nu_3 & = & 0 \\ 3y^2-\nu_1+\nu_3 & = & 0 \\ \nu_1(x^2-y) & = & 0 \\ \nu_2 x & = & 0 \\ \nu_3(y-\sqrt{1-x^2}) & = & 0 \\ \nu_1,\nu_2,\nu_3 & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Notons que ν_2 ne peut être nul, car alors la première équation fournit $1 \leq 0$ (car $x, \nu_1, \nu_3 \geq 0$). Ainsi, la relation d'exclusion $\nu_2 x = 0$ fournit $x = 0$, si bien que $u = \nu_1 = \nu_3 = 0$.
Finalement, seul $(x, y) = (0, 0)$ est point critique, il est associé à $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1$ et $\nu_3 = 0$.
- La CQC s'écrit : trouver $d = (d_1, d_2)^{\mathsf{T}}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{ccc} y=x^2 & \Rightarrow & 2xd_1-d_2<0 \\ x=0 & \Rightarrow & -d_1<0 \\ y=\sqrt{1-x^2} & \Rightarrow & d_1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+d_2<0. \end{array}\right.$$

  - ◇ Si une seule des trois contraintes est serrée, il est aisé de vérifier qu'un tel vecteur d existe ;
  - ◇ si seules les deux premières sont actives (i.e. $x = y = 0$), alors $d_1 = 1$ et $d_2 = 1$ conviennent ;
  - ◇ si seules les première et troisième contraintes sont actives, alors $d_1 = -1$ et $d_2 = 0$ conviennent.
  - ◇ si seules les deuxième et troisième contraintes sont actives, alors $d_1 = 1$ et $d_2 = -1$ conviennent.

  Finalement, la CQC est toujours vérifiée.

Le point critique est bien la solution recherchée car il y a existence par compacité.

Exercice 5: Le Lagrangien est donné par

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda, \mu) = x^2 - y^2 + 2 + \lambda(y - x^3) + \mu(x^2 + y^2 - 1).$$

- Les relations de Kuhn et Tucker s'écrivent :

$$\begin{aligned} 2x-3\lambda x^2+2\mu x &= 0 &(7)\\ -2y+\lambda+2\mu y &= 0 &(8)\\ \mu(x^2+y^2-1) &= 0 &(9)\\ y &= x^3 &(10) \end{aligned}$$

  - ◇ Si $\mu = 0$, alors (8) donne $\lambda = 2y$, si bien que (7) devient, grâce à (10), $2x - 6x^5 = 0$, soit $2x(1 - 3x^4) = 0$. On en déduit les deux points critiques suivants :
    – $x = 0$, $y = 0$, associé à $\lambda = \mu = 0$,

– $x = 3^{-\frac{1}{4}}$, $y = 3^{-\frac{3}{4}}$, associé à $\lambda = 2.3^{-\frac{3}{4}}$ et $\mu = 0$.

◇ Sinon, $x^2 + y^2 = 1$ et, puisque $y = x^3$, seuls deux points sont à considérer : $(x^\star, y^\star)$ et $(-x^\star, -y^\star)$, où $x^\star$ est la solution positive de l'équation $x^6 + x^2 - 1 = 0$ et $y^\star = (x^\star)^3$.

Au total, on a 4 points critiques.

- La CQC s'écrit

$$\begin{cases} (-3x^2, 1)^\mathsf{T} \neq 0, \\ \text{il existe } d = (d_1, d_2)^\mathsf{T},\ -3x^2 d_1 + d_2 = 0 \text{ et } (x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2xd_1 + 2yd_2 < 0). \end{cases}$$

La première ligne est évidente. Quant à la deuxième, si $x^2 + y^2 \neq 1$, il suffit de prendre $d_1 = 1$ et $d_2 = 3x^2$. Si $x^2 + y^2 = 1$, seuls deux points sont à considérer : $\pm(x^\star, y^\star)$. En $(x^\star, y^\star)$, $d_1 = 0$ et $d_2 = -1$ conviennent ; en $(-x^\star, -y^\star)$, $d_1 = 1$ et $d_2 = 0$ conviennent.

Ainsi, la condition de qualification des contraintes est toujours vérifiée. Seuls les points critiques sont donc candidats à réaliser le minimum.

- On peut montrer "à la main" que le minimum est atteint en $(0, 0)$.

Exercice 6: Le Lagrangien est donné par

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q - 1 \right).$$

- La dérivée du Lagrangien par rapport à x_i vaut

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i}(x, \lambda) = p|x_i|^{p-1} + q\lambda |x_i|^{q-1}.$$

L'équation d'Euler-Lagrange fournit alors $|x_i|$ = constante, si bien que les points critiques sont

$$\left(\pm \sqrt[q]{\frac{1}{n}}, \pm \sqrt[q]{\frac{1}{n}}, \ldots, \pm \sqrt[q]{\frac{1}{n}} \right).$$

Vu l'invariance de la fonction par changement du signe des composantes, on restreint l'étude au point $\left(\sqrt[q]{\frac{1}{n}}, \sqrt[q]{\frac{1}{n}}, \ldots, \sqrt[q]{\frac{1}{n}} \right)$. La Hessienne est diagonale, à valeurs propres strictement négatifs : il s'agit donc d'un maximum.

- La CQC revient à vérifier que le vecteur $(q|x_1|^{q-1}, \ldots, q|x_n|^{q-1})$ est non-nul, ce qui est évident vu que 0 ne vérifie pas la contrainte.