Autour de la réduction de Jordan

G. Vial

30 septembre 2008

Résumé

Le but de ces quelques pages est de présenter, de manière élémentaire, la réduction de Jordan d'une matrice et quelques-unes de ses nombreuses applications. Elle est d'un usage si courant qu'on la nomme parfois "jordanisation". Les outils développés ici concernent divers aspects fondamentaux de l'algèbre linéaire : polynômes d'endomorphismes, dualité en dimension finie, matrices par blocs. à ce titre, mais aussi par ses multiples applications à l'analyse, ce résultat trouve sa place dans plusieurs leçons d'agrégation. Cependant, ces notes ont été rédigées à l'usage d'étudiants de licence ; aussi certains points pourront-ils sembler parfois un peu élémentaires aux agrégatifs.

1 Quelques rappels

On rappelle ici les résultats essentiels qui vont être utiles pour l'obtention de la réduite de Jordan d'une matrice. Les démonstrations données permettent de se familiariser avec les notions de polynôme d'endomorphisme et de crochet de dualité. On pourra trouver des compléments dans [4] ou [1], par exemple.

1.1 Le lemme de décomposition des noyaux

Lemme 1 (lemme des noyaux) *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $P_1, \dots, P_k$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, deux-à-deux premiers entre-eux. On note P le polynôme produit $\prod P_i$, alors*

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \text{Ker } P_i(u).$$

Preuve. On note Q_i le polynôme $P/P_i = \prod_{j \neq i} P_j$; les polynômes $(Q_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont premiers entre-eux dans leur ensemble. On peut donc écrire une relation de Bézout : il existe $V_1, \dots, V_k$ vérifiant

$$V_1\, Q_1 + \cdots + V_k\, Q_k = 1. \tag{1}$$

Montrons tout d'abord que les sous-espaces $F_i = \text{Ker } P_i(u)$ sont en somme directe : soit $(x_1, \dots, x_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k$ tel que $x_1 + \cdots + x_k = 0$. En appliquant l'endomorphisme $Q_i(u)$ à cette égalité, il vient $Q_i(u)(x_i) = 0$, puisque pour $j \neq i$, le facteur P_j apparaît dans le polynome Q_i. D'autre part, la relation de Bézout (1) appliquée à l'endomorphisme u, et évaluée ensuite en x_i, ne fait plus intervenir que le terme d'indice i (les autres s'annulant car P_i divise chaque Q_j pour $j \neq i$) :

$$V_i(u) \circ Q_i(u)(x_i) = x_i,$$

qui implique $x_i = 0$. On note alors $F = \bigoplus \text{Ker } P_i(u)$.

Il est clair que F est inclus dans $\operatorname{Ker} P(u)$ car chaque P_i divise P. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} P(u)$: d'après (1), on peut écrire

$$x = x_1 + \cdots + x_k, \quad \text{avec} \quad x_i = V_i(u) \circ Q_i(u)(x).$$

Il suffit alors de vérifier que $x_i \in \operatorname{Ker} P_i(u)$, ce qui résulte de l'identité $P = P_i Q_i$ (on utilise le fait que les polynômes d'un même endomorphisme commutent). ■

Le résultat précédent s'avère très utile pour "dévisser" un endomorphisme (si on peut se permettre cette expression, généralement réservée aux groupes) : supposons que P est un polynôme annulateur de u, alors $\operatorname{Ker} P(u) = E$ si bien qu'on obtient une décomposition de l'espace tout-entier en sous-espaces stables par u. Un cas d'utilisation fréquent consiste à choisir $P = \chi_u$, polynôme caractéristique de u dans le cas où ce dernier est scindé sur $\mathbb{K}$: on obtient la décomposition en sous-espaces caractéristiques (voir la démonstration du théorème 4 plus bas).

1.2 La dualité en dimension finie

Un ingrédient essentiel de la démonstration de la réduction de Jordan est la construction d'un supplémentaire stable par dualité. On rappelle donc ici les notions fondamentales de dualité dans le cadre de la dimension finie.

