Matlab à l'agreg

Un exemple de programmation

15 novembre 2010

Résumé

Le but de ces quelques pages est de proposer, au travers d'un exemple simple mais typique, une manière de programmer efficacement en vue de l'épreuve de modélisation. L'idée générale est de commencer par des codes minimaux, qui sont enrichis par la suite. À chaque étape, on teste le programme, ce qui réduit de beaucoup les risques d'erreur dans le code.

1 Contexte

On va montrer comment mettre en œuvre efficacement la méthode d'Euler pour la résolution d'équations différentielles. Pour une équation du type

$$y'(t) = f\left(t, y(t)\right),$$

elle consiste – pour un pas h donné – à construire une suite d'approximations (y_n) de la solution y aux temps $t_n = nh$, par la formule

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n).$$

L'initialisation est fournie par la condition initiale $y(0) = y_0$. Par la suite, on utilisera l'exemple modèle $y' = t - ty$ avec la condition initiale $y(0) = 2$, dont la solution exacte est donnée par $y(t) = 1 + \exp(-t^2/2)$.

La fonction matlab `f.m` correspondante est la suivante

```
function yp=f(t,y)
yp=t-t*y;
```

2 Programmation hiérarchique

Une manière efficace de programmer en temps limité consiste à écrire (et tester !) une version très épurée du code pour l'enrichir ensuite (en testant pas-à-pas chaque modification...). Le debogage est ainsi grandement facilité, et si le temps imparti pour la programmation est terminé, on est sûr de pouvoir programmer au moins une simulation qui tourne !

2.1 Le cœur du programme

L'itération de la méthode d'Euler s'écrit simplement `y=y+h*f(t,y)` si bien qu'une première version de la méthode d'Euler est la suivante

```
function y=Euler(y0,N,T)
% Version 1
y=y0;t=0;
h=T/N;
for i=1:N
  y=y+h*f(t,y);
  t=t+h;
end
```

N.B. *on a préféré passer le nombre de points N comme argument plutôt que le pas h afin d'éviter l'utilisation d'une partie entière.*

2.2 Renvoi des arguments

Bien sûr, l'appel de la fonction précédente `y=Euler(y0,N,T)` ne fournit que l'approximation finale de $y(T)$, sans les valeur intermédiaires... On y remédie en renvoyant plutôt la liste complète que la dernière valeur :

```
function liste_y=Euler(y0,N,T)
% Version 2
y=y0;liste_y=[y0];
t=0;
h=T/N;
for i=1:N
  y=y+h*f(t,y);
  t=t+h;
  liste_y=[liste_y,y];
end
```

Il peut être aussi commode que la fonction renvoie les temps successifs où sont effectuées les approximations :

```
function [liste_y,liste_t]=Euler(y0,N,T)
% Version 3
y=y0;liste_y=[y0];
t=0;liste_t=[0];
h=T/N;
for i=1:N
  y=y+h*f(t,y);
  t=t+h;
  liste_y=[liste_y,y];
  liste_t=[liste_t,t];
end
```

Il est évident que le vecteur `temps` retourné vaut aussi bien `linspace(0,T,N+1)`, mais dans le cas d'une méthode à pas variable, il est plus facile d'adapter la construction proposée.

2.3 Programme principal – appel de la fonction

On considère la fonction `Euler`, Version 3. Si on l'appelle – en ligne de commande Matlab – avec un seul argument de sortie, elle renverra le premier :

```
>> sol = Euler(2,5,2)

sol =

    2.0000    2.0000    1.8400    1.5712    1.2970    1.1069
```

Si l'on souhaite avoir accès aux deux arguments de sortie, il faut effectuer l'appel comme suit :

```
>> [sol,tps] = Euler(2,5,2)

sol =

    2.0000    2.0000    1.8400    1.5712    1.2970    1.1069


tps =

         0    0.4000    0.8000    1.2000    1.6000    2.0000
```

N.B. *La syntaxe* matlab *est quelque-peu ambigüe en ce qui concerne les arguments de sortie. En effet, les crochets* `[sol,tps]` *n'ont rien d'un assemblage matriciel, les objets* `sol` *et* `tps` *n'ont aucune raison d'avoir des tailles compatibles, ni même des types identiques.*

