ENSAI – 1A IES – ANALYSE **2007**

TD 1 – Séries numériques

Exercice 1. ⋆⋆ Étudier les séries de terme général :

1. $u_n = 1 - \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$
2. $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,\mathrm{d}x$
3. $w_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
4. $x_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
5. $y_n = \frac{n^n}{(2n)!}$
6. $z_n = \frac{n+\cos n}{e^n+\sin n}$
7. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
8. $b_n = \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$
9. $c_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos t\,\mathrm{d}t$
10. $d_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

Éléments de correction.

1. $$u_n = 1 - \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[\frac{-(1-x)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+n},$$
   terme général d'une série divergente.
2. $$0 \leq v_n \leq \int_0^{\pi/n} \frac{x^3}{x} dx = \frac{\pi^3}{3n^3},$$
   terme général d'une série de Riemann convergente.
3. $$w_n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 1,$$
   donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ est une série grossièrement divergente.
4. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est positive et équivalente à $\frac{1}{n}$, donc la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est divergente.
5. D'après la règle de d'Alembert, $\sum_{n\geq 0} y_n$ converge :
   $$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \to 1\times 0 = 0 < 1.$$
6. La série est à termes positifs : elle converge d'après l'équivalent
   $$\frac{n+\cos n}{e^n+\sin n} \sim \frac{n}{e^n}.$$
7. La série est à termes positifs : elle converge d'après l'équivalent
   $$a_n \sim \frac{\pi}{n\sqrt{n}}.$$

8. La série n'est pas à termes positifs : on étudie la convergence absolue de la série :

$$|b_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge.

9. Le signe de $\cos t$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ varie suivant les valeurs de n. On étudie donc la convergence absolue :

$$|c_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} |\cos t| \, \mathrm{d}t \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n\pi} \, \mathrm{d}t = \pi e^{-n\pi},$$

terme général d'une série géométrique convergente : $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergente.

10. La série n'est pas à termes positifs. Un équivalent ne suffit pas ; on utilise un D.L. :

$$d_n = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série alternée convergente, $\frac{(-1)^n}{3n}$ est le terme général de la série harmonique, divergente. Enfin, la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est absolument convergente. En somme, $\sum_{n\geq 0} d_n$ diverge.

Exercice 2. ⋆ En utilisant les séries de Bertrand, déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n^2+\sqrt{n})\ln n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 2} \sin\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right).$$

Éléments de correction. La première série est à termes positifs équivalents à $\frac{1}{n^2 \ln n}$, terme général d'une série de Bertrand convergente. De même pour la seconde, avec l'équivalent $\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Exercice 3. ⋆⋆ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2+k)^\alpha}.$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Éléments de correction. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive, et, utilisant $0 \leq k \leq n$, on a l'encadrement

$$\frac{n}{(n^2+n)^\alpha} \leq u_n \leq \frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

De la majoration, on déduit la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ pour $\alpha > 1$; de la minoration la divergence pour $\alpha \leq 1$.

Exercice 4. ⋆⋆ Étudier selon (α, β) réels, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi\right).$$

Éléments de correction. On a $u_n = (-1)^n \sin(\alpha\pi + \beta\pi/n)$. Ainsi, si $\alpha \neq 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est grossièrement divergente. Si $\alpha = 0$, la série n'est pas à termes positifs (un équivalent ne suffit pas !), on écrit le D.L. (on écarte le cas $\beta = 0$, grossièrement divergent) :

$$u_n = (-1)^n \beta \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ainsi, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, car u_n est somme du terme général de série alternée convergente, et de celui d'une série de Riemann absolument convergente.

Exercice 5. ⋆⋆⋆ Nature et somme des séries suivantes :

$$1.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n}{2^n} \qquad 2.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2^n}{n!} \qquad 3.\ \sum_{n\geq 1} \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right].$$

Éléments de correction.
1. La série est à termes positifs, et $(n^2 u_n)$ est bornée, donc converge. Pour le calcul de la somme, la méthode classique anticipe un peu sur le chapitre des séries entières. Une alternative consiste à utiliser – comme pour l'équivalent continu du calcul de $\int P(x)e^{-x}$ où P est un polynôme – une intégration par parties discrète, alias transformation d'Abel. On peut utiliser, de manière équivalente ici, le calcul de séries produits :

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}2^{k-n}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^{-n}.$$

Et, par suite,

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\right]^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} 2^{-n}.$$

Il suffit enfin de remarquer que $n^2+3n = (n+1)(n+2)-2$ pour conclure à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n}{2^n} = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\right]^3 - 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 12.$$

2. La convergence est une conséquence de la règle de d'Alembert car le quotient de deux termes consécutifs tend vers $0 < 1$ (noter que la série est à termes strictement positifs !). Pour le calcul de la somme, on écrit

$$\frac{n^2+2^n}{n!} = \frac{n(n-1)+n+2^n}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2^n}{n!}.$$

Comme les trois séries sont convergentes, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e+e+e^2 = 2e+e^2.$$

3. La fraction dans le logarithme se simplifie en $\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \dfrac{1}{n(n+2)}$, ce qui prouve que la série est à termes positifs ; l'équivalent du terme général à $\frac{1}{n^2}$ montre la convergence. Pour le calcul de la somme, on considère la somme partielle d'ordre n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right] = 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n}\ln k - \sum_{k=1}^{n}\ln(k+2) = \ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \to \ln 2.$$

D'où $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right] = \ln 2$.

