TD 2 – Suites de fonctions

Exercice 1. ⋆⋆

1. Soient
$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}.$$
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$ (penser à faire un dessin).
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Que peut-on dire de sa convergence sur l'intervalle $[0,1]$?
3. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de $[0,1] \to \mathbb{R}$ par
$$f_n(t) = \frac{1}{1+t+\ldots+t^n}.$$
   (a) Étudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.
   (b) Examiner $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Éléments de correction. 1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers 0. La convergence n'est cependant pas uniforme car la norme $\|f_n\|_\infty$ vaut 1 (atteinte en $x = n$). Quant à $(g_n)_{n\geq 0}$, elle converge simplement vers 0 ; la convergence est ici uniforme car $\|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0$.
2. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f qui vaut 1 en 0 et 0 partout ailleurs. La convergence n'est pas uniforme car $\|f_n - f\|_\infty = 1$ pour tout n.
3. (a) Si $t \in [0,1[$, on a $f_n(t) = \frac{1-t}{1-t^{n+1}}$, qui converge simplement vers $1-t$. Pour $t = 1$, $f_n(1)$ converge vers 0. En somme, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : t \mapsto 1-t$. Pour étudier la convergence uniforme, on étudie la fonction différence $\varphi = f_n - f$ sur $[0,1]$:
$$\varphi'(t) = \frac{t^n(t^{n+2} - (n+2)t + n + 1)}{(1-t^{n+1})^2},$$
expression positive ou nulle (une étude de la fonction $t \mapsto t^{n+2} - (n+2)t + n + 1$ permet de le voir facilement). Donc φ croît sur $[0,1]$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \frac{1}{n+1}$ donc $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n+1}$ et la convergence est uniforme.
(b) Par convergence uniforme, la limite de $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est $\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. ⋆⋆ Étudier la nature de la convergence des suites d'applications suivantes :

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n},$
2. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2},$
3. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2},$

4. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$,
5. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$,
6. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n \ln^2 x$ pour $x > 0$, et $f_n(0) = 0$,
7. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{2^n} - x^{2^{n+1}}$,
8. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ où α est un paramètre réel.

Éléments de correction. 1. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. La convergence n'est pas uniforme car $f_n(x) - f(x) = -\frac{x}{1+n}$ a une norme uniforme infinie pour tout n.
2. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. Étudions la différence $\varphi = f_n - f$: $\varphi'(x) = \frac{nx^2-1}{nx^2+1}$, donc φ est décroissante sur $[-n^{-\frac{1}{2}}, n^{-\frac{1}{2}}]$, croissante ailleurs. La norme uniforme de φ est atteinte pour $x = n^{-\frac{1}{2}}]$, elle vaut $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. La convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. La convergence vers 0 est uniforme car $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
4. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers 0, mais la convergence n'est pas uniforme car la norme uniforme de f_n est infinie pour tout n.
5. La converge est simple vers 0, mais pas uniforme car une étude de f_n montre que sa norme uniforme est atteinte en $x = \frac{e-1}{n}$ et a pour valeur e^{-1} pour toute valeur de n.
6. La converge est uniforme vers 0 car une étude de f_n montre que sa norme uniforme est atteinte en $x = e^{-\frac{2}{n}}$ et a pour valeur $\frac{4}{e^2 n^2}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
7. En posant $p = 2^n$, on se ramène à l'étude de la suite $g_p = x^p - x^{2p}$: la convergence simple a lieu vers 0 : $g_p(x) = x^p(1-x^2)$. Une étude de la norme uniforme de g_p montre qu'elle est atteinte en $x = \sqrt[p]{\frac{1}{2}}$ et vaut $\frac{1}{4}$ pour tout n. La convergence n'est donc pas uniforme.
8. La convergence simple a lieu vers 0. Pour savoir si elle est uniforme, on étudie la norme uniforme de la fonction f_n : elle est atteinte en $x = \frac{1}{n}$ et vaut $n^{\alpha-1}e^{-1}$. Ainsi, la convergence est uniforme ssi $\alpha < 1$.

Exercice 3. ⋆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$(a)\ \phi_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right), \qquad (b)\ \chi_n(x) = f\left(x - \frac{1}{n}\right), \qquad (c)\ \psi_n(x) = f(x-n).$$

Étudier la convergence simple et uniforme de chacune de ces trois fonctions sur $\mathbb{R}$.