La possibilité de renvoyer à la fois les temps et les valeurs des approximations permet une utilisation très simple de la fonction :

```
% Parametres
T=2;
N=50;
y0=2;
% Calcul
[sol,tps]=Euler(y0,N,T);
% Graphique
plot(tps,sol)
```

2.4 Bonnes pratiques

Si l'on souhaite comparer l'approximation obtenue à la solution exacte, on peut définir une fonction `yex.m` :

```
function y=yex(t)
y=1+exp(-t.^2/2);
```

Noter l'utilisation de l'opérateur `.^` afin d'élever terme-à-terme un vecteur au carré. Elle permet un appel unique pour l'évaluation de la solution exacte sur la subdivision :

```
plot(tps,sol)
hold on
plot(tps,yex(tps),'r')
```

Par ailleurs, la méthode d'Euler programmée est indépendante de la dimension, pour peu qu'on impose aux vecteurs d'être écrits en colonne. Par exemple, pour résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)\,(3-y(t))\,, \\ y'(t) &= y(t)\,(-2+2x(t))\,, \end{cases}$$

il suffit de redéfinir la fonction `f.m` comme suit

```
function yp=f(t,y)
yp=[y(1)*(3-y(2));y(2)*(-2+2*y(1))];
```

et le programme principal suivant trace les trajectoires en fonction du temps, ainsi que dans le plan de phase :

```
% Parametres
T=10;
N=5000;
y0=[1;1];
% Calcul
[sol,tps]=Euler(y0,N,T);
% Graphique
subplot(2,1,1)
plot(tps,sol(1,:),tps,sol(2,:))
title('Solutions x(t) et y(t)')
subplot(2,1,2)
plot(sol(1,:),sol(2,:))
title('Plan de phase')
```

Insistons enfin sur le fait que la fonction `Euler` ne trace aucune courbe. Il est préférable de dissocier le post-traitement graphique du calcul.

3 Raffinements

3.1 Habillage graphique

Lors de l'oral, il est important que les graphes portent des indications qui permettent d'identifier les données : titre, légendes, axes, etc.

```
% Parametres
T=2;
N=50;
y0=2;
% Calcul
[sol,tps]=Euler(y0,N,T);
% Graphique
close all
plot(tps,sol,'LineWidth',2)
hold on
plot(tps,yex(tps),'r--','LineWidth',2)
% Titres et legendes
title('Resolution par la methode d''Euler', ...
            'FontSize',14 ,'FontWeight','bold')
xlabel('temps t','FontSize',14)
ylabel('y(t)','FontSize',14)
legend('Solution numerique','Solution exacte')
set(gca,'FontSize',14)
```

N.B. *Noter l'utilisation des trois points pour écrire sur deux lignes une commande très longue.*

3.2 Erreur d'approximation – Ordre de convergence

Si l'on souhaite mettre en évidence la convergence d'ordre 1 de la méthode d'Euler, on doit effectuer des simulations pour différentes valeurs du pas h. Il suffit d'ajouter une boucle extérieur à notre programme principal.

```
% Parametres
T=2;
y0=2;
liste_N=10:10:1000;
% Boucle sur N
liste_Err=[];
for N=liste_N
    % Calcul
    [sol,tps]=Euler(y0,N,T);
    % Evaluation de l'erreur
    erreur=norm(sol-yex(tps),'inf');
    % Mise a jour du tableau d'erreurs
    liste_Err=[liste_Err,erreur];
end
% Trace
close all
plot(liste_N,liste_Err,'o-')
title('Erreur en fonction de N')
```

```
xlabel('Nombre de points N')
ylabel('Erreur uniforme')

waitforbuttonpress

clf
loglog(liste_N,liste_Err,'o-')
title('Erreur en fonction de N (log-log)')
xlabel('Nombre de points N')
ylabel('Erreur uniforme')

waitforbuttonpress

r=polyfit(log(liste_N),log(liste_Err),1);
chaine=['Pente=',num2str(r(1))];
ax=axis;
text(100,1e-3,chaine)
```

Ce programme peut paraître long et assez complexe, mais il est le résultat de suites de programmes qui diffèrent les uns des autres de quelques lignes seulement. Comme tous les codes intermédiaires ont été testés et validés, il est peu probable que le code final contienne des erreurs.

