ENSAI – 1A IES – ANALYSE **2007**

TD 3 – Séries entières

Exercice 1. ⋆ Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes. Étudier le comportement aux extrémités de l'intervalle de convergence et calculer la somme (sauf pour les trois denières).

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 x^n}{n!}$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)2^n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 3^{-n}(n+1)x^n$,
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{n!}$,
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)(n+2)} x^n$,
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$,
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$,
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{\ln n} x^n$,
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

Éléments de correction. On note a_n le terme général de chaque série entière.
1. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0$, donc $\mathrm{RDC} = +\infty$. Pour le calcul de la somme, on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x(x+1)e^x.$$

2. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \frac{1}{2}$ donc $\mathrm{RDC} = 2$. Pour $x = \pm 2$, la série est absolument convergente (cf. équivalent en $\frac{1}{n^2}$). Pour le calcul de la somme, on dérive deux fois $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$f''(x) = \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{x^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4+2x}.$$

En intégrant deux fois (avec les conditions $f(0) = f'(0) = 0$, on a $f(x) = (1+\frac{x}{2})\ln(1+\frac{x}{2}) - \frac{x}{2}$.
3. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ donc $\mathrm{RDC} = 1$. En $x = \pm 1$, la série est grossièrement divergente. Pour le calcul de la somme, on fait apparaître des dérivées :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + x\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

4. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 3$ donc $\mathrm{RDC} = 3$. En $x = \pm 3$, la série est grossièrement divergente. Pour le calcul de la somme, on écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{(1-\frac{x}{3})^2}.$$

5. Il s'agit du développement de e^{x^2}, donc $\mathrm{RDC} = +\infty$.
6. $\left|\frac{\to_{n+1}}{\to_n}\right| 1$ donc $\mathrm{RDC} = 1$. La série est grossièrement divergente en $x = \pm 1$. Pour le calcul de la somme, on décompose la fraction en éléments simples :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2},$$

soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\ln(1-x) + \frac{2}{x^2}\Big[-\ln(1-x) - x\Big]$.
7. $\left|\frac{\rightarrow_{n+1}}{\rightarrow_n}\right| 1$ donc RDC $= 1$. En $x = 1$, la série est divergente (cf. série harmonique), en $x = -1$, elle est semi-convergente (série alternée). Pour le calcul de la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, on écrit $f(x^2)$:

$$f(x^2) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

d'où $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ pour $x \in [0,1[$. Le calcul de $f(-x^2)$ permet de déterminer $f(x)$ pour $x \in]-1,0]$:

$$f(-x^2) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)2n+1\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\operatorname{atan} x}{x},$$

d'où $f(x) = \frac{\operatorname{atan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$ pour $x \in]-1,0]$. 8. En utilisant un équivalent, $\left|\frac{\rightarrow_{n+1}}{\rightarrow_n}\right| 0$ donc RDC $= +\infty$.
9. En utilisant un équivalent, $\left|\frac{\rightarrow_{n+1}}{\rightarrow_n}\right| + \infty$ donc RDC $= 0$.
10. En utilisant un équivalent, $\left|\frac{\rightarrow_{n+1}}{\rightarrow_n}\right| 1$ donc RDC $= 1$. En $x = 1$, la série est divergente d'après l'équivalent ($a_n > 0$!) $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. En $x = -1$, la série est convergente comme série alternée.

Exercice 2. ⋆⋆ Montrer que les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2+n-2} a_n x^n$ ont le même rayon de convergence.

Éléments de correction. Notons R le RDC de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et ρ celui de $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2+n-2} a_n x^n$. Alors, pour $r < R$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Il en va de même de la suite $(\frac{n}{n^2+n-2} a_n r^n)$ et donc $\rho \geq R$.
Pour l'inégalité inverse, soit $r < \rho$ tel que la suite $(\frac{n}{n^2+n-2} a_n r^n)$ soit bornée. Alors, pour $r' < r$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée et donc $R \geq r'$, d'où $R \geq \rho$.

Exercice 3. ⋆ Soit d_n le nombre de diviseurs de n. Trouver le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} d_n x^n.$$

Éléments de correction. Grossièrement, on a $1 \leq d_n \leq n$. D'où RDC $= 1$.

Exercice 4. ⋆ Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2 x^n = 0$$

Éléments de correction. On somme la série entière dont le RDC vaut 1 (règle de d'Alembert).

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)^2 x^n = 9\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n + 15\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 9x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' + 15x\left(\frac{1}{1-x}\right)' + \frac{1}{1-x},$$

d'où $\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)^2 x^n = \frac{4x^2+13x+1}{(1-x)^3}$. Les solutions recherchées sont donc les racines de $4x^2+13x+1$ situées dans $]-1,1[$: la seule est donc $\frac{-13+\sqrt{153}}{8}$.

Exercice 5. ⋆⋆ Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \operatorname{ath} x$,

2. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,

3. $f(x) = \displaystyle\int_0^x t\cos t\,dt$,

4. $f(x) = \mathrm{ch}\,x\,\cos x$,

5. $f(x) = (\mathrm{asin}\,x)^2$.

Éléments de correction.

