

**ORSAY**  
N° ORDRE : 3534

**UNIVERSITE DE PARIS-SUD**  
**U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THESE

présentée

Pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES**  
**DE L' UNIVERSITE PARIS XI ORSAY**

PAR

Vincent FROMION

*Sujet* : Une approche incrémentale de la robustesse non linéaire;  
Application au domaine de l'aéronautique.

*Soutenue le 23 Janvier 1995 devant la commission d'examen :*

MM.	P. BERNHARD	Président
	A. J. FOSSARD	Rapporteur
	E. IRVING	
	E. LARCHER	
	S. MONACO	Rapporteur
Mme	D. NORMAND-CYROT	
MM.	D. VIAULT	
	C. UZAN	Invité

<b>Avant propos</b>	13
---------------------	----

## **Partie I : Une approche incrémentale de la robustesse non linéaire**

<b>I <i>Introduction</i></b>	17
------------------------------	----

### **II *Normes induites, incertitudes et robustesse***

1. Introduction	23
2. Normes induites et distance entre systèmes non linéaires	26
3. Normes induites et inversibilité	29
4. Incertitudes et robustesse	
4.a <i>Incertitudes non structurées de modèle</i>	33
4.b <i>Stabilité robuste</i>	36
5. Problème multiblocs : conservatisme et multiplieurs	38

### **III *Performance asymptotique***

1. Introduction	41
2. Performance asymptotique : définition	31
3. Performance asymptotique et normes induites pondérées	43
4. Performance asymptotique robuste	45

### **IV *Norme incrémentale pondérée et commande***

1. Introduction	49
2. Le Lemme de Willems	51
3. Norme incrémentale pondérée et son lien avec le $H_\infty$ linéaire non stationnaire	53
4. Désensibilisation et commande non linéaire	56
5. Atténuation et commande non linéaire	60

<b>V Lipschitz continuité et stabilité asymptotique</b>	
1. Introduction	63
2. Lipschitz continuité et conditions initiales	63
3. Lipschitz continuité et stabilité asymptotique des points d'équilibre	66
4. Lipschitz continuité et stabilité du mouvement	69
5. Norme incrémentale, pseudo linéarisation et gains variables	71
<b>VI Une condition nécessaire et suffisante de stabilité incrémentale</b>	
1. Introduction	73
2. Cas non linéaire	73
3. Les systèmes linéaires comme exemple	78
<b>VII Synthèse incrémentale</b>	
1. Introduction	81
2. Le paradoxe de la stabilité interne	81
3. Une condition suffisante	84
<b>VIII Approximation d'objectifs incrémentaux et L.M.I.</b>	
1. Introduction	95
2. Stabilité incrémentale et stabilité quadratique	95
3. Synthèse d'un correcteur linéaire par retour d'état complet	100
4. Synthèse d'un correcteur non linéaire par retour d'état partiel	102
<b>IX Gains variables et systèmes linéaires dépendant de paramètres variant dans le temps</b>	
1. Introduction	105
2. Le fondement classique de la technique des gains variables	106
3. Des résultats de stabilité pour les systèmes <i>LPV</i>	
3.a Un résultat sur la stabilité	108
3.b Robustesse du système <i>LPV</i> par rapport à des perturbations non linéaires	113
3.c Lipschitz continuité du système perturbé	114
4. Propriétés de robustesse associées aux gains variables $H_\infty$	115
5. Quelques commentaires	118
<b>X Conclusion et perspectives</b>	121

*« One of our objective is to formulate the compensation problem as the solution to a well defined optimization problem » Zames G. [Za81].*

## I. Introduction

L'émergence de la commande  $H_\infty$  est le résultat d'un grand nombre de travaux qui s'attachèrent à préciser la nature mathématique du problème de robustesse. Ces travaux mirent en lumière l'importance de l'approche entrée/sortie et le rôle central joué par les normes induites pondérées dans le cadre de la commande robuste.

C'est Zames<sup>1</sup> finalement qui conclut ces premiers travaux en démontrant que certains problèmes de commande linéaire peuvent se ramener à des problèmes de minimisation de normes induites pondérées.

L'intérêt et l'importance de la commande  $H_\infty$  dans le cadre de la commande des systèmes linéaires, résident dans le fait qu'elle repose avant tout sur les idées classiques développées par Black, Bode ou encore Horowitz : l'approche  $H_\infty$  tient compte des objectifs de robustesse et de désensibilisation. Finalement, l'approche  $H_\infty$  peut être interprétée comme la formalisation de certains problèmes de commande linéaire en termes mathématiques.

Il semble dès lors légitime de savoir si l'on peut formuler un problème de commande non linéaire en des termes semblables ou, de façon plus directe, si l'on peut étendre l'approche  $H_\infty$  au contexte non linéaire.

Notons que ce problème n'a jamais été réellement posé dans la littérature : les articles<sup>2</sup> se rapportant à « la commande  $H_\infty$  non linéaire » s'intéressent au problème de la minimisation par bouclage du  $L_2$  gain du système non linéaire, sans réellement discuter l'intérêt d'une telle minimisation.

L'extension de l'approche proposée par Zames nécessite l'examen des concepts spécifiques attachés aux problèmes de la commande des systèmes non linéaires.

Historiquement, l'utilisation de lois de commande à contre-réaction est liée à leur capacité à :

- réduire l'effet d'incertitudes dues à la connaissance incomplète du processus à commander,
- réduire l'effet de variations du système,
- réduire l'effet de signaux exogènes agissant sur le système,
- réaliser une relation entrée/sortie spécifique,
- stabiliser des systèmes instables.

---

<sup>1</sup>[Za81]

<sup>2</sup>Les références sont assez nombreuses : [BaBe, BaHe89, Bahe92, BaHeWa, He, FoTa, Is91&92, As92a&b, VDS91&92&93] .

L'examen de ces différents problèmes, fait tout au long des quatre premiers chapitres de cette première partie, conduit à proposer une approche posant le problème de la commande non linéaire comme un problème de minimisation d'une norme incrémentale pondérée.

En premier lieu, nous examinons la robustesse en stabilité des systèmes bouclés qui conditionne, à notre avis, le reste de l'approche. Nous montrons, qu'à l'instar de l'approche linéaire, les normes induites pondérées fournissent des outils permettant de traiter le problème de la robustesse dans le contexte non linéaire. Il est spécifié que le problème de la robustesse peut aussi bien être traité à l'aide de la norme induite deux pondérée, qu'à l'aide de la norme incrémentale pondérée.

Ce premier pas réalisé, nous abordons ensuite la question générale de la « performance » des systèmes bouclés, qui recouvre trois problèmes de natures différentes :

- réalisation d'une relation entrée/sortie spécifique à l'aide du bouclage,
- désensibilisation et atténuation des signaux exogènes par bouclage,
- propriété asymptotique associée à des commandes particulières (par exemple, comportement du système vis à vis d'échelons de commande).

En fait, ce sont les deux derniers points qui nous ont amenés à étendre la commande  $H_\infty$  en termes de minimisation de norme incrémentale pondérée et non en termes de norme induite deux pondérée.

De façon plus précise, comme l'ont discuté Desoer et Wang en [DeWa80], la désensibilisation, ou encore l'atténuation de signaux exogènes, est intrinsèquement liée aux propriétés associées aux systèmes linéarisés. Ce résultat prend tout son intérêt dès lors que lui est associé un résultat d'analyse fonctionnelle, rappelé par Willems en [Wil70a], liant la norme incrémentale (i.e. la constante de Lipschitz) d'un opérateur non linéaire à la norme induite de ses linéarisations.

Ce lien permet en fait de montrer que la norme incrémentale pondérée est, à l'instar de la norme  $H_\infty$  pondérée, apte à ramener le problème de la désensibilisation optimale par bouclage au problème de la minimisation d'une norme incrémentale pondérée.

Le deuxième point en faveur de l'utilisation de la norme incrémentale est lié au comportement asymptotique, au sens de Lyapunov, du système vis à vis d'entrées particulières. En effet, nous montrons que la stabilité incrémentale assure la stabilité asymptotique des points d'équilibre associés aux commandes constantes; rappelons que, dans le cas de la norme induite deux, seule la stabilité asymptotique associée à la commande nulle peut être garantie. Enfin, pour la classe des systèmes dynamiques possédant une représentation d'état générée par des équations différentielles, nous démontrons que toutes les trajectoires du système sont asymptotiquement stables au sens de Lyapunov.

Les chapitres, I à V, ayant dégagé l'intérêt du concept de norme incrémentale pondérée dans le cadre de la commande des systèmes non linéaires. Nous développons dans les chapitres suivants des résultats spécifiques se rapportant à la norme incrémentale.

Dans le chapitre VI, une condition nécessaire et suffisante, de type algébrique assurant la stabilité incrémentale d'un système possédant une représentation d'état sous forme d'équations différentielles est donnée. Le chapitre VII est consacré au problème de la synthèse : nous évoquons tout d'abord les restrictions introduites par la notion de stabilité interne, puis donnons une condition assurant l'existence d'un correcteur (sous optimal) par retour d'informations complètes, rendant le système incrémentalement stable. Le chapitre VIII utilise les résultats récents concernant la résolution des Inégalités Matricielles Linéaires (*LMI*) pour proposer des solutions spécifiques au problème de la synthèse incrémentale. Le dernier chapitre est consacré aux gains variables qui, comme nous le verrons, permettent d'approcher une solution incrémentale.

### Système considéré dans la première partie

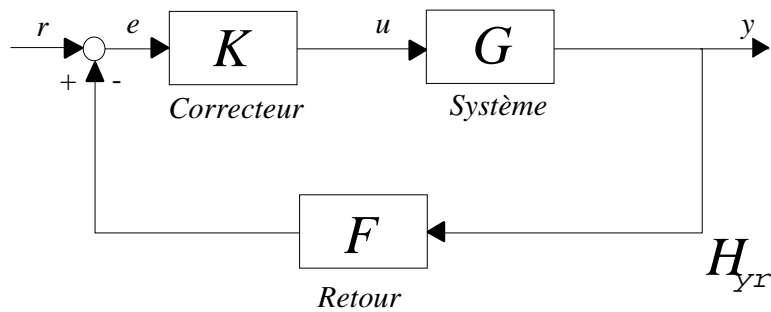


figure 1.1: système bouclé considéré.

Pour simplifier les notations nous n'indiquons pas les dimensions des entrées et des sorties des systèmes; sauf mention contraire, les résultats présentés sont multivariables.

Dans la suite de la thèse on considère le système bouclé, décrit par la figure 1.1, où  $G, K, F$  sont des opérateurs non linéaires, causaux, de  $L_2^e$  dans  $L_2^e$ , représentant respectivement, le système, le correcteur et le retour;  $r, e, u$  et  $y$ , appartiennent à  $L_2^e$  et correspondent respectivement, à la consigne d'entrée, l'erreur de poursuite, la commande et la sortie du système bouclé. La boucle fermée est supposée bien posée (i.e.  $(I + FGK)^{-1}$  est un opérateur causal de  $L_2^e$  dans  $L_2^e$ ).

Nous considérons ici, pour simplifier l'exposé, les différents opérateurs non biaisés.

