Chapitre 1 Séries numériques

1 Généralités et premiers exemples

Définition 1 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On dit que la série de terme général u_n est convergence ssi la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, est convergente. Dans ce cas, la limite S de $(S_n)_{n\geq 0}$ est appelée somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$; on la note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. On définit alors le reste d'ordre n par $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Une série non convergente est dite divergente.*

Exemple fondamental des séries géométriques.

Proposition 2 *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.*

Définition 3 *Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite grossièrement divergente.*

2 Séries absolument convergentes

Proposition 4 *Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ telle que $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge est une série convergente. On dit alors que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente.*

Définition 5 *Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.*

3 Séries à termes positifs

3.1 Règles de comparaison directe

Théorème 6 *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.*
– *si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ;*
– *si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge ;*
– *si $u_n = O(v_n)$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ;*
– *si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.*

Exemples : $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n+1}$, $\sum_{n\geq 0} e^{-n} \ln n$ et $\sum_{n\geq 0} \ln(1+a^n)$ $(0 \leq a < 1)$.
Important : on majore le terme général, pas la somme partielle ou la série !

3.2 Comparaison série-intégrale

Théorème 7 *Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante et continue par morceaux. Alors $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.*

Proposition 8 (séries de Riemann) *La série $\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.*

Proposition 9 (comparaison à une série de Riemann ou "règle du n^{α}") *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^{\alpha} u_n)$ soit bornée, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*

Exemples : $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}}$, séries de Bertrand.

3.3 Règles historiques

Proposition 10 (règle de d'Alembert) *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}^+$.*
– *si $\lambda < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ;*
– *si $\lambda > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement :*
– *le cas $\lambda = 1$ est douteux : on ne peut pas conclure.*

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$.

Proposition 11 (règle de Cauchy) *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs telle que $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On a alors les mêmes conclusions que pour la règle de d'Alembert.*

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{-n^3}$.

4 Séries à termes non-positifs : outils et exemples

4.1 Séries alternées

Théorème 12 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante, convergeant vers 0.Alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est convergente et le reste est majoré par le premier terme négligé : $|R_n| \leq u_{n+1}$.*

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 0$.

4.2 Utilisation d'un D.L.

Sur l'exemple $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right)$, qui converge : il faut aller à l'ordre 2 car l'équivalent ne suffit pas, cf la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, qui diverge.

4.3 La transformation d'Abel

Elle peut être utilisée pour la preuve du théorème sur les séries alternées. Il est facile de l'étendre à d'autres cas, par exemple pour l'étude de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$.

5 Plan d'étude de la nature d'une série

- on étudie la convergence absolue éventuelle *(on travaille ainsi avec une série à coefficients positifs, pour laquelle on a plus d'outils).*
- si la série n'est pas absolument convergente, on observe
  1. s'il s'agit d'une série alternée,
  2. on tente un D.L. jusqu'à obtenir une série absolument convergente,
  3. on tente une transformation d'Abel.

Remarque. séries à termes complexes.

6 Calcul de sommes de séries : quelques méthodes

6.1 Utilisation d'un développement de Taylor

Sur l'exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n2^n} = \ln 3/2$. Cas particulier important des suites gémétriques. On verra dans le chapitre 3 [séries entières] d'autres exemples.

6.2 Utilisation d'une dérivée discrète

Idée : faire apparaître u_n comme une différence $v_{n+1} - v_n$.
Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = 1$ car $\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

Chapitre 2 Suites de fonctions

1 Convergence simple

Définition 1 *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ où $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, converge simplement (ou ponctuellement) vers $f : I \to \mathbb{R}$ ssi $\forall x \in I$, $f_n(x) \to f(x)$.*

Exemples : $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$, $f_n(x) = \min(n, \frac{1}{x})$ sur $]0,1]$, $f_n(x) = \sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)$ sur $[-\pi,\pi]$.

2 Convergence uniforme

Définition 2 *La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I ssi $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.*

Proposition 3 *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I.*

Exemples : on reprend les trois mêmes, et le dernier sur $\mathbb{R}$ tout entier. La suite définie par $f_n(x) = (1-\frac{x}{n})^n$ sur $[0,n]$ et 0 sur $[n,+\infty[$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers e^{-x}.

Remarque. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, f_n continues, et $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors la suite $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.

