

Approximation d'une fonction par sa série de Fourier

Grégory Vial

10 mars 2006

1 Introduction

L'analyse de Fourier est très largement utilisée en traitement du signal ; elle permet aussi d'approcher efficacement la solution de certaines équations aux dérivées partielles. On s'intéresse ici au problème simple de l'approximation d'une fonction donnée par sa série de Fourier. En s'appuyant sur les résultats théoriques et des expériences numériques, on essaie répondre aux questions suivantes :

- comment calculer les coefficients de la série de Fourier ?
- est-ce que la série de Fourier approche correctement la fonction ?

Les réponses à ces deux questions sont en fait liées, et reposent essentiellement sur le fait que la suite des coefficients de Fourier d'une fonction régulière tend très vite vers 0.

Ce document se place volontairement à un niveau relativement élémentaire, incluant les preuves des résultats classiques utilisés.

2 Notations et rappels

Définition 1 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, i.e. $f \in L^1(0, 1)$; on note encore f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} obtenue par 1-périodicité. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier de f d'ordre n est

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt. \quad (1)$$

Définition 2 La série de Fourier de f tronquée au rang N est la fonction 1-périodique $S_N(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S_N(f)(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}. \quad (2)$$

On a considéré ici une période égale à 1, ce qui simplifie les écritures (afin de vérifier que les constantes multiplicatives sont correctes dans les définitions, il est commode de choisir $f \equiv 1$ dans (1) et (2) pour de vérifier que $S_N(f) = f$).

On rappelle enfin le résultat central qui relie la régularité d'une fonction avec le comportement asymptotique de ses coefficients de Fourier :

Proposition 1 On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de n telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{n^p}. \quad (3)$$

PREUVE. À l'aide d'une intégration par parties, on montre aisément que les coefficients de Fourier de la fonction f et de sa dérivée sont reliés par $\hat{f}(n) = (2i\pi n)^{-1}\widehat{f'}(n)$. En itérant cette relation, on obtient

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{(2i\pi n)^p} \widehat{f^{(p)}}(n). \quad (4)$$

Le résultat s'en déduit avec $C = (2\pi)^{-p} \max_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(p)}}(n)|$. ■

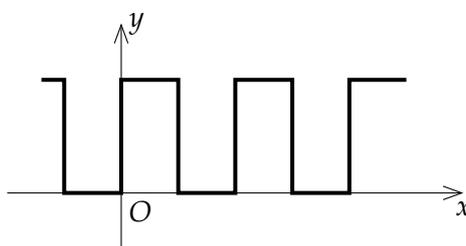
Le résultat reste valable si f est seulement supposée dérivable p fois, avec $f^{(p)}$ dans $L^1(0,1)$.

Avant de conclure ce paragraphe, on donne quelques calculs explicites de coefficients de Fourier, qu'on utilisera par la suite. Soulignons que les formules qui suivent illustrent le lien entre le comportement des coefficients de Fourier et la régularité de la fonction.

Signal créneau

$$f_1(x) = \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{2}]}(x).$$

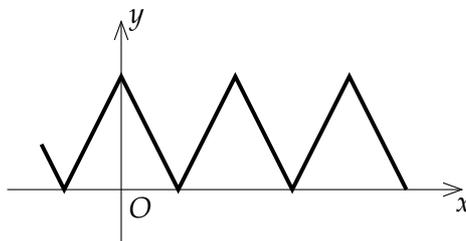
$$\hat{f}_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{2i\pi n} (1 - (-1)^n) & \text{sinon.} \end{cases}$$



Signal triangulaire

$$f_2(x) = |2x - 1|.$$

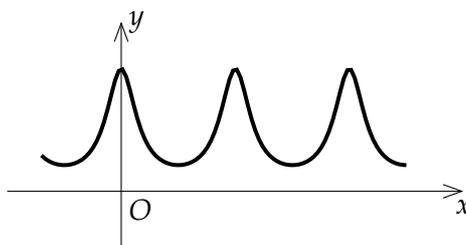
$$\hat{f}_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } n = 0, \\ \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$



