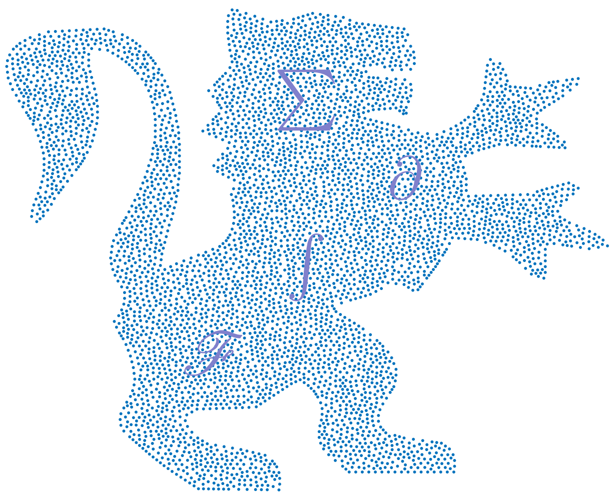
ÉCOLE CENTRALE LYON

Éléments d'intégration

Grégory Vial



Bases mathématiques

Table des matières

1 Calcul intégral **5**
- 1.1 Introduction : cadre vu en premier cycle . . . 5
  - 1.1.1 Intégrale des fonctions continues par morceaux . . . 5
  - 1.1.2 Convergence et intégration pour les fonctions continues . . . 6
  - 1.1.3 Intégration de fonctions complexes, vectorielles . . . 7
- 1.2 Extension à un cadre plus général : intégrales simples . . . 7
  - 1.2.1 Ensembles négligeables – convergence presque partout . . . 7
  - 1.2.2 Intégration en dimension 1 . . . 9
  - 1.2.3 Propriétés de l'intégrale . . . 11
  - 1.2.4 Fonctions à valeurs infinies . . . 11
  - 1.2.5 Intégration sur des ensembles plus généraux . . . 12
- 1.3 Extension à un cadre plus général : intégrales multiples . . . 12
  - 1.3.1 Ensembles négligeables dans $\mathbb{R}^d$ . . . 13
  - 1.3.2 Intégrale sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ . . . 13
- 1.4 Autour du théorème de convergence dominée . . . 14
  - 1.4.1 Le théorème de convergence dominée de Lebesgue . . . 14
  - 1.4.2 Le théorème de convergence croissante de Beppo-Lévi . . . 14
  - 1.4.3 Régularité des intégrales à paramètres . . . 15
  - 1.4.4 Problèmes d'interversion . . . 17
  - 1.4.5 Intégration par parties sur un intervalle quelconque . . . 18
- 1.5 Autour du théorème de Fubini . . . 18
- 1.6 Changements de variables . . . 20
- 1.7 Espaces de Lebesgue . . . 23
  - 1.7.1 Espace des fonctions intégrables . . . 23
  - 1.7.2 Espaces L^p . . . 24
- 1.8 Produit de convolution . . . 26
  - 1.8.1 Définition et premières propriétés . . . 26
  - 1.8.2 Résultats de densité . . . 27
- 1.9 Transformée de Fourier . . . 27
- 1.10 Dérivée faible . . . 29

A Petit historique des théories de l'intégration **31**
- A.1 La construction de Cauchy . . . 31
- A.2 La construction de Riemann . . . 32
- A.3 La construction de Lebesgue . . . 32
  - A.3.1 Cas des fonctions étagées . . . 34

A.3.2 Cas des fonctions positives 34
A.3.3 Pour les fonctions de signe quelconque 35

Références **36**

Chapitre 1

Calcul intégral

1.1 Introduction : cadre vu en premier cycle

Dans ce paragraphe, I désigne un segment de $\mathbb{R}$ (i.e. intervalle fermé borné).

1.1.1 Intégrale des fonctions continues par morceaux

On note $\mathscr{C}_{\mathrm{m}}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment I, i.e. telles qu'il existe une subdivision finie $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ satisfaisant $I = [x_0, x_n]$ et $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ admette un prolongement continu sur $[x_i, x_{i+1}]$.

On suppose connue la notion d'intégrale telle qu'introduite en premier cycle :

Proposition 1.1

Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Alors l'intégrale de f sur I existe pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{R})$; l'intégrale définit une forme linéaire sur $\mathscr{C}_m(I,\mathbb{R})$ et on la note

$$\int_I f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Elle satisfait les propriétés suivantes :

- ***Positivité** : si $f \geqslant 0$ sur I, alors*

$$\int_I f \geqslant 0.$$

- ***Relation de Chasles** : pour $c \in I$,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- ***Théorème fondamental de l'analyse** : si F désigne une primitive de f sur I,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

1.1.2 Convergence et intégration pour les fonctions continues

On rappelle la définition de la convergence simple d'une suite de fonctions continues :

Définition 1.1

Soit I un segment et $f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur I lorsque

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Exemple. La suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $[0, 1]$. Pourtant,

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n y^2 e^{-y}\,\mathrm{d}y,$$

converge vers une limite finie non nulle. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x.$$

La convergence simple n'est donc pas suffisante pour assurer la convergence des intégrales. $\diamondsuit$

La notion de convergence uniforme permet de remédier au problème rencontré dans l'exemple précédent, dans le cas de l'intégration *sur un segment*. On renvoie au paragraphe **??** pour la définition de la convergence uniforme (ainsi qu'à l'exemple **??**).

Proposition 1.2

Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur I. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple. Insistons sur le fait que le résultat n'est valable que pour les *segments*. En effet, la suite de fonctions $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}$$

converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$. Cependant, pour toute valeur de n, on obtient en posant $x = ny$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,\mathrm{d}y = 1.$$

$\diamondsuit$

1.1.3 Intégration de fonctions complexes, vectorielles

Si $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{C})$, alors ont peut définir son intégrale comme le nombre complexe

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \mathrm{Re}\,(f(x))\,\mathrm{d}x + i \int_I \mathrm{Im}\,(f(x))\,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

De manière naturelle, l'intégrale d'une fonction vectorielle est effectuée composante à composante : si $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^k)$, on note $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$; son intégrale est le vecteur de $\mathbb{R}^k$ défini par

$$\forall i = 1, 2, \ldots, k, \quad \left(\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \right)_i = \int_I f_i(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

L'extension à $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{C}^k)$ est alors immédiate.

1.2 Extension à un cadre plus général : intégrales simples

Dans ce paragraphe, on décrit brièvement comment l'intégrale peut être définie pour des fonctions plus générales que les fonctions continues par morceaux.

