

# Intégration numérique

Grégory Vial

10 mars 2003

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on cherche à approcher l'intégrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Le but de ces quelques pages est d'illustrer l'efficacité des méthodes classiques (rectangles, trapèzes, Simpson) pour diverses fonctions. On s'intéresse en particulier à l'influence de la régularité de la fonction sur la vitesse de convergence de la méthode.

## Ordre de convergence des méthodes classiques

Il est préférable d'utiliser les possibilités vectorielles de matlab pour programmer les formules d'intégration numérique (en évitant les boucles) : le temps de calcul est réduit sensiblement. Noter l'utilisation, dans les fonctions ci-dessous, de la commande `strf` pour l'évaluation de fonctions passées en argument d'entrée, ainsi que l'utilisation de `polyfit` pour effectuer la régression linéaire.

```
function I=rect(strf,a,b,n)
x=a+(b-a)/n*[0:n-1];
I=(b-a)/n*sum(feval(strf,x));
-----
function I=trap(strf,a,b,n)
x=a+(b-a)/n*[1:n-1];
I=(b-a)/n*sum(feval(strf,x))
+(b-a)/(2*n)*sum(feval(strf,[a,b]));
-----
function I=simpson(strf,a,b,n)
x=linspace(a,b,n+1);
I=(b-a)/(6*n)*(sum(feval(strf,[a,b]))
+2*sum(feval(strf,x(2:n)))
+4*sum(feval(strf,(b-a)/(2*n)
+x(1:n))));
-----
Iex=exp(1)-1;
nn=10:10:100;
Ir=[];It=[];Is=[];
for n=nn
    Ir=[Ir,abs(rect('f',0,1,n)-Iex)];
    It=[It,abs(trap('f',0,1,n)-Iex)];
    Is=[Is,abs(simpson('f',0,1,n)-Iex)];
end
plot(log(nn),log(Ir),log(nn),log(It)
,log(nn),log(Is))
grid on
ordre_r=polyfit(log(nn),log(Ir),1);
ordre_r=ordre_r(1)
ordre_t=polyfit(log(nn),log(It),1);
ordre_t=ordre_t(1)
ordre_s=polyfit(log(nn),log(Is),1);
ordre_s=ordre_s(1)
title('Logs des erreurs en fonction
du log de n')
xlabel('log(n)')
ylabel('log|Iex-In|')
legend('Rectangles','Trapèzes'
,'Simpson')
```

Le graphe de la figure 1 présente, en coordonnées logarithmiques, les courbes d'erreur  $I - I_n$  en fonction du nombre  $n$  de sous-intervalles. On retrouve les ordres de convergence théoriques :

$$(1) \quad |I - I_n| \leq \frac{C}{n^p} \quad \text{avec } p = 1, 2, 4.$$

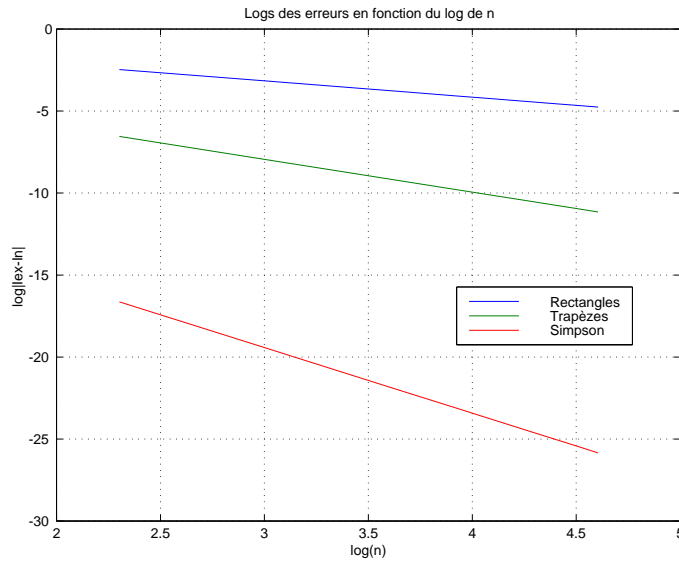


FIG. 1 – Ordres de convergence des trois méthodes.

**Remarque.** La convergence de la méthode de Simpson est beaucoup plus rapide que celle de la méthode des rectangles, mais il ne faut pas les comparer pour une même valeur de  $n$ . En effet, la méthode des rectangles nécessite  $n$  évaluations de la fonction (partie la plus coûteuse de l'algorithme), alors que la méthode de Simpson en requiert  $2n$ . Néanmoins, il est préférable d'utiliser la méthode de Simpson avec  $n$  intervalles plutôt que la méthode des rectangles avec  $2n$  intervalles, méthodes nécessitant environ le même coût de calcul.

