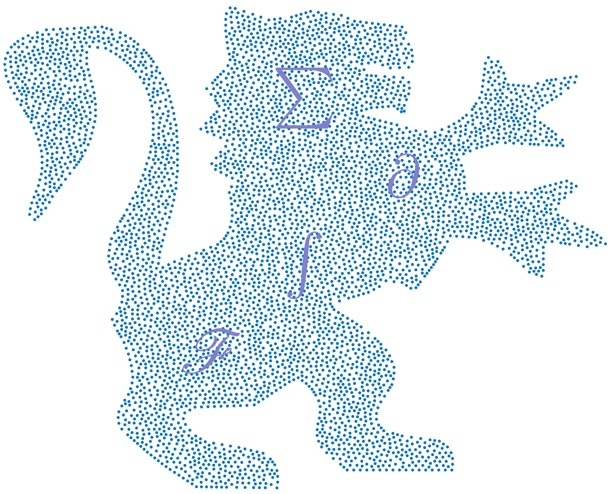
Équations différentielles

Grégory Vial



Bases mathématiques

Table des matières

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Rappels sur la résolution explicite de certaines EDO

1.1.1 Équations linéaires d'ordre 1

Proposition 1.1 (***Équation linéaire homogène d'ordre* 1**)

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

a pour solutions

$$t \longmapsto K \exp\left(-\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

où K est une constante.

Proposition 1.2 (***Variation de la constante – Formule de Duhamel***)

Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. L'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

a pour solutions

$$t \longmapsto \int_0^t b(s) \exp\left(-\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s + K \exp\left(-\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

où K est une constante.

Exercice. Déterminer les solutions des EDO suivantes :

1. $y' + ty = t$.

2. $(1 - t^2)y' - ty = 0$.

◊

1.1.2 Équations linéaires d'ordre 2

Proposition 1.3 (*Équation linéaire d'ordre 2 – Variation de la constante*)

Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. L'équation différentielle

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t)$$

a pour solutions

$$t \longmapsto \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t),$$

où (y_1, y_2) forme une base des solutions de l'équation homogène (i.e. avec $g = 0$), et λ et μ sont déterminées (à constantes additives près) par

$$\begin{cases} \lambda'(t)y_1(t) + \mu'(t)y_2(t) = 0, \\ \lambda'(t)y_1'(t) + \mu'(t)y_2'(t) = g(t). \end{cases}$$

1.1.3 Équations à variables séparées

Pour une équation du type

$$y'(t) = \varphi(t)\,\psi\,(y(t))\,,$$

l'intégration est explicite si l'on note Φ une primitive de ϕ, et Γ une primitive de $1/\psi$:

$$\Gamma\,(y(t)) = \Phi(t) + K,$$

où K désigne une constante. Il reste à inverser Γ, ce qui peut dans un certain nombre de cas être effectué explicitement.

Exercice. Résoudre $y' = e^{-y}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$. ◇

1.2 Cadre d'étude

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $t_0 \in I$. Le problème général étudié ici consiste à trouver une fonction $y : I \to \mathbb{R}^d$, de classe $\mathscr{C}^1$, satisfaisant

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \text{ pour } t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où la fonction $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et la donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}^d$ sont donnés.

Remarque 1.1

*La fonction $t \mapsto f\,(t, y(t))$ est une fonction d'une seule variable, **qui ne définit pas** la fonction $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Pour éviter toute ambiguité, on utilisera la notation*

$$(s, z) \mapsto f(s, z)$$

pour désigner la fonction f de manière générale.

En présence d'une équation différentielle d'ordre plus élevé :

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big), \text{ pour } t \in I, \\ y^{(k)}(t_0) = y_0^k, \text{ pour } 0 \leq k \leq n-1, \end{cases} \tag{1.2}$$

on peut se ramener à la formulation générale d'ordre 1, en posant

$$Y(t) = \left(y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right).$$

Le problème (1.2) se récrit alors

$$\begin{cases} Y'(t) = F\big(t, Y(t)\big), \text{ pour } t \in I, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$$

avec $Y_0 = \left(y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ et, pour $s \in I$ et $Z \in \mathbb{R}^n$, $F(s, Z) = f\,(s, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

Exercice. Mettre l'équation $y'' = -\sin y$ sous la forme d'un système d'ordre 1. ♢

1.3 Existence et unicité de solution d'une EDO

Dans le cas où f est affine, on rappelle le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires

Théorème 1.4 (*Cauchy linéaire*)

On suppose $f(s,z) = A(s) + B(s)z$ avec $A : I \to \mathbb{R}^d$, et $B : I \to \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ des fonctions continues. Alors il existe une unique solution $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ au problème (1.1).