1.2.1 Ensembles négligeables – convergence presque partout

Introduction Pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, les valeurs prises par f aux points de discontinuité n'ont aucune incidence sur la valeur de l'intégrale. D'une manière plus générale, on peut modifier les valeurs de f sur un ensemble suffisamment « petit », sans rien modifier de son intégrale. On souhaite quantifier cette notion à l'aide de la *mesure* d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Une manière intuitive de définir la mesure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ consiste en la formule

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \; ; \; (I_n) \text{ intervalles ouverts tels que } A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\},$$

où la mesure d'un intervalle $I =]a, b[$ vaut naturellement $\lambda(I) = b - a$. Toutefois, cette définition ne satisfait pas la propriété d'additivité dénombrable : si les (A_n) sont deux-à-deux disjoints, on a seulement sous-additivité :

$$\lambda \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(A_n).$$

Sans rentrer dans les détails, cela constitue un défaut sérieux, et on devra se restreindre à des sous-ensemble particuliers A pour retrouver l'additivité ; ces ensembles seront appelés *mesurables*. Dans la pratique, tous les ensembles que nous rencontrerons ici seront mesurables. En particulier, toute réunion dénombrable d'intervalles des mesurable.

On retiendra donc qu'il existe une notion mathématique, appelée mesure (de Lebesgue), qui étend la notion de longueur d'un intervalle aux ensembles mesurables. On donne ici quelques propriétés de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$:

Proposition 1.3

On note $\lambda(A)$ la mesure d'un sous-ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$.

- $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = b - a$,
- *La mesure est invariante par translation : si $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, $\lambda(a+A) = \lambda(A)$,*
- *Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$ mesurables, $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$.*

On en déduit, en particulier, que $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$ car $]-n,n[\subset \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lambda(\mathbb{R}) \geqslant 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ensembles négligeables On quantifie ici la notion d'ensemble suffisamment « petit ».

Définition 1.2

Un ensemble $N \subset \mathbb{R}$ est dit négligeable *lorsqu'il inclus dans un ensemble mesurable de mesure nulle.*

Proposition 1.4

- *Si B est négligeable et $A \subset B$, alors A est négligeable.*
- *Soit (A_n) est une suite d'ensembles, et A défini par*

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

  - *si tous les A_i sont négligeables, alors A est négligeable,*
  - *si l'un des A_i n'est pas négligeable, alors A n'est pas négligeable.*

Corollaire 1.5

Tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable.

En effet, un ensemble dénombrable s'écrit comme union dénombrable de singletons.

Exemple. L'ensemble $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$ car il est dénombrable. En revanche, $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas négaligeable car on a additivité de la mesure de deux ensemble disjoints :

$$\lambda([0,1]) = \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) + \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}).$$

On en déduit

$$\lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 1.$$

Ainsi, les ensembles $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ qui sont tous deux denses dans $[0,1]$ n'ont pas du tout le même rôle vis-à-vis de la théorie de la mesure. ♢

Définition 1.3

$(\mathcal{P})$ est vraie presque partout *(p.p.)* ***ssi*** *il existe N négligeable tel que $(\mathcal{P})$ soit vraie pour tout $x \in N^c$.*

Par exemple, on dira que deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont égales presque partout lorsqu'il existe un ensemble négligeable N tel que, pour tout $x \in I \setminus N$, on ait $f(x) = g(x)$ (on note $f = g$ p.p.).

Un autre exemple important de telle propriété est la *convergence presque partout*. On en donne ici une définition pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle I.

Définition 1.4

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{C}_{\mathrm{m}}(I,\mathbb{R})$. On dit que (f_n) converge presque partout vers $f : I \to \mathbb{R}$ lorsqu'il existe un ensemble négligeable N tel que

$$\forall x \in I \setminus N, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

On dit que f est la limite presque partout de la suite (f_n).

Exercice. Étudier la limite presque partout des suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x), \quad g_n(x) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x).$$

◇

Remarque 1.1

- ◇ *Notons que la limite presque partout d'une suite de fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux. Par exemple, le nombre de sous-intervalles définissant la subdivision peut augmenter avec n, et devenir infini à la limite. Par ailleurs, la fonction limite peut ne pas avoir de limite finie aux bords de la subdivision.*
- ◇ *Lorsque $N = \emptyset$, on retrouve la convergence* simple, *dite aussi convergence* ponctuelle.

Proposition 1.6

Soient $f, g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. Si f et g sont égales presque partout, alors elles sont égales.

1.2.2 Intégration en dimension 1

Seules les fonctions dites *mesurables* pourront être considérées dans l'extension de l'intégrale présentée ici. La définition qui suit n'est pas la plus générale, mais sera suffisante dans le cadre du cours. Pour la « vraie » définition (sur un ensemble A mesurable), on renvoie à [Rud80, BP04].

Définition 1.5

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est mesurable lorsque f est limite p.p. d'une suite de fonctions qui sont continues par morceaux sur tout segment de I.

En pratique, toutes les fonctions que l'on rencontrera dans ce cours seront mesurables :

Proposition 1.7

Soit I un intervalle quelconque (borné ou non), et $f : I \to \mathbb{R}$, tels que

- ◇ $I = \overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{I}_n}^{\circ}$, *où les I_n sont des intervalles ouverts disjoints.*
- ◇ $f|_{I_n}$ *est continue.*

Alors f est mesurable.

Insistons sur le fait que, dans l'énoncé précédent, la fonction $f|_{I_n}$ n'admet pas nécessairement de limites aux bornes des sous-intervalles I_n. En outre, contrairement aux fonctions continues par morceaux, on ne demande pas que le nombre de morceaux soit fini.

L'extension de l'intégrale au cadre mesurable se fait comme suit.

Définition 1.6

Soit I un intervalle quelconque, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

- *Si f est **positive**, alors on peut définir son intégrale, mais elle est éventuellement infinie :*
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$
- *Si f est de signe quelconque, on dit que f est intégrable sur I lorsque*
$$\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$
Son intégrale est alors définie :
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2

La définition précédente nécessite une construction complètement différente de celle vue en premier cycle, on renvoie à [Rud80, BP04] pour une présentation de la construction de l'intégrale de Lebesgue. On retiendra ici que l'intégrale des fonctions mesurables coïncide avec l'intégrale vue en premier cycle dans le cas d'une fonction continue par morceaux sur un segment, et qu'elle partage les mêmes propriétés (linéarité, positivité, relation de Chasles).

La règle suivante est utile pour montrer l'intégrabilité d'une fonction.

Proposition 1.8

Soit I un intervalle quelconque, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. S'il existe g positive intégrable (donc mesurable) sur I telle que
$$|f(x)| \leqslant g(x) \quad \textit{presque partout sur } I,$$
alors f est intégrable sur I.

Exercice. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x}x^p \sin(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour toute valeur de $p \in \mathbb{Z}$. $\diamondsuit$

Remarque 1.3

La limite
$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$
existe et est finie. En effet, à l'aide d'une intégration par parties, on obtient
$$\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Le terme crochet converge vers $\cos 1$ *lorsque* b *tend vers* $+\infty$ *et le terme intégral converge lorsque* $b \to +\infty$ *car* $x \mapsto \cos(x)/x^2$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *(à l'aide de la proposition 1.8 par exemple, en majorant la valeur absolue du cosinus par* 1*).*

Pourtant, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ *n'est pas intégrable sur* $[0, +\infty[$*. En effet, comme* $\sin(x) \in [-1, 1]$*,*

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, \qquad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2(x)}{x}.$$

Donc, par linéarisation,

$$\int_1^b \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geqslant \int_1^b \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(b) - \int_1^b \frac{\cos(2x)}{2x}\,\mathrm{d}x,$$

et il est facile de montrer que cette dernière intégrale admet une limite finie de la même manière que pour $\sin(x)/x$*. Finalement, on a obtenu*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x = +\infty,$$

qui prouve bien la non-intégrabilité.

