À propos de la méthode d'Euler implicite

G. Vial

25 mars 2011

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f\left(y(t)\right), \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathscr{C}^1$, globalement lipschitzienne, et $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Étant donné un pas de temps $h > 0$, la méthode d'Euler implicite consiste à construire la suite (y_n) par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}). \tag{2}$$

Ainsi, à chaque étape de l'algorithme on doit résoudre une équation, le plus souvent non linéaire.

Résolubilité de l'équation de récurrence

Il n'est pas évident *a priori* que la formule (2) définisse correctement l'itéré y_{n+1} à partir de la connaissance du précédent y_n. On doit s'assurer que cette équation admet une unique solution (au moins pour h assez petit). Notant g la fonction telle que

$$g(y) = y_n + hf(y),$$

il est clair que g est hL-contractante (L désigne une constante de Lipschitz pour f). Ainsi, pour $hL < 1$, le théorème du point fixe de Picard assure existence et unicité à l'équation $g(y) = y$.

Ainsi la méthode d'Euler implicite est bien définie, au moins pour h suffisamment petit.

Résolution numérique de l'équation de récurrence

La preuve qui précède suggère l'itération suivante pour déterminer y_{n+1} connaissant y_n :

$$y_{n+1}^0 = y_n \quad \text{et} \quad \forall k \geq 0, \quad y_{n+1}^{k+1} = y_n + hf(y_{n+1}^k).$$

Pour $hL < 1$, on est assuré de la convergence de la suite $(y_{n+1}^k)_k$ vers la solution y_{n+1} de l'équation (2).

Cette situation idéale masque une réalité plus délicate. En effet, un des intérêts des méthodes implicites réside dans leur bon comportement vis-à-vis des problèmes raides. Considérons en effet le problème modèle $y' = -\lambda y$ avec $\lambda \gg 1$, dont la solution s'écrit $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$. La méthode d'Euler explicite correspond à la suite

$$y_n = y_0(1 - \lambda h)^n,$$

qui peut – dans le cas où λh est supérieur à 2 – devenir négative ou non-bornée alors que la solution exacte est bornée positive... La méthode d'Euler implicite, quant à elle, s'écrit

$$y_n = y_0(1+\lambda h)^{-n},$$

qui respecte bien les deux propriétés de borne et de positivité quelle que soit la valeur du pas h.

Toutefois, dans la pratique, on n'a pas accès à l'itéré y_{n+1} mais à une approximation, par exemple par un des y_{n+1}^k définis plus haut. Dans le cas $y' = -\lambda y$, on a

$$y_{n+1}^k = \frac{1-(-h\lambda)^{k+1}}{1+h\lambda} y_n.$$

On retrouve bien sûr le fait que y_{n+1}^k converge vers y_{n+1} lorsque k tend vers l'infini et sous la condition $h\lambda < 1$. Toutefois, cette méthode ne peut pas être utilisée lorsque $h\lambda \geq 1$, situation courante dans la résolution de problèmes raides en temps long [1]. On utilise dans ce cas la méthode de Newton pour résoudre l'équation (2) (cette dernière est plus coûteuse car nécessite un calcul de différentielle et une résolution de système linéaire).

1. On a montré plus haut que la méthode d'Euler implicite était bien définie pour h assez petit, mais il arrive souvent que ce soit encore le cas pour des valeurs plus grandes du pas.