Dans le cadre général non linéaire, on est capable, sous certaines hypothèses sur la fonction f, d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (1.1). Les deux résultats principaux sont les suivants

Théorème 1.5 (*Cauchy-Lipschitz, version globale*)

On suppose $f \in \mathscr{C}^1(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ avec

$$\exists M > 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots d, \quad \forall (s,z) \in I \times \mathbb{R}^d, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(s,z)\right| \leq M.$$

Alors il existe une unique solution $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ au problème (1.1).

Remarque 1.2

Le cas $f(s,z) = A(s) + B(s)z$ relève du théorème de Cauchy-Lipschitz global. En effet, les dérivées partielles de f selon z sont les coefficients de la matrice $B(s)$, qui sont donc bornées sur tout compact de I. L'existence d'une solution sur tout compact de I implique l'existence d'une solution sur I.

Théorème 1.6 (*Cauchy-Lipschitz, version locale*)

On suppose $f \in \mathscr{C}^1(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

- *Il existe* $J \subset I$ *avec* $t_0 \in J$, *et* $y \in \mathscr{C}^1(J, \mathbb{R}^d)$ *solution du problème* (1.1) *pour* $t \in J$.
- *L'unicité a lieu dans le sens suivant : si* $y_1 : J_1 \to \mathbb{R}^d$ *et* $y_2 : J_2 \to \mathbb{R}^d$ *sont solutions avec* $t_0 \in J_i \subset I$ $(i = 1, 2)$, *alors* $y_1 = y_2$ *sur* $J_1 \cap J_2$.
- *Il existe un unique intervalle maximal* $I^* \subset J$ *et* $y^* : I^* \to \mathbb{R}^d$, *solution dite* maximale *de* (1.1) *pour* $t \in I^*$.

Insistons sur le fait que, dans la version locale, l'existence d'une solution n'a lieu *a priori* que sur un sous-intervalle de I : aucune assurance n'existe quant à l'existence d'une solution pour $t \in I$ tout entier. La condition, très restrictive, de la version globale permet d'obtenir ce résultat (voir également Prop. 1.10).

Exercice. Quelle(s) version(s) du théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique(nt) aux problèmes suivants :

- Équation du pendule simple :

$$\theta''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)), \quad \text{avec } \theta(0), \theta'(0) \text{ donnés.}$$

- Système proie-prédateur de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\big(a - by(t)\big) \\ y'(t) = y(t)\big(-c + dx(t)\big), \end{cases}$$

avec $x(0)$ et $y(0)$ donnés.

$\diamond$

1.4 Bornes sur les solutions :

Lemme 1.7 (*Grönwall*)

Soit $y \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ *une fonction satisfaisant,*

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad y(t) \le y(t_0) + C\int_{t_0}^t y(s)ds.$$

Alors, pour tout $t \in I$, $t \ge t_0$: $y(t) \le y(t_0)e^{C(t-t_0)}$.

Preuve. On pose $\psi(t) = y(t_0) + C\int_{t_0}^t y(s)ds$, alors ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\psi'(t) = Cy(t) \le C\psi(t)$ par hypothèse. Il s'ensuit que la fonction $e^{-Ct}\psi(t)$ est décroissante et ainsi,

$$e^{-Ct}\psi(t) \le e^{-Ct_0}\psi(t_0) = y(t_0)e^{-Ct_0},$$

d'où le résultat. ■

Ce résultat permet de montrer que, sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local, deux trajectoires distinctes sont disjointes :

Proposition 1.8

On suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1(I \times \mathbb{R}^d)$ et y_1, y_2 sont solutions de

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

pour $t \in I_1$ et I_2, respectivement. Si $y_1(t_0) \neq y_2(t_0)$, alors, pour tout $t \in I_1 \cap I_2$, on a $y_1(t) \neq y_2(t)$.

Le résultat peut être affiné en dimension 1 :

Corollaire 1.9

On suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1(I \times \mathbb{R})$ et y_1, y_2 sont solutions de

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

pour $t \in I_1$ et I_2, respectivement. Si $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ alors pour tout $t \in I_1 \cap I_2$, on a $y_1(t) < y_2(t)$.