## **Contenu des différents chapitres de la première partie**

### **Chapitre II : Normes induites, robustesse et incertitudes**

Le problème de la robustesse est longuement discuté dans ce chapitre. Après un bref historique sur la robustesse des systèmes linéaires, nous nous intéressons aux normes induites d'opérateurs non linéaires : nous montrons qu'elles fournissent des outils permettant de traiter le problème de la robustesse dans le contexte non linéaire. Nous généralisons, au non linéaire les théorèmes de stabilité robuste classiques en linéaire. Ceci permet de reconduire le problème de la robustesse vis à vis d'incertitudes non structurées de modèle au calcul d'une norme induite pondérée.

### **Chapitre III : Performance asymptotique**

Un premier pas vers la notion de performance : le problème de la réalisation d'une relation entrée/sortie spécifique à l'aide de bouclage est ramené à la minimisation d'une norme induite pondérée associée au système considéré.

### **Chapitre IV : Norme incrémentale pondérée et commande**

Un des résultats importants de ce travail de thèse. Nous montrons tout d'abord les liens entre contraintes incrémentales pondérées et contraintes  $H_\infty$  pondérées (non stationnaires) puis l'adéquation entre norme incrémentale pondérée et objectif de désensibilisation.

### **Chapitre V : Lipschitz continuité et stabilité asymptotique**

L'analyse des propriétés associées aux systèmes incrémentalement stables se termine par ce chapitre principalement dédié aux propriétés de stabilité au sens de Lyapunov de certaines trajectoires du système. On démontre que les points d'équilibre, associés à des commandes constantes, sont asymptotiquement stables. Un résultat plus fort peut être obtenu dès lors que l'on se restreint aux systèmes décrits par des équations différentielles : on montre, dans ce cas, que toutes les trajectoires du système sont stables au sens de Lyapunov.

Ce chapitre se conclut par la caractérisation des propriétés des systèmes linéaires tangents associés à la variété d'équilibre du système : nous démontrons qu'ils sont nécessairement stables et vérifient un critère  $H_\infty$  stationnaire.

### **Chapitre VI : Une condition nécessaire et suffisante de stabilité incrémentale**

Dans ce chapitre, nous donnons des conditions de type algébrique, permettant de conclure à la stabilité incrémentale d'opérateurs non linéaires décrits par des équations différentielles affines en la commande.

### **Chapitre VII : Synthèse incrémentale**

Ce chapitre est principalement dédié au problème de la synthèse d'un correcteur assurant la stabilité incrémentale d'un système non linéaire par retour d'informations complètes.

### **Chapitre VIII : Approximation d'objectifs incrémentaux et *L.M.I.***

On combine dans ce chapitre certains résultats concernant la stabilité quadratique, la  $L_2$  stabilité des systèmes linéaires dépendant de paramètres variant dans le temps ainsi que le lemme de Willems liant norme incrémentale et gain des linéarisations. Ceci permet d'obtenir deux méthodes de synthèse de correcteur assurant la stabilité incrémentale d'un système non linéaire, problème qui, pour être résolu, fait appel à la résolution d'Inégalités Matricielles Linéaires (*L.M.I.*). L'intérêt d'une telle approche est renforcé par les développements récents de méthodes de résolution des *L.M.I.*.

### **Chapitre IX : Gains variables et systèmes linéaires dépendant de paramètres variant dans le temps**

Ce chapitre est constitué principalement de la traduction d'un article intitulé « *Robustness and stability of LPV plants through frozen systems analysis* » accepté pour publication dans International Journal of Robust and Nonlinear Control.

Cet article est consacré à l'étude de la stabilité des systèmes Linéaires dépendant de Paramètres Variant dans le temps (*LPV*).

Le corps du chapitre est précédé d'un avant propos donnant l'articulation classiquement considérée, pour lier la stabilité des systèmes non linéaires à la stabilité de systèmes *LPV*. L'article est complété de quelques commentaires.

### **Annexe A : Notations et résultats classiques**

Cette annexe regroupe des définitions et des résultats classiques qui sont utilisés tout au long de la première partie de cette thèse.

Notons enfin, la présence d'un index des notations et des définitions à la fin de ce mémoire.



## II. Normes induites, incertitudes et robustesse

« While no nominal design model  $G(s)$  can emulate a physical plant perfectly, it is clear that some models do so with greater fidelity than others. Hence, no nominal model should be considered complete without some assessment of its errors. » Doyle et Stein [DoSt]

### 1. Introduction

De façon classique on dit qu'une *loi de commande est robuste*<sup>1</sup> en stabilité si elle stabilise, à « coût sûr », le système qu'elle commande. La vérification de la robustesse d'un système commandé présente de nombreuses difficultés. La première est liée à la modélisation mathématique du processus physique. En effet, la définition implique que la robustesse d'une loi de commande ne peut être garantie que sous l'hypothèse de l'appartenance effective du processus réel à l'ensemble des modèles mathématiques choisis pour le représenter. Par ailleurs, l'idée selon laquelle on puisse représenter le système réel, de façon parfaite, par un unique opérateur, est bien évidemment illusoire ([DoSt], [Ho76]). Ces considérations mènent à introduire la notion de famille de modèles. La description mathématique de telles familles de modèles a donné lieu à de nombreux travaux qui précisent la nature mathématique du problème de la robustesse ([Saf80], [DoSt],[Za81]) et démontrent le rôle central joué par les outils se rapportant à la stabilité entrée/sortie et tout particulièrement les normes induites d'opérateurs.

Ce n'est que récemment que l'approche entrée/sortie fût utilisée dans le cadre de la robustesse des systèmes linéaires.<sup>2</sup> Cette « redécouverte » est le résultat et la conséquence des problèmes qui se posèrent pour retrouver les propriétés de robustesse sectorielles associées aux correcteurs linéaires quadratiques par retour d'état complet ( $LQ$ ), par des correcteurs linéaires quadratiques par retour de sortie ( $LQG$ ). Ceci, partiellement résolu à l'aide de la méthode  $LQG/LTR$ , fût le point de départ d'une quantité de travaux intéressés à préciser et à éclaircir, non seulement les buts, mais aussi le cadre mathématique associé aux problèmes de la commande des systèmes linéaires multivariables.<sup>3</sup> Les problématiques se rapportant à la robustesse des systèmes linéaires peuvent se résumer par une liste de questions :

- Comment représenter les incertitudes de modèle inhérentes à toute modélisation ?
- Comment garantir la robustesse en stabilité de la loi de commande, vis à vis de ces incertitudes ?

---

<sup>1</sup>De façon plus générale, on dira qu'une loi de commande est robuste vis à vis d'une propriété donnée si cette propriété est vérifiée à « coût sûr » par le système qu'elle commande.

<sup>2</sup> En fait Zames l'envisage dans l'article de 1966 ([Za66a]), mais cette idée ne fut reprise que récemment.

<sup>3</sup> Numéro spécial IEEE, Vol 26, 1981 où se trouvent de nombreuses références se rapportant à la commande des systèmes linéaires multivariables (voir [DoSt], [SaLaHa], [PoEdMa],...), qui fût le point de départ de l'Automatique communément appelée « néo classique ».

- Comment prendre en compte explicitement les limitations introduites par ces incertitudes dans la synthèse de loi de commande ?
- Comment formaliser mathématiquement ces questions ?

Deux voies de recherche furent suivies : l'une, à partir du  $LQ$  et de ces marges sectorielles ([Saf80]); l'autre, à partir des travaux d'Horowitz et le critère de Nyquist multivariable ([Do79,DoSt]). C'est finalement Zames qui clarifia définitivement la nature mathématique du problème en le posant en termes de norme induite pondérée ([Za81]).

Précisons quelques contributions qui semblent avoir tout particulièrement influencé l'approche actuelle du problème de la robustesse linéaire.

- En [Saf80], Safonov montre que l'on peut déduire la stabilité d'un système bouclé en garantissant la séparation topologique des graphes d'opérateurs le constituant. Ce résultat met en exergue la nature profondément topologique de la plupart des critères de stabilité connus<sup>4</sup> et élargit les résultats obtenus par Willems ([Wi70a]). Par ailleurs, il particularise le résultat précédent dans le cadre linéaire en considérant les incertitudes de modèle bornées par des fonctions de transfert, les incertitudes appartiennent à des cônes dont le centre et le rayon dépendent de la fréquence. La prise en compte de la performance n'est pas abordée dans ce contexte.

- En [DoSt], Doyle et Stein généralisent au contexte multivariable les travaux de Bode ([Bo45]) et Horowitz, à travers l'introduction de la notion d'incertitudes non structurées de modèle et l'utilisation des valeurs singulières de transfert.<sup>5</sup> Le système est dorénavant modélisé par une famille de fonctions de transfert. Le problème de la stabilité de la famille de modèles est étudié à l'aide du critère de Nyquist multivariable [Do79]. Ceci conduit à vérifier la non-singularité d'une infinité de matrices complexes.<sup>6</sup> Doyle et Stein posent le problème de la synthèse de correcteurs robustes et performants en termes de recouvrement de transferts souhaités a priori.

- En [Za81], Zames s'intéresse au problème de la synthèse de correcteurs robustes et performants. Les incertitudes de modèle sont maintenant représentées à l'aide de boules ouvertes de systèmes dans la topologie induite par une norme induite pondérée. La robustesse du système est prouvée à l'aide du théorème du faible gain. Par ailleurs, il montre que les objectifs de désensibilisation peuvent être traités, eux aussi, en termes de norme induite pondérée.

---

<sup>4</sup>La plupart des critères de stabilité connus (par exemple critère de Nyquist, faible gain, passivité, Lyapunov ) peuvent être considérés comme des corollaires du Théorème 2.1 en [Saf80].

<sup>5</sup>Déjà utilisé explicitement par Sandberg [San63] dans le cadre du problème la robustesse en stabilité vis à vis de non linéarités sans mémoire et dans le cadre des travaux concernant la désensibilisation par bouclage des systèmes multivariables [CrPe,Po].

- En [ZaEl]. Zames et El Sakkary introduisent la « *gap metric* » dans le cadre des systèmes linéaires invariants ([El]). Le problème de la robustesse est reconduit, de façon explicite, à un problème de distance entre graphes d'opérateurs. La « *gap metric* » définit une distance entre systèmes linéaires invariants que les systèmes comparés soient stables, instables ou encore stable et instable. Cette approche élimine les limitations introduites par l'utilisation de la distance induite par la norme  $H_\infty$ <sup>7</sup> qui ne définit une distance qu'entre systèmes stables.<sup>8</sup>

- Doyle ([Do82]) et Safonov<sup>9</sup>([Saf82]), de façon parallèle, généralisent et systématisent la description des incertitudes de modèle non structurées. Ils introduisent les valeurs singulières structurées ( $\mu$  ou  $k_m$  analyse) .

Ces travaux et bien d'autres permirent de préciser la nature mathématique du problème de robustesse et mirent en lumière l'importance de l'approche entrée/sortie et le rôle central joué par les normes induites pondérées. En effet, les normes induites fournissent des outils permettant non seulement de prendre en compte la nature topologique du problème de la robustesse mais aussi de traiter le problème de la stabilité. L'approche actuelle reste néanmoins un compromis entre son aptitude à représenter avec fidélité le modèle réel (i.e. sa complexité) et les outils mathématiques permettant de l'étudier.