On peut préciser la dépendance de la constante  $C$  de l'équation (1) vis-à-vis de la régularité de la fonction  $f$  :

$$\text{Méthode des rectangles :} \quad |I - I_n| \leq \frac{C}{n} \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

$$\text{Méthode des trapèzes :} \quad |I - I_n| \leq \frac{C}{n^2} \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|.$$

$$\text{Méthode de Simpson :} \quad |I - I_n| \leq \frac{C}{n^4} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)|.$$

La fonction exponentielle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1]$  donc les estimations ci-dessus sont valides. En revanche, si on considère la fonction définie par

$$g(x) = |3x^4 - 1|,$$

elle présente une discontinuité en  $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  et seule la dérivée première (au sens des distributions) est bornée. On s'attend donc à ce que la méthode des rectangles soit d'ordre 1, mais on ne peut pas utiliser les estimations concernant les deux autres méthodes.

Le graphe de gauche de la figure 2 présente les courbes d'erreur obtenues pour cette fonction (la valeur de l'intégrale exacte peut être calculée à l'aide de Maple). On observe une convergence d'ordre 1 pour la méthode des rectangles, d'ordre environ 2 pour la méthode des trapèzes et encore 2 pour la méthode de Simpson. On a donc perdu la convergence d'ordre 4 pour cette dernière.

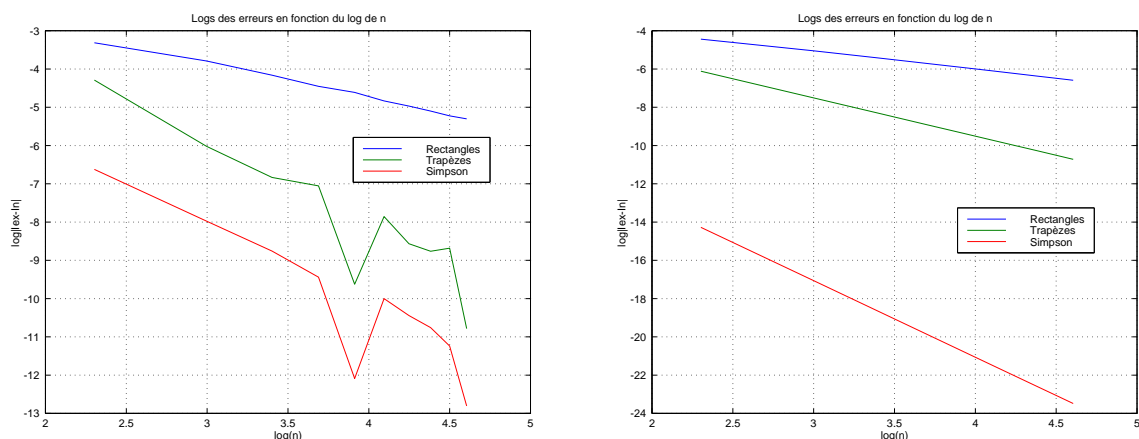


FIG. 2 – Convergence en défaut de régularité.

Le graphe de droite sur la figure 2 présente les ordres de convergence obtenus si on décompose l'intégrale en deux intégrales :

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} g(x) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^1 g(x) dx.$$

Sur chaque sous-intervalle, le fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ; on retrouve donc naturellement les ordres 1, 2 et 4.

## Intégration des fonctions périodiques

Le cas des fonctions périodiques est particulièrement intéressant : si  $f$  une fonction 1-périodique, la méthode des rectangles est particulièrement efficace pour le calcul de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

On sait en effet (voir [2]) que la convergence de la méthode des rectangles pour le calcul de l'intégrale sur une période est liée à la régularité de la fonction sur  $\mathbb{R}$ . Précisément, si  $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ , alors on a l'estimation

$$(2) \quad |I - I_n| \leq \frac{C}{n^k},$$

où  $C$  ne dépend pas de  $n$ .

La figure 3 présente les résultats obtenus pour les fonctions suivantes (définies sur  $\mathbb{R}$  par 1-périodicité).