Exercice. Montrer que la solution maximale du problème

$$y'(t) = y(t)(1 - y(t)^2) \quad \text{avec} \quad y(0) > 0,$$

satisfait $y(t) > 0$ pour tout t dans l'intervalle maximal. ♢

Dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz local (Th. 1.6), l'énoncé suivant précise les cas d'existence globale.

Proposition 1.10 (*Majorations a priori – explosion en temps fini*)

On suppose $I = \mathbb{R}$ et on note y^* la solution maximale de (1.1) *avec $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.*

- *Si $y^* : I^* \to \mathbb{R}^d$ est bornée sur I^*, alors $I^* = \mathbb{R}$.*
- *Si $T^* = \sup I^* < \infty$. Alors $\lim_{t \to T^*} |y^*(t)| = +\infty$.*

Exercice. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - x(t)^2 y(t)^2 \\ y'(t) = x(t) + y(t) - y(t)^4, \end{cases}$$

avec $x(0)$ et $y(0)$ donnés.

1. Montrer que le système admet une unique solution maximale (x^*, y^*).
2. À l'aide du lemme de Gronwall, obtenir des estimations *a priori* sur (x^*, y^*).
3. Montrer que la solution maximale est globale.

♢

1.5 Analyse qualitative

On appelle *analyse qualitative* des solutions toute méthode qui permet de fournir des renseignements sur la solution de l'EDO, sans la calculer explicitement. L'étude de la convergence globale qui vient d'être effectuée en fait partie. On s'intéresse ici à d'autres types de propriétés.

1.5.1 Equilibres et stabilité

On considère un système d'EDO *autonome* :

$$y'(t) = f(y(t)), \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{1.3}$$

où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est telle qu'il y a existence globale de solutions.

Définition 1.1

On dit que u est un point d'équilibre (ou point stationnaire) pour (1.3) *si $f(u) = 0$.*

Un tel point est dit

- stable *si*

$$\forall \delta > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \Big\{ \|y(0) - u\| < \eta \Big\} \quad \Longrightarrow \quad \Big\{ \forall t > 0, \quad \|y(t) - u\| < \delta \Big\}.$$

- attratif *si*

$$\exists \eta > 0, \quad \Big\{ \|y(0) - u\| < \eta \Big\} \quad \Longrightarrow \quad \Big\{ \lim_{t \to \infty} y(t) = u \Big\}.$$

- asymptotiquement stable *s'il est stable et attractif.*
- instable *s'il n'est pas stable.*

Remarque 1.3

Un point d'équilibre est une solution constante du système d'EDO.

Théorème 1.11

On considère un système linéaire de la forme $y' = Ay$, où A est une matrice de taille $d \times d$. Alors $u = 0$ est point d'équilibre et

- *Le point $u = 0$ est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres (complexes) de A sont de partie réelle strictement négative.*
- *Le point $u = 0$ est instable dès qu'une valeur propre (complexe) de A a une partie réelle strictement positive.*

Remarque 1.4

Le cas où les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle négative, avec certaines de partie réelle nulle, est plus délicat. On peut montrer que le point $u = 0$ est stable si et seulement si les valeurs propres de partie réelle nulle sont alors non défectives (i.e. il y a coïncidence entre les sous-espaces caractéristiques et les sous-espaces propres associés).

Théorème 1.12

On considère un système non-linéaire de la forme $y' = f(y)$, où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Alors $u = 0$ est point d'équilibre. On note $A = f'(0)$ la matrice jacobienne de f en 0, c'est-à-dire

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right)_{1 \le i,j \le d} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}).$$

- *Le point $u = 0$ est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres (complexes) de A sont de partie réelle strictement négative.*
- *Le point $u = 0$ est instable dès qu'une valeur propre (complexe) de A a une partie réelle strictement positive.*

Remarque 1.5

Contrairement au cas linéaire, il n'y a pas de résultat général qui donne la stabilité dans le cas où la jacobienne a ses valeurs propres de partie réelle négative ou nulle, et certaines nulles. L'étude de système linéarité $y' = f'(0)y$ est complètement connue, mais ne donne pas d'information sur le système non linéaire d'origine.

