ENSAI **2007-2008**

Première année IES

Examen d'analyse (Grégory Vial)

Durée : 2H30

Sans documents ni calculatrice

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux pages.

Exercice 1.

1. Donner la nature de la série
$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

2. Discuter, suivant les valeurs du paramètre $a > 0$, la nature de la série
$$\sum_{n\geq 0} \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + 3^n}.$$

3. Étudier la nature de la série
$$\sum_{n\geq 1} e^{-\ln^2 n}.$$

4. Justifier la convergence de la série de terme général ($n \geq 2$)
$$u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$
En utilisant une comparaison avec une intégrale, donner une majoration du reste d'ordre n :
$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

5. Étudier la nature de la série
$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}.$$

TOURNEZ LA PAGE SVP

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{2nx}{n^2x^4+1}$$

1. Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 0}$ vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{e^n}{e^n + \sin n} x^n$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2\operatorname{sh} n}{n} x^n,$$

   et calculer sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence. Que dire aux bornes de cet intervalle ?
4. Développer en série entière autour de 0 la fonction $\ln\left(1 + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$.
   (on pourra développer en série sa dérivée)

Exercice 4.

1. En utilisant le changement de variable $u = \tan\theta$, montrer que

$$\mathcal{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

2. On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ |x| \leq x^2+y^2 \leq 1\}$. Représenter D sur un dessin, et montrer qu'il s'écrit en coordonnées polaires
3. À l'aide d'un changement de variable en coordonnées polaires, calculer

$$\mathcal{J} = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

FIN DE L'ÉNONCÉ

Barème indicatif :

- Exercice 1 : 6 points
- Exercice 2 : 4 points
- Exercice 3 : 5 points
- Exercice 4 : 5 points

CORRECTION EXAMEN ANALYSE IES

Exercice 1.

1. Il s'agit d'une série alternée convergence ($1/\ln n \searrow 0$).
2. La série est à termes positifs, on peut utiliser un équivalent : $u_n \sim 3^{-n}a^n 2^{\sqrt{n}}$. Puisque $2^{\sqrt{n}} = o(\alpha^n)$ quel que soit $\alpha > 1$, la série est convergence pour $a < 3$, et divergente (grossièrement) pour $a \geq 3$.
3. On a $u_n = \exp(-\ln^2 n) = (1/n)^{\ln n}$. La série est à termes positifs, on utilise la majoration $u_n \leq 1/n^2$ pour $n \geq e^2$, d'où convergence.
4. La série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$. La fonction $x^{-1}\ln^{-2} x$ est positive et décroissante, donc on peut écrire
$$R_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_{n-1}^{+\infty} = \frac{1}{\ln(n-1)}.$$
5. La série n'est pas à termes positifs, on écrit un développement limité :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n,$$
avec $|\varepsilon_n| \leq Cn^{-3/2}$. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (alternée...) et la série des ε_n est absolument convergente. Donc la série des u_n est convergente.

Exercice 2.

1. Soit $x \geq 0$ fixé. Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc converge vers 0. Sinon, $f_n(x) \sim 2/nx^3 \to 0$. En conséquence, f_n converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.
2. On étudie la fonction $f_n(x) - 0$, qui atteint son maximum sur $\mathbb{R}$ en $x^* = \sqrt[4]{1/(3n^2)}$. La valeur de ce maximum se comporte comme $3nx^*/2$, qui tend vers l'infini. Il n'y a donc pas convergence uniforme.

Exercice 3.

1. On calcule $a_{n+1}/a_n = (n+1)^{(n+1)}/n^n \times n!/(n+1)! = (1+1/n)^n \to e$, donc $\text{RDC} = e^{-1}$ (règle de d'Alembert).
2. On a l'encadrement
$$\frac{e^n}{e^n+1} \leq a_n \leq \frac{e^n}{e^n-1},$$
dont les deux extrémités tendent vers 1, donc $\text{RDC} = 1$ (lemme d'Abel).
3. $a_n \sim e^n/n$, donc $\text{RDC} = e^{-1}$. Pour calculer la somme, on écrit $2\operatorname{sh} n = e^n - e^{-n}$, d'où
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ex)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-1}x)^n}{n} = -\ln(1-ex) - \ln(1-e^{-1}x) = -\ln\big((1-ex)(1-e^{-1}x)\big).$$
En $x = -e^{-1}$, $S(x)$ est définie $S(-e^{-1}) = -\ln\big(2(1+e^{-2})\big)$. Mais en $x = e^{-1}$, $S(x)$ n'est pas défini (la série entière n'est pas convergente).

4. La dérivée s'écrit

$$u'(x) = \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{(1-x^2)(1+x+x^2)} = \frac{-2x}{1+x^2} + \frac{2x+1}{1+x+x^2}.$$

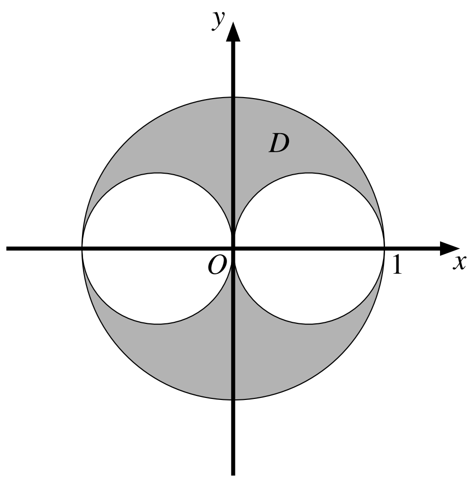
Le rayon de convergence sera égal à 1 (passer en complexe, par exemple) et, pour $|x| < 1$,

$$u'(x) = \frac{-2x}{1+x^2} - \frac{(2x+1)(1-x)}{1-x^3} = -2x \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n} + (1+x-2x^2) \sum_{n\geq 0} x^{3n} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

où $a_n = b_n + c_n$ avec, pour $p \geq 0$, $b_{2p} = 0$, $b_{2p+1} = 2(-1)^{n+1}$ et $c_{3p} = c_{3p+1} = 1$, $c_{3p+2} = -2$.

Exercice 4.

1. $\mathrm{d}u = (1+u^2)\,\mathrm{d}\theta$ et $\cos^2\theta = (1+u^2)^{-1}$ donc $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}[\operatorname{atan} v]_0^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.
2. En polaire, $D = \{|\cos\theta| \leq r \leq 1\}$.



3. $$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi} \int_{|\cos\theta|}^1 \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2(1+\cos^2\theta)} - \frac{\pi}{2} = 2\mathcal{K} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}.$$