ENSAI – 1A IES – ANALYSE **2007**

TD 4 – Intégrales multiples

Exercice 1. ⋆ Calculer les intégrales suivantes :

1.
$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{avec } D = [0,1]^2\,,$$

2.
$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{avec } D = [3,4]\times[1,2]\,,$$

3.
$$\iint_D |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{avec } D = [-1,1]^2\,.$$

Éléments de correction. On notera I l'intégrale dans chaque cas.

1. $I = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{12}$.

2. $I = \int_3^4 \int_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right]\mathrm{d}x = \ln\frac{25}{24}$.

3. $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^x (x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \int_x^1 (y-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

Exercice 2. ⋆⋆ Calculer les intégrales doubles suivantes :

1.
$$\iint_D \exp\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{avec } D = \left\{(x,y) | y \in [0,1]\,, 0 \le x \le y^2\right\},$$

2.
$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{2a-x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

D étant l'intérieur du cercle de rayon $a (a > 0)$ situé dans $\mathbb{R}_+^2$ et tangent aux axes des abscisses et des ordonnées,

3.
$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

D étant le triangle de sommets $(-1,0)\,,(0,1)\,,(1,0)\,.$

Éléments de correction. On notera I l'intégrale dans chaque cas.

1. $I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (ye^y - y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

2. $I = \int_0^{2a} \int_{a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{a+\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \frac{1}{\sqrt{2a-x}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2a} 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{8a}{3}\sqrt{2a}.$

3. Par symétrie, $I = 2\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x^2(1-x) + (1-x)^3/3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Exercice 3. ⋆⋆ Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables.

1. $$\iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{avec } D = \mathcal{C}(0,1),$$

2. $$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{avec } D = \mathcal{E}_{a,b},$$

   où $\mathcal{E}_{a,b}$ est l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

3. $$\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où } D \text{ est le carré de sommets } (1,0),(2,1),(1,2),(0,1).$$

   Indication : utiliser le changement de variables : $u=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$, $v=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$.

Éléments de correction. On notera I l'intégrale dans chaque cas.
1. En polaires, $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(1+2\cos\theta\,\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\big(1+\sin(2\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$.
2. On pose $x=ar\cos\theta$ et $y=br\sin\theta$. Alors $I=ab\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\pi ab$.
3. $I=\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^{3\sqrt{2}/2}\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=0$.

Exercice 4. ⋆ Calculer l'intégrale

$$I=\iint_D x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où } D=[0,1]\times[a,b] \text{ avec } (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$$

en intégrant successivement par rapport à x d'abord, puis par rapport à y d'abord. En déduire la valeur de

$$J=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Éléments de correction. En intégrant d'abord en x, $I=\displaystyle\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1\mathrm{d}y=\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)$.
En intégrant d'abord en y, $J=\displaystyle\int_0^1\left[\frac{e^{y\ln x}}{\ln x}\right]_a^b\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}=I$ d'après la première ligne.

Exercice 5. ⋆⋆ Étudier les intégrales suivantes :

1. $$\iint_D e^{-x}\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où } D=\{(x,y)\,;\,0\le y\le x\}.$$

2. $$\iint_D (x-y)\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où } D=\{(x,y)\,;\,0\le x-y\le x+y\}.$$

   Indication : on utilisera un changement de variables.

3. $$\iint_{\mathcal{B}_a(0)} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{avec } a>0.$$

   (a) Etudier la convergence lorsque a tend vers $+\infty$.