Signal \mathcal{C}^∞

$$f_3(x) = \frac{e^2 - 1}{2(e^2 + 1 - 2e \cos(2\pi x))}.$$

$$\hat{f}_3(n) = \frac{e^{-|n|}}{2}.$$



3 Le calcul des coefficients de Fourier

Afin de former la série de Fourier de la fonction f , il faut d'abord calculer les coefficients $\hat{f}(n)$. La méthode la plus simple consiste à utiliser une formule des rectangles à gauche pour approcher les intégrales (1). Si on divise l'intervalle $[0, 1]$ en K sous-intervalles de même taille, on obtient l'approximation

$$\hat{f}_K(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f\left(\frac{k}{K}\right) e^{-2i\pi n \frac{k}{K}}. \quad (5)$$

Il est facile de comparer le coefficient exact $\hat{f}(n)$ à son approximation $\hat{f}_K(n)$:

Lemme 2 On suppose que la suite des coefficients de Fourier de f est sommable, i.e. $(\hat{f}(n)) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Les coefficients approchés définis par (5) satisfont l'égalité

$$\hat{f}_K(n) - \hat{f}(n) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} \hat{f}(n + qK). \quad (6)$$

PREUVE. Puisque la suite $(\hat{f}(n))$ appartient à $\ell^1(\mathbb{Z})$, alors la suite des sommes partielles $(S_N(f))$ est normalement convergente sur \mathbb{R} , la limite vaut f^\dagger . Insérant la série de Fourier dans la relation (5), on obtient

$$\hat{f}_K(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\ell) e^{2i\pi(\ell-n)\frac{k}{K}}.$$

Par convergence normale, on peut intervertir les deux sommes, il vient

$$\hat{f}_K(n) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left[e^{2i\pi\frac{\ell-n}{K}} \right]^k.$$

La somme interne correspond à une suite géométrique : on distingue selon que sa raison vaut 1 ou non. Un calcul immédiat conduit à

$$\hat{f}(n) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n + qK),$$

d'où le résultat en isolant le terme donné par $q = 0$. ■

La relation (6) permet d'exprimer l'erreur de quadrature commise par la méthode des rectangles en termes des seuls coefficients de Fourier. Cette formule permet d'estimer l'erreur commise :

Proposition 3 Soient $p \geq 2$ un entier et f une fonction 1-périodique de classe $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors il existe une constante C indépendante de n telle que

$$\left| \hat{f}(n) - \hat{f}_K(n) \right| \leq \frac{C}{K^p} \quad \text{pour } |n| \leq \frac{K}{2}. \quad (7)$$

PREUVE. D'après la proposition 1, $|\hat{f}(n + qK)| \leq C'|n + qK|^{-p}$. On déduit alors de la relation (6)

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(n) - \hat{f}_K(n) \right| &\leq C' \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n + qK|^p} \\ &\leq C' \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{2^p}{(qK)^p}, \end{aligned}$$

puisque $|n| \leq K/2$. Enfin, comme $p \geq 2$, la série de terme général $|q|^{-p}$ converge et le résultat est démontré avec $C = C'2^p \sum_{q \in \mathbb{Z}} |q|^{-p}$. ■

[†] Voir paragraphe 5.

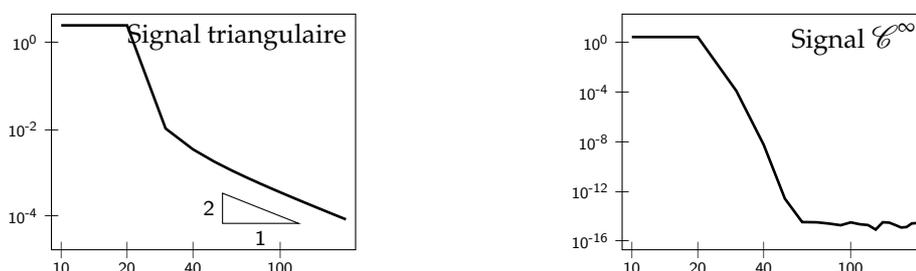
Ainsi, la formule (5) fournit une bonne approximation des coefficients de Fourier exacts dès que

- la fonction f est régulière ;
- le nombre de sous-intervalles K est assez grand.