3.3 Passage de fonction comme paramètre

On a vu plus haut qu'à chaque nouvelle équation différentielle, la fonction `f.m` devait être modifiée. Il peut être plus commode de définir une fonction par équation, et permettre un choix dans la fonction `Euler`. La fonction est passée en paramètre via une chaîne de caractère, et on utilise la commande `feval` pour l'évaluer.

```
function [liste_y,liste_t]=Euler(chaine_f,y0,N,T)
% Version 4
y=y0;liste_y=[y0];
t=0;liste_t=[0];
h=T/N;
for i=1:N
  y=y+h*feval(chaine_f,t,y);
  t=t+h;
  liste_y=[liste_y,y];
  liste_t=[liste_t,t];
end
```

L'appel s'effectue alors par

```
>> sol = Euler('f',2,5,2)

sol =

    2.0000    2.0000    1.8400    1.5712    1.2970    1.1069
```

4 Exercices

4.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton permet d'approcher la solution d'une équation

$$F(x) = 0,$$

où $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est différentiable. Partant d'un point $x^0 \in \mathbb{R}^d$, la suite (x^k) est construite par la récurrence

$$x^{k+1} = x^k - \left[F'(x^k)\right]^{-1} F(x^k).$$

Programmer une fonction matlab selon l'entête suivant

```
function x = newton (chaine_F,chaine_DF,x0,Tol,MaxIter)
```

qui renvoie une approximation de la solution x. Les arguments d'entrée sont les suivants :

- `chaine_F` : chaîne de caractère correspondant à la fonction matlab définissant la fonction F,
- `chaine_DF` : idem pour F',
- `x0` : vecteur initial $x_0 \in \mathbb{R}^d$,
- `Tol` : scalaire donnant la tolérance (critère d'arrêt sur l'incrément : $\|x^{k+1} - x^k\| <$ `Tol`),
- `MaxIter` : nombre maximal d'itérations (pour les problèmes de non-convergence).

N.B. *Pour le critère d'arrêt, on utilisera une boucle* `while`*, selon le modèle suivant :*

```
err = tol+1;
while (err>tol)&(iter<itermax)
 ...
end
```

Tester cette fonction sur l'exemple monodimensionnel simple $F(x) = e^x - e$, ainsi que sur le cas bi-dimensionnel

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

4.2 Méthode d'Euler implicite

À l'aide de la fonction précédente, programmer une fonction matlab qui met en œuvre la méthode d'Euler implicite (ou *rétrograde*), dont l'itération s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}).$$

N.B. *La fonction F qui définit le système à résoudre à chaque itération dépend de y_n et de h, on écrira une variante de la fonction* `newton` *précédente pour prendre en compte ces deux arguments supplémentaires.*

Comparer la méthode d'Euler explicite et la méthode d'Euler implicite sur le problème raide

$$y'(t) = -500y(t),$$

ainsi que sur le système de Volterra-Lotka :

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy, \\ y' &= -cy + dxy. \end{cases}$$

On pourra aussi programmer la méthode de Crank-Nicolson :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(y_n) + f(y_{n+1})\Big].$$

et estimer numériquement la période des oscillations.

4.3 Une méthode de tir

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où les fonctions $a \geq 0$ et f sont données. Pour résoudre ce problème, on introduit le problème de Cauchy dépendant du paramètre α :

$$\begin{cases} -u''_\alpha(x) + a(x)u_\alpha(x) = f(x), \\ u_\alpha(0) = 0 \text{ et } u'_\alpha(0) = \alpha, \end{cases}$$

Ce dernier problème peut être résolu à l'aide d'une méthode d'intégration des équations différentielles ordinaires vues plus haut. Il suffit de trouver α pour que $u_\alpha(1) = 0$, ce qui n'est pas difficile puisque l'application $\varphi : \alpha \mapsto u_\alpha(1)$ est affine.

Pour aller plus loin, on pourra appliquer la même méthode au problème

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u^3(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

pour lequel l'application $\varphi : \alpha \mapsto u_\alpha(1)$ est non-linéaire. On pourra alors utiliser la méthode de Newton pour résoudre le problème.