1. Par intégration du DSE$_0$ de $\frac{1}{1-x^2}$, on obtient $\mathrm{ath}\,x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

2. Par intégration de $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\mathrm{ash}\,x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3. Par intégration du développement de $t\cos t$, il vient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n)!(2n+2)}.$$

4. Une méthode simple consiste à linéariser l'expression à l'aide de la fonction exponentielle :

$$\mathrm{ch}\,x\,\cos x = \frac{1}{4}\left(e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)} + e^{x(-1-i)} + e^{x(-1+i)}\right).$$

Les quatre termes se développent de la même manière : par exemple, pour le premier, on a

$$e^{x(1+i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1+i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}}{n!}.$$

L'expression de départ étant réelle, il suffit de conserver la partie réelle de chaque terme, qui correspond aux valeurs de n multiples de 4. En somme, on obtient

$$\mathrm{ch}\,x\,\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}x^{4n}}{(4n)!}.$$

5. En dérivant f, on obtient l'équation différentielle $(1-x^2)f'^2 = 4f$. Pour obtenir une équation linéaire, on dérive à nouveau : $-2xf'^2 + 2(1-x^2)f'f'' = 4f'$, soit $(1-x^2)f'' - xf' - 2 = 0$ après simplification par f'. On sait *a priori* que f est DSE$_0$ (car carré d'une fonction DSE$_0$) : notons $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière associée (on sait aussi que le rayon de convergence vaut 1). En injectant la série dans l'équation différentielle, et en identifiant les coefficients de même rang (unicité du développement en série entière), on trouve

$$a_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Les conditions $f(0) = f'(0) = 0$ fournissent $a_0 = a_1 = 0$ et donc

$$a\forall p \in \mathbb{N} \quad a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!}.$$

Exercice 6. ⋆⋆ Soit

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

1. Montrer que f est définie sur $[-1,1]$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.
2. Majorer
$$\frac{\left\|f^{(p)}\right\|_{\infty,[-1,1]}}{p!}$$
3. Calculer $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ et montrer que la série $\sum_0^\infty a_p x^p$ converge pour tout $|x| < 2$.
4. En déduire que f est développable en série entière autour de 0 sur $[-1,1]$.

Éléments de correction. 1. Pour $x \in [-1,1]$, la suite $\frac{1}{x+n}$ est décroissante vers 0 : le critère des séries alternées permet de montrer que $f(x)$ est définie. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$, on observe la série des dérivées : $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$, elle est normalement convergente d'après la majoration
$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}\right| \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$
Il s'ensuit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ se déduit pas récurrence immédiate (les puissances de n^{-1} sont de plus en plus fortes).
2. Par interversion de la série et de la dérivation, on a $f^{(p)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p} p!}{(x+n)^{p+1}}$, d'où l'estimation, pour $x \in [-1,1]$,
$$\frac{|f^p(x)|}{p!} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{p+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$
La suite est bornée, donc on en déduit que f est développable en série entière autour de tout point de $[-1,1]$.
3. $a_p = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^p}{n^{p+1}}$, donc
$$|a_p| \leq \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{p-1} n^2} \leq \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} \leq Cste \times 2^{-p}.$$
On en déduit, d'après le lemme d'Abel, que $\sum_{n\geq 0} a_p x^n$ converge pour $|x| < 2$.
4. On utilise ici un théorème de prolongement analytique...

Exercice 7. ⋆⋆ On considère les expressions de la forme
$$a_1 \star a_2 \star a_3 \star \cdots \star a_n, \tag{1}$$
où le symbole $\star$ représente une des deux opérations $+$ ou $-$. On souhaite placer des parenthèses dans cette expression pour savoir dans dans quel ordre effectuer les opérations. Par exemple, $1-(3+7) = -9$ est différent de $(1-3)+7 = 5$. Il s'agit donc de placer des parenthèses autour des termes de sorte que :
– on n'ait jamais plus de deux termes non parenthésés (pas de choix à faire !),
– on ne mette jamais des parenthèses autour d'un seul terme (pas de parenthèses inutiles !).

Le nombre de façons de bien parenthéser l'expression (1) s'appelle *nombre de Catalan d'ordre n*, noté c_n. Par convention, on pose $c_0 = 0$.

1. Calculer les nombres c_n pour $n = 1,2,3,4$.
2. Établir la relation de récurrence
$$\forall n \geq 2,\ c_n = \sum_{p=0}^{n} c_p\, c_{n-p}. \tag{2}$$

3. (a) Montrer que $c_n \leq 4^n$.

(b) On introduit la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$, appelée *série génératrice* des nombres de Catalan. Montrer que son rayon de convergence est supérieur à $\frac{1}{4}$. Sa somme (quand elle existe) est notée $c(x)$.

(c) En utilisant la relation précédente, montrer que

$$c(x) - x = \left[c(x)\right]^2.$$

4. En déduire que $c(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. En développant cette fonction en série entière autour de 0, déterminer l'expression du nombre de Catalan c_n :

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{n-1}{2n-2}.$$

Éléments de correction. 1. On dénombre à la main : $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 5$.

2. Il s'agit de relier le nombre de parenthésages d'une expression de longueur n aux nombres de parenthésages des expressions de longueur inférieure. Le parenthésage de plus haut niveau divise l'expression de longueur n en deux sous-expressions de longueurs p et $n-p$, p variant de 1 à $n-1$, d'où la formule de récurrence annoncée, car $c_0 = 0$.

3. (a) Le nombre de parenthésages est majoré par le nombre total de possibilités pour les parenthèses ouvrantes et fermantes. Comme il y a n emplacements pour chaque catégorie de parenthèse, il y a $2^n \times 2^n = 4^n$ choix au total.

(b) Par le lemme d'Abel, la série génératrice a un rayon de convergence $\geq \frac{1}{4}$.

(c) La formule (2) fait penser à un produit de Cauchy :

$$\left[c(x)\right]^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} c_p c_{n-p}\right)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n x^n = c(x) - x.$$

4. Le discriminant du trinôme précédent est positif pour $x < \frac{1}{4}$, et on a alors $c(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. En utilisant le DSE_0 de $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, il vient

$$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n.$$

Par identification, on obtient

$$c_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{n-1}{2n-2}.$$