Retour sur la linéarisation des équations différentielles

Grégory Vial

28 janvier 2004

On considère le système différentiel autonome

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & f(u(t)) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $u_0 \in \Omega$ (on suppose existence globale).

On suppose que $f(0) = 0$ et on s'intéresse à ce point d'équilibre. Rappelons tout d'abord les définitions usuelles de stabilité :

Définition. *Le pint d'équilibre* 0 *est* stable *ssi*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \ \|u_0\| < \eta \Longrightarrow \forall t > 0, \ \|u(t)\| < \varepsilon$$

Si, de plus,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$$

le point 0 *est dit* asymptotiquement stable.
On dit que 0 *est instable s'il n'est pas stable.*

On fait également l'hypothèse que f est différentiable en 0. Au voisinage du point d'équilibre, le système (1) est "proche" du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & f'(0)u(t) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

On pourrait s'attendre à ce que le comportement de (1), au voisinage de l'équilibre 0, soit semblable à celui de (2), mais ce n'est pas toujours le cas :

Théorème [linéarisation] *Si f est différentiable en* 0 *et $f(0) = 0$, alors*
– *Si* $\forall \lambda \in \mathfrak{S}(f'(0)), \ \mathrm{Re}\,\lambda < 0$*, alors* 0 *est asymptotiquement stable pour* (1).
– *Si* $\exists \lambda \in \mathfrak{S}(f'(0)), \ \mathrm{Re}\,\lambda > 0$*, alors* 0 *est instable pour* (1).

On ne sait donc rien dire du comportement au voisinage d'un point d'équilibre si toutes les valeurs propres de la différentielle sont de partie réelle nulle, *même si on peut conclure pour le système linéarisé* (2).
On trouvera la démonstration de ce résultat dans [2] et [1].

Voici quelques exemples qui montrent que tout peut arriver dans le cas où les valeurs propres sont toutes de partie réelle nulle :

Exemple 1 (système non linéaire instable, système linéaire instable)
Soit le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -y^2 \end{array} \right. \qquad \text{qui se linéarise en} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = 0 \end{array} \right.$$

Le système linéarisé est instable (soit on le résout et on voit que x est linéaire, soit on observe que 0 est seule valeur propre et qu'elle est défective). Le système non linéaire se résout en

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + y_0 t} \quad \text{et} \quad x(t) = \ln(1 + y_0 t) + x_0$$

ce qui prouve que le pint $(0,0)$ est instable pour le système non linéaire.

Exemple 2 (système non linéaire stable, système linéaire instable)
Soit le système :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \text{qui se linéarise en} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases}$$

Le système non linéaire a pour solution :

$$y(t) = \frac{4y_0}{(2 + \sqrt{y_0}t)^2} \quad \text{et} \quad x(t) = 2\sqrt{y_0} + x_0 - \frac{4\sqrt{y_0}}{2 + t\sqrt{y_0}}$$

ce qui prouve que $(0,0)$ est stable pour le système non linéaire.

Exemple 3 (système non linéaire stable, système linéaire stable)
Soit l'équation $x' = -x^3$, qui se linéarise en $x' = 0$ (stable !). Quant à l'équation de départ, elle a pour solution

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}}$$

donc 0 est stable.

Exemple 4 (système non linéaire instable, système linéaire stable)
Soit l'équation $x' = x^3$, qui se linéarise en $x' = 0$ (stable !). Quant à l'équation de départ, elle a pour solution

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}}$$

donc 0 est instable (il n'y a même plus existence globale).

Références

[1] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation.* Masson, Paris, second edition 1997. Analyse 3.

[2] M. W. Hirsch, S. Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.* Academic Press, New York-London 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60.