Le fait de se restreindre à des fonctions intégrables écarte donc les intégrales semi-convergentes, mais permettra d'obtenir des énoncés plus simples (voir en particulier les théorèmes de Lebesgue, et le théorème de Fubini). Pour analyser ces dernières, il faudra revenir à l'étude des limites.

1.2.3 Propriétés de l'intégrale

L'intégrale décrite rapidement ci-dessus possède les mêmes propriétés que celle vue en premier cycle, cf. Proposition 1.1. Vis-à-vis des ensembles négligeables, on peut énoncer les résultats suivants :

Proposition 1.9

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions intégrables.*

- *Si* $f = g$ *p.p., alors* $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ *;*
- *si* $f \geqslant 0$ *p.p., alors* $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ *;*
- *si* $\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$*, alors* $f = 0$ *p.p..*

1.2.4 Fonctions à valeurs infinies

Dans la théorie de l'intégration que nous utiliserons ici, il est permis d'affecter une valeur infinie à une fonction. On peut, par exemple, définir les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ +\infty & \text{si } x = 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ -\infty & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

La fonction f est intégrable, la fonction g ne l'est pas. On peut montrer le résultat suivant :

Proposition 1.10

Soit $f : I \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une fonction intégrable. Alors $f(x)$ est finie presque partout, i.e. il existe N négligeable tel que

$$\forall x \in I \setminus N, \quad |f(x)| \neq +\infty.$$

1.2.5 Intégration sur des ensembles plus généraux

Jusqu'ici, on s'est restreint à l'intégration sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (qui n'est pas nécessairement un segment, mais peut-être ouvert, semi-ouvert, ou non borné). Il est possible d'étendre la notion d'intégrale à tout sous-ensemble A mesurable de $\mathbb{R}$. On peut penser, bien sûr, à des réunions d'intervalles, mais la construction est en fait beaucoup plus générale. On renvoie à nouveau à [Rud80, BP04]. Les énoncés 1.6, 1.8, 1.9 et 1.10 restent valables en remplaçant I par A.

De la même manière que pour l'intégrale vue en premier cycle, voir § 1.1.3, on peut considérer l'intégration à des fonctions à valeurs complexes, ou vectorielles. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, et $f : A \to \mathbb{C}^k$ une fonction mesurable. On dit que f est intégrable lorsque

$$\int_A \|f(x)\| \, \mathrm{d}x < +\infty,$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{C}^k$. La notion ne dépend pas de la norme car les normes sont équivalentes en dimension finie. L'intégrale de f est alors définie selon les formules (1.1) et (1.2).

Mentionnons enfin qu'il est possible de construire une notion d'intégrale pour une fonction $f : A \to E$, où E est un espace de Banach (voir définition **??**).

1.3 Extension à un cadre plus général : intégrales multiples

Dans cette partie, $\mathbf{x}$ désigne un vecteur de $\mathbb{R}^d$, dont les composantes sont notées $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Lorsque $d = 2$ ou $d = 3$, on notera parfois également $\mathbf{x} = (x, y)$ ou $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Si l'on considère un pavé

$$K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

il semble naturel de définir l'intégrale d'une fonction $f : K \to \mathbb{R}_+$ par une formule du type

$$\int_K f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_d}^{b_d} f(x_1, x_2, \ldots, x_d) \, \mathrm{d}x_d \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1. \tag{1.3}$$

Toutefois, cette approche pose plusieurs difficultés :

- ◇ Est-ce qu'un changement de l'ordre d'intégration dans la formule (1.3) fournit la même valeur ?
- ◇ Comment généraliser l'intégrale à un ensemble K plus général ?

1.3.1 Ensembles négligeables dans $\mathbb{R}^d$

De la même manière qu'en dimension 1, il est possible d'étendre la notion de volume d'un ensemble. Pour tout ensemble mesurable A, on notera $\lambda_d(A)$ la mesure de A. En particulier, pour un pavé on a

$$\lambda_d\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]\big) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Comme en dimension 1, un ensemble sera dit négligeable lorsqu'il est inclus dans un ensemble de mesure nulle.

Proposition 1.11

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_d$ des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble produit

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdot \times A_d$$

est mesurable dans $\mathbb{R}^d$. Par ailleurs,

- ◇ *Si l'un des A_i est négligeable dans $\mathbb{R}$, alors A est négligeable dans $\mathbb{R}^d$,*
- ◇ *Si aucun des A_i n'est négligeable dans $\mathbb{R}$, alors A n'est pas négligeable dans $\mathbb{R}^d$.*

Exercice. Les ensembles suivants sont-ils négligeables dans $\mathbb{R}^2$?

$$A = [-1, 1] \times \{0\}, \quad B = [0, 1]^2, \quad C = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}.$$

◇

1.3.2 Intégrale sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$

La notion de fonction définie par morceaux est plus délicate qu'en dimension 1 ; nous adopterons la suivante : $\mathscr{C}_\mathrm{m}(A, E)$ est l'ensemble des fonctions $f : A \to E$ telles qu'il existe une subdivision finie $(A_i)_{i=1,\ldots,k}$, où les A_i mesurables et disjoints, satisfont

- ◇ $\overset{\circ}{\overbrace{A = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}}}$;
- ◇ $f|_{A_i}$ admet un prolongement continu sur $\overline{A_i}$.

De même qu'en dimension 1, on dira que $f : A \to E$ est *mesurable* lorsqu'elle est limite p.p. d'une suite de fonctions continues par morceaux. La définition de l'*intégrabilité* est la même qu'en dimension 1. Notons que l'intégrale peut être définie par récurrence (sur la dimension) au travers du théorème de Fubini-Tonelli (voir Théorème 1.19).

1.4 Autour du théorème de convergence dominée

Dans la suite, A désigne un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$.

1.4.1 Le théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.12 (*Lebesgue*)

Soient $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. On suppose

- *$(f_n)_n$ converge presque partout vers f,*
- *il existe une fonction g, intégrable telle que, pour tout n, $|f_n| \leqslant g$ presque partout.*

Alors

$$\int_A f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \longrightarrow \int_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Exercice.