On désigne par E^* l'ensemble des formes linéaires sur E :

$$E^* = \{\varphi : E \to \mathbb{K}, \text{ linéaire}\},$$

l'ensemble E^* est un espace vectoriel de même dimension que E. Pour $x \in E$ et $\varphi \in E^*$, on notera

$$\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x).$$

Cette notation, appelée "crochet de dualité" présente deux avantages : le premier est de coïncider avec celle du produit scalaire si E dispose d'une structure euclidienne. Le second réside dans la facilité d'utilisation de l'endomorphisme transposé : pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit son endomorphisme transposé (ou adjoint) $u^\top$ (noté aussi u^*) par

$$\forall x \in E \quad \forall \varphi \in E^* \quad \langle x, u^\top(\varphi) \rangle = \langle u(x), \varphi \rangle.$$

Cette écriture est plus commode que l'écriture fonctionnelle équivalente : $u^\top(\varphi)(x) = \varphi(u(x))$.

Rappelons aussi la définition de l'orthogonal d'une partie A de E :

$$A^\perp = \{\varphi \in E^* \,;\, \forall x \in A \quad \langle x, \varphi \rangle = 0\}.$$

De manière duale, on définit l'orthogonal (ou polaire) $\Gamma^\perp$ d'une partie de E^*. Les ensembles $A^\perp$ et $\Gamma^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels (respectivement de E^* et E). Si, de plus, A et Γ possèdent des structures vectorielles, on a

$$\dim(A^\perp) = n - \dim A \quad \text{et} \quad \dim(\Gamma^\perp) = n - \dim \Gamma$$

$$(A^\perp)^\perp = A \quad \text{et} \quad (\Gamma^\perp)^\perp = \Gamma.$$

Enfin, on énonce un résultat simple – mais essentiel – qui constitue le moteur de la démonstration du théorème 3 :

Lemme 2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et Γ un sous-espace de E^*, stable par $u^\top$. Alors $\Gamma^\perp$ est stable par u.*

Preuve. Soit $x \in \Gamma^\perp$; vérifions que $u(x)$ est encore dans $\Gamma^\perp$. Soit donc $\varphi \in \Gamma$, on évalue le crochet

$$\langle u(x), \varphi \rangle = \langle x, u^\top(\varphi) \rangle = 0$$

car $u^\top(\varphi) \in \Gamma$ par stabilité de Γ à travers $u^\top$. ∎

2 La réduction de Jordan d'une matrice

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$ (le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Théorème 3 (réduction de Jordan nilpotente) *Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Alors N est semblable à la matrice $\mathcal{J}$, qui s'écrit par blocs*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices J_i sont appelées "blocs de Jordan nilpotent".

Preuve. On procède par récurrence sur n, taille de la matrice N. Pour $n = 1$, le résultat est évident, puisqu'une matrice mono-dimensionnelle nilpotente est nécessairement nulle.

Supposons le résultat acquis pour toute matrice nilpotente de taille strictement inférieure à n. Soit alors $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente ; on note $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme qui lui est associé via la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Si l'endomorphisme u est nul, le résultat est évident, sinon notons $k > 1$ l'ordre de nilpotence de u, i.e. $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$. Soit alors $x \notin \operatorname{Ker} u^{k-1}$ et F le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F = \operatorname{Vect}\Big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)\Big).$$

Montrons que la dimension de F est exactement k (ce qui impliquera en particulier que $k \leq n$), cela revient à prouver que la famille $x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)$ est libre : soient $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell \, u^\ell(x) = 0. \tag{2}$$

Si les scalaires (α_ℓ) ne sont pas tous nuls, on définit $i = \min\{\ell \; ; \; \alpha_\ell \neq 0\}$. En appliquant u^{k-1-i} à l'égalité (2), on obtient $\alpha_i \, u^{k-1}(x) = 0$, qui fournit la contradiction puisque x n'appartient pas au noyau de u^{k-1}.

Le sous-espace F est clairement stable par u, et la matrice de l'endomorphisme $u|_F$ dans la base $(u^{k-1}(x), \dots, u(x), x)$ est un bloc de Jordan de taille k. Si $k = n$, la preuve est terminée : la décomposition recherchée ne compte qu'un seul bloc. Sinon, on pourra conclure à l'aide de l'hypothèse de récurrence sitôt qu'on aura trouvé un supplémentaire à F, lui-aussi stable par u.