Les graphes qui suivent illustrent l'erreur commise par la quadrature (5). Précisément, on a calculé les valeurs approchées obtenues $(\hat{f}_K(n))_{|n| \leq 20}$ pour différentes valeurs de K ; les graphes représentent, en fonction du nombre de sous-intervalles K , l'erreur relative commise

$$\frac{\max_{|n| \leq 20} |\hat{f}(n) - \hat{f}_K(n)|}{\max_{|n| \leq 20} |\hat{f}(n)|}.$$

On observe une convergence en K^{-2} dans le cas du signal triangulaire f_2 , et une convergence extrêmement rapide (et donc difficilement quantifiable) pour le signal régulier f_3 . On voit donc que la rapidité de convergence de la méthode des rectangles pour les fonctions périodiques est liée à la régularité de la fonction.



Évolution de l'erreur de quadrature relative en fonction de K (échelle log.)

On observe aussi que l'intégration numérique est extrêmement grossière pour un nombre de sous-intervalle $K < 20$, ce qui est conforme à la relation (6).

Remarque 1 La proposition 3 montre que le choix $K \geq 2N$ est adapté au calcul approché des coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$ pour $|n| \leq N$. La valeur $K = 2N$ joue un rôle particulier : si on définit P comme

$$P(X) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_{2N}(n) X^n, \quad (8)$$

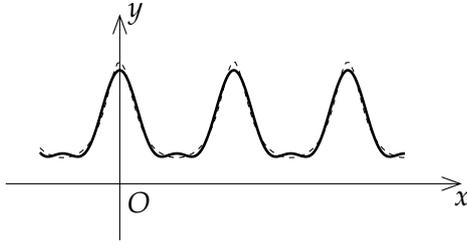
alors $P(e^{2i\pi\theta}) = f(\theta)$ pour $\theta = \frac{q}{2N+1}$, $q = 0, \dots, 2N$. On parle ici d'interpolation trigonométrique.

La séquence $(\hat{f}_{2N})_{|n| \leq N}$ est appelée transformée de Fourier discrète (DFT) d'ordre $2N$ de la fonction f . Elle possède la propriété remarquable suivante : le calcul d'une DFT d'ordre $2N$ se ramène au calcul de 2 DFT d'ordre N ; les formules explicites sont à la base de l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT), qui permet de calculer une DFT d'ordre N en $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ opérations au lieu de $\mathcal{O}(N^2)$ comme le nécessite la formule (5).

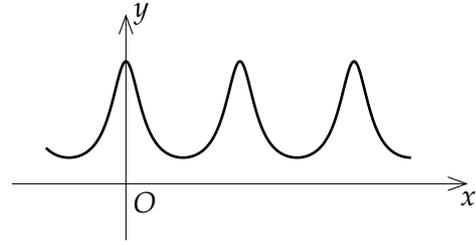
4 Convergence de la série de Fourier

On étudie maintenant la convergence de la série de Fourier vers la fonction, i.e. on s'intéresse au comportement pour N tendant vers $+\infty$ des sommes $S_N(f)$. Dans cette partie, on suppose que les coefficients de Fourier, nécessaires au calcul de $S_N(f)$, sont calculés exactement ; le paragraphe précédent répond à la question du calcul approché de ces coefficients.

Pour une fonction régulière, la série de Fourier converge uniformément (cf. §5), ce qu'on vérifie numériquement pour le signal f_3 sur les graphes ci-dessous.



La fonction f_3 et sa série $S_3(f_3)$.



La fonction f_3 et sa série $S_{10}(f_3)$.