1. Soit $f_n : x \mapsto e^{-x/n}\chi_{[n,n+1]}(x)$. Montrer que $|f_n| \leqslant g$ avec g bornée sur $\mathbb{R}$. Calculer les quantités :
$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit $f_n : x \mapsto e^{-x/n}\chi_{[n,n+1]}(x)$. Montrer que $|f_n| \leqslant g$ avec g_n intégrable. Calculer les quantités :
$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

♢

Exercice. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]^n \mathrm{d}x = 0.$$

♢

1.4.2 Le théorème de convergence croissante de Beppo-Lévi

Théorème 1.13 (*Beppo-Lévi*)

Soient $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. On suppose

- *pour tout n, $f_n \geqslant 0$ presque partout,*
- *$(f_n)_n$ converge presque partout vers f,*
- *la suite (f_n) est croissante, i.e. pour tout n, $f_n \leqslant f_{n+1}$ presque partout.*

Alors

$$\int_A f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \longrightarrow \int_A f\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Exercice. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x\left(x+\frac{1}{n}\right)}}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

$\diamondsuit$

1.4.3 Régularité des intégrales à paramètres

Théorème 1.14 (*continuité en un point d'une fonction définie par une intégrale*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\mathbf{t}^* \in \Omega$ et $f : A \times \Omega \to \mathbb{R}$ (mesurable vis-à-vis de $\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{t} \in \Omega$). On suppose qu'il existe un ensemble négligeable N et un voisinage V de $\mathbf{t}^*$ tels que

- *pour tout $\mathbf{x} \in A \setminus N$, l'application $\mathbf{t} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ soit continue en t^*,*
- *il existe $g : A \to \mathbb{R}$ intégrable telle que pour tout $\mathbf{x} \in A \setminus N$, et tout $\mathbf{t} \in V$, on ait la domination*

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{t})| \leqslant g(\mathbf{x}).$$

Alors

$$\mathbf{t} \longmapsto \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{est continue en } \mathbf{t}^*.$$

Exemple. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction F est bien définie car $f\mathcal{X}_{]-\infty,t[}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut bien sûr écrire

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

avec $f(x,t) = f(x)\mathcal{X}_{]-\infty,t[}(x) = f(x)\mathcal{X}_{]x,+\infty[}(t)$. On vérifie alors

- $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- si $x \notin \{t^*\}$ (négligeable), alors $t \mapsto f(x,t)$ est continue en t^*,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x,t)| \leqslant |f(x)|,$$

  qui fournit une domination convenable.

Ainsi, le théorème de continuité en t^* s'applique, et la fonction F est donc continue en t^*.

$\diamondsuit$

Théorème 1.15 (*continuité sur un ouvert d'une fonction définie par une intégrale*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : A \times \Omega \to \mathbb{R}$ (mesurable vis-à-vis de $\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{t} \in \Omega$). On suppose qu'il existe un ensemble négligeable N tel que

- *pour tout $\mathbf{x} \in A \setminus N$, $\mathbf{t} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ soit continue sur Ω,*
- *il existe $g : A \to \mathbb{R}$ intégrable telle que pour tout $\mathbf{x} \in A \setminus N$, et tout $\mathbf{t} \in \Omega$, on ait la domination*
$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{t})| \leqslant g(\mathbf{x}).$$

Alors
$$\mathbf{t} \longmapsto \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{t})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{est} \quad \text{continue sur } \Omega.$$

Remarque 1.4

Ce théorème ne s'applique pas pour montrer que la fonction F de l'exemple précédent est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, l'ensemble des points x tels que la fonction f définie par $f(x, t) = f(x)\chi_{]x,+\infty[}(t)$ ne soit pas continue sur $\mathbb{R}$ recouvre $\mathbb{R}$ tout-entier.

Théorème 1.16 (*dérivation d'une fonction définie par une intégrale*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : A \times \Omega \to \mathbb{R}$ (mesurable vis-à-vis de $\mathbf{x}$, pour tout $t \in \Omega$). On suppose qu'il existe un ensemble négligeable N tel que

- *pour tout $\mathbf{x} \in A \setminus N$, $t \mapsto f(\mathbf{x}, t)$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω,*
- *pour tout $t \in \Omega$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, t)$ soit intégrable,*
- *il existe $h : A \to \mathbb{R}$ intégrable telle que pour tout $\mathbf{x} \in A \setminus N$ et tout $t \in \Omega$, on ait la domination*
$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right| \leqslant h(\mathbf{x}).$$

Alors
$$F : t \longmapsto \int_A f(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{est} \quad \text{de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \Omega,$$

et l'on a
$$\forall t \in \Omega, \quad F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Exercice. Pour $t > 0$, on pose
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-tx^2\right) \sin x \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

$\diamondsuit$

1.4.4 Problèmes d'interversion

Les théorèmes de convergence vus dans les paragraphes précédents peuvent être vus comme des théorèmes d'interversion de limites. Par exemple, la conclusion du théorème de convergence dominée peut s'écrire

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_A \lim_{n\to+\infty} f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

De même, la conclusion du théorème de continuité sous l'intégrale s'exprime de la manière suivante

$$\lim_{s\to t}\int_A f(\mathbf{x},s)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_A \lim_{s\to t} f(\mathbf{x},s)\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

On peut également montrer un résultat d'interversion série-intégrale à l'aide du théorème de convergence dominée :

Théorème 1.17

Soient $f_n : A \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables.

- *Si, pour chaque n, on a $f_n \geqslant 0$, alors*

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_A f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_A \sum_{n\geqslant 0} f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

- *Si les f_n sont de signe quelconque, et que l'on a*

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_A |f_n(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x} < +\infty,$$

alors

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_A f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_A \sum_{n\geqslant 0} f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.5

- *Pour vérifier l'hypothèse du second point, les fonctions $|f_n|$ étant positives, on peut intervertir la série et l'intégrale.*

Exemple. Soit $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$. La fonction F est bien définie sur $]0,+\infty[$ car, pour tout $x > 0$, la série est convergente. Comme les termes sont positifs, on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-n^2 x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

On en déduit en particulier que F est intégrable.

♢

1.4.5 Intégration par parties sur un intervalle quelconque

Proposition 1.18

Soit $I =]a, b[$ un intervalle (avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telles que

- *les produits fg' et $f'g$ sont intégrables sur I,*
- *le produit fg admet des limites finies en a et b.*

Alors

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - \lim_{x\to a} f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ce résultat est une conséquence du théorème de convergence dominée. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

avec

$$f_n(x) = f(x)g'(x)\chi_{[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]}(x).$$

On vérifie immédiatement que f_n converge vers $fg'\chi_{]a,b[}$ lorsque $n \to +\infty$, ainsi que la domination (car fg' est intégrable sur I) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leqslant |f(x)g'(x)|\chi_{]a,b[}(x).$$

Le théorème de convergence dominé assure donc que I_n converge vers $\int_I fg'$ lorsque $n \to +\infty$. Il suffit alors d'effectuer une intégration par parties sur I_n et de passer ensuite à la limite : le terme crochet converge d'après l'hypothèse sur le produit fg, et le terme intégral converge par la même utilisation du théorème de convergence dominée en vertu de l'intégrabilité de $f'g$.

1.5 Autour du théorème de Fubini

Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, on note $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{p+q}$.