On peut réaliser une telle construction par dualité : soit $\varphi \in E^*$ telle que le crochet $\langle u^{k-1}(x), \varphi \rangle$ soit non-nul. On introduit Γ comme suit

$$\Gamma = \mathrm{Vect}\Big(\varphi, u^{\top}(\varphi), u^{\top 2}(\varphi), \dots, u^{\top k-1}(\varphi)\Big).$$

Le sous-espace Γ est de dimension k : soit $\alpha_0\, \varphi + \alpha_1\, u^{\top}(\varphi) + \cdots + \alpha_{k-1}\, u^{\top k-1}(\varphi) = 0$ une combinaison linéaire nulle. Si les scalaires α_ℓ ne sont pas tous nuls, on note, comme plus haut, $i = \min\{\ell\ ;\ \alpha_\ell \neq 0\}$. Alors, pour tout $y \in E$,

$$0 = \sum_{\ell=i}^{k-1} \alpha_\ell\, \langle y, u^{\top \ell}(\varphi) \rangle = \sum_{\ell=i}^{k-1} \alpha_\ell\, \langle u^{\ell}(y), \varphi \rangle.$$

Pour $y = u^{k-1-i}(x)$, on obtient $\alpha_i\, \langle u^{k-1}(x), \varphi \rangle = 0$, qui fournit la contradiction.

Ainsi, l'ensemble polaire $G = \Gamma^{\perp} = \{y \in E\ ;\ \forall \psi \in \Gamma,\ \langle y, \psi \rangle = 0\}$ est de dimension $n-k$. De plus, comme Γ est stable par $u^{\top}$, le sous-espace G est stable par u. Pour achever de prouver que G est supplémentaire de F, il suffit de montrer que l'intersection $F \cap G$ est nulle : il s'agit de montrer que toute combinaison linéaire $\alpha_0\, x + \alpha_1\, u(x) + \cdots + \alpha_{k-1}\, u^{k-1}(x)$ orthogonale à chaque $u^{\top \ell}(\varphi)$ a tous ses coefficients nuls. La démonstration, utilisant rigoureusement la même technique que celles concernant les dimensions de F et Γ, est laissée au lecteur.

Résumons-nous : on a trouvé deux sous-espaces F et G, tous-deux stables par u, recouvrant E en somme directe, et tels que la restriction de u à F soit semblable à un bloc de Jordan. Pour obtenir une écriture matricielle, fixons une base $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ de G ; si Q désigne la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et la base $((u^{k-1}(x), \dots, u(x), x, e_{k+1}, \dots, e_n)$ alors

$$N = Q \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \text{où} \quad J_1 \text{ est un bloc de Jordan.}$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à N', clairement nilpotente : il existe une matrice de passage $P' \in \mathcal{G}l_{n-k}(\mathbb{K})$ telle que $N' = P' \mathcal{J}' P'^{-1}$, où $\mathcal{J}'$ est composée de blocs de Jordan. L'identité suivante permet de conclure :

$$N = \underbrace{Q \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}' \end{pmatrix}}_{\mathcal{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1}}_{P^{-1}}.$$

■

Remarque. On peut faire le lien entre la forme de Jordan d'un endomorphisme nilpotent et le lemme des noyaux emboîtés. En effet, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors

$$\mathrm{Ker}\ u \subset \mathrm{Ker}\ u^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}\ u^n = E,$$

la suite de sous-espaces étant strictement croissante, puis constante. Il est facile de relier la dimension du noyau $\mathrm{Ker}\ u^i$ en fonction de la taille des blocs de Jordan :

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{ll} \dim \mathrm{Ker}\ u & \text{est égal au nombre de blocs de Jordan ;} \\[2mm] \dim \mathrm{Ker}\ u^i & = \dim \mathrm{Ker}\ u^{i-1} + d_i, \quad (i \geq 2) \\ \multicolumn{2}{l}{\ \text{où } d_i \text{ est le nombre de blocs de Jordan de taille } \geq i.} \end{array} \right.$$

Prenons un exemple : soient A et B les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour A, on a

$$\dim \mathrm{Ker}\, A = 2, \quad \dim \mathrm{Ker}\, A^2 = 4\ ;$$

Alors que la matrice B vérifie

$$\dim \mathrm{Ker}\, B = 2, \quad \dim \mathrm{Ker}\, B^2 = 3, \quad \dim \mathrm{Ker}\, B^3 = 4.$$

On peut en déduire, entre autres, que les matrices A et B ne sont pas semblables.