Exercice. Étudier, à l'aide de la technique de linéarisation, la stabilité des points d'équilibre pour le problème du pendule simple :

$$y''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin y(t).$$

Peut-on conclure dans tous les cas ? ♢

1.5.2 Fermés invariants

Définition 1.2

On dit qu'un sous-ensemble fermé F de $\mathbb{R}^d$ est (positivement) invariant pour le système différentiel (1.3) *si*

$$\Big\{y(0) \in F\Big\} \quad \Longrightarrow \quad \Big\{\forall t > 0,\, y(t) \in F\Big\}.$$

Théorème 1.13 (*Champ rentrant*)

Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ possédant une normale sortante $n(v)$ pour presque tout élément v de sa frontière ∂F. On suppose l'inégalité suivante vérifiée :

$$\forall v \in \partial F, \quad f(v) \cdot n(v) \le 0. \tag{1.4}$$

Alors le fermé F est invariant.

Remarque 1.6

La condition (1.4) *indique que le champ de vecteur défini par la fonction f est* rentrant *dans le fermé F. Considérons l'exemple suivant, en dimension $d = 2$: $v = (v_1, v_2)$, $f = (f_1, f_2)$, et $F = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$. La condition de champ rentrant s'écrit*

$$\forall v_1 \geq 0, \quad \forall v_2 \geq 0, \quad f_1(0, v_2) \geq 0 \quad et \quad f_2(v_1, 0) \geq 0.$$

Pour plus de détails sur cette partie, on renvoie à [1].

Exemple. On considère le système de Volterra-Lotka :

$$\begin{cases} N'(t) = N(t)\big[a - bP(t)\big], \\ P'(t) = P(t)\big[-c + dN(t)\big], \end{cases}$$

Les équations entrent dans le cadre de la remarque précédente, car $f_1(v_1, v_2) = v_1(a - bv_2)$ et $f_2(v_1, v_2) = v_2(-c + dv_1)$. ♢

Exercice. Soit

$$\begin{cases} x' = y^2 - ye^x \arctan(x-1), \\ y' = -x \arctan(y-1). \end{cases} \quad \text{avec} \quad x(0) = x_0 \text{ et } y(0) = y_0.$$

1. Montrer que, si $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, il existe une unique solution maximale définie sur $[0, T[$ telle que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour $t < T$.
2. A l'aide d'un rectangle invariant, montrer que la solution est globale.

♢

1.6 La méthode d'Euler

La grande majorité des problèmes issus des applications ne peut pas être résolue explicitement à l'aide de formules. Il est nécessaire de recourir à la simulation numérique pour obtenir la forme de la solution [1]. Le but de ce paragraphe est de présenter la méthode la plus simple et d'en étudier la performance.

On considère l'équation (1.1) et on se place dans le cas globalement lipschitzien (pour lequel le théorème 1.5 assure existence et unicité). Afin de construire une approximation numérique de la solution, on introduit une subdivision $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ de l'intervalle $[0, T] \subset I$, dont le pas maximal est noté h :

$$h = \max_{0 \leq n \leq N-1} (t_{n+1} - t_n).$$

On écrit alors l'équation sous forme intégrale :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(s, y(s)\big)ds$$

1. Soulignons toutefois qu'il est possible d'obtenir des informations sur la solution d'une EDO sans pour autant savoir la calculer explicitement (positivité, monotonie, etc). C'est l'object de l'*analyse qualitative*, dont on a donné un aperçu au paragraphe précédent.

Les approximations $y_0, y_1, \ldots, y_N$ sont fournies par l'approximation de l'intégrale dans l'égalité précédente à l'aide de la méthode du rectangle, à savoir

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f\big(t_n, y_n\big) \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1).$$

L'initialisation a lieu à partir de la condition initiale (déjà notée y_0) et la détermination de y_{n+1} connaissant y_n est un simple calcul. La figure 1.1 montre la construction géométrique des itérés successifs de la méthode d'Euler. La courbe rouge correspond à la solution issue du point (t_0, y_0) (celle qu'on cherche à approcher), la courbe bleue celle issue du point (t_1, y_1).

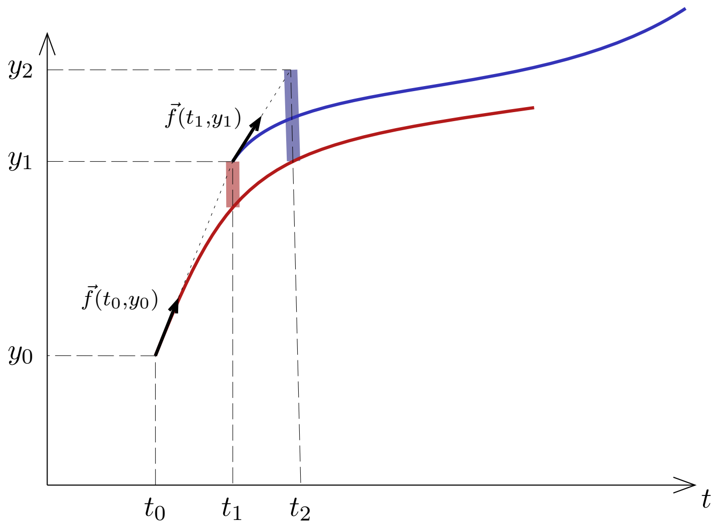


FIGURE 1.1 – La méthode d'Euler en dimension 1.