Plan d'étude d'une suite de fonctions Étant donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$,
- on cherche l'éventuelle limite simple de $(f_n)_{n\geq 0}$: on fixe $x \in I$ et on étudie la limite de la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 0}$.
- si $f_n \to f$ simplement sur I, on cherche à savoir si la convergence est uniforme.
  - ◇ *Méthode 1.* on majore $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$, **indépendant de** x,
  - ◇ *Méthode 2.* on étudie la fonction $f_n - f$ et on cherche son maximum en valeur absolue sur l'intervalle I (= calcul de $\|f_n - f\|_\infty$).

3 Pourquoi préférer la convergence uniforme ?

Parce-que le passage à la limite uniforme préserve des propriétés que la limite simple ne préserve pas.

Théorème 4 *Si $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée sur I et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, alors f est bornée sur I.*

Théorème 5 *Si $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur I et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.*

Exemple : retour sur x^n sur $[0,1]$.
Remarque. La convergence sur tout compact de I suffit.
Exemple : $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 6 *Si $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I borné) est intégrable sur I et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f_n \to \int_I f$.*

Exemple : limite de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x e^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

Proposition 7 *Si $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I borné) est intégrable sur I et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, alors F est limite uniforme de $(F_n)_{n\geq 0}$ sur I, où*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 8 *On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur I. Si, de plus, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(f_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers g. Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, f est dérivable sur I et $f' = g$.*

4 Éléments sur les séries de fonctions

Définition 9 *On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I ssi la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour tout x de I.*

Définition 10 *On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I ssi la suite de fonctions $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I.*

Définition 11 *On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I ssi la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge.*

Proposition 12 *La convegence normale implique la convergence uniforme.*

Exemples : $\sum_{n\geq 0} nxe^{-nx^2}$ sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$, sur $\mathbb{R}$. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Les propriétés montrées pour les suites de fonctions s'appliquent naturellement aux séries de fonctions uniformément convergentes (continuité, dérivabilité, intégrabilité).

Chapitre 3 Séries entières

1 Définition – rayon de convergence

Définition 1 *On appelle série entière une série de fonctions du type* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$*, où* $(a_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de nombres réels (ou complexes).*

Théorème 2 (lemme d'Abel) *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que la suite* $(a_n x_0^n)_{n\geq 0}$ *soit bornée. Alors* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *est normalement convergente sur tout intervalle* $]-r,r[$ *avec* $r < |x_0|$.

Définition 3 *On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *le nombre* R *tel que*
– *pour tout* x *tel que* $|x| < R$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge (normalement),*
– *pour tout* x *tel que* $|x| > R$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *diverge (grossièrement).*

Remarque. Pour $|x| = R$, on ne peut pas conclure, cf $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.
Exemples : $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n\geq 0} x^n$, $\sum_{n\geq 0} n! x^n$.

Proposition 4 (règle de d'Alembert) *Si* $(a_n)_{n\geq 0}$ *est non nulle à partir d'un certain rang et* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ *converge vers* $\lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*, alors le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *est égal à* $1/\lambda$.

Exemples : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}, \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}\,\ln n}{n^2+1} x^n$. Attention aux séries lacunaires $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$...

Proposition 5 (opérations sur les séries entières) *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_1 *et* R_2*. Alors les séries somme* $\sum_{n\geq 0} a_n + b_n x^n$*, et produit* $\sum_{n\geq 0} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) x^n$ *ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à* $\min(R_1, R_2)$.

Remarque. À propos du théorème de limite radiale d'Abel, sans détails.

2 Régularité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence

Théorème 6 *La somme d'une série entière de rayon de convergence* R *est continue sur* $]-R,R[$*. De plus,* $\sum_{n=0}^{\infty}$ *admet des primitives de la forme* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} x^n + cste$*. Enfin,* $\sum_{n=0}^{\infty}$ *est indéfiniment dérivables sur* $]-R,R[$ *et* $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(n+1)\cdots(n+k)x^n$.

3 Développements en série entière

Définition 7 *Soit* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *avec* $0 \in I$*. On dit que* f *est développable en série entière autour de* 0 *– noté* DSE_0*– ssi il existe* $\varepsilon > 0$ *et une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *de rayon de convergence* > 0 *tels que* $\forall x \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Exemple : $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

Proposition 8 *Le* DSE_0*, s'il existe, est unique. En effet, si* f *est* DSE_0*, alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-\varepsilon,\varepsilon[$ *et* $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Proposition 9 (DSE$_0$ **et développement de Taylor)** *Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ouvert tel que $0 \in I$. Alors f est* DSE$_0$ *ssi il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \int_0^x \frac{(x-t)^N}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \to 0. \tag{1}$$

