

La méthode de Newton : un exemple en dimension 2

Grégory Vial

5 mars 2003

Notre problème consiste à déterminer les points d'intersection d'un cercle avec une hyperbole. Précisément, on recherche les solutions du système d'équations polynomiales

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

La figure 1 représente, à l'aide de Maple, les deux courbes correspondantes et montre que le système (1) possède quatre solutions.

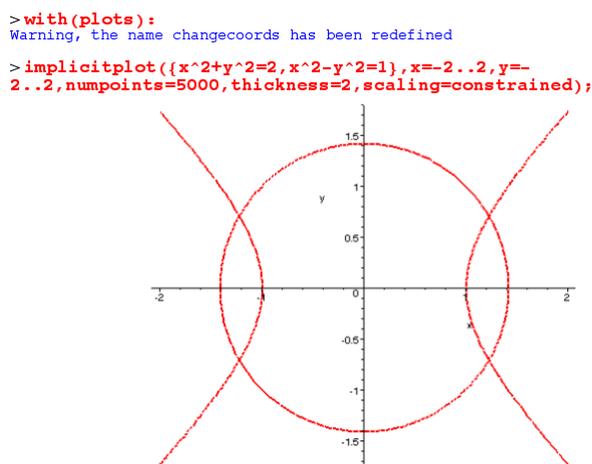


FIG. 1 – Feuille de calcul Maple.

Bien sûr il s'agit ici d'un problème académique, puisqu'on connaît explicitement les solutions :

$$x_* = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad y_* = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le but de ces quelques pages est d'étudier le comportement de la méthode de Newton pour la résolution du système (1). Pour plus de détails sur la méthode de Newton, voir [1].

1 Mise en œuvre de la méthode de Newton avec matlab

La programmation de la méthode de Newton à l'aide de matlab ne présente pas de difficulté. Quelques points méritent cependant d'être soulignés :

- les fonctions **f** et **df** sont des arguments d'entrée de la fonction **newton**. Il est donc nécessaire d'utiliser la commande **feval** pour les appeler ;

- on n'inverse pas explicitement la jacobienne, mais on résout un système linéaire (à l'aide de la commande `\`);
- la fonction `df` est définie explicitement, mais on pourrait utiliser une dérivation symbolique ou numérique.

```
function [x,nb,xx]=newton(f,df,x0,eps)
err=1;
xt=x0;x=x0;xx=[x0];
nb=0;

while (err>eps)
    nb=nb+1;
    x=x-feval(df,x)\feval(f,x);
    err=norm(x-xt);
    xt=x;
    xx=[xx,x];
end %while
```

```
function y=f(x)
y=[x(1)^2+x(2)^2-2;x(1)^2-x(2)^2-1];

function y=df(x)
y=[2*x(1),2*x(2);2*x(1),-2*x(2)];
```

La fonction `newton` renvoie la solution `x` de l'équation $f(x)=0$, le nombre d'itérations effectuées `nb` et la liste des itérés calculés `xx`; le critère d'arrêt utilisé est le contrôle de l'incrément.

Le script suivant met en œuvre la méthode de Newton sur l'exemple qui nous intéresse.

```
eps=1e-7;
x0=[3;2];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcul des coordonnées d'un point
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[x,nbiter,xx]=newton('f','df',x0,eps);
close all
t=linspace(0,2*pi,100);
clf
plot(sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t));
axis equal
hold on
t=linspace(-2,2,100);
plot(cosh(t),sinh(t));
plot(-cosh(t),sinh(t));
title('Méthode de Newton pour
l''intersection de deux courbes');
xlabel('x')
ylabel('y')
plot(xx(1,:),xx(2:,:),'r');
grid on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Mise en évidence de la convergence
% quadratique LOCALE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x0=[3;4];
[x,nbiter,xx]=newton('f','df',x0,eps);
```

```
solex=[sqrt(3/2);sqrt(2)/2];
err=max(abs(xx-solex*ones(1,nbiter+1)));
figure
plot([1:nbiter],log(err(2:nbiter+1))
./log(err(1:nbiter)));
grid on
title('Ordre de convergence de la
méthode de Newton')
xlabel('Rang')
ylabel('log(en+1)/log(en)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Etude de l'évolution du nombre d'itérés
% en fonction de la condition initiale
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
iter=[];nn=1:10;
for n=nn
    x0=[2^(-n);1];
    [x,nbiter]=newton('f','df',x0,eps);
    iter=[iter,nbiter];
end %for
figure
plot(nn,iter,'bo-');
grid on
title('Nombre d''itérations en fonction
de la condition initiale');
xlabel('nombre n tel que x0=[2^{-n};1]');
ylabel('Nombre d''itérations');
```

2 Mise en évidence de la convergence locale quadratique

La graphe de gauche de la figure 2 représente les itérés $u_k = (x_k, y_k)$ de la méthode de Newton à partir de la condition initiale $[3, 2]$. Afin de mettre en évidence la convergence locale quadratique de la méthode, on a tracé sur le graphe de droite l'évolution de la quantité

$$(2) \quad \frac{\log |u_{k+1} - u_*|}{\log |u_k - u_*|} \quad \text{en fonction de } k ;$$

elle converge effectivement vers le nombre 2. Il est toujours difficile d'illustrer ce type de convergence très rapide car on n'a que très peu d'itérés à disposition.