Les bandes rouge et bleue matérialisent l'erreur commise à chaque étape, où il apparaît clairement un phénomène de propagation des erreurs déjà présentes, cumulé avec une erreur intrinsèque à chaque étape. Ce constat conduit à séparer en deux parties les sources d'erreur pour étudier la convergence de la méthode (pour cette étude, on suppose pour simplifier les notations que le pas de la subdivision est constant : $t_{n+1} - t_n = h$ pour tout n) :

- ◇ *Consistance.* on définit l'erreur de consistance comme l'écart à la courbe exacte auquel conduit le schéma en une itération, sans erreur initiale : à l'étape n elle est définie par

  $$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - (t_{n+1} - t_n) f\big(t_n, y(t_n)\big).$$

  Si la solution y est suffisamment régulière (de classe C^2, ce qui est assuré par l'hypothèse $f \in C^1$), un développement de Taylor fournit immédiatement l'estimation

  $$|\varepsilon_n| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{t \in [0,T]} |y''(t)|. \tag{1.5}$$

- ◇ *Stabilité.* cette notion mesure la manière dont le schéma propage les erreurs. On considère un schéma perturbé à chaque étape :

  $$z_{n+1} = z_n + (t_{n+1} - t_n) f\big(t_n, z_n\big) + \mu_n \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1),$$

(avec $z_0 = y_0$). On cherche à savoir si z_n est proche de y_n. Pour cela, on écrit la majoration

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n - y_n| + |\mu_n|,$$

où L est une constante de Lipschitz pour la fonction f. Une récurrence immédiate [2] montre que

$$|y_n - z_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (1 + hL)^k \mu_{n-k-1}$$

d'où

$$\max_{0 \leq n \leq N} |z_n - y_n| \leq e^{LT} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu_n|. \tag{1.6}$$

◇ *Convergence.* Si l'on choisit $z_n = y(t_n)$, alors la perturbation μ_n n'est autre que l'erreur de consistance ε_n. Les inégalités (1.5) et (1.6) se combinent pour fournir

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \leq e^{LT} N \frac{h^2}{2} \sup_{t \in [0,T]} |y''(t)| = T e^{LT} \frac{h}{2} \sup_{t \in [0,T]} |y''(t)|.$$

Il s'agit bien d'un résultat de convergence des itérés de la méthode vers les valeurs de la solution exacte lorsque le pas h tend vers 0.

La présentation et l'analyse de convergence que nous avons faite pour le schéma d'Euler est en fait générale et s'applique à des méthodes plus sophistiquées (et précises), telles que les méthodes de Runge et Kutta.

Pour plus détails sur les méthodes numériques, on renvoie à [4, 3, 2].

Exercice. La méthode d'Euler implicite (ou rétrograde) est définie par la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad ; \quad y_0 \text{ donné.}$$

On considère le problème de Cauchy sur $[0, +\infty[$

$$y' = -\lambda y \quad ; \quad y(0) = 1,$$

dont la solution exacte est $y(t) = e^{-\lambda t}$. On considère le cas $\lambda > 0$.

1. Donner la formule explicite de l'approximation y_n obtenue par la méthode d'Euler explicite pour ce problème, en fonction de λ, h et n.
2. Même question pour la méthode d'Euler implicite.
3. Pour chaque méthode, donner une condition nécessaire et suffisante sur h pour que la suite (y_n) soit positive (respectivement bornée, convergente vers 0).

◇

2. Ce résultat est parfois appelé *lemme de Grönwall discret*

Références

[1] S. Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles : Cours et exercices corrigés*. Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI. Dunod, 2010.

[2] Michel Crouzeix and Alain L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris, 1984.

[3] E. Hairer and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. II*, volume 14 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Stiff and differential-algebraic problems.

[4] Florence Hubert and John Hubbard. *Calcul scientifique*. Vuibert, 2006.