De manière plus précise, la vitesse de convergence des sommes $S_N(f)$ vers la fonction f dépend du comportement asymptotique des coefficients de Fourier de f . Pour la fonction f_3 , on a $\hat{f}_3(n) = \frac{1}{2}e^{-|n|}$ si bien que l'estimation suivante est valable :

$$|f_3(x) - S_N(f_3)(x)| \leq \sum_{|n|>N} |\hat{f}_3(n)| = \sum_{n>N} e^{-|n|} = \frac{e^{-N}}{e-1},$$

d'où une convergence extrêmement rapide.

Pour le signal créneau f_1 , la situation est différente car la convergence n'est pas uniforme.

Proposition 4 (phénomène de Gibbs) On note $S_N(f_1)$ la série de Fourier de la fonction créneau f_1 , tronquée à l'ordre N (cf. définition 2). Alors

$$S_N(f_1) \left(\frac{1}{2N+1} \right) \rightarrow I = \int_{-\infty}^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du. \quad (9)$$

PREUVE. La série tronquée $S_N(f_1)$ peut s'écrire comme convolution de f avec le noyau de Dirichlet D_N (cf. paragraphe 5) :

$$S_N(f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^x \frac{\sin[\pi(2N+1)t]}{\sin(\pi t)} dt. \quad (10)$$

Le changement de variable $u = (2N+1)t$ permet de récrire l'intégrale pour $x_N = \frac{1}{2N+1}$:

$$S_N(f_1)(x_N) = \int_{1-N+\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin(\pi u)}{\sin\left(\frac{\pi u}{2N+1}\right) (2N+1)} du = \int_{1-N+\frac{1}{2}}^1 \Phi_N(u) du \quad (11)$$

On ne peut pas appliquer directement le théorème de convergence dominée de Lebesgue car l'intégrale de la fonction limite n'est que semi-convergente. Toutefois, il est clair que la convergence est acquise pour l'intégrale sur le segment borné

$$\int_{-1}^1 \Phi_N(u) du \rightarrow \int_{-1}^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du. \quad (12)$$

D'autre part, une intégration par parties conduit à l'égalité

$$\int_{1-N+\frac{1}{2}}^{-1} \Phi_N(u) du = \int_{1-N+\frac{1}{2}}^{-1} \frac{[1 - \cos(\pi u)] \cos\left(\frac{\pi u}{2N+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2N+1}\right) (2N+1)^2} du. \quad (13)$$

Or, pour $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$, on a l'inégalité

$$\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \leq \frac{1}{\theta^2}, \quad (14)$$

si bien que la fonction intégrande est dominée :

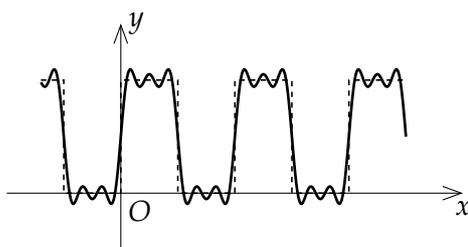
$$\left| \Phi_N(u) \mathbb{I}_{[1-N+\frac{1}{2}, -1]}(u) \right| \leq \frac{2}{\pi^2 u^2}. \quad (15)$$

On conclut alors la convergence de l'intégrale (13)

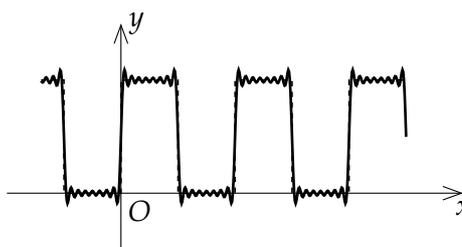
$$\int_{1-N+\frac{1}{2}}^{-1} \Phi_N(u) du \longrightarrow \int_{-\infty}^{-1} \frac{1 - \cos(\pi u)}{\pi^2 u^2} du = \int_{-\infty}^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du, \quad (16)$$

en faisant l'intégration par parties dans l'autre sens. ■

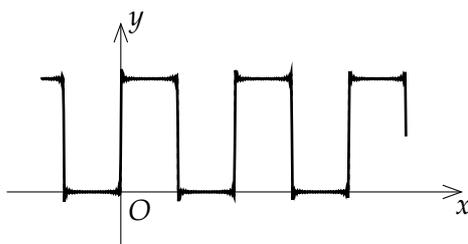
Les quatre graphes ci-dessous présentent la fonction créneau f_1 et sa série de Fourier tronquée aux ordres $N = 5, 15, 100$. On observe effectivement des oscillations au voisinage des points de discontinuité de f_1 , dont l'amplitude ne s'atténue pas pour les grandes valeurs de N .