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_1(x) = \cos x ;$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_i(x) = x^i(1-x)^i \cos x \quad (i = 2, 3, 4) ;$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_5(x) = \frac{\sin^2 2\pi x}{1 + \sin^2 2\pi x} .$$

Les régularités des fonctions  $f_i$  sont les suivantes :

$$f_1 \notin \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \quad f_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad f_3 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad f_4 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}), \quad f_5 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

Le script suivant permet de comparer les vitesses de convergence de la méthode des rectangles pour les fonctions  $f_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ).

```

c=cos(1);s=sin(1);
Iex1=s;
Iex2=-12*c+22*s-12;
Iex3=-354*c+648*s-354;
Iex4=-19680*c+36024*s-19680;
Iex5=1-1/sqrt(2);
nn=10:2:50;
In1=[];In2=[];In3=[];In4=[];In5=[];
for n=nn
    In1=[In1,abs(rect('f1',0,1,n)-Iex1)];
    In2=[In2,abs(rect('f2',0,1,n)-Iex2)];
    In3=[In3,abs(rect('f3',0,1,n)-Iex3)];
    In4=[In4,abs(rect('f4',0,1,n)-Iex4)];
    In5=[In5,abs(rect('f5',0,1,n)-Iex5)];
end
plot(log(nn),log(In1),log(nn),log(In2)
    ,log(nn),log(In3),log(nn),log(In4)
    ,log(nn),log(In5))
grid on
ordre1=polyfit(log(nn),log(In1),1);
ordre1=ordre1(1)
ordre2=polyfit(log(nn),log(In2),1);
ordre2=ordre2(1)
ordre3=polyfit(log(nn),log(In3),1);
ordre3=ordre3(1)
ordre4=polyfit(log(nn),log(In4),1);
ordre4=ordre4(1)
ordre5=polyfit(log(nn),log(In5),1);
ordre5=ordre5(1)

title('Logs des erreurs
    en fonction du log de n')
xlabel('log(n)')
ylabel('log|Iex-In|')
legend('f1','f2','f3','f4','f5')

```

Les valeurs exactes  $I_{ex1}, I_{ex2}, I_{ex3}, I_{ex4}, I_{ex5}$  ont été calculées à l'aide de Maple !

**Remarque.** Les fonctions  $f_i$  ne doivent pas être choisies polynomiales car la convergence serait trop rapide et on ne pourrait pas mettre en évidence les ordres.

La figure 3 représente les courbes d'erreur obtenues. Précisément, on obtient 1 pour  $f_1$ , 4 pour  $f_2$  et  $f_3$  et 6 pour  $f_4$ . La convergence de la méthode pour la fonction  $f_5$  est plus rapide que les puissances de  $\frac{1}{n}$ .

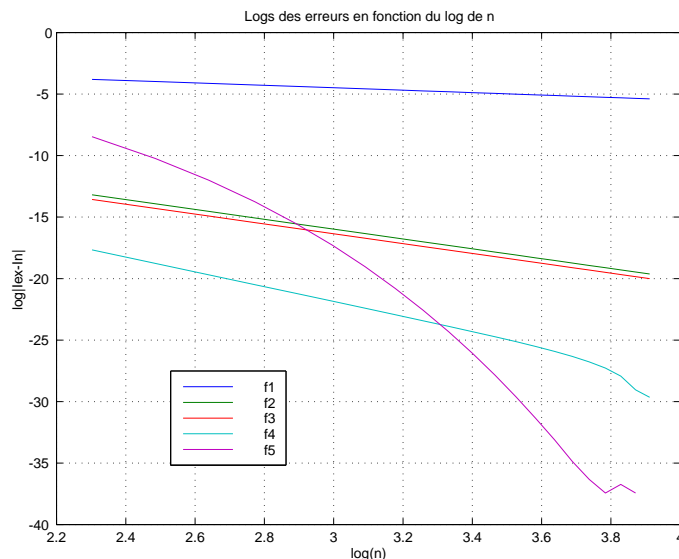


FIG. 3 – Ordres de convergence pour les fonctions périodiques.

Conformément à l'inégalité (2), la convergence est d'autant plus rapide que la fonction est régulière sur  $\mathbb{R}$ . Pour interpréter les ordres obtenus numériquement, il faut cependant préciser l'estimation (2). On peut en effet montrer un résultat plus précis (voir [1]) :

**Proposition 1** Si  $f$  vérifie  $f|_{(0,1)} \in \mathcal{C}^k(0,1)$  et

$$\forall j \leq \frac{k-1}{2}, f^{(2j-1)}(0) = f^{2j-1}(1),$$

alors

$$|I - I_n| \leq \frac{C}{n^k}.$$

Les fonctions  $f_2$  et  $f_3$  vérifient la proposition 1 pour  $k = 4$  et  $f_4$  pour  $k = 6$ ., qui sont bien les ordres observés numériquement.

## Références

- [1] M. CROUZEIX, A. L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris 1984.
- [2] E. HAIRER. Introduction à l'analyse numérique. Notes de cours, disponibles à l'adresse <http://www.unige.ch/math/folks/haier/>