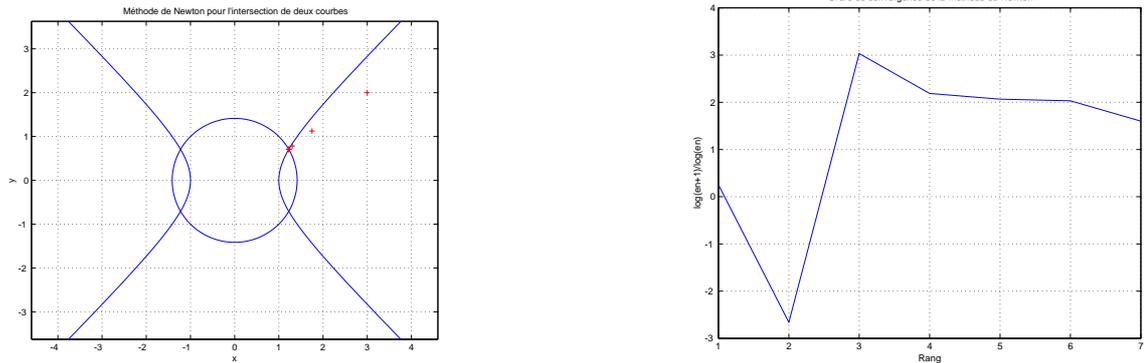


FIG. 2 – Convergence des itérés de la méthode de Newton.

3 Étude globale de convergence

Il est possible, dans l'exemple 1, de donner un résultat de convergence globale. En effet, l'itération de Newton s'écrit explicitement

$$(3) \quad u_{k+1} = \Phi(u_k) \quad \text{avec} \quad \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x^2 + 3}{4x} \\ \frac{2y^2 + 1}{4y} \end{pmatrix}.$$

Par symétrie, on peut restreindre l'étude au quart de plan $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Il est facile de vérifier que l'ensemble

$$Q = \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty \right) \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$$

est invariant par la fonction Φ et que, quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$u_1 = \Phi(u_0) \in Q.$$

En outre, pour $u_0 = (x_0, y_0) \in Q$, les suites (x_k) et (y_k) sont décroissantes. On en déduit la convergence de (u_k) vers l'unique point fixe de Φ :

$$u_k = (x_k, y_k) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Cette étude élémentaire montre que la méthode de Newton converge pour toute condition initiale $u_0 = (x_0, y_0)$ telle que $x_0 y_0 \neq 0$ (et sinon, elle n'est pas définie).

La figure 3 montre l'évolution du nombre d'itérations nécessaires à la convergence quand la condition initiale se rapproche de l'axe $x = 0$. Le graphe représente le nombre d'itérations K en fonction de l'entier n tel que $u_0 = (2^{-n}, 1)$. La courbe fait clairement apparaître la relation $K = 5 + n$.

Il est facile de commenter ce résultat à l'aide de l'étude faite plus haut : comme x_0 est proche de 0, x_1 est, d'après (3), proche de $\frac{3}{4x_0}$, valeur de l'ordre de 2^n . Toujours d'après (3), comme x_1 est grand, x_2 vaut à peu près $\frac{1}{2}x_1$. Il est donc nécessaire d'effectuer environ n itérations afin que x_k soit dans la zone de convergence quadratique de la méthode de Newton. Il n'y a plus ensuite d'influence de la condition initiale, la convergence a lieu en quelques itérations.

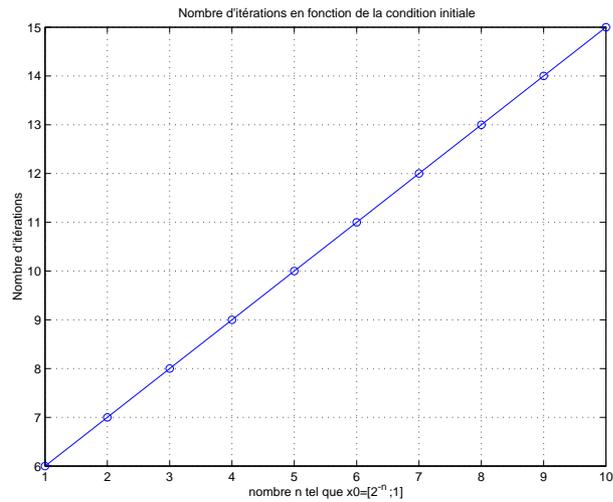


FIG. 3 – Influence de la condition initiale.

La figure 4 montre l'évolution de l'ordre de convergence, plus précisément de l'expression (2), pour $u_0 = (2^{-9}, 1)$. On y observe deux zones stationnaires :

- la première se situe entre les itérés 2 et 7, l'ordre de convergence y est proche de 1 ;
- la seconde correspond aux 4 derniers itérés, la convergence est quadratique.

On observe ainsi à la fois la convergence locale quadratique, qui n'a lieu qu'à la fin de convergence, et la convergence linéaire lors de la première phase de la méthode.

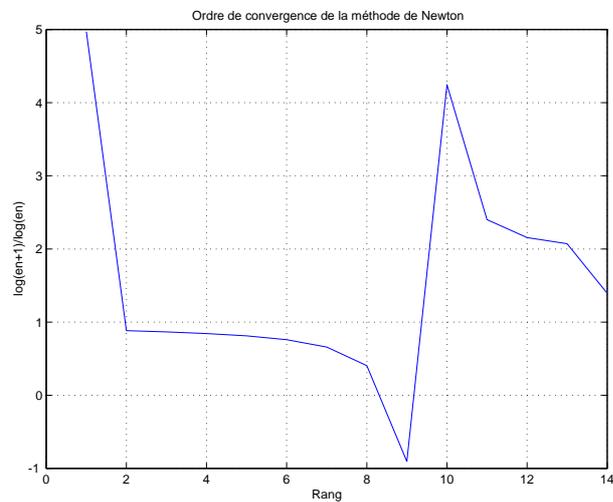


FIG. 4 – Evolution du taux de convergence.

Références

- [1] A. QUARTERONI, R. SACCO, F. SALERI. *Numerical mathematics*, volume 37 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York 2000.