Nous rappelons ci dessous quelques résultats plus spécifiques concernant la stabilité entrée/sortie.

Historiquement, l'approche entrée/sortie repose sur l'idée que l'analyse fonctionnelle et tout particulièrement le théorème du Point Fixe, peuvent fournir de nouveaux outils à l'Automatique [Za63]. Elle fût principalement développée durant les années 60, par Sandberg<sup>10</sup> et Zames, et se révéla effectivement fructueuse puisqu'elle conduit au célèbre théorème du Faible Gain et ses nombreux corollaires. A la fin des années 60, Willems approfondit cette approche ([Wi69a&70a]) et montre le lien étroit existant entre la stabilité entrée/sortie et le problème général de l'inversion de certains opérateurs causaux. Par ailleurs, il démontre que

---

<sup>6</sup>Doyle et Stein notent le lien existant entre leur critère de stabilité et le critère proposé par Safonov (Théorème de Parseval)[DoSt]. Leur approche est avant tout fréquentielle.

<sup>7</sup>El-Sakkary démontre que les topologies induites par la norme  $H_\infty$  et la « *gap metric* » sont équivalentes si l'on considère uniquement les systèmes stables [El].

<sup>8</sup>La distance entre l'intégrateur  $s^{-1}$  et le quasi-intégrateur instable  $(s-\epsilon)^{-1}$  n'est pas définie si l'on utilise la distance induite par la norme  $H_\infty$ . Il est par ailleurs évident que ces deux systèmes sont proches du point de vue de la commande [Vi84, Vi85].

<sup>9</sup>Safonov étudie le problème de la robustesse en partant d'une approche faible gain et en utilisant les outils se rapportant à la stabilité entrée/sortie (multiplieurs,...) alors que Doyle part du critère de Nyquist multivariable, le menant à étudier le problème de la non singularité de matrices complexes vis à vis de perturbations structurées de type réel ou complexe.

<sup>10</sup>Il a introduit les concepts se rapportant à la troncature temporelle et aux espaces étendus qui sont sans doute les notions les plus importantes dans le cadre de la stabilité des systèmes bouclés. Seules ces notions permettent de ne pas présupposer la stabilité du système bouclé.

la plupart des résultats concernant la stabilité entrée/sortie peuvent être vus comme une conséquence directe de la structure d'algèbre de Banach associée à l'ensemble des systèmes causaux et bornés (ou encore Lipschitz continus).

Notons que ces nombreux travaux n'ont jamais réellement posé le problème de la robustesse dans un autre cadre que celui de la robustesse en stabilité de systèmes soumis à des perturbations non linéaires sans mémoire, ou encore, linéaires variant dans le temps.<sup>11</sup>

Enfin, nous rappelons l'existence de nombreux travaux précisant les liens existant entre la stabilité entrée/sortie et la stabilité au sens de Lyapunov.<sup>12</sup> Les premiers ponts entre ces deux approches sont anciens et trouvent leurs sources dans les travaux concernant la conjecture Azeirman et le problème de Luré (lien entre le critère de Popov et le lemme réel positif, voir [Le]). Les résultats spécifiques obtenus tout au long des années sont unifiés et généralisés en [Wi71a]; l'auteur montre que le point d'équilibre, associé à la commande nulle, d'un système  $L_2$  gain stable est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Par ailleurs, la problématique inverse est traitée et des contre exemples illustrent le fait que la stabilité asymptotique n'est pas une condition suffisante pour assurer la stabilité entrée/sortie d'un système non linéaire (voir par exemple [So]). En [MoHi80], les auteurs montrent que l'implication a lieu lorsque les systèmes non linéaires sont exponentiellement stables (voir aussi [ViVa] et [Sha]).

La suite de ce chapitre est consacrée à démontrer que la robustesse des systèmes non linéaires peut, à l'instar du cadre linéaire, être abordée à l'aide de normes induites d'opérateurs. En fait, nous montrons qu'elles fournissent, dans le contexte non linéaire, des outils permettant non seulement de prendre en compte la nature topologique du problème de la robustesse (§2) mais aussi de traiter le problème de la stabilité (§3). Le paragraphe 4 est consacré à la description et à l'obtention des incertitudes de modèle associées au système considéré et montre que l'on peut ramener le problème de la robustesse en stabilité à la caractérisation d'une norme induite pondérée. Enfin, Le paragraphe 5 s'intéresse au problème de la robustesse des systèmes soumis à des perturbations structurées de modèle et à la diminution du conservatisme du théorème du faible gain à travers l'emploi de multiplieurs particuliers.

## **2. Normes induites et distance entre systèmes non linéaires**

Comme nous l'avons rappelé dans l'appendice A.4, l'ensemble des systèmes causaux et bornés (Lipschitz continus) est un espace normé. La distance induite par cette norme fait de

---

<sup>11</sup>On se doit de noter la référence [MaHo] de 1977, où le problème de la synthèse de correcteur robuste est non seulement posé mais aussi résolu dans le cadre de la commande décentralisée.

<sup>12</sup>Comme le fait remarquer Willems, la stabilité au sens de Lyapunov a été introduite avant tout pour étudier la stabilité des systèmes mécaniques (voir les travaux de Poincaré et de Lyapunov) où la notion de commande n'apparaît pas. Par ailleurs, il note que dans le contexte entrée/sortie, la stabilité au sens de Lyapunov peut être interprétée comme la garantie de la stabilité du système vis à vis d'entrées impulsives [Wi70a].

l'ensemble des systèmes bornés un espace topologique. Précisons cela, en considérant la fonction  $\delta: B(U, Y) \times B(U, Y) \rightarrow R^+$  définie par la relation :

$$\delta(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|_i = \sup_{\substack{u \in U \\ u \neq 0}} \frac{\|P_1 u - P_2 u\|_Y}{\|u\|_U} \quad (2.1)$$

et énonçons le résultat suivant :

**Propriété 2.1** [Sch]

*La fonction  $\delta$  définit une distance sur,  $B(U, Y)$ , l'ensemble des systèmes causaux et bornés.*

Cette distance permet d'introduire la notion de boule ouverte de systèmes, centrée sur  $P$  et de rayon  $r$  qui nous permet de définir les parties ouvertes de  $B(U, Y)$  :

$$B_\delta(P, r) = \{Q \in B(U, Y) \mid \delta(P, Q) < r\}$$

Rappelons ici qu'une partie  $V$  est appelée ouverte si, toutes les fois qu'elle contient un point de  $B(U, Y)$ , elle contient au moins une boule ouverte, de rayon strictement positif, ayant pour centre ce point; (i.e.  $\forall P \in V \exists \rho > 0 \mid B_\delta(P, \rho) \subset V$ ).

Cette définition fait de  $B(U, Y)$  un espace topologique.

Remarques :

(i) - Si  $U = L_2^m$  et  $Y = L_2^p$ , on peut interpréter la distance  $\delta$ , comme le gain énergétique maximum possible entre les entrées et les sorties du système représenté par la figure 2.1.

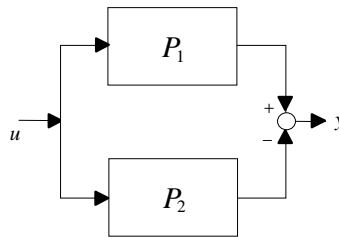


figure 2.1

Cette mesure assure que, quelque soit  $u \in L_2^m$ , on a

$$\sqrt{\int_0^\infty \|y(t)\|^2 dt} \leq \delta(P_1, P_2) \sqrt{\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt}$$

(ii) - Pour des raisons pratiques,<sup>13</sup> on peut être amené à modifier cette distance à travers l'utilisation de pondérations. On utilise pour cela deux opérateurs,  $W_e$  et  $W_s$  appartenant à  $B$ <sup>14</sup> ( $W_e$  étant supposé inversible dans  $B$ ) et on définit la nouvelle fonction :

$$\delta_{W_s, W_e}(P_1, P_2) = \sup_{\substack{u \in U \\ u \neq 0}} \frac{\|W_s(P_1 u - P_2 u)\|_Y}{\|W_e u\|_U} = \|W_s(P_1 - P_2)W_e^{-1}\|_i$$

qui s'interprète comme le gain maximal associé au système augmenté décrit par la figure 2.2.

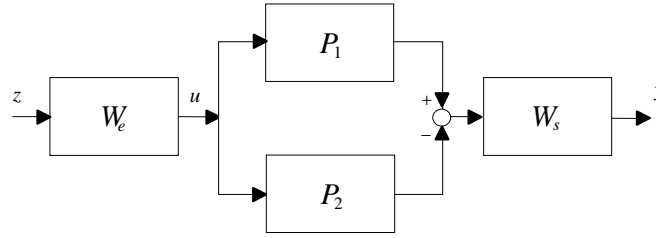


figure 2.2

$\delta_{W_s, W_e}$  définit une distance sur  $B$ . Notons que si  $W_s$  est inversible dans  $B$ , alors les topologies induites par  $\delta$  et  $\delta_{W_s, W_e}$  sont équivalentes. On peut en effet, sans difficulté, démontrer que les deux implications suivantes sont satisfaites pour tout  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} - \delta_{W_s, W_e}(P_1, P_2) < \frac{\varepsilon}{\rho} &\Rightarrow \delta(P_1, P_2) < \varepsilon \\ - \delta(P_1, P_2) < \frac{\varepsilon}{\nu} &\Rightarrow \delta_{W_s, W_e}(P_1, P_2) < \varepsilon \end{aligned}$$

où  $\rho = \|W_e\|_i \|W_s^{-1}\|_i$  et  $\nu = \|W_s\|_i \|W_e^{-1}\|_i$ .

On définit de la même façon la distance induite par la norme incrémentale :

$$\delta_{\Delta}(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|_{\Delta} = \sup_{\substack{u_1, u_2 \in U \\ u_1 - u_2 \neq 0}} \frac{\|(P_1 - P_2)u_1 - (P_1 - P_2)u_2\|_Y}{\|u_1 - u_2\|_U} \quad (2.2)$$

**Propriété 2.2 :**

La fonction  $\delta_{\Delta}$  définit une distance sur  $\tilde{B}(U, Y)$ , l'ensemble des systèmes causaux, non biaisés et de gain incrémental fini.

<sup>13</sup>voir II.3

Remarque :

- Ce résultat est assuré car les opérateurs de  $\tilde{B}(U, Y)$  sont supposés non biaisés. Si cette hypothèse est levée,  $\delta_\Delta$  n'est plus qu'une pseudo-distance car  $\|\cdot\|_\Delta$  est alors une semi-norme (i.e.  $P = cst \neq 0 \Rightarrow \|P\|_\Delta = 0$ ).

On voit ici qu'à l'instar du cadre linéaire, les normes induites permettent de définir une distance entre systèmes non linéaires et introduisent, de façon naturelle, une topologie<sup>15</sup> dans l'espace des systèmes stables.