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

Éléments de correction. On notera I l'intégrale dans chaque cas.
1. On introduit $D_n = \{(x,y)\ ;\ 0 \le y \le x \le n\}$.

$$I_n = \int_0^n \int_0^x e^{-x} \cos y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^n e^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x.$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient $I_n = 1 - e^{-n}\cos n + e^{-n}\sin n - I_n$, d'où $I_n \to \frac{1}{2}$. Ainsi $I = \frac{1}{2}$.
2. On introduit $D_n = \{(x,y)\ ;\ 0 \le x-y \le x+y \le n\}$. Avec le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$, on obtient

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^n \int_0^u v \cos u \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^n u^2 \cos u \,\mathrm{d}u = \left(\frac{n^2}{2} - 1\right)\sin n + n\cos n.$$

Comme I_n n'a pas de limite, l'intégrale généralisé n'est pas définie.
3. (a) En passant en polaires, $I = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left(e^{1-\frac{a^2}{2}}\right) \to 2\pi.$
(b) En intégrant $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}^2$ à l'aide du théorème de Fubini, on obtient $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathcal{G}^2$, où $\mathcal{G}$ est l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. On obtient donc $\mathcal{G} = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 6. ⋆⋆⋆ On considère les ellipses $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ d'équations respectives

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

1. Faire un dessin.
2. Calculer l'aire de l'intersection D des intérieurs des ellipses.

Éléments de correction. On cherche tout d'abord l'intersection des deux ellipses : on a $y^2 = 2 - 2x^2$ et par substitution $x^2 + 4 - 4x^2 = 2$, soit $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Par symétrie, l'aire $\mathcal{A}$ recherchée vaut

$$\mathcal{A} = 4\iint_{D;x,y\ge 0} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\int_0^{\sqrt{1-x^2/2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 4\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1 \int_0^{\sqrt{2-2x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Le calcul des intégrales intérieures fournit

$$\mathcal{A} = 4\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + 4\sqrt{2}\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

En posant $x = \sqrt{2}\sin u$ et $x = \sin v$, respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 4\sqrt{2}\int_0^{\operatorname{asin}(1/\sqrt{3})} \cos^2 u\,\mathrm{d}u + 4\sqrt{2}\int_{\operatorname{asin}(\sqrt{2/3})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v\,\mathrm{d}v \\ &= 2\sqrt{2}\operatorname{asin}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sqrt{2}\pi - 2\sqrt{2}\operatorname{asin}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right). \end{aligned}$$

Exercice 7. ⋆⋆⋆ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de densités respectives par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,\mathbb{I}_{]-1,1[}(x) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = y e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(y).$$

On souhaite déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = XY$.

1. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Exprimer $\int_\Omega \Phi(Z)\,\mathrm{d}\mathbb{P}$ comme une intégrale double en (x,y).
2. En utilisant le changement de variable $(z,y) = (xy,y)$, montrer que

$$\int_\Omega \Phi(Z)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} \Phi(z)\left[\int_{|z|}^{+\infty} \frac{ye^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y}{\pi\sqrt{y^2-z^2}}\right]\mathrm{d}z.$$

3. Grâce au changement de variable $u = \sqrt{y^2-z^2}$, montrer que

$$\int_\Omega \Phi(Z)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} \Phi(z)e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z.$$

   Identifier la loi de Z.

Éléments de correction. 1. À l'aide de la formule de transfert, on a (car X et Y sont indépendantes)

$$\mathbb{E}\left[\Phi(Z)\right] = \int_\Omega \Phi\big(Z(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi(xy) f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_{-1}^{1} \Phi(xy)\frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. Le changement de variable $(x,y) \mapsto (xy,y)$ est bijectif de $]-1,1[\times]0,+\infty[$ vers $\Delta = \{(z,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y > |z|\}$, le Jacobien associé vaut y^{-1}. Ainsi, par Fubini,

$$\int_\Omega \Phi(Z)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} \Phi(z)\left[\int_{|z|}^{+\infty} \frac{ye^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y}{\pi\sqrt{y^2-z^2}}\right]\mathrm{d}z.$$

3. Le changement de variable $u = \sqrt{y^2-z^2}$ permet de calculer l'intégrale interne :

$$\int_{|z|}^{+\infty} \frac{ye^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y}{\pi\sqrt{y^2-z^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}e^{-\frac{z^2}{2}}}{\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathcal{G}}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ainsi, Z suit une loi normale centrée réduite.