Théorème 1.19 (*Tonelli*)

Soit $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Remarque 1.6

On note également

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Théorème 1.20 (*Fubini*)

Soit $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Si

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f(\mathbf{z})| \,\mathrm{d}\mathbf{z} < +\infty,$$

alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^{p+q}$ et

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(\mathbf{z}) \,\mathrm{d}\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Remarque 1.7

- *Dans l'hypothèse d'intégrabilité du théorème de Fubini, puisque $|f|$ est une fonction positive, la vérification peut être effectuée en intégrant selon $\mathbf{x}$ puis $\mathbf{y}$, ou selon $\mathbf{y}$ puis $\mathbf{x}$.*
- *Les théorèmes de Fubini sont à rapprocher du théorème d'interversion série-intégrale 1.17.*
- *Si le domaine d'intégration n'est pas $\mathbb{R}^{p+q}$ tout-entier, mais de la forme $A \times B$ avec A et B mesurables, le résultat reste valable. Il suffit d'appliquer les théorèmes précédents à la fonction $g = f \times \chi_{A \times B}$.*
- *Comme indiqué plus haut, le théorème de Tonelli peut fournir une définition – par récurrence sur la dimension – de l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$: pour $f \geqslant 0$ mesurable,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_d) \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_d) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1, \ldots, x_d) \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{d-1}) \right) \mathrm{d}x_d.$$

Exemple. Comme on l'a indiqué plus haut, on peut intégrer sur des ensembles cartésiens $A \times B$. Plus généralement, l'utilisation de fonctions indicatrices permet souvent de se ramener à des intégrations successives en dimension 1, comme le montre l'exemple qui suit. Soit D le quart de disque défini par

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x + y \leqslant 1 \text{ et } x, y \geqslant 0 \right\},$$

et l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_D y e^x \,\mathrm{d}(x, y).$$

La fonction $(x,y) \mapsto ye^x$ est positive sur D, donc le théorème de Tonelli s'applique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{\mathbb{R}^2} ye^x \chi_D(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} ye^x \chi_{[0,\sqrt{1-x^2}]}(y)\chi_{[0,1]}(x)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} ye^x \chi_{[0,\sqrt{1-x^2}]}(y)\chi_{[0,1]}(x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^x \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^x \left(\frac{1-x^2}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

le dernier calcul étant effectué à l'aide de deux intégrations par parties.

◇

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x,y \in \mathbb{R}_+, \quad f(x,y) = y\exp\left(-\frac{y^2}{2}(1+x^2)\right).$$

En calculant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

de deux manières différentes, déterminer une valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

◇

1.6 Changements de variables

Théorème 1.21

Soient Ω et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et $\phi : \Omega \to D$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, bijective, telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \Delta(\mathbf{x}) = \det\left(J_\phi(\mathbf{x})\right) \neq 0,$$

où J_ϕ désigne la matrice jacobienne de ϕ (voir §??). Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction positive. Alors

$$\int_D f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_\Omega f(\phi(\mathbf{x}))\,|\Delta(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

(au sens où si l'une des quantités est finie, l'autre l'est aussi, et elles sont égales).

Théorème 1.22

Soient Ω et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et $\phi : \Omega \to D$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, bijective, telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \Delta(\mathbf{x}) = \det\left(J\phi(\mathbf{x})\right) \neq 0.$$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors

$$f \text{ est intégrable sur } D \quad \textbf{\textit{ssi}} \quad f \circ \phi \times |\Delta| \text{ est intégrable sur } \Omega.$$

Dans ce cas, on a

$$\int_D f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_\Omega f\left(\phi(\mathbf{x})\right)|\Delta(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Un cas particulier important est le changement de variables polaires en dimension 2 : on pose $\Omega =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ et

$$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Alors $\varphi : \Omega \to D$ est bijective et

$$\Delta(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

Ainsi, pour f positive, on peut écrire

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_D f\left(\phi(r,\theta)\right) r\,\mathrm{d}(r,\theta).$$

Comme la demi-droite $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ est négligeable dans $\mathbb{R}^2$, on a encore

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} f\left(\phi(r,\theta)\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Exemple. On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Le calcul en coordonnées polaires fournit

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi.$$

D'autre part, le théorème de Tonelli permet d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2.$$

On en déduit la formule

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

◇

Exemple. Soit $\mathcal{D}$ le domaine compris entre les quatre courbes données par

$$y = x, \quad y = 2x, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2.$$

On va calculer l'air du domaine $\mathcal{D}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $v = y/x$. Ce changement de variables est bijectif et bi-différentiable car l'application réciproque est explicite :

$$x = \frac{u^2}{(1+\sqrt{v})^2}, \qquad y = \frac{u^2 v}{(1+\sqrt{v})^2}.$$

Par ailleurs, le déterminant jacobien vaut

$$\det \begin{bmatrix} \frac{2u}{(1+\sqrt{v})^2} & \frac{-u^2}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^3} \\ \frac{2uv}{(1+\sqrt{v})^2} & \frac{u^2}{(1+\sqrt{v})^2} - \frac{u^2 v}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^3} \end{bmatrix} = \frac{2u^3}{(1+\sqrt{v})^4},$$

non-nul car $u > 0$. Enfin, le domaine $\mathcal{D}$ est transformé en le carré $]1,2[\times]1,2[$ par le changement de variable. Ainsi, l'aire de $\mathcal{D}$ peut être calculée comme

$$\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_1^2 \frac{2u^3}{(1+\sqrt{v})^4}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Par Tonelli, les intégrales se séparent,

$$\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_1^2 u^3\,\mathrm{d}u \times \int_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{(1+\sqrt{v})^4} = \frac{15}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{(1+\sqrt{v})^4}.$$

Cette dernière intégrale se calcule à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{v}$:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{(1+\sqrt{v})^4} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t)^4} = \left[-\frac{3t+1}{3(t+1)^3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{15}{2}.$$

Finalement, l'aide de $\mathcal{D}$ vaut

$$\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 40\sqrt{2} - \frac{225}{4}.$$

$\diamondsuit$

Exercice. Calculer les intégrales

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x+2y)^2+1} \times \frac{1}{(-x+5y)^2+1}\,\mathrm{d}(x,y).$$

$$\mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{x^2+y^2\leqslant 1}(x,y)x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y).$$

$\diamondsuit$

Remarque 1.8

Insistons sur le fait que le théorème du changement de variable n'est pas qu'un outil de calcul. Il permet également d'étudier l'intégrabilité d'une fonction. C'est le cas, par exemple, pour la fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ définie sur le disque unité par

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette fonction n'étant pas bornée au voisinage de $(0,0)$, son intégrabilité ne va pas de soi. À l'aide d'un passage en coordonnés polaires, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f(x,y)| \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2 |\cos\theta \sin\theta|}{r^3} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_{\mathbb{D}} |f(x,y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y < +\infty$, donc f est intégrable sur $\mathbb{D}$.

1.7 Espaces de Lebesgue

1.7.1 Espace des fonctions intégrables

A désigne toujours un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathscr{L}^1(A)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur A. La quantité

$$\int_A |f(\mathbf{x})| \,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

n'est pas une norme sur $\mathscr{L}^1(A)$. En effet, si cette quantité est nulle, on en déduit seulement que f est nulle presque partout. Toutefois, il s'agit d'une *semi-norme* car elle vérifie toutes les autres propriétés d'une norme (voir définition **??**).