La définition d'une distance sur un ensemble d'opérateurs plus vaste (instables) reste un problème difficile. Notons l'introduction récente du concept de « *gap metric* » différentielle sur l'ensemble des systèmes non linéaires Fréchet dérivables<sup>16</sup> qui est une extension possible de la «*gap metric*» définie en linéaire ([Ge], voir aussi [DoGeSm]).

Notons que, du point de vue pratique, l'appartenance des différents systèmes à  $B(\tilde{B})$  n'est requise que si l'on doit construire l'incertitude de modèle à partir du calcul de la distance entre différents systèmes. Comme nous le verrons dans le paragraphe 4, on peut, dans de nombreux cas, construire les incertitudes de façon directe, sans recourir au moindre calcul de distance entre systèmes.

Enfin, remarquons que l'utilisation d'incertitudes de type inverse permet de décrire une famille de modèles contenant des systèmes stables et instables, uniquement à partir d'opérateurs stables (voir II.4).

### 3. Normes induites et inversibilité

Dans ce paragraphe, nous montrons que les normes induites sont des outils naturels dans le cadre du problème de la robustesse en stabilité. Pour cela, nous considérons que le système  $P$  est bouclé par le correcteur  $K$  et supposons que la boucle fermée est initialement incrémentalement stable. On cherche alors des conditions assurant la stabilité incrémentale de la boucle fermée, lorsque  $P$  est perturbé et devient égal à  $\tilde{P}$  (figure 3.1b).

---

<sup>14</sup>On élimine les espaces d'entrée et de sortie pour simplifier les notations.

<sup>15</sup>Notons que Willems avait introduit des concepts topologiques dans le cadre du problème de la réalisabilité des systèmes et du problème du « bien posé ». Par ailleurs remarquons qu'il a insisté sur le fait qu'il est préférable d'utiliser la topologie forte (i.e. la plus fine) et non la topologie (uniforme) induite par la norme incrémentale. En effet, cette dernière peut créer des discontinuités fictives (problème des dynamiques rapides et des faibles retards purs). Voir à ce sujet, dans le cadre linéaire, l'article de Georgious et Smith dans lequel la notion de  $w$  stabilité est introduite [GeSm, Th. 5].

<sup>16</sup>Voir appendice A.5.

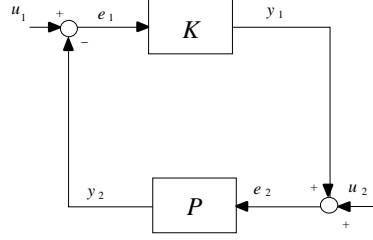


figure 3.1a : système bouclé nominal.

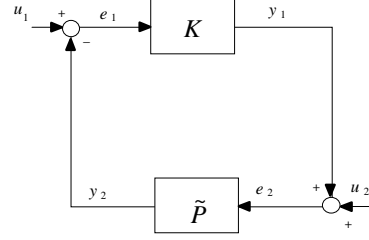


figure 3.1b : système bouclé perturbé.

Par hypothèse que la boucle fermée de la figure 3.1a est incrémentalement stable, i.e.

$$\|(I + H)^{-1}\|_{\Delta} < \infty \quad (3.1)$$

où  $H$  est l'opérateur défini de  $U_{1_e} \times U_{2_e}$  dans lui même par

$$H(e_1, e_2) \stackrel{\Delta}{=} (Pe_2, -Ke_1)$$

Une condition similaire pour le système perturbé est

$$\|(I + \tilde{H})^{-1}\|_{\Delta} < \infty \quad (3.2)$$

où  $\tilde{H}$  est l'opérateur défini de  $U_{1_e} \times U_{2_e}$  dans lui même par

$$\tilde{H}(e_1, e_2) \stackrel{\Delta}{=} (\tilde{P}e_2, -Ke_1)$$

Garantir la stabilité du système nominal, ou perturbé, est donc de même nature du point de vue mathématique. En fait, au vu du paragraphe précédent, nous reformulons notre problème et cherchons le rayon de la boule de systèmes, centrée sur  $P$ , stabilisée par  $K$ . Pour cela, nous supposons, dans une première approche, que  $P$ ,  $\tilde{P}$  et  $K$  sont non biaisés et incrémentalement stables. Grâce au Th. A.13.1 on obtient des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité incrémentale dépendant uniquement du produit  $PK$  ou  $\tilde{P}K$  :

$$\|(I + H)^{-1}\|_{\Delta} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \|(I + PK)^{-1}\|_{\Delta} < \infty \quad (3.3)$$

$$\|(I + \tilde{H})^{-1}\|_{\Delta} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \|(I + \tilde{P}K)^{-1}\|_{\Delta} < \infty \quad (3.4)$$

Posons

$$\Delta = \tilde{P} - P \quad (3.5)$$

et rappelons que la composition des opérateurs est distributive à gauche.

$$\tilde{P}K = (P + \Delta)K = PK + \Delta K \quad (3.6)$$

Par ailleurs, le système bouclé nominal étant bien posé (i.e.  $(I + PK)^{-1}$  existe), on a :

$$I + \tilde{P}K = (I + PK)(I + (I + PK)^{-1}\Delta K) \quad (3.7)$$

ce qui implique que la boucle fermée perturbée est incrémentalement stable si et seulement si :

$$\|(I + PK)^{-1}(I + (I + PK)^{-1}\Delta K)^{-1}\|_{\Delta} < \infty \quad (3.8)$$

Par ailleurs, on a l'inégalité :



$$\|(I + (I + PK)^{-1} \Delta K)^{-1}\|_{\Delta} \leq \|I + PK\|_{\Delta} \|(I + PK)^{-1} (I + (I + PK)^{-1} \Delta K)^{-1}\|_{\Delta}$$

En remarquant que  $(I + PK)^{-1}$  est une bijection de  $U_1$  dans  $U_1$ , on en déduit que le système perturbé est incrémentalement stable si et seulement si

$$\|(I + (I + PK)^{-1} \Delta K)^{-1}\|_{\Delta} < \infty$$

ou bien encore, en utilisant à nouveau le Th. A.13.1 que

$$\|(I + K(I + PK)^{-1} \Delta)^{-1}\|_{\Delta} < \infty \quad (3.9)$$

L'étude de la stabilité du système perturbé revient donc à chercher une condition assurant l'inversibilité de l'opérateur  $I + K(I + PK)^{-1} \Delta$  sur  $\tilde{B}(U_2, U_2)$ .

L'utilisation de la norme incrémentale permet de donner une condition suffisante d'inversibilité en rappelant simplement que :

$$\|(I + F)^{-1}\|_{\Delta} \leq \frac{1}{1 - \|F\|_{\Delta}} \quad (3.10)$$

et donc, que l'inégalité (3.9) est satisfaite si

$$\|K(I + PK)^{-1} \Delta\|_{\Delta} < 1 \quad (3.11)$$

On utilise en fait une condition plus forte ne faisant intervenir que la norme de  $\Delta$  et celle de la boucle fermée nominale :

$$\|K(I + PK)^{-1}\|_{\Delta} \|\Delta\|_{\Delta} < 1 \quad (3.12)$$

interprétée ici comme une condition assurant la stabilité de la boucle fermée, perturbée par tout système  $\tilde{P}$ , appartenant à une boule ouverte de systèmes, centrée sur le système nominal  $P$  et de rayon  $r = \left(\|K(I + PK)^{-1}\|_{\Delta}\right)^{-1}$  :

$$\forall \tilde{P} \in B_{\delta_{\Delta}} \left( P, \left(\|K(I + PK)^{-1}\|_{\Delta}\right)^{-1} \right) \text{ on a } \|(I + \tilde{H})^{-1}\|_{\Delta} < \infty$$

La condition (3.12) est une condition de type, faible gain incrémental, appliquée à la boucle fermée constituée de l'opérateur  $M = K(I + PK)^{-1}$  et de  $\Delta$  (figure 3.3).

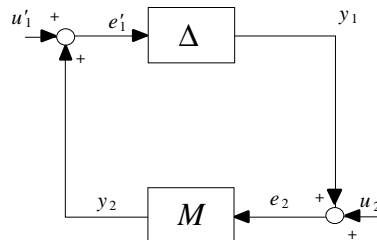
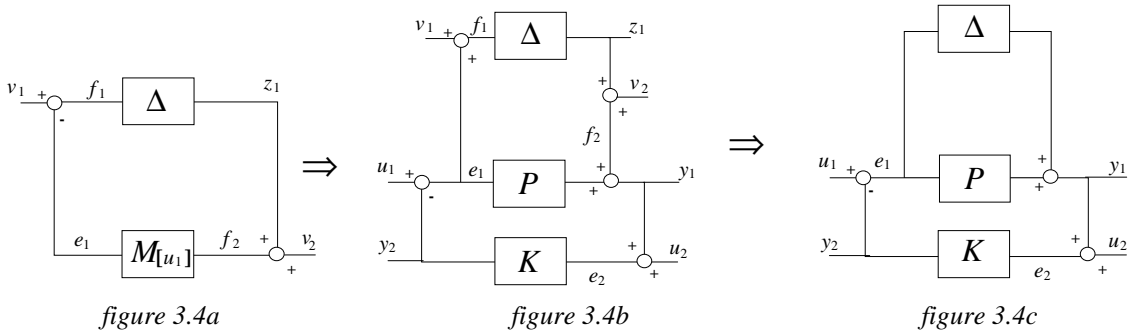


figure 3.3

Cette condition de type faible gain doit être modifiée dès lors que l'on ne suppose plus  $P$ ,  $K$  initialement stables. Ceci est lié à la non équivalence entre la stabilité de la figure 3.3, et celle de la figure 3.4c. En effet, la condition (3.12) assure la stabilité incrémentale entre les entrée

$v_1, v_2$  et les sorties  $f_1, f_2, z_1, e_1$  mais pas, entre les entrées  $v_1, v_2, u_1$  et ces mêmes sorties (figure 3.4b).

Pour obtenir une condition suffisante de stabilité du système perturbé, on doit démontrer préalablement la stabilité de la boucle fermée de la figure 3.4b, qui implique nécessairement la stabilité de la boucle fermée de la figure 3.4c.



Pour cela, on associe à la boucle fermée nominale (figure 3.1a), l'opérateur  $M$ , qui a pour entrée  $u = \epsilon(u_1, u_2)^T$  et pour sortie  $y_2$  (i.e.  $y_2 = M(u_1, u_2)$ ).

On peut alors énoncer un corollaire du théorème du faible gain incrémental<sup>17</sup> :

**Corollaire 3.1**

Si  $M$  et  $\Delta$  sont des opérateurs incrémentalement stables et si  $\tilde{\gamma}(M)\tilde{\gamma}(\Delta) < 1$  alors le système bouclé de la figure 3.1b est incrémentalement stable.

*Démonstration : Annexe B1.*

Remarque :

- Une démarche identique peut être suivie sur l'ensemble des systèmes bornés (i.e.  $B(U, Y)$ ).

Dans cette première partie ont été discutés les propriétés mathématiques et l'intérêt des normes induites dans le cadre de la robustesse des systèmes non linéaires. Dans ce qui suit nous montrons que les normes induites peuvent en fait intégrer de façon assez fine une connaissance a priori des erreurs de modèle.