On énonce maintenant le résultat concernant la réduction de Jordan pour les endomorphismes non-nilpotents.

Théorème 4 (réduction de Jordan) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A est semblable à la matrice*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

où les λ_i sont les valeurs propres (non-nécessairement distinctes) de A. Les matrices J_i sont appelées "blocs de Jordan".

Preuve. On écrit la factorisation de χ_A sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j).$$

D'après le lemme de décomposition des noyaux (les facteurs sont deux-à-deux premiers entre-eux) et le lemme de Cayley-Hamilton, E apparaît comme somme directe des sous-espaces caractéristiques :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i, \qquad F_i = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}.$$

Chaque F_i est stable par A ; on note A_i la matrice $A|F_i$. Alors $A_i - \lambda_i I_{F_i}$ est nilpotente. D'après le théorème précédent, il existe une matrice de passage $P_i \in \mathcal{G}l(F_i)$ telle que

$$A_i - \lambda_i I_{F_i} = P \mathcal{J}_i P^{-1}, \quad \text{où } \mathcal{J}_i \text{ est composé de blocs de Jordan nilpotents.}$$

On en déduit que A_i est semblable à une matrice composée de blocs de Jordan relatif à la valeur propre λ_i. Le résultat énoncé se déduit en juxtaposant les blocs diagonaux correspondant à chaque sous-espace F_i. ■

La réduite de Jordan constitue "la forme diagonalisée d'une matrice non-diagonalisable", ce qui signifie qu'à bien des points de vue, la forme de Jordan est la plus simple qu'on puisse obtenir (elle coïncide avec la forme diagonalisé dans le cas diagonalisable).

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'hypothèse concernant χ_A n'est pas contraignante, si bien qu'on pourra toujours utiliser la réduite complexe d'une matrice. La situation d'une matrice réelle est plus délicate : on peut bien sûr plonger $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et considérer la réduite complexe. Néanmoins on aura parfois besoin d'une réduite réelle. La structure des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ permet d'obtenir un résultat dans ce sens.

Théorème 5 (réduction de Jordan réelle) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients réels. Alors A est semblable à la matrice $\mathcal{J}$, qui s'écrit par blocs*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_s & & & \\ & & & K_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & K_r \end{pmatrix}, \quad avec \quad J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_\ell \end{pmatrix},$$

les matrices K_ℓ s'écrivent par blocs 2×2 sous la forme

$$K_\ell = \begin{pmatrix} \Lambda_\ell & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \cdots & 0 & \Lambda_\ell \end{pmatrix}, \quad avec \quad \Lambda_\ell = \begin{pmatrix} a_\ell & b_\ell \\ -b_\ell & a_\ell \end{pmatrix}.$$

Les réels λ_ℓ sont les valeurs propres réelles (non-nécessairement distinctes) de A ; les nombres complexes $a_\ell \pm i\, b_\ell$ ($b_\ell \neq 0$) les valeurs propres complexes conjuguées (non-nécessairement distinctes).

Preuve. Un moyen simple pour démontrer ce résultat consiste à remarquer que les matrices A et $\mathcal{J}$ ont la même réduite de Jordan complexe. On commence par vérifier que les blocs de Jordan complexes correspondant à une valeur propre (non-réelle) λ et ceux correspondant à $\bar{\lambda}$ se correspondent deux-à-deux. Cela découle de la caractérisation des tailles des blocs à l'aide des dimensions des sous-espaces caractéristiques successifs, cf. (3). Il suffit donc de montrer que le bloc K_ℓ, de taille $2m_\ell$, a pour réduite de Jordan complexe la matrice

$$\mathcal{J}_\ell = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_\ell^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_\ell^- \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{J}_\ell^\pm$ est un bloc de Jordan de taille m_ℓ associé à la valeur propre $a_\ell \pm i\, b_\ell$. Or si on note $(e_1, f_1, \ldots, e_{m_\ell}, f_{m_\ell})$ la base canonique dans laquelle K_ℓ est la matrice de l'endomorphisme u_ℓ, alors la matrice de u_ℓ dans la base

$$\Big(e_1 + i\, f_1, e_2 + i\, f_2, \ldots, e_{m_\ell} + i\, f_{m_\ell}, e_1 - i\, f_1, e_2 - i\, f_2, \ldots, e_{m_\ell} - i\, f_{m_\ell}\Big)$$

n'est autre que $\mathcal{J}_\ell$.