Proposition 10 *Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ouvert tel que $0 \in I$. Alors f est* DSE$_0$ *ssi il existe $A, B, \varepsilon > 0$ tels que*

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq A\, B^n n!. \tag{2}$$

Remarque. les conditions (1) et (2) ne suffisent pas pour $x = 0$ comme le montre l'exemple de la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Développements en série entière usuels

Fonction	DSE	Rayon de convergence
$\exp x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞
$\operatorname{ch} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞
$\operatorname{sh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞
$(1+x)^\alpha$	$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$1 (\infty \text{ si } \alpha \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	1
$\operatorname{atan} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	1
$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1
$\operatorname{asin} x$	$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1
$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1

Règles de calcul et exemples : fractions rationnelles et décompositions en éléments simples, penser aux équations différentielles linéaires. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$, $f(x) = \frac{\operatorname{asin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$. Remarque sur les DSE autour de points différents de 0.

Chapitre 4 Intégrales multiples

1 Intégrales doubles : définitions

Définition 1 *Un domaine D de $\mathbb{R}^2$ est dit quarrable ssi il est réunion de domaines élémentaires de la forme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, a \leq x \leq b$ et $\phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ ou $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, a \leq y \leq b$ et $\phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$, avec $a,b \in \mathbb{R}$ et ϕ, ψ continues.*

Exemples : rectangles, disques, triangles.

Définition 2 *Soit f continue sur D quarrable élémentaire. Alors on dit que f est intégrable sur D et son intégrale est définie, si D est de la forme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, a \leq x \leq b$ et $\phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, par*

$$\iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \tag{3}$$

Remarque. La définition ne dépend pas de l'ordre d'intégration : par exemple, on a la formule de Fubini

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Proposition 3 (propriétés de l'intégrale double) *Soient D, D_1, D_2 quarrables, f et g continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
- *linéarité :* $\displaystyle\iint_D (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mu \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;
- *Chasles : si D_1 et D_2 disjoints,* $\displaystyle\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;
- *positivité : si $f \geq 0$ sur D, alors* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq 0$.

Exemples de calculs :
- $f(x,y) = xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq x \leq 1$ et $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$,
- $f(x) = x^2 e^{xy}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq x\}$,
- $f(x) = x^2 y$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x,y \geq 0$ et $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2 Changement de variables

Théorème 4 *Soient D, D' quarrables et f continue sur D. On suppose que $\varphi : D' \to D$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, alors*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Exemple fondamental : passage en polaire et application : $f(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{D}(0,1)$, retour sur le dernier exemple du paragraphe précédent.

3 Calcul d'aires

Proposition 5 *Soit D un domaine quarrable, alors l'aire de D est donnée par* $\mathcal{A} = \displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exemple : aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Proposition 6 (Formule de Green-Riemann) *Soit D quarrable ; l'aire de D est donnée par* $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$*, où* ∂D *est la frontière de D. En particulier, si D est défini comme l'intérieur d'une courbe fermée donnée par une paramétrisation* $(x(t), y(t))_{t\in I}$*, alors*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_I \big[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big]\,\mathrm{d}t.$$

Exemple : aire de l'astroïde.

4 Intégrales doubles généralisées

Théorème 7 *Soit* $D \subset \mathbb{R}^2$ *et f continue. On dit que f est intégrable sur D ssi il existe une suite de domaines quarrables* $(D_n)_{n\geq 0}$ *telle que*
- $D_n \subset D_{n+1}$ *(*$(D_n)_{n\geq 0}$ *est croissante) ;*
- $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ *(*$(D_n)_{n\geq 0}$ *a pour limite D) ;*
- *int*$_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *a une limite finie* $\mathcal{J}$.

On note alors $\mathcal{J} = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exemple : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x,y \geq 0 \text{ et } 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ 1 \leq xy \leq 2 \text{ et } x \geq 1\}$, $f(x,y) = \frac{e^{-xy}}{x}$.

Remarque. Quand l'intégrale généralisée existe, on peut utiliser le théorème de Fubini lorsque le domaine d'intégration est “quarrable”.

5 Intégrales en dimension ≥ 3

Extension des définitions, puis quelques calculs :
- $\iiint_D e^{x+y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ 0 \leq y \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq x+y\}$,
- passage en coordonnées sphériques, cylindriques,

$$\iiint_{\mathbb{D}(0,R)} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{et} \quad \iiint_{x^2+y^2\leq 1\ ;\ 0\leq z\leq 1} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$