**4. Incertitude et robustesse**

Dans ce paragraphe, nous étendons au cadre non linéaire les concepts, maintenant classiques en linéaire, concernant la description des incertitudes non structurées de modèles. La première

<sup>17</sup>Voir appendice A.14.

partie de ce paragraphe justifie cette extension, la seconde donne des conditions suffisantes assurant la robustesse en stabilité du système perturbé.

**a. Incertitudes non structurées de modèle**

Dans de nombreux cas les erreurs de modèle peuvent être construites sans recourir à un calcul de distance entre systèmes. Nous explicitons ceci à travers un exemple.

Soit le schéma :

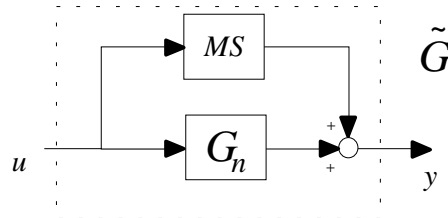


figure 4.1

où le processus physique  $\tilde{G}$  est décrit comme la mise en parallèle d'un système mécanique (rigide) et d'un mode souple.  $\tilde{G}$  est donc représenté comme la somme de deux opérateurs :

$$\tilde{G} = G_n + MS$$

Nous supposons ici que le mode souple n'est connu qu'à travers un gabarit de gain (i.e.  $|MS(j\omega)| < |W_3(j\omega)| \forall \omega$ ). On peut ainsi tenir compte des incertitudes sur sa pulsation propre et son amortissement.<sup>18</sup>

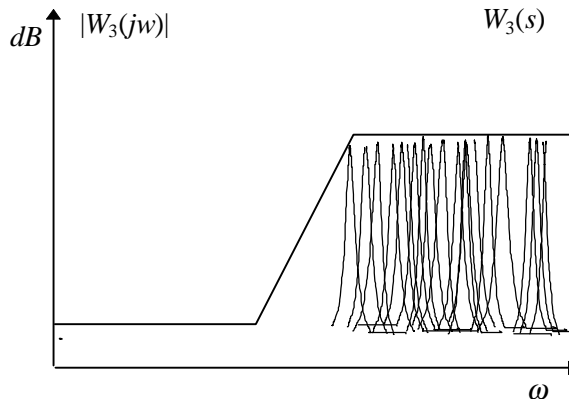


figure 4.2 : famille des modes souples possibles et gabarit fréquentiel associé.

La condition sur le gain du mode souple assure qu'il appartient nécessairement à l'ensemble :

$$E_{MS} \equiv \{ W_3 \Delta \mid \|\Delta\|_\infty < 1 \}$$

où  $\Delta$  est un opérateur linéaire invariant de  $L_2$  dans  $L_2$ .

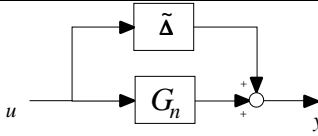
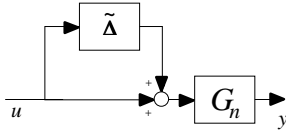
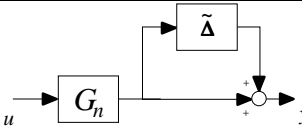
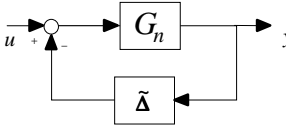
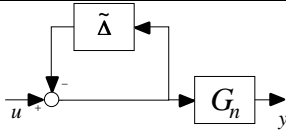
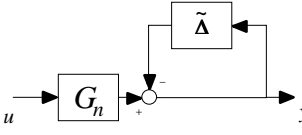
Le processus physique est maintenant représenté par une famille (un ensemble) de modèles possibles, paramétrée par  $\Delta$ , i.e. :

<sup>18</sup>Cette modélisation peut sembler brutale. En fait elle reflète un choix classique de politique de commande. Lorsque le mode souple a une fréquence relativement élevée, les incertitudes de phase introduites par les actionneurs ne permettent qu'une politique de type faible gain.

$$\mathcal{F}_a(G_n) = \{\tilde{G} = G_n + W_3\Delta \mid \|\Delta\|_\infty < 1\}$$

Cette modélisation, classique dans le cadre linéaire, peut être utilisée dans le contexte non linéaire sans plus de justification puisqu'elle est indépendante de la nature de  $G_n$ .

En fait, nous pourrions faire le même raisonnement pour chaque type d'erreur classiquement considérée si elle représente une connaissance a priori et si elle reste, en quelque sorte, indépendante de la nature du modèle nominal. Nous rappelons dans le tableau ci-dessous les types et la nature des erreurs classiquement utilisées.

Type	Système	Structure	Nature de l'erreur
<i>additif direct</i>	$\tilde{G} = G_n + \tilde{\Delta}$		- Incertitudes paramétriques - Mode souple
<i>multiplicatif direct en entrée</i>	$\tilde{G} = G_n(I + \tilde{\Delta})$		- Actionneurs incertains - Marges en entrée
<i>multiplicatif direct en sortie</i>	$\tilde{G} = (I + \tilde{\Delta})G_n$		- Capteurs incertains - Marges en sortie.
<i>additif inverse</i>	$\tilde{G} = G_n(I + \tilde{\Delta}G_n)^{-1}$		- Incertitudes paramétriques - Système instables
<i>multiplicatif inverse en entrée</i>	$\tilde{G} = G_n(I + \tilde{\Delta})^{-1}$		- Actionneurs incertains - Marge en entrée - Système instables
<i>multiplicatif inverse en sortie</i>	$\tilde{G} = (I + \tilde{\Delta})^{-1}G_n$		- Capteurs incertains - Marge en sortie - Système instables

Notons enfin que d'autres types d'incertitudes peuvent être modélisés sans difficulté à l'aide d'une telle approche (paramètres inconnus, non linéarités sans mémoire ou encore gains variant dans le temps).

Nous renvoyons aux références [DoWaSt, Za81, DoSt, Saf80 et Fr87] pour une justification et une discussion plus approfondies du choix des représentations des incertitudes dans le cadre de la commande des systèmes.

Nous voulons insister ici sur le fait que cette représentation permet de tenir compte de façon réelle ou fictive de certaines limitations associées à notre système. On peut, par exemple, spécifier à l'aide d'une erreur multiplicative en entrée, une demande de marge en entrée du système.

Nous allons enrichir l'ensemble des incertitudes possibles en élargissant la classe des gabarits possibles. Pour cela on suppose que  $\tilde{\Delta}$  appartient à l'ensemble :

$$\Omega_{\Delta} \equiv \{ W_3 \Delta W_2 \mid \|\Delta\|_{\Delta} < 1 \} \subset \tilde{B} \quad (4.1)$$

où  $\Delta : L_2 \rightarrow L_2$ , est un opérateur causal, incrémentalement stable et où  $W_2$  et  $W_3$  sont des opérateurs de  $L_2$  dans  $L_2$ , causaux et incrémentalement stables.

De façon plus générale, on peut supposer que  $\tilde{\Delta}$  appartient à l'ensemble :

$$\Omega \equiv \{ W_3 \Delta W_2 \mid \|\Delta\|_{i_2} < 1 \} \subset B \quad (4.2)$$

où  $\Delta : L_2 \rightarrow L_2$ , est un opérateur causal, de gain fini, et où  $W_2$  et  $W_3$  sont des opérateurs de  $L_2$  dans  $L_2$ , causaux et incrémentalement stables. Il est clair que  $\Omega_{\Delta} \subset \Omega$ .

Remarques :

(i) - Au vu de la condition (3.12) et de la figure (2.2), on dira, de façon abusive, que les opérateurs  $W_2$  et  $W_3$  « égalisent » le gain de l'incertitude sur  $L_2$ .

(ii) - Notons que si  $\Delta$ ,  $W_2$  et  $W_3$  sont linéaires alors  $\Omega_{\Delta} = \Omega$ .

(iii) - Elargir la classe des gabarits possibles est principalement lié au fait qu'il est possible de construire les incertitudes de modèles en « interpolant » les connaissances locales. Cette remarque est directement liée au Lemme III.2.1, ou encore au Lemme 2.3 en [Saf80] (i.e. si  $\Delta$  est un opérateur Gâteaux différentiable (Appendice A.5) et si  $Graph(D_G \Delta(x))$  est à l'intérieur de  $Cone(C, R)$  (uniformément) alors,  $Graph(\Delta)$  est à l'intérieur de  $Cone(C, R)$ ).

Dans le contexte linéaire, l'intérêt d'une telle représentation des incertitudes de modèle est de permettre, non seulement de tenir compte du type et de la nature de l'incertitude agissant sur le système, mais aussi de reconduire le problème de la robustesse du système commandé à la caractérisation de la norme induite du système, augmenté des pondérations  $W_2$  et  $W_3$ . Dans le paragraphe suivant, nous montrons qu'une telle caractérisation est aussi possible dans le contexte non linéaire.

### b. Stabilité robuste

Des conditions assurant que la loi commande reste stable pour l'ensemble des systèmes appartenant à une famille de modèles donnée sont exprimées. Pour cela, nous considérons que le système commandé est soumis à une incertitude de type quelconque et que  $\tilde{\Delta}$  appartient à  $\Omega$  (ou à  $\Omega_\Delta$ ) et nous exprimons le problème de la robustesse du système commandé comme la caractérisation de la norme induite du système, augmenté des gabarits  $W_2$  et  $W_3$ .

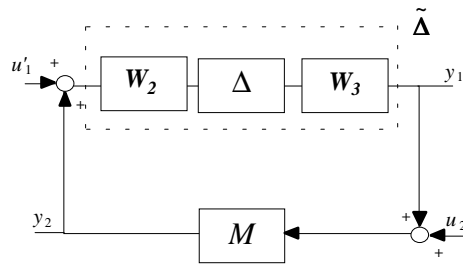


figure 4.3

Sous l'hypothèse,

**H4.1** : Pour tout  $\tilde{\Delta}$  appartenant à  $\Omega$ , le système bouclé, décrit par la figure 4.3, est bien posé.

on peut démontrer les Propositions 4.1 et 4.2 :

#### Proposition 4.1

Si  $W_3$  possède un inverse causal incrémentalement stable et si

$$\|W_2 M W_3\|_{i_2} \leq 1 \quad (4.3)$$

alors, le système bouclé de la figure 4.3 est stable, de gain fini, pour toutes les incertitudes appartenant à  $\Omega$  (défini en (4.2)).

**Démonstration** : Annexe B.2.

**Proposition 4.2**

Si  $M$  est incrémentalement stable et si

$$\|W_2 M W_3\|_{i_2} \leq 1 \quad (4.4)$$

alors, le système bouclé de la figure 4.3 est stable, de gain fini, pour toutes les incertitudes appartenant à  $\Omega$  (défini en (4.2)).

**Démonstration** : Annexe B.3.

**Proposition 4.3**

Si  $M$  est incrémentalement stable et si

$$\|W_2 M W_3\|_{\Delta} \leq 1 \quad (4.5)$$

alors, le système bouclé de la figure 4.3 est incrémentalement stable pour toutes les incertitudes appartenant à  $\Omega_{\Delta}$  (défini en (4.1)).