Dans le but de travailler avec une structure d'espace vectoriel normé, on introduit, pour $f \in \mathscr{L}^1(A)$, l'ensemble

$$\widetilde{f} = \left\{ g \in \mathscr{L}^1(A) \ ; \ f = g \quad \text{p.p.} \right\},$$

appelée *classe* de f pour la relation d'égalité presque partout. On note enfin

$$\mathrm{L}^1(A) = \left\{ \widetilde{f} \ ; \ f \in \mathscr{L}^1(A) \right\}.$$

Ainsi construit, l'ensemble $\mathrm{L}^1(A)$ apparaît comme un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\mathscr{L}^1(A))$, ensemble des parties de $\mathscr{L}^1(A)$. Les éléments de $\mathrm{L}^1(A)$ ne sont donc pas des fonctions, mais des ensembles de fonctions.

Proposition 1.23

L'ensemble $\mathrm{L}^1(A)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel à l'aide des opérations suivantes :

- $\diamond$ $\forall f, g \in \mathscr{L}^1(A), \quad \widetilde{f} + \widetilde{g} = \widetilde{f+g},$
- $\diamond$ $\forall f \in \mathscr{L}^1(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \widetilde{f} = \widetilde{\lambda f}.$

L'élément neutre est $\widetilde{0}$, ensemble des fonctions nulles presque partout.

Proposition 1.24

Pour $\widetilde{f} \in \mathrm{L}^1(A)$, on pose

$$\left\| \widetilde{f} \right\|_{\mathscr{L}^1(A)} = \int_A |f(\mathbf{x})| \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

$\| \cdot \|_{\mathrm{L}^1(A)}$ définit une norme sur $\mathrm{L}^1(A)$.

Insistons sur le fait que la définition de la norme ne dépend pas du *représentant* f choisi dans la classe $\widetilde{f}$. En effet, si $\widetilde{f} = \widetilde{g}$, alors $|f| = |g|$ presque partout et donc leurs intégrales coïncident.

Important. On emploie couramment l'abus de notation qui consiste à écrire $f \in \mathrm{L}^1(A)$ à la place de $\widetilde{f} \in \mathrm{L}^1(A)$. Il convient alors de ne pas considérer une valeur ponctuelle $f(x_0)$, car elle n'a pas de sens, le singleton $\{x_0\}$ étant négligeable. À plus forte raison, les notions classiques de continuité ou de dérivabilité n'ont *a priori* pas de sens pour les fonctions de $\mathrm{L}^1(A)$. Ainsi, une phrase du type « Soit $f \in \mathrm{L}^1(A)$, continue sur A » doit être comprise au sens suivant : il existe une fonction $g : A \to E$ continue appartenant à $\mathscr{L}^1(A)$ telle que $f = g$ presque partout.

1.7.2 Espaces L^p

Plus généralement, on pose, pour $p \geqslant 1$,

$$\mathscr{L}^p(A) = \{f \text{ mesurable telle que } f^p \in \mathscr{L}^1(A)\},$$

et

$$\mathrm{L}^p(A) = \left\{ \widetilde{f} \,;\, f \in \mathscr{L}^p(A) \right\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|\widetilde{f}\|_{\mathrm{L}^p(A)} = \left(\int_A |f(\mathbf{x})|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}},$$

(cette quantité ne dépend pas du représentant f choisi dans la classe $\widetilde{f}$).

Exercice. Montrer que $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ n'est pas inclus dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, ni l'inverse. $\diamondsuit$

Il n'est pas évident que la quantité ainsi définie soit une norme : l'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité de Minkovski, elle-même corollaire de l'inégalité de Hölder.

Proposition 1.25 (*Inégalités de Hölder et Minkowski*)

- *Soient $f \in \mathscr{L}^p(A)$, $g \in \mathscr{L}^q(A)$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors $fg \in \mathscr{L}^1(A)$. On a l'inégalité de Hölder :*

$$\int_A |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_A |f(\mathbf{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_A |g(\mathbf{x})|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- *Soient $f, g \in \mathscr{L}^p(A)$, on a l'inégalité de Minkowski :*

$$\left(\int_A |f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_A |f(\mathbf{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g(\mathbf{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.9

Pour $p = 2$, l'inégalité de Hölder n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'espace $\mathrm{L}^p(A)$ apparaît donc comme un espace vectoriel normé. Pour vérifier la convergence d'une suite $(\widetilde{f}_n)$ vers $\widetilde{f}$ dans $\mathrm{L}^p(A)$, il suffit de vérifier que la quantité

$$\int_A |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

converge vers 0 (cela ne dépend pas du choix des représentants $\widetilde{f}_n$ et $\widetilde{f}$).

De même que plus haut, on commettra souvent l'abus de notation : $f \in \mathrm{L}^p(A)$ à la place de $\widetilde{f} \in \mathrm{L}^p(A)$.

Exercice. On pose $f_n = n\chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$. La suite $(\widetilde{f}_n)$ converge-t-elle dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$? La suite (f_n) converge-t-elle presque partout ? uniformément ? La suite numérique $(\|f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})})$ converge-t-elle ?

◇

Théorème 1.26

L'espace $\mathrm{L}^p(A)$ est un espace de Banach (i.e. complet).

Théorème 1.27

L'espace $\mathrm{L}^2(A)$ est un espace de Hilbert, associé au produit scalaire

$$\langle \widetilde{f}, \widetilde{g} \rangle = \int_A f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Définition 1.7

On note $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(A)$ l'ensemble des (classes de) fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ qui appartiennent à $\mathrm{L}^p(K)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ inclus dans A.

Exercice. Montrer que $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ lorsque $p \geqslant q$. ◇

On termine ce paragraphe par deux énoncés qui font le lien entre convergence presque partout et convergence dans L^p.

Proposition 1.28

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{L}^p(A)$. On suppose que la suite $(\widetilde{f}_n)$ converge dans L^p vers $\widetilde{f}$. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge presque partout vers f.

Corollaire 1.29

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{L}^p(A)$. On suppose que la suite $(\widetilde{f}_n)$ converge dans L^p vers $\widetilde{f}$, et que la suite (f_n) converge presque partout vers g. Alors $f = g$ presque partout.

1.8 Produit de convolution

1.8.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.8

Pour deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose, lorsque cette quantité est bien définie

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Proposition 1.30

- ◇ *Si f est bornée et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * g(x)$ est bien définie pour tout x, et $f * g$ est une fonction bornée.*
- ◇ *Si $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, alors $f * g(x)$ est bien définie pour tout x, et $f * g$ est une fonction bornée.*
- ◇ *Si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est définie presque partout, et $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.*

Remarque 1.10

Dans tous les cas précédents, $f * g = g * f$.