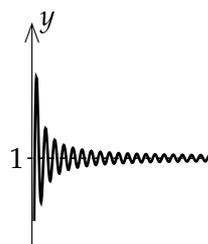
La fonction f_1 et sa série $S_5(f_1)$.



La fonction f_1 et sa série $S_{15}(f_1)$.



La fonction f_1 et sa série $S_{100}(f_1)$.



Zoom sur $(0, 0.2)$ de $S_{100}(f_1)$.

On peut aller plus loin du point de vue numérique et quantifier l'amplitude des oscillations : le tableau suivant rassemble les valeurs numériques de $S_N(f_1)(1/(2N+1))$ pour différentes valeurs de N .

N	$S_N(f_1) \left(\frac{1}{2N+1} \right)$
5	1.09004835717953
15	1.08957864368766
100	1.08951045714668

Les valeurs obtenues sont à comparer avec la valeur de l'intégrale (9) :

$$I = \int_{-\infty}^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du \simeq 1.08948987223608.$$

Intermède : calcul de l'intégrale I

L'intervalle d'intégration étant non borné, on ne peut pas appliquer directement les méthodes de quadrature classiques. Une solution consiste à remplacer $-\infty$ par $-R$ dans l'intégrale (avec R grand), mais l'erreur de troncature est importante car la fonction intégrande décroît lentement à l'infini. On peut aussi songer à effectuer un changement de variable pour se ramener à un intervalle borné, mais on fait alors apparaître une singularité.

La meilleure solution dans le cas présent consiste à découper l'intégrale en deux :

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du + \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du,$$

dont la première est connue explicitement :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du = \frac{1}{2}.$$

Pour le calcul de l'intégrale sur le segment $[0, 1]$, on utilise n'importe quelle formule de quadrature. On obtient les résultats suivants pour la méthode de Simpson avec K sous-intervalles – qui est d'ordre 4 car la fonction à intégrer est régulière.

K	I_K
10	1.08949000680453
100	1.08948987224952
500	1.08948987223611
1000	1.08948987223608
2000	1.08948987223608
5000	1.08948987223608

On observe bien qu'on gagne environ 4 chiffres significatifs quand K est divisé par 10.

5 Annexe : synthèse de Fourier

Dans cette partie, on prouve les résultats de convergence qu'on a utilisés dans les paragraphes précédents.

Proposition 5 La série de Fourier tronquée $S_N(f)$ peut s'écrire comme la convolution $S_N(f) = D_N * f$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_N(f)(x) = \int_0^1 D_N(t) f(x - t) dt, \tag{17}$$

où le noyau de Dirichlet D_N est défini par

$$D_N(x) = \frac{\sin [(2N + 1)\pi x]}{\sin(\pi x)}. \tag{18}$$

PREUVE. Il suffit d'introduire la définition du coefficient de Fourier (1) dans celle de la somme (2). Le noyau D_N apparaît comme la somme

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2i\pi nx} = e^{-2i\pi Nx} \frac{1 - e^{2i\pi(2N+1)x}}{1 - e^{2i\pi x}},$$

dans laquelle on factorise l'arc moitié pour obtenir le résultat. ■

Le noyau D_N possède toutes les qualités d'une identité approchée, sauf la positivité. On peut contrevenir à ce défaut en introduisant les moyennes de Césaro des sommes de Fourier.