**Démonstration** : Annexe B.4.

Remarques :

- (i) - Tous les résultats présentés ici sont démontrés dans le cadre multivariable.
- (ii) - Nous nous sommes placés ici dans un cadre classique, en ne nous intéressant qu'à la stabilité de l'interconnexion entre la perturbation et la boucle fermée. Dans les paragraphes suivants, nous nous ramènerons toujours à ce type de problème en intégrant, dans le critère, tous les signaux agissant sur le système.
- (iii) - Les résultats des propositions 4.1, 4.2 et 4.3 sont, dans le contexte linéaire, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité ([ChDe]).
- (iv) - Les propositions 4.1, 4.2 et 4.3 démontrent que la stabilité du schéma 4.4a implique la stabilité du schéma 4.4b.

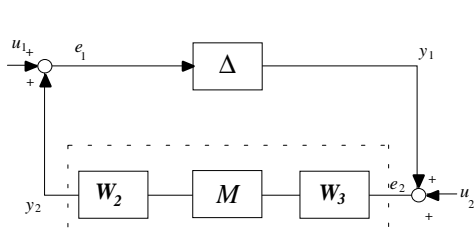


figure 4.4a

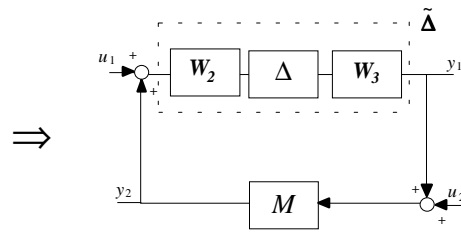


figure 4.4b

### 5. Problème multiblocs : conservatisme et multipliers

La présence de plusieurs incertitudes de modèle agissant à différents endroits de la boucle fermée conduit à noter que, dans ce cas, le problème de la robustesse en stabilité se ramène à l'étude de la stabilité de l'interconnexion entre un système augmenté et un bloc d'incertitudes structuré. Les propositions énoncées précédemment peuvent se révéler conservatives, puisqu'elles assurent la stabilité du système vis à vis d'un « bloc plein d'incertitudes » alors qu'en fait il est structuré.

Le conservatisme des propositions 4.1, 4.2 et 4.3 peut, de façon théorique, être diminué par l'emploi de multipliers particuliers. Rappelons que cette idée est assez ancienne, puisque introduite dans les années 60 par Sandberg et Zames et qu'elle est en fait l'extension de la technique des multipliers de Popov.

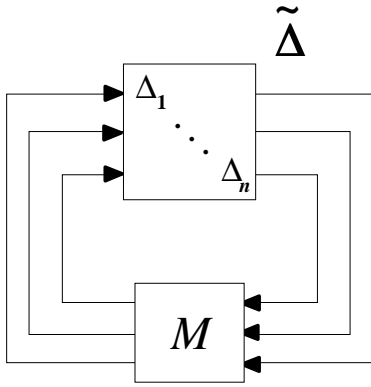


figure 5.1

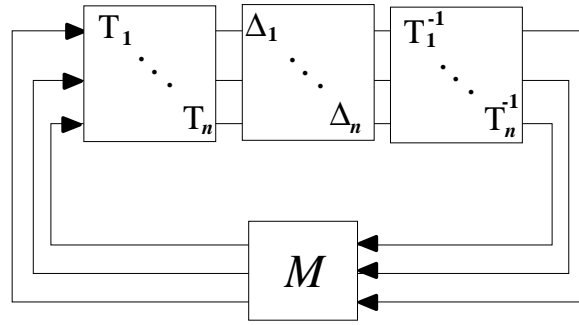


figure 5.2

Ici nous considérons le système,  $M$  soumis à une incertitude structurée de modèle (figure 5.1), où  $\tilde{\Delta}$  appartient  $\mathbf{D}(n)$  qui est défini comme :

$$\mathbf{D}(n) = \{diag(\Delta_{n_1}, \dots, \Delta_{n_n})\}$$

$\Delta_{n_i}$  sont des opérateurs ( $n_i \times n_i$ ) de norme inférieure à 1 (i.e.  $\|\Delta_{n_i}\|_{i_2} < 1$ )

Sous l'hypothèse

**H5.1** : pour tout  $\tilde{\Delta}$  appartenant  $\mathbf{D}(n)$ , le système bouclé, décrit par la figure 5.1, est posé.

on peut démontrer la proposition suivante.



**Proposition 5.1**

$M$  est robuste en stabilité vis à vis d'incertitudes structurées de modèle s'il existe un multiplicateur  $T$  appartenant à  $\mathbf{T}(n)$  tel que :

$$\|TMT^{-1}\|_{i_2} \leq 1$$

où  $\mathbf{T}(n)$  est défini par

$$\mathbf{T}(n) = \{\text{diag}(t_1 I_{n_1}, \dots, t_n I_{n_n}) \mid t_i \in \mathbf{R}, t_i > 0\}$$

**Démonstration :** On la déduit sans difficulté de la démonstration de la Proposition 4.1.

Remarques :

(i) - Le multiplicateur considéré doit, soit comme dans le cas présent, « commuter » avec le bloc d'incertitudes ([DeVi],[Saf82&84], [Do85]), soit conserver les propriétés de positivité associées au bloc d'incertitudes ([Wi70a], [DeVi], [SaLe]). Les multiplicateurs considérés, dans le cadre du calcul d'une borne supérieure de la valeur singulière structurée (i.e.  $\mu$ ) peuvent donc être utilisés si les incertitudes de modèle sont linéaires et stationnaires (dynamiques ou/et paramétriques) ([FaTiDo], [SaLe]).

(ii) - La Proposition 5.1 fournit, dans un certain nombre de cas, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. En effet, comme démontré en [Sha91a, Me], l'utilisation conjointe du Théorème du faible gain et de multiplicateurs constants donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité, pour les systèmes linéaires, stationnaires, soumis à des incertitudes non linéaires structurées. Un résultat semblable à été obtenu pour un système linéaire, soumis à des incertitudes variant dans le temps ([Sha91a&b], [TiPo]).

(iii) - On peut énoncer un résultat similaire en utilisant la norme incrémentale.

### III. Performance asymptotique

#### 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous illustrons le fait que l'on puisse spécifier la relation entrée/sortie du système bouclé à l'aide de normes induites pondérées.

Comme nous le savons, la notion d'objectif de performance recouvre de nombreuses spécifications. Nous introduisons dans ce chapitre une spécification que l'on peut considérer comme minimale : la performance est caractérisée à travers la capacité du système bouclé à assurer une erreur de poursuite faible par rapport à l'entrée qu'elle cherche à poursuivre. Cet objectif assure que la relation entrée/sortie du système bouclé soit dorénavant spécifiée par l'opérateur de retour et soit relativement indépendante du système commandé.

#### 2. Performance asymptotique : définition

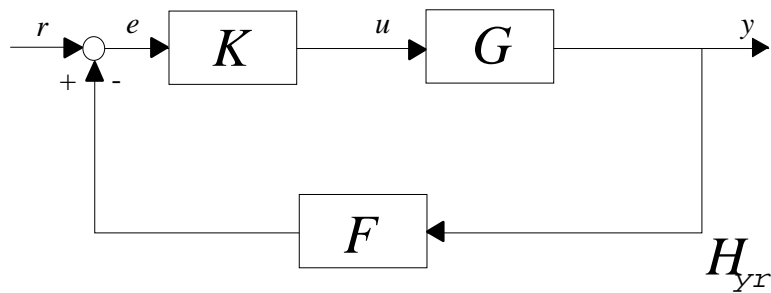


figure 2.1: structure de boucle considérée.

La performance d'un système est jugée à travers sa capacité à poursuivre (ou à rejeter) un ensemble de consignes (de perturbations) particulières. Nous allons traduire cet objectif de performance par une relation entre la norme de l'erreur de poursuite et la norme de la consigne (perturbation). De façon plus précise, si nous désignons par  $r(t)$  une consigne et par  $e(t)$  l'erreur de poursuite associée, on demande que la relation suivante soit satisfaite :

$$\sqrt{\int_0^{\infty} e^T(t)e(t)dt} \ll \sqrt{\int_0^{\infty} r^T(t)r(t)dt} \quad (2.1)$$

(2.1) peut s'interpréter comme une relation énergétique entre l'erreur de poursuite et la consigne.

Pour pouvoir considérer des consignes d'énergie non finie (sinusoïdes, échelons, etc.), nous modifions légèrement la relation précédente, en se plaçant sur  $L_2^e$  et demandant l'existence d'un temps à partir duquel la relation suivante est satisfaite :

$$\sqrt{\int_0^T e^T(t)e(t)dt} \ll \sqrt{\int_0^T r^T(t)r(t)dt} \quad (2.2)$$

Dans la suite,  $R_d^e$ , représente l'ensemble des consignes possibles (i.e. rampes, échelons, sinusoïdes, etc.) et est supposé inclus dans  $L_2^e$

**Définition 2.1 :** Le système décrit par la figure 2.1 est dit *asymptotiquement performant* sur  $R_d^e$  s'il existe  $T_o > 0$  tel que, pour tout  $r \in R_d^e$  et tout  $T \geq T_o$ , l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\|(I + FGK)^{-1}r\|_T \ll \|r\|_T \quad (2.3)$$

Nous précisons l'intérêt d'une telle définition dans le cadre de la commande des systèmes non linéaires, en rappelant le Théorème suivant :

**Théorème 2.1** [DeWa80]

Si le système décrit par la figure 2.1 est asymptotiquement performant sur  $R_d^e$  alors la relation :

$$FH_{yr} \cong I \quad \text{sur } R_d^e \quad (2.4)$$

est asymptotiquement vraie.

i.e. il existe  $T_o > 0$  tel que, pour tout  $r \in R_d^e$  et tout  $T \geq T_o$ , l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\|r - FH_{yr}r\|_T \ll \|r\|_T \quad (2.5)$$

**Démonstration :** La relation entre l'entrée du système,  $r$ , et la sortie du système,  $y$  :

$$H_{yr} = GK(I + FGK)^{-1} \quad (2.6)$$

Appliquons l'opérateur non linéaire  $F$ , à gauche de chacun des deux termes de (2.6), soit

$$\begin{aligned} FH_{yr} &= FGK(I + FGK)^{-1} \\ &= I - (I + FGK)^{-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

qui implique pour tout  $r \in L_2^e$ ,

$$r - FH_{yr}r = (I + FGK)^{-1}r \quad (2.8)$$

---

<sup>1</sup>Ceci revient à supposer que la consigne est de carré sommable sur un support borné.

Le système étant asymptotiquement performant, il existe  $T_o$  tel que

$$\|r - FH_{yr}r\|_T = \|(I + FGK)^{-1}r\|_T \ll \|r\|_T \quad \forall r \in R_d^e \text{ et } T \geq T_o \quad (2.9)$$

C.Q.F.D.

Le Théorème 2.1 et plus particulièrement la relation (2.4), impliquent que la relation entrée sortie,  $H_{yr}$ , restreinte à l'ensemble des consignes qui nous intéressent, est rendue, à l'aide du bouclage, relativement indépendante du système commandé ( $G$ ) et est essentiellement déterminée par l'opérateur de retour  $F$ .