Exercice 6. ⋆ Soit α un réel tel que $\alpha \in]0,1[$. La série : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est alors divergente.

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$
2. En déduire que :
$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$
3. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ quand n tend vers l'infini.
4. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Éléments de correction. 1. C'est une conséquence directe de $k \leq t \leq k+1$ et de la décroissante de la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$.
2. On somme chaque inégalité de la question 1 et on calcule les intégrales explicitement.
3. Le théorème des gendarmes conduit à l'équivalent $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
4. La méthode s'applique dans le cas $\alpha = 1$, l'intégrale faisant apparaître un logarithme.

Exercice 7. ⋆⋆ On considère la série de terme général $u_n = \operatorname{atan} \dfrac{2}{n^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
2. Montrer l'identité $\dfrac{2}{n^2} = \tan\left(\operatorname{atan}(n+1) - \operatorname{atan}(n-1)\right)$.
3. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Éléments de correction.
1. La série est à termes positifs et $u_n \sim 2/n^2$, terme général d'une série de Riemann convergente.
2. C'est une conséquence directe de la formule $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$.
3. On considère la somme partielle d'ordre n :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} [\operatorname{atan}(k+1) - \operatorname{atan}(k-1)] = \operatorname{atan}(n+1) + \operatorname{atan} n - \operatorname{atan}(1) - \operatorname{atan} 0 \to \frac{3\pi}{4}.$$

Exercice 8. ⋆⋆⋆

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.
2. Sommer la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

Éléments de correction. 1. On a $\dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{6}{n} + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}$.
2. D'après la formule $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, la série est convergente (car à termes positifs, équivalents à $\frac{1}{2n^3}$). La question précédente permet d'écrire la somme partielle d'ordre n :
$$S_n = 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 6\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 24\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = 6 + \frac{6}{n+1} + 24\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)\right) - 8,$$

soit

$$S_n = -2 + \frac{6}{n+1} + 24 \sum_{p=4}^{2n+1} \frac{(-1)^p}{p} \to -2 + 24\left(-\ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 18 - 24\ln 2.$$

Une autre méthode consiste à utiliser une série entière.

Exercice 9. ⋆ Montrer que la série de teme général :

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

converge et calculer sa somme ($n \in \mathbb{N}$).

Éléments de correction. La convergence est assurée par la positivité de u_n et l'équivalent $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. En décomposant u_n en éléments simples, on a $u_n = \frac{3}{3n+1} - \frac{3}{3n+4}$, si bien que la somme partielle est télescopique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{3k+1} - \frac{3}{3k+4}\right) = 3 - \frac{3}{3n+4} \to 3..$$

Exercice 10. ⋆ On considère $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente de somme S. Pour $n \geq n_0$, on pose :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k.$$

Majorer le reste d'ordre n de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^4}$.

Éléments de correction. La série de terme général n^{-4} est une série de Riemann convergente. Avec les outils de l'exercice 6, on montre facilement que $R_n \leq \frac{1}{3n^3}$.

Exercice 11. ⋆⋆

1. On suppose que $\sum_{n \geq 1} a_n$ est une série convergente à termes positifs. Montrer que ces trois séries sont également convergentes :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{a_n+1}, \qquad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}, \qquad (c) \sum_{n \geq 1} a_n^2$$

(on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz).

2. On suppose maintenant que $\sum_{n \geq 1} a_n$ est une série divergente à termes positifs. Montrer alors que les séries suivantes divergent :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{a_n+1} \quad \text{et} \quad (b) \sum_{n \geq 1} \sqrt{a_n}.$$

Distinguer les cas $a_n \to 0$ et $a_n \not\to 0$.
Que dire des séries suivantes ?

$$(c) \sum_{n \geq 1} a_n^2 \quad \text{et} \quad (d) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}.$$

Éléments de correction. 1. (a) La majoration suivante conclut : $\dfrac{a_n}{a_n+1} \leq a_n$.
(b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi S_n est majorée, car les séries de terme général a_n et $\frac{1}{n^2}$ sont convergentes. Comme $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante, elle converge, d'où la convergence de la série (b).
(c) Puisque $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0, si bien qu'à partir d'un certain rang, on a la majoration : $a_n^2 \leq a_n$, d'où la convergence.
2. (a) Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est majorée par M, alors la minoration $\frac{a_n}{a_n+1} \geq \frac{a_n}{M+1}$ conclut. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée, alors la série de terme général $\frac{a_n}{a_n+1}$ est grossièrement divergente.
(b) Si $(a_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0, alors $\sum_{n\geq 1} \sqrt{a_n}$ diverge grossièrement. Sinon, la minoration $\sqrt{a}_n \geq a_n$ (à partir d'un certain rang) permet de conclure.
(c) On ne peut pas conclure, comme le montrent les exemples $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $a_n = n^{-\frac{2}{3}}$ ($\sum_{n\geq 0} a_n^2$ diverge pour la première, converge pour la seconde).
(d) La majoration $\dfrac{a_n}{1+n^2 a_n} \leq \dfrac{1}{n^2}$ montre la convergence.