Exercice. Calculer $f * g$ pour les fonctions suivantes

$$f = \chi_{[-a,a]} \quad \text{et} \quad g = \chi_{[-b,b]}.$$

◇

Proposition 1.31

Soit $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. On suppose, de plus, que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et qu'il existe deux constantes M_0, M_1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)| \leqslant M_0 \quad \text{et} \quad |g'(x)| \leqslant M_1.$$

Alors $f * g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$(f * g)' = f * (g').$$

1.8.2 Résultats de densité

On peut approcher les fonctions de L^p par des fonctions régulières. On introduit l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact

$$\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \,;\, \exists M > 0,\ \|\mathbf{x}\| > M \Longrightarrow f(\mathbf{x}) = 0\},$$

également noté $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple. La fonction suivante définit une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{si } x \in]-1,1[, \\ 0 & \text{si } x \notin]-1,1[. \end{cases}$$

$\diamondsuit$

On a le résultat suivant

Théorème 1.32

L'espace $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, ce qui signifie

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), \quad \exists (f_n) \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0.$$

Remarque 1.11

- *La densité de l'espace des fonctions continues $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ est un résultat de théorie de la mesure (voir [Rud80], par exemple). La densité des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ s'obtient par convolution avec une fonction régulière, appelée* noyau.
- *Tout espace F satisfaisant $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset F \subset \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ sera donc également dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On se permettra parfois l'abus de langage suivant : $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, pour indiquer que $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.*

Proposition 1.33

Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Alors $f = 0$ presque partout.

1.9 Transformée de Fourier

Proposition 1.34

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La formule suivante

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi t x}\,\mathrm{d}x$$

est bien définie pour tout réel t. On appelle $\hat{f}$ la transformée de Fourier *de f.*

Exemple. [Transformée de Fourier de la gaussienne] Si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, alors

$$\hat{f}(t) = e^{-2\pi^2 t^2}.$$

$\diamondsuit$

Exercice. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-a|x|}$, pour $a > 0$. $\diamondsuit$

Proposition 1.35 (*Propriétés de la transformée de Fourier*)

Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

- *$\hat{f}$ est une fonction continue bornée, et*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}.$$

- *$\hat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$ [lemme de Riemann-Lebesgue].*
- *Si $x^n f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ ($n \geq 0$) et*

$$(\hat{f})^{(k)}(t) = (-2i\pi)^k\, \widehat{x^k f}(t), \quad 0 \leq k \leq n.$$

- *Si $f^{(k)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ($k \in [0, n]$), alors*

$$\widehat{f^{(k)}}(t) = (2i\pi t)^k \widehat{f}(t), \quad 0 \leq k \leq n.$$

- *On a la relation $\widehat{f * g}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.*
- *Si $g(x) = f(x-a)$, alors $\hat{g}(t) = e^{-2i\pi a t}\hat{f}(t)$ [Formule du retard].*
- *si $g(x) = e^{2i\pi a x} f(x)$, alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-a)$ [Déphasage].*
- *si $g(x) = f(\frac{x}{a})$ avec $a > 0$, alors $\hat{g}(t) = a\hat{f}(at)$ [Changement d'échelle].*

Proposition 1.36 (*Formule d'inversion de Fourier*)

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Proposition 1.37 (*Formule de Plancherel*)

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

1.10 Dérivée faible

Dans la suite, $I =]a, b[$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ borné ou non, i.e. éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Définition 1.9

On dit que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ admet une dérivée faible lorsqu'il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ satisfaisant

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty_{\mathrm{c}}(I), \quad \int_I f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_I g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans ce cas, la fonction g est unique, et est notée f'.

Remarque 1.12

L'unicité de la fonction $f' \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ est à comprendre, bien sûr, modulo l'égalité presque partout.

Exercice. Calculer la dérivée faible de la fonction $x \mapsto |x| \cos x$. ♢

Cette notion prolonge la dérivée usuelle :

Proposition 1.38

Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ une fonction dérivable telle que la dérivée usuelle f' appartienne à $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Alors la dérivée au sens faible de f existe et coïncide avec la dérivée usuelle.

Elle permet de donner un sens à la dérivée d'une fonction continue dérivable par morceaux :

Proposition 1.39

Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$, continue sur I, et $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$ une subdivision telles que :

- ◇ $I =]a_0, a_{n+1}[$,
- ◇ $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ *est dérivable, de dérivée usuelle appartenant à* $\mathrm{L}^1(]a_i, a_{i+1}[)$.

Alors f admet une dérivée au sens faible, qui coïncide avec la dérivée usuelle sur chaque sous-intervalle de la subdivision.

Proposition 1.40

Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ admettant une dérivée faible $f' = 0$. Alors il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = k$ pour presque tout $x \in I$.

On termine par un résultat montrant que les fonctions intégrables admettant une dérivée faible intégrable sont continues, dans le sens suivant :

Proposition 1.41

Soit $f \in \mathrm{L}^1(I)$ admettant une dérivée faible telle que $f' \in \mathrm{L}^1(I)$. Alors il existe une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\bar{I}$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x)$ pour presque tout $x \in I$.

La définition de dérivée faible peut-être étendue en dimension supérieure à l'aide des dérivées partielles. Le lien avec la dérivée usuelle reste valable, mais le dernier résultat concernant la continuité est faux dès la dimension 2. Pour plus de détails sur la dérivée faible, on renvoie à [Zui86] concernant la théorie des distributions, et à [Bre83] pour les espaces de Sobolev.

Annexe A

Petit historique des théories de l'intégration

Pour plus de détails sur la théorie de la mesure et de l'intégration, on renvoie à [BP04, Rud80].

A.1 La construction de Cauchy

Vers 1820, Cauchy pose les bases de l'intégration moderne. Sa théorie repose sur la propriété suivante, liée à la continuité uniforme :

Proposition A.1

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Il existe une suite (s_n) de fonctions en escaliers[1] telle que (s_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Définition A.1

Soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ des points de $[a,b]$.

- *Soit $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \, \chi_{[x_i, x_{i+1}[}$. On définit l'intégrale de s_n comme*

$$\int_a^b s_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (x_{i+1} - x_i).$$

- *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, et (s_n) une suite convergeant uniformément vers f. Alors la suite*

$$\left(\int_a^b s_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$$

converge et la limite ne dépend que de f, et pas du choix de la suite (s_n). On note alors cette limite

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Une fonction *en escaliers* est une fonction constante par morceaux (à comprendre au sens *d'un nombre fini de morceaux)*.

A.2 La construction de Riemann

La construction de Cauchy s'étend naturellement aux fonctions continues par morceaux et, plus généralement, aux fonctions qui sont limites uniformes de fonctions en escaliers, qu'on nomme fonctions *réglées*. Vers 1850, Riemann propose une construction pour un ensemble plus vaste de fonctions.