Dans le cas linéaire invariant, ce théorème n'est rien d'autre que la réécriture, en boucle fermée, des règles de Black (ou de Bode) sur le gain de la boucle ouverte ou encore des règles sur la valeur minimum des valeurs singulières de transfert dans le cas multivariable ([DoSt], [SaHaLa]). Notons que, dans le cas linéaire, la performance asymptotique garantit  $H_{yr} \cong F^{-1}$ . Pour obtenir un résultat semblable en non linéaire, il faut ajouter certaines hypothèses de régularité sur les opérateurs de la boucle (voir [DeWa80]).

Remarque :

- Si pour des raisons de stabilité [FiCh], on suppose le gain de boucle inférieur à 1 (i.e.  $\|FGK\|_{i_2} < 1$ ) alors, nécessairement :

$$\|(I + FGK)^{-1}r\|_T \geq \frac{1}{2}\|r\|_T \quad \forall r \in R_d^e \text{ et } \forall T \in R.$$

puisque :

$$\|(I + FGK)^{-1}\|_{i_2} \geq \frac{I}{I + \|FGK\|_{i_2}} \geq \frac{1}{2}$$

### 3. Performance asymptotique et normes induites pondérées

Nous allons ici transformer l'inégalité (2.3) entre normes de signaux d'erreur et d'entrée en une inégalité sur une norme induite pondérée.

A l'instar de l'approche  $H_\infty$  linéaire, nous supposons qu'il existe un opérateur  $W_E$ , causal et stable, possédant un inverse causal et stable, tel que, pour tout  $r \in R_d^e$  et tout  $T \geq T_o$ , l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\|W_E^{-1}r\|_T \ll \|r\|_T \quad (3.2)$$

On peut alors énoncer la Proposition.

**Proposition 3.1**

Si la boucle fermée de la figure 2.1 vérifie :

$$\|(I + FGK)^{-1}W_E\|_{i_2} \leq 1 \quad (3.3)$$

alors le système bouclé est asymptotiquement performant.

**Démonstration :** La relation (3.3) peut s'écrire :

$$\|(I + FGK)^{-1}W_E w\| \leq \|w\| \quad \forall w \in L_2$$

Le Théorème A.4.1 permet d'affirmer que les bornes sur  $L_2$  et  $L_2^e$  sont égales

$$\|(I + FGK)^{-1}W_E w\|_T \leq \|w\|_T \quad \forall w \in L_2^e, \quad \forall T \in \mathbb{R}^+ \quad (3.4)$$

Ceci implique que pour tout  $T \geq T_o$  :

$$\|(I + FGK)^{-1}r\|_T \leq \|W_E^{-1}r\|_T \ll \|r\|_T \quad (3.5)$$

et donc sur  $R_d^e$

$$FH_{yr} \cong I \quad (3.6)$$

C.Q.F.D.

Il est possible de spécifier un objectif de commande sur l'erreur de poursuite. Cette contrainte d'atténuation est alors prise en compte à l'aide d'une pondération en sortie (i.e.  $\|W_S(I + FGK)^{-1}\|_{i_2} \leq 1$ ). Notons ici que seule la pondération en entrée permet de tenir compte de l'amplitude des signaux agissant sur le système. L'utilisation de pondérations sur l'erreur de poursuite ne peut donc traduire qu'un objectif indépendant du point de fonctionnement du système (par exemple un facteur d'échelle pour tenir compte d'un changement d'unité).

On suppose dans la suite que les objectifs de performance sont tels qu'ils nécessitent l'utilisation de pondérations en entrée et en sortie du système i.e.  $\|W_S(I + FGK)^{-1}W_E\|_{i_2} \leq 1$ .

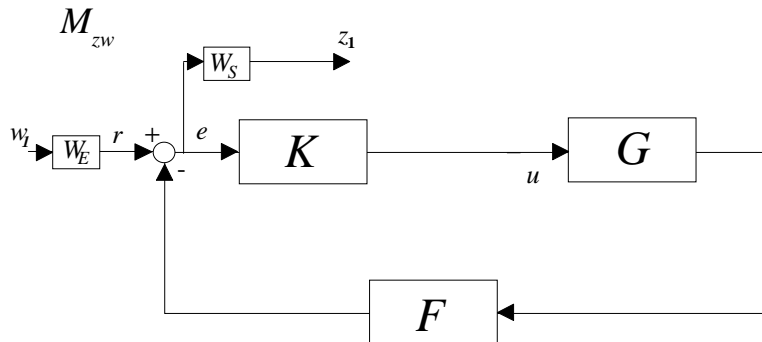


figure 3.1: système augmenté, associé à la performance asymptotique.

**Remarques :**

(i) - En fait, en [Za81], la condition (3.2) est remplacée par la condition :

$$\|W_E^{-1}r\|_T \cong \|r\|_T \text{ pour } r \in R_d^e$$

et la condition (3.3) par l'existence de  $\varepsilon \ll 1$  tel que

$$\|(I + FGK)^{-1}W_E\|_{i_2} \leq \varepsilon$$

et donc

$$\|(I + FGK)^{-1}r\|_T \leq \varepsilon \|W_E^{-1}r\|_T \ll \|r\|_T$$

La condition que nous donnons est donc simplement « normalisée ».

(ii) - On appelle système augmenté, le système nominal augmenté des pondérations considérées. La figure 3.1 correspond au système augmenté, associé à la performance asymptotique.

(iii) - Les pondérations  $W_S$  et  $W_E$  ne sont pas nécessairement linéaires.

(iv) - La démarche effectuée dans le cadre de la poursuite de consignes peut être poursuivie dans le cadre du rejet de perturbations. Pour cela, on suppose qu'il existe un opérateur  $W_r$  tel que l'ensemble des perturbations à rejeter,  $P^e$ , soit inclus dans l'ensemble généré par  $W_r$ , à partir de  $L_2^e$  (i.e.  $P^e \subset M^e = \{p \mid p = W_r w \quad w \in L_2^e\}$ ). Ces hypothèses permettent de ramener l'objectif de rejet à une spécification sur la norme induite pondérée du système (i.e.  $\|H_{pe} W_r\|_{i_2} \leq 1$  où  $H_{pe}$  est la relation entre la perturbation et l'erreur de poursuite).

**Proposition 3.2**

Si la boucle fermée vérifie :

$$\|W_S(I + FGK)^{-1}W_E\|_{\Delta} \leq 1 \tag{3.7}$$

alors le système bouclé est asymptotiquement performant.

**Démonstration :** L'opérateur étant non biaisé, l'implication suivante est vérifiée :

$$\|W_S(I + FGK)^{-1}W_E\|_{\Delta} \leq 1 \Rightarrow \|W_S(I + FGK)^{-1}W_E\|_{i_2} \leq 1$$

C.Q.F.D.

**4. Performance asymptotique robuste**

Dans ce paragraphe, nous supposons le système bouclé soumis à des perturbations externes dues à des signaux exogènes ou à une incertitude de modèle sur  $G$  et nous cherchons une

condition assurant que le système bouclé perturbé,  $\tilde{H}_{yr}$ , reste asymptotiquement performant; i.e.  $F\tilde{H}_{yr} \equiv I$  pour  $r \in R_d^e$ .

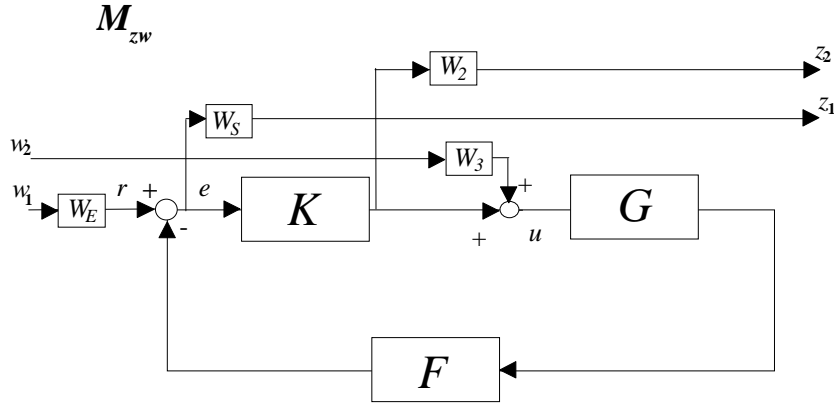


figure 4.1: système augmenté, associé à la performance robuste.

Sans perte de généralité, nous supposons le système soumis à une incertitude de modèle,  $\tilde{\Delta}$ , appartenant à  $\Omega$  ( $\Omega \equiv \{W_3\Delta W_2 \mid \|\Delta\|_{i_2} < 1\}$ ) et de type quelconque (multiplicatif, additif, etc.); par ailleurs, nous supposons que les objectifs de performance sont spécifiés à l'aide des pondérations  $W_E$  et  $W_S$ .

Notons  $z_1$  et  $z_2$  les sorties respectivement associées aux pondérations  $W_S$  et  $W_2$  et  $w_1$   $w_2$  les entrées respectivement associées aux pondérations  $W_E$  et  $W_3$ . Enfin, notons  $M_{zw}$ , le système augmenté ayant pour entrée  $w=(w_1, w_2)$  et pour sortie  $z=(z_1, z_2)$ .

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que le système bouclé perturbé par  $\tilde{\Delta}$  reste asymptotiquement performant.

#### Proposition 4.1

Si le système augmenté vérifie :

$$\|M_{zw}\|_{i_2} \leq 1 \quad (4.1)$$

alors, le système perturbé par toute perturbation  $\tilde{\Delta}$  appartenant à  $\Omega$  est asymptotiquement performant.

**Démonstration :** On doit simplement montrer l'implication suivante :

$$\text{si } \|M_{zw}\|_{i_2} \leq 1 \text{ alors } \|z_1\|^2 \leq \|w_1\|^2 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \Omega$$

où  $z_1 = W_S(I + F\tilde{G}K)^{-1}W_E w_1$  et où  $\tilde{G}$  représente le système perturbé par  $\tilde{\Delta}$ .

Le système bouclé étant perturbé par une perturbation appartenant à  $\Omega$ , il existe un opérateur  $\Delta$ , de norme inférieure à 1 (i.e.  $\|\Delta\|_{i_2} < 1$ ), tel que

$$w_2 = \Delta z_2$$

et donc, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall z_2 \in L_2$

$$\|\Delta z_2\|^2 \leq (1 - \varepsilon) \|z_2\|^2 \quad (4.2)$$

La norme induite du système augmenté étant par ailleurs inférieure ou égale à 1, l'inégalité suivante est vraie pour tous les  $w_1$  et  $w_2$  appartenant  $L_2$ ,

$$\|z_1\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2 + \|z_2\|^2 \leq 0 \quad (4.3)$$

Il ne reste plus qu'à combiner (4.3) et (4.2) pour conclure que :

$$\|z_1\|^2 - \|w_1\|^2 \leq \|\Delta z_2\|^2 - \|z_2\|^2 \leq -\varepsilon \|z_2\|^2 \leq 0$$

C.Q.F.D.

Remarques :

(i) - L'emploi de multiplieurs permet de diminuer le conservatisme de la Proposition 4.1 (voir Proposition II.5.1).