Éléments de correction. (a) $(\phi_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction constante $f(0)$. La convergence n'est pas nécessairement uniforme sur $\mathbb{R}$, comme le montre l'exemple de la fonction $f(x) = x$.
(b) $(\chi_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f. La convergence n'est pas nécessairement uniforme, comme le montre l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$. En effet, $f_n(x) - f(x) = -2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$, dont la norme uniforme est infinie pour tout n.
(c) $(\psi_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas nécessairement simplement, comme le montrent les exemples $f(x) = x$ ou $f(x) = \sin x$.

Exercice 4. ⋆

1. Montrer que la suite $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\geq 2}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\},$$
$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n^3 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ (-1)^{n+1} n^3 (x - \frac{2}{n}) & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1], \end{cases}$$
converge simplement et non uniformément, vers 0, et que $(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x)_{n\geq 2}$ diverge.
2. Montrer que la suite d'applications continûment dérivables $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers une application qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Éléments de correction. 1. Soit $x \in [0,1]$ fixé. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \to 0$. Sinon, il existe un rang à partir duquel $\frac{2}{n} < x$ et alors $f_n(x) = 0$. Donc $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$. La convergence n'est pas uniforme car la norme uniforme de f_n sur $[0,1]$ vaut n^2, qui ne tend pas vers 0 avec n. L'intégrale $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ se calcule explicitement : elle vaut $(-1)^n n$.
2. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f : x \mapsto |x|$. Pour la convergence uniforme, on considère la différence $f_n - f$:
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$
Pourtant, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5. ⋆⋆⋆ Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f. Montrer que f est polynomiale.

Éléments de correction. Grâce au critère de Cauchy uniforme, $\|P_{n+1} - P_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En examinant la limite en $x = +\infty$, il vient que le degré de P_n est le même que celui de P_n à partir d'un certain rang, ce qui prouve que le degré de la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ stationne à partir d'un certain rang. Notant d la valeur de ce degré, on peut ainsi écrire la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ sous la forme $P_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \cdots + a_d^n x^d$. Les coefficients dépendent de n, mais il est facile de voir que chacun d'entre eux converge, par exemple a_0^n converge car vaut $P_n(0)$, puis a_1^n converge comme égal à $\lim_{x\to 1} \frac{P_n(x) - P_n(0)}{x}$, etc. La convergence des coefficients implique la convergence simple, donc on identifie f avec la limite $a_0^\infty + a_1^\infty x + \cdots + a_d^\infty x^d$, fonction polynomiale.

Exercice 6. ⋆ On considère la suite de fonctions (f_n) définie par
$$f_n : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos^n x \, \sin x.$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. On considère la suite de fonctions (g_n) définie par $g_n = (n+1) f_n$. Montrer que sur tout intervalle de la forme $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ avec $\delta > 0$, (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite $(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)\,\mathrm{d}x)$ ne tend pas vers 0.

Éléments de correction. 1. La convergence simple est claire, on étudie la norme uniforme de f_n : la norme uniforme est atteinte pour $x = \operatorname{atan} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et est majorée par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où la convergence uniforme.
2. La majoration $\cos x \leq \cos \delta < 1$ permet de conclure simplement. Le calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ est explicite : la valeur est 1.

Exercice 7. On classe les rationnels de l'intervalle $[0,1]$ sous la forme d'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on construit la suite f_n de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_0, r_1, \dots, r_n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur $[0,1]$.

Éléments de correction. Soit $x \in [0,1]$ fixé. Si x est rationnel, alors $f_n(x)$ vaut 1 à partir d'un certain rang ; sinon $f_n(x)$ vaut toujours 0. Ainsi f_n converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f indicatrice des rationnels. La convergence n'est pas uniforme car pour tout n, la norme uniforme de $f_n - f$ vaut 1.

Exercice 8. ⋆⋆⋆ Montrer que tout fonction continue sur un intervalle borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers. Même question avec en remplaçant "fonction en escaliers" par "fonction affine par morceaux".

Éléments de correction. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on subdivise $[a,b]$ à l'aide des points $x_i^n = a + i\frac{(b-a)}{n}$ $(i = 0, \dots, n)$. On définit alors la fonction f_n comme la fonction en escaliers valant $f(x_i^n)$ sur l'intervalle $[x_i^n, x_{i+1}^n]$, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$. Montrons que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue, donc uniformément continue sur $[a,b]$. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a,b] \quad |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Étudions maintenant la différence $f_n - f$ sur chaque intervalle $[x_i^n, x_{i+1}^n]$: pour x dans cet intervalle, $|x - x_i^n| < \frac{(}{b} - a)n < \eta$ pour n assez grand, d'où $|f(x) - f(x_i^n)| < \varepsilon$, or $f(x_i^n) = f_n(x)$. L'estimation précédente étant valable pour tout i, on a $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$, d'où la convergence uniforme.
Le cas "affine par morceaux" est identique.