Ainsi les matrices A et $\mathcal{J}$ ont la même réduite de Jordan complexe ; elles sont donc semblables sur $\mathbb{C}$. Comme elles sont toutes-deux réelles, elles sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$ (voir lemme 6 ci-dessous), d'où le résultat annoncé. ∎

On rappelle ici l'énoncé et la démonstration d'un résultat classique simple :

Lemme 6 *Deux matrices à coefficients réels semblables sur $\mathbb{C}$ sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ telles que $A = P\,B\,P^{-1}$. On note U et V les parties réelle et imaginaire de P :

$$U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad P = U + i\,V.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, il vient

$$AU = UB \quad \text{et} AV = VB. \tag{4}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note Q_t la matrice à coefficients réels $U + t\,V$, et $\phi(t)$ son déterminant. La fonction ϕ est un polynôme en la variable t, qui ne saurait être nul car $\phi(i) = \det P \neq 0$. Ainsi, il existe une valeur réelle t_0 telle que la matrice Q_t soit inversible. Par combinaison linéaire des relations (4), on vérifie que $AQ_t = Q_tB$, ce qui montre que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$. ∎

3 Applications

On donne ici quelques-unes des principales applications de la réduction de Jordan à l'analyse. Dans tout le paragraphe, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Rayon spectral et normes matricielles

Le rayon spectral d'une matrice A est défini par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Si $\|\cdot\|$ désigne une norme matricielle subordonnée, alors il est clair qu'on a l'inégalité

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Le résultat qui suit concerne une inégalité réciproque.

Proposition 7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$ un réel. Il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|_\varepsilon$ telle que*

$$\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Preuve. Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, l'inégalité annoncée est valide avec $\varepsilon = 0$: si $A = PDP^{-1}$, la norme subordonnée à la norme vectorielle suivante convient :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|x\|_0 = \|P^{-1}x\|_\infty.$$

Dans le cas général, on réduit la matrice A sous sa forme de Jordan : $A = P\mathcal{J}P^{-1}$, où $\mathcal{J}$ est composée de blocs de Jordan. On traite d'abord le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: soit J un tel bloc, supposé de taille k : il s'écrit $J = \lambda I_k + N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on introduit la matrice diagonale

$$D_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^k).$$

Il est facile de vérifier que $D_\varepsilon\, J\, D_\varepsilon^{-1} = \lambda I_k + \varepsilon N$, si bien qu'à la limite $\varepsilon \to 0$, on est ramené au cas diagonalisable. Précisément, posons

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|x\|_\varepsilon = \|D_\varepsilon x\|_\infty.$$

Alors la norme de J s'évalue aisément :

$$\|J\|_\varepsilon = \sup_{\|y\|_\varepsilon=1} \|Jy\|_\varepsilon = \sup_{\|y\|_\varepsilon\neq 0} \|D_\varepsilon^{-1}(\lambda I_k + \varepsilon N) D_\varepsilon y\|_\varepsilon = \sup_{\|D_\varepsilon y\|_\infty \neq 0} \|(\lambda I_k + \varepsilon N) D_\varepsilon y\|_\infty,$$

d'où finalement $\|J\|_\varepsilon = \|\lambda I_k + \varepsilon N\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Le cas d'un bloc de Jordan réel correspondant à deux valeurs propres complexes conjuguées se traite de manière similaire : soit un bloc K de taille $2k$ donné par

$$K = \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \cdots & 0 & \Lambda \end{pmatrix}, \quad \textit{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

On définit alors la matrice D_ε, diagonale par blocs 2×2 :

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon^n I_2 \end{pmatrix}.$$

La suite de la preuve fonctionne alors comme pour la matrice J.

On a ainsi construit, pour chaque bloc de Jordan, une norme matricielle qui répond à la question. Il suffit de les assembler pour obtenir une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. ■

Le résultat précédent s'avère très utile en analyse numérique matricielle pour l'étude de la convergence des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires. On renvoie à [3] pour plus de détails.