Définition 3 On note $T_N(f)$ la fonction définie par

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f)(x). \quad (19)$$

Proposition 6 La somme de Césaro peut s'écrire comme la convolution $K_N * f$, où le noyau de Fejer K_N est défini par

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left[\frac{\sin(\pi x(N+1))}{\sin(\pi x)} \right]^2. \quad (20)$$

PREUVE. Il suffit d'effectuer le calcul $K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n$. ■

Le noyau de Fejer est une identité approchée, si bien qu'on obtient un résultat de convergence pour les sommes $T_N(f)$.

Théorème 7 (Fejer) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Alors les sommes de Fejer $T_N(f)$ définies par (19) convergent vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Si, de plus, f est continue, alors la convergence est uniforme.

Corollaire 8 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable telle que la suite de ses coefficients de Fourier soit sommable : $(\hat{f}(n))_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur \mathbb{R} vers la fonction f (en particulier cette dernière est continue).

PREUVE. La convergence normale de la série de Fourier est immédiate ; seule reste à prouver que sa somme $S(f)$ est bien f . Pour cela, on calcule les coefficients de Fourier de $S(f)$:

$$\widehat{S(f)}(n) = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2i\pi kt} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \int_0^1 e^{2i\pi(k-n)t} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \delta_{n,k} = \hat{f}(n),$$

l'interversion de la somme et de l'intégrale étant permise par la convergence normale. Ainsi, les fonctions f et $S(f)$ ont mêmes coefficients de Fourier, ce qui se récrit avec $\Delta = f - S(f)$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \int_0^1 \Delta(t) e^{-2i\pi nt} dt = 0.$$

Donc la fonction Δ est orthogonale aux polynômes trigonométriques, et en particulier à ses sommes de Fejer $T_N(\Delta)$ pour tout ordre N :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \Delta(t) T_N(\Delta)(t) dt,$$

d'où $\Delta = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, d'après le théorème de Fejer. ■

On renvoie le lecteur à la littérature donnée en références pour des compléments sur les résultats de convergence de la série de Fourier, en particulier le théorème de Dirichlet.

6 Application à la résolution de l'équation de la chaleur

Les séries de Fourier ont tout d'abord été introduites comme outil pour résoudre l'équation de la chaleur monodimensionnelle, qui décrit l'évolution au cours du temps de la température dans une barre modélisée par le segment $[0, \frac{1}{2}]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t > 0, x \in (0, \frac{1}{2}), \\ u(t, 0) = u(t, \frac{1}{2}) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, \frac{1}{2}]. \end{cases} \quad (21)$$

La recherche de solution sous forme de série de Fourier ramène l'étude de cette équation aux dérivées partielles de deux variables à l'étude d'une infinité d'équations différentielles ordinaires temporelles.

En effet, si on prolonge la donnée initiale u_0 par imparité sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, puis par 1-périodicité sur \mathbb{R} , alors le prolongement, encore noté u_0 , admet le développement

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \sin(2\pi n x). \quad (22)$$

On recherche alors la solution $u(t, x)$ sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \sin(2\pi n x). \quad (23)$$

Les coefficients $u_n(t)$ satisfont l'équation différentielle ordinaire

$$u_n'(t) + 4n^2\pi^2 u_n(t) = 0; \quad u_n(0) = b_n, \quad (24)$$

qu'on résout explicitement en $u_n(t) = a_n e^{-4n^2\pi^2 t}$. Grâce à l'exponentielle décroissante présente dans l'expression de u_n , la série (23) est normalement convergente, et la somme $u(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ . Les études faites dans les paragraphes précédents montrent qu'un petit nombre de coefficients de Fourier suffira à représenter avec une grande précision la solution $u(t, x)$. Plus particulièrement, on note $u_N(t, x)$ la fonction entièrement calculable

$$u_N(t, x) = \sum_{n=1}^N b_n^{2N} e^{-4n^2\pi^2 t} \sin(2\pi n x), \quad (25)$$

où b_n^{2N} est le coefficient de Fourier discret, approximation de b_n à l'aide de la méthode des trapèzes à $2N$ sous-intervalles. On a le résultat suivant.