Soit $\pi = (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et f une fonction bornée. On note $\delta(\pi) = \max_i |x_{i+1} - x_i|$ le diamètre de π et on pose

$$\mathscr{L}(f, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}[} f(x),$$

et

$$\mathscr{U}(f, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}[} f(x).$$

Définition A.2

On dit que f est intégrable lorsque les limites suivantes existent et vérifient

$$\lim_{\delta(\pi) \to 0} \mathscr{L}(f, \pi) = \lim_{\delta(\pi) \to 0} \mathscr{U}(f, \pi).$$

La limite commune ne dépend alors pas du choix de la suite de subdivisions ; on la note

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

A.3 La construction de Lebesgue

Au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, Lebesgue établit une construction permettant tout à la fois d'intégrer un ensemble plus vaste de fonctions, et de prouver des réultats plus forts pour les suites d'intégrales. Le dessin de gauche sur la figure A.1 fournit une représentation

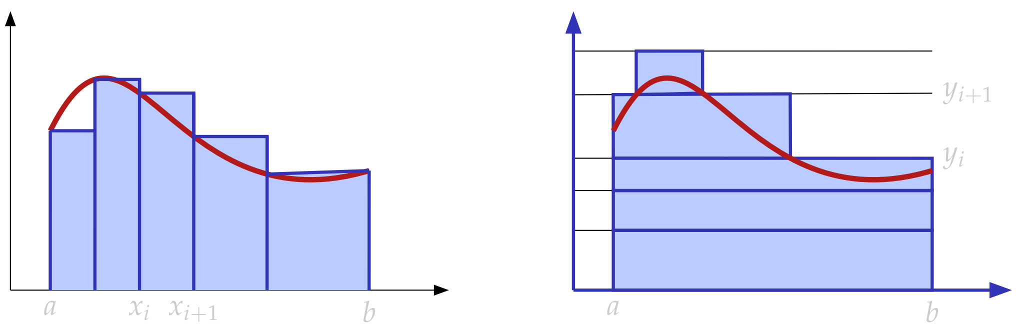


FIGURE A.1 – Les constructions de Cauchy-Riemann (gauche) et de Lebesgue (droite).

graphique de la construction de l'intégrale de Cauchy-Riemann, qui correspond à la méthode des rectangles. Elle peut s'exprimer ainsi : si l'on note $\mathrm{vol}([x_i, x_{i+1}]) = x_{i+1} - x_i$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\mathrm{vol}([x_i, x_{i+1}[).$$

Pour Lebesgue, l'intégrale est également approchée par une somme d'aires de rectangles, mais ceux-ci sont choisis différemment, voir dessin de droite sur la figure A.1.

La formule correspondante est alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)\mathrm{vol}(f^{-1}([y_i, +\infty[)).$$

Bien sûr, les ensembles dont on doit calculer le volume sont ici plus généraux que les simples intervalles utiles pour la construction de Cauchy-Riemann. Plusieurs questions se posent naturellement

- ⋄ pour quels ensembles $A \subset \mathbb{R}$ peut-on définir $\mathrm{vol}(A)$?
- ⋄ pour quelles fonctions les images réciproques $f^{-1}([y_i, +\infty[)$ sont-elles mesurables ?

On peut montrer que, malheureusement, il n'est pas possible de construire une fonction volume, dite *mesure*, avec des propriétés raisonnables (positivité, additivité, invariance par translation) qui permette de mesurer tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Définition A.3

On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *et* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Proposition A.2

Il n'existe pas de fonction $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *satisfaisant*

- ⋄ *Si* $A =]a, b[$*, alors* $\mu(A) = b - a$,
- ⋄ *Si les* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux-à-deux disjoints, alors* $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$,
- ⋄ *Pour tous* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $A \subset \mathbb{R}$*, on a* $\mu(x_0 + A) = \mu(A)$.

Il est nécessaire d'introduire la notion de *tribu* pour mener à bien la construction de mesures.

Définition A.4

On appelle tribu *(ou* σ-algèbre*) sur un ensemble* E *tout sous-ensemble* $\mathscr{T}$ *de* $\mathscr{P}(E)$ *satisfaisant :*

- ⋄ $\emptyset \in \mathscr{T}$,
- ⋄ *si* $A \in \mathscr{T}$*, alors* $E \setminus A \in \mathscr{T}$,
- ⋄ *si* $A_n \in \mathscr{T}$*, alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

Définition A.5

On appelle $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ *la plus petite tribu contenant les pavés (tribu* borélienne*).*

Définition A.6

Soit E *un ensemble, et* $\mathscr{T}$ *une tribu sur* E*. Une* mesure *sur* $(E, \mathscr{T})$ *est une application* $\lambda : \mathscr{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *telle que*

◇ $\lambda(\emptyset) = 0$,

◇ *si les* (A_n) *sont 2 à 2 disjoints, alors*

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

Théorème A.3

Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k))$ *invariante par translation telle que*

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^{k}]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{k} |b_i - a_i|.$$

Elle est appelée mesure de Lebesgue.

Après avoir défini la notion de mesure, on est à même de construire l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions mesurables.

Définition A.7

Soit E *un ensemble muni d'une tribu* $\mathscr{T}$*, et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une application. On dit que* f *est* mesurable *sur* $(E, \mathscr{T})$ ***ssi***

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(]y, +\infty[) \in \mathscr{T}.$$

A.3.1 Cas des fonctions étagées

Définition A.8

Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ *un ensemble muni d'une tribu et d'une mesure positive (on dit* ensemble mesuré*). On appelle* fonction étagée positive *toute fonction de la forme*

$$s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i},$$

avec $\alpha_i \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *et* $A_i \in \mathscr{T}$.

L'intégrale de la fonction s *est définie par*

$$\int_E s \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

avec la convention $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$.

A.3.2 Cas des fonctions positives

Proposition A.4

Soit E *un ensemble muni d'une tribu* $\mathscr{T}$*, et* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une application. Il existe une suite* $(s_n)_n$ *de fonctions étagées positives telles que*

◇ *la suite $(s_n)_n$ est croissante,*

◇ *la suite $(s_n)_n$ converge simplement vers f.*

Définition A.9

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un ensemble mesuré, et $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction mesurable positive. L'intégrale de f est définie par

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_E s \,\mathrm{d}\mu \,; \quad s \text{ étagée} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant s \leqslant f \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

On dit que f est intégrable *lorsque*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

A.3.3 Pour les fonctions de signe quelconque

Définition A.10

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un ensemble mesuré, et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. On note $f = f_+ - f_-$ avec $f_+, f_- : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Si f_+ et f_- sont intégrables, alors on dit que f est intégrable et on définit

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}.$$

Proposition A.5

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, positive, et Riemann-intégrable, alors f est mesurable et Lebesgue-intégrable (pour la mesure de Lebesgue définie sur la tribu borélienne) et les deux intégrales coïncident :

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Proposition A.6

L'intégrale possède les propriétés suivantes :

◇ *Si f et g sont intégrables, alors, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est intégrable et*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

◇ *Si $|f|$ est intégrable, alors f est intégrable et*

$$\left| \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

◇ *Si $|f| \leqslant g$ et g est intégrable, alors f est intégrable et*

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Références

[BP04] M. Briane and G. Pagès. *Théorie de l'intégration : cours et exercices*. Vuibert, 2004.

[Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[Rud80] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[Zui86] Claude Zuily. *Distributions et équations aux dérivées partielles*. Collection Méthodes, 2^{e} édition. Hermann, Paris, 1986.