Un point sur l'analyse numérique matricielle

Grégory Vial

22 janvier 2003

Le but est ici de rappeler quelques notions élémentaires de l'analyse numérique matricielle. Pour plus de détails, on se reportera, par exemple, aux ouvrages donnés en référence.

La base

• Le calcul numérique d'un déterminant ne s'effectue pas par développement selon les lignes ou les colonnes (le coût d'une telle méthode pour un déterminant de taille n est de l'ordre de $n!$), mais à l'aide de l'algorithme de Gauss ($\mathcal{O}(n^3)$ opérations élémentaires).

• On ne calcule presque jamais l'inverse d'une matrice, en revanche on résout des systèmes linéaires. Quant à l'inversion d'une matrice de taille n, elle nécessite la résolution de n systèmes linéaires (avec les vecteurs de la base canonique pour seconds membres).

• La méthode de Cramer ne doit pas être utilisée pour résoudre un système linéaire. Elle ferait appel au calcul de $n+1$ déterminants de taille n – soit un coût en $\mathcal{O}(n^4)$ – alors que la méthode de Gauss ne demande que $O(n^3)$ opérations (le calcul du déterminant de la matrice est un sous-produit de cette méthode).

• Quand on doit résoudre k systèmes linéaires avec la même matrice de taille n (seul le second membre change), appliquer la méthode de Gauss nécessite $\mathcal{O}(kn^3)$ opérations. Il est plus astucieux de décomposer A sous sa forme LU une fois pour toutes ($\mathcal{O}(n^3)$ opérations), de stocker les matrices triangulaires L et U et de résoudre $2k$ systèmes triangulaires. Le coût total de la méthode est de l'ordre $\mathcal{O}(kn^2+n^3)$, ce qui très intéressant lorsque k est grand.

• Si on veut résoudre un système linéaire sur-déterminé (plus d'équations que d'inconnues), on n'extrait pas un sous-système carré inversible en espérant que les conditions de compatibilité soient vérifiées. On utilise toutes les équations et on résout le système au sens des moindres carrés.

• Rechercher les valeurs propres d'une matrice revient à déterminer les racines de son polynôme caractéristique. Cependant c'est plutôt le contraire qui se produit en pratique : pour trouver les racines d'un polynôme, il est fréquent de former sa matrice compagnon et de lui appliquer les méthodes de recherche des valeurs propres.

Pour aller plus loin

• Quand on résout le système linéaire $Ax=b$, une petite perturbation sur b peut entraîner une erreur importante sur la solution x ; le facteur d'amplification de l'erreur est le conditionnement de la matrice A : $\|A\|\|A^{-1}\|$. En pratique, la solution perturbée a tendance à se rapprocher de la direction propre associée à la valeur propre de plus petit module. Cela explique que la méthode de la puissance inverse pour calculer la plus petite valeur propre d'une matrice fonctionne bien que le système linéaire à résoudre à chaque étape soit mal conditionné.

• Les décompositions LU et LL^T respectent le profil de la matrice de départ. Cela signifie que si la matrice A contient des 0 bien distribués, ils se retrouveront dans les matrices L, U ou R. Cette remarque permet de ne pas calculer ces coefficients dont on sait *a priori* qu'ils sont nuls et de réduire sensiblement le coût de la décomposition. On peut aussi montrer un résultat similaire, mais moins systématique, pour la décomposition QR.

Références

[1] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris 1982.

[2] P. Lascaux, R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1.* Masson, Paris, second edition 1993. Métodes directes. [Direct methods].

[3] P. Lascaux, R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 2.* Masson, Paris, second edition 1994. Méthodes itératives. [Iterative methods].

[4] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerical mathematics*, volume 37 of *Texts in Applied Mathematics.* Springer-Verlag, New York 2000.

[5] M. Schatzman. *Analyse numérique.* InterEditions, Paris 1991. Cours et exercices pour la licence. [Course and exercises for the bachelor's degree].

[6] D. Serre. *Les Matrices : Théorie et pratique.* Collection Masson sciences. Dunod, Paris 2001.

[7] J. Stoer, R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*, volume 12 of *Texts in Applied Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition 2002. Translated from the German by R. Bartels, W. Gautschi and C. Witzgall.