Proposition 9 Si le prolongement de la donnée initiale u_0 est de classe $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ ($p \geq 2$), alors

$$\forall t > 0, \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], |u(t, x) - u_N(t, x)| \leq \frac{C}{N^{p-1}} e^{-4\pi^2 t}. \quad (26)$$

PREUVE. L'erreur provient de la troncature à l'ordre N et de la quadrature pour le calcul des coefficients de Fourier de u_0 . D'après l'estimation (7),

$$|b_n^{2N} - b_n| \leq \frac{C_1}{N^p}, \quad (27)$$

où la constante C_1 ne dépend que de u_0 et de p . Ainsi l'erreur de quadrature vaut

$$\left| u_N(t, x) - \sum_{n=1}^N b_n e^{-4n^2 \pi^2 t} \sin(2\pi n x) \right| \leq C_1 N^{-p} \sum_{n=1}^N e^{-4n^2 \pi^2 t} \leq C_2 N^{-p+1} e^{-4\pi^2 t}. \quad (28)$$

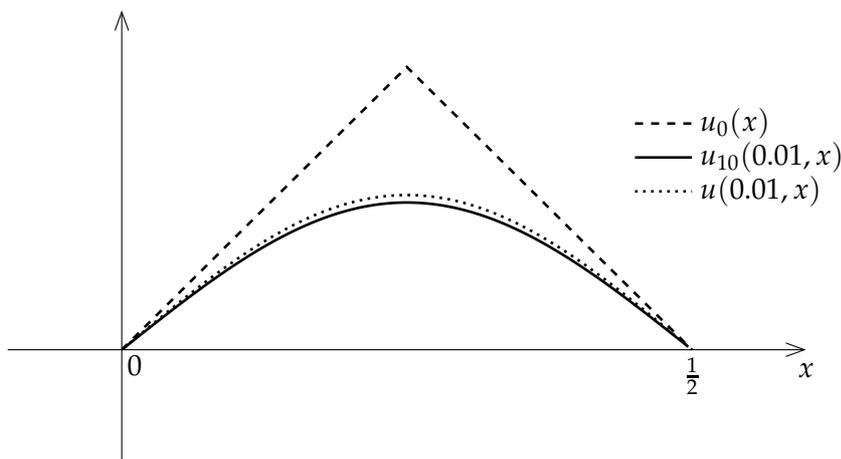
D'autre part, l'erreur de troncature satisfait l'estimation

$$\left| u(t, x) - \sum_{n=1}^N b_n e^{-4n^2 \pi^2 t} \sin(2\pi n x) \right| \leq \sum_{n>N} |b_n| e^{-4n^2 \pi^2 t} \leq c_3 N^{-p} \sum_{n>N} e^{-4n^2 \pi^2 t}, \quad (29)$$

d'après l'inégalité (3). L'estimation annoncée se déduit immédiatement de (28) et (29). ■

Il apparaît clairement dans l'inégalité (26) que l'erreur globale dépend essentiellement de la régularité de la fonction, et qu'elle se réduit de façon exponentielle avec le temps t . Notons que cette estimation est loin d'être optimale, mais présente l'avantage d'une preuve élémentaire.

La figure ci-dessous présente l'approximation obtenue à partir d'une donnée initiale "triangulaire" en conservant $N = 10$ modes de Fourier. La solution considérée comme exacte provient d'un calcul à l'aide de différences finies avec schéma d'Euler implicite en temps (pas d'espace $\frac{1}{600}$, pas de temps 10^{-4}). On observe que les deux courbes sont proches; l'erreur commise, en norme uniforme discrète, vaut $2.7 \cdot 10^{-3}$.



Solution de l'équation de la chaleur au temps $t = 0.01$.

Références

- [1] H. BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris 1983.
- [2] E. HAIRER. Introduction à l'analyse numérique. Notes de cours, disponibles à l'adresse <http://www.unige.ch/math/folks/haier/>
- [3] J. RAPPAZ, M. PICASSO. *Introduction à l'analyse numérique*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne 1998.
- [4] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC. *Eléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, Paris 1995.