3.2 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

On considère ici une suite complexe (u_n) définie par une récurrence linéaire d'ordre k à coefficients constants :

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{l} \forall n \geq 0 \quad u_{n+k} = a_{k-1} u_{n+k-1} + \cdots + a_0 u_n, \\ u_0, \ldots, u_{k-1} \text{ donnés.} \end{array} \right.$$

Notre but est de donner une forme explicite pour l'expression de u_n en fonction de n. Pour cela, on se ramène tout d'abord à une récurrence d'ordre 1 : en posant $U_n = (u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}) \in \mathbb{C}^k$ pour $n \in \mathbb{N}$, le problème (5) devient

$$(6) \qquad U_{n+1} = AU_n, \quad U_0 \text{ donné},$$

où la matrice A est la matrice compagnon du polynôme $X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_{k-1} \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & & 1 & -a_0 \end{pmatrix}.$$

Le problème (6) se résout en $U_n = A^n\, U_0$, si bien que la difficulté se concentre dans le calcul des puissances de la matrice A. On va voir que la réduite de Jordan permet ce calcul : puisqu'on considère le cas complexe, A s'écrit $P\mathcal{J}P^{-1}$ où la matrice $\mathcal{J}$ n'est composée que de blocs de Jordan du type $J = \lambda I_p + N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La formule du binôme de Newton fournit, puisque N est nilpotente d'ordre p :

$$J^n = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} N^i.$$

Or, élever la matrice N à la puissance i revient à décaler la sur-diagonale de i rangs. On obtient donc

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{p-1}\lambda^{n-p+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Le nombre p est fixé (c'est la taille d'un bloc de Jordan), quant à la dépendance en n, elle peut être formulée ainsi : les coefficients de la matrice J sont du type $P(n)\lambda^n$, où P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal $p-1$.

Pour conclure l'étude de la suite (u_n), il suffit de travailler par blocs et d'appliquer la changement de base associé à la matrice P ; le résultat démontré est le suivant :

Proposition 8 *Le terme général de la suite (u_n) est de la forme*

$$u_n = \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}(A)} \lambda^n P_\lambda(n),$$

où le polynôme P_λ est de degré inférieur où égal $p-1$, si p est la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre λ.

3.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

La structure des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est très semblable à celle des suites étudiées au paragraphe précédent. En effet, considérons l'équation d'ordre 1 (à laquelle peut être réduite une équation scalaire d'ordre k)

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0. \tag{7}$$

La résolution est explicite : $u(t) = e^{tA}u_0$ et on est, cette fois-ci, ramené au calcul de l'exponentielle d'une matrice. On utilise ici encore la réduite de Jordan (complexe) de A ; le point essentiel étant le calcul explicite de l'exponentielle d'un bloc de Jordan : avec les notations du paragraphe précédent,

$$e^{tJ} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut en déduire le résultat de stabilité suivant :

Théorème 9 (i) *Les solutions du problème différentiel* (7) *sont bornées si et seulement si les valeurs propres (complexes) de A sont de partie réelle négative ou nulle et celles de partie réelle nulle sont non défectives*[1]*.*

(ii) *Les solutions du problème différentiel* (7) *tendent vers* 0 *quand t tend vers* $+\infty$ *si et seulement si les valeurs propres (complexes) de A sont de partie réelle strictement négative.*

On peut citer encore d'autres applications de la réduction de Jordan dans le cadre de l'étude des équations différentielles ordinaires, notamment le tracé des trajectoires pour les systèmes différentiels linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (la réduite de Jordan réelle est alors nécessaire) – voir [2], ou encore le théorème de linéarisation – voir [5].

Références

[1] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse. *Cours de mathématiques.* Dunod, Paris 1989.

[2] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse. *Cours de mathématiques. 3.* Dunod, Paris 1989. Compléments d'analyse. [Complements of analysis].

[3] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris 1982.

[4] X. Gourdon. *Les Maths en tte, mathmatiques pour M' : Algbre.* Ellipses, Paris 1996.

[5] M. W. Hirsch, S. Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.* Academic Press, New York-London 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60.

[1]On dit qu'un valeur propre est non-défective si elle n'est associée qu'à des blocs de Jordan de taille 1, ce qui revient à dire que la matrice restreinte au sous-espace caractéristique correspondant est diagonalisable.