(ii) - La proposition garantit uniquement la performance asymptotique du système perturbé, en aucun cas la minimisation des effets de la perturbation sur la sortie du système (i.e. la désensibilisation).

(iii) - Le cas incrémental peut être traité de la même façon. On démontre alors, sans difficulté, l'implication suivante :

$$\text{si } \|M_{zw}\|_{\Delta} \leq 1 \text{ alors } \forall \tilde{\Delta} \in \Omega_{\Delta} \text{ on a } \|W_s(I + F\tilde{G}K)^{-1}W_E\|_{\Delta} \leq 1$$



## IV. Norme incrémentale pondérée et commande

### 1. Introduction

Notre intérêt pour la norme incrémentale est lié à plusieurs résultats que nous allons développer tout au long de ce chapitre et du chapitre suivant.

La Lipschitz continuité a été introduite dans le cadre de l'étude de la stabilité<sup>1</sup> des systèmes bouclés en [Za63], [Sa65] et [Za66] et est décrite comme une condition assurant que l'introduction de bruit dans un système bouclé ne fait pas varier de « façon inconsidérée » les sorties du système [Za66].<sup>2</sup> De façon plus précise dans le cas de la poursuite de trajectoires quelconques, une faible perturbation d'entrée ne produit qu'une faible perturbation de sortie [Wi70a] (i.e. si  $\|H\|_{\Delta} \leq \gamma$  alors  $\|\Delta y\| \leq \gamma \|\Delta w\|$ ).

En fait, les propriétés associées aux systèmes Lipschitz continus n'ont jamais été réellement étudiées et l'utilisation de la norme incrémentale dans le cadre de la commande des systèmes non linéaires n'a jamais été envisagée à notre connaissance.<sup>3</sup>

L'objet de ce chapitre et du suivant est d'expliciter l'intérêt de la norme incrémentale dans le contexte de la commande des systèmes non linéaires. Nous ne cherchons pas à justifier en soi l'emploi de la norme incrémentale, mais à montrer, avant tout, qu'il s'impose dans le cadre de l'extension de la commande  $H_{\infty}$  linéaire au contexte non linéaire.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement au problème de la désensibilisation par bouclage qui constitue, avec la robustesse, l'un des fondements de la commande  $H_{\infty}$  linéaire [Za81] et est un objectif essentiel dans le cadre de la commande des systèmes.

Rappelons ici que l'utilisation de lois de commande à contre-réaction est étroitement liée à leurs capacités à réduire l'effet de bruits non mesurables ou de variations de modèle sur les sorties du système commandé ([Bl34, Bo45, CrPe]). Les problèmes de stabilité, engendrés par l'emploi d'un bouclage, rendent cette opération délicate. Ceci implique que l'utilisation de bouclages ne peut être justifiée qu'à travers la certitude que cette approche est préférable à l'approche boucle ouverte. La notion de désensibilisation<sup>4</sup> permet de quantifier l'apport des lois à contre-réaction dans le cadre de la commande des systèmes.

<sup>1</sup> Rappelons que le Théorème du faible gain peut être vu comme un corollaire du Théorème du point fixe.

<sup>2</sup> Initialement, la définition de la stabilité entrée/sortie demandait que le système bouclé soit non seulement borné mais aussi continu en entrée/sortie ([Za66a]). La définition a évolué vers une définition plus minimaliste où seule la bornitude en entrée/sortie est demandée ([DeVi]).

<sup>3</sup> En [FiCh], les auteurs utilisent la norme incrémentale pour des raisons mathématiques et ne justifient en aucun cas son utilisation dans le cadre de la commande des systèmes. Par ailleurs, la solution qu'ils proposent est sans intérêt pour la commande car la stabilité de la boucle fermée est assurée à l'aide du Théorème du faible gain. Ceci supprime l'intérêt du bouclage (pas de désensibilisation).

<sup>4</sup> Les références sont assez nombreuses, nous indiquons ici les principales : dans le cadre linéaire voir [Bo45, CrPe, DoSt, SaLaHa, Za81], dans le cadre non linéaire [Za63, Sag, Kr68a&b, Kr69, KrJa, Po, Wi71c, De75, De78, DeWa80, CrFrLo].

Historiquement, cette notion fût d'abord associée à la capacité du système bouclé à diminuer les effets induits par des variations infinitésimales des paramètres du système sur la sortie asservie (i.e. la fonction de sensibilité introduite en [Bl34] et [Bo45]). Cette notion fût ensuite étendue en [CrPe] où les auteurs définissent la désensibilisation en comparant les propriétés du système commandé, en boucle fermée, à celles associées au système équivalent, commandé en boucle ouverte.

La fonction de sensibilité définie en linéaire par Black, fût généralisée au contexte non linéaire à travers l'introduction de la fonction de sensibilité différentielle qui caractérise, au premier ordre, l'effet de faibles variations du système sur les sorties du système bouclé ([Po],[Kr69] [De75]). La fonction de sensibilité différentielle correspond à la linéarisation de l'opérateur liant la consigne d'entrée et l'erreur de poursuite<sup>5</sup> (i.e.  $S = (I + FGK)^{-1}$ ).

Plus récemment, en [De78], à travers l'utilisation du développement de Taylor associé à un opérateur non linéaire  $C^1$ , l'auteur obtient l'expression exacte de la variation de sortie du système bouclé associée à une perturbation de modèle du système commandé. Ce résultat permet de quantifier la désensibilisation associée au bouclage et met en exergue le rôle joué par les linéarisations du système dans le cadre de la désensibilisation.

Ce dernier commentaire prend toute son importance si on l'associe à un résultat d'analyse fonctionnelle, rappelé par Willems en [Wil70a], liant la norme d'un opérateur non linéaire à la norme induite de ses linéarisations. Ce lien permet en fait de montrer que la norme incrémentale pondérée est, à l'instar de la norme  $H_\infty$  pondérée, apte à ramener le problème de la désensibilisation par bouclage, au problème de la minimisation d'une norme incrémentale pondérée.

Le paragraphe IV.2 explicite le lien entre le comportement global d'un opérateur non linéaire et celui de ses linéarisations; il se conclut avec une extension multivariable du Lemme de Willems qui lie la norme incrémentale d'un opérateur non linéaire à la norme de ses linéarisations. Le paragraphe IV.3 précise les conséquences du Lemme de Willems pour des systèmes vérifiant un critère de type incrémental pondéré. On montre d'abord que la résolution d'un problème de type incrémental pondéré est équivalent à la résolution d'une infinité de problèmes  $H_\infty$ , non stationnaires sous optimaux et explicitons ensuite la nature des critères  $H_\infty$  non stationnaires, associés aux linéarisations du système. Les paragraphes IV.4 et IV.5 étudient respectivement le problème de la désensibilisation et de l'atténuation par bouclage; nous montrons l'adéquation existant entre la norme incrémentale pondérée et les objectifs de désensibilisation ou d'atténuation.

## 2. Le Lemme de Willems

Dans ce paragraphe, le comportement global d'un opérateur incrémentalement stable est lié au comportement de ses linéarisations.

---

<sup>5</sup> Ceci est important parce que source, de façon explicite ou implicite, de nombreuses méthodes de commande. La plus célèbre est celle des gains variables.

Soit l'opérateur,  $y = H(u)$ , supposé incrémentalement borné par  $\eta$  :

$$\|H\|_{\Delta} \leq \eta \quad (2.1)$$

Pour caractériser l'effet d'une variation de la commande sur la sortie, on note  $\Delta u$  l'écart de commande,  $\Delta y$  l'écart de sortie, égal à  $H(u + \Delta u) - H(u)$  et l'on définit l'incrément de commande :

$$\delta u = \frac{\Delta u}{n} \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

Si l'on écrit l'écart de sortie comme :

$$\Delta y = H(u + n\delta u) - H(u + \frac{(n-1)}{n}\delta u) + H(u + \frac{(n-1)}{n}\delta u) - H(u + \frac{(n-2)}{n}\delta u) \dots + H(u + \delta u) - H(u) \quad (2.2)$$

alors  $H$  étant incrémental, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} \|\Delta y\| &\leq \left\| H(u + n\delta u) - H(u + \frac{(n-1)}{n}\delta u) \right\| + \left\| H(u + \frac{(n-1)}{n}\delta u) - H(u + \frac{(n-2)}{n}\delta u) \right\| \dots + \left\| H(u + \delta u) - H(u) \right\| \\ &\leq \eta n \|\delta u\| \end{aligned}$$

Cette expression montre que l'écart de sortie, généré par une variation de l'entrée du système, est naturellement majoré par la somme associée aux «variations locales».

En fait, on peut lier la variation totale au comportement local du système. Supposons que  $H$  soit  $C^1$ , et écrivons son développement de Taylor au premier ordre :

$$H(u + \delta u) = H(u) + DH_u \delta u + \alpha(\delta u) \|\delta u\|$$

où

$$\lim_{\delta u \rightarrow 0} \alpha(\delta u) = \alpha(0) = 0$$

Ceci implique, pour de faibles variations de la commande (i.e.  $\|\delta u\| \ll 1$ ) :

$$H(u + \delta u) \cong H(u) + DH_u \delta u \quad (2.3)$$

(2.3) combinée avec (2.2), permet, pour  $n$  assez grand, d'approcher la variation totale par :

$$\Delta y \cong \sum_{i=0}^{n-1} DH_{u + \frac{i}{n}\delta u} \cdot \delta u \quad (2.4)$$

qui montre le lien entre le système non linéaire et ses linéarisations.

L'expression (2.4) est une approximation, au premier ordre, de la variation  $\Delta y$  associée à la variation  $\Delta u$ . On peut remplacer cette expression approchée par une expression exacte.

Pour cela, on définit la fonction :

$$g(\alpha) = u + \alpha \Delta u \text{ avec } \alpha \in [0,1]$$

et l'on différentie  $H(g(\alpha))$  par rapport à  $\alpha$  :

$$\frac{d}{d\alpha} H(u + \alpha \Delta u) = DH_{u + \alpha \Delta u} \cdot \Delta u \quad (2.5)$$

Si l'on intègre<sup>6</sup>(2.5) par rapport à  $\alpha$ , on obtient :

$$\Delta y = \int_0^1 DH_{u+\alpha\Delta u} d\alpha \cdot \Delta u \quad (2.6)$$

A l'instar de la relation (2.2), on peut utiliser (2.6) pour majorer la norme de l'écart de sortie par rapport à la norme de la variation d'entrée.

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$\|\Delta y\| \leq \left\| \int_0^1 DH_{u+\alpha\Delta u} d\alpha \right\| \|\Delta u\|$$

et donc

$$\|\Delta y\| \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \|DH_{u+\alpha\Delta u}\| \|\Delta u\| \quad (2.7)$$

Nous pouvons maintenant rappeler le Lemme suivant :

**Lemme 2.1 [Wi70a]**

*Un opérateur non linéaire, non biaisé et de classe  $C^1$ , est Lipschitz continu si et seulement si toutes ses linéarisations sont uniformément bornées. De plus, on a*

$$\|H\|_{\Delta} = \sup_{u_0 \in L_2^m} \|DH_{u_0}\|_{i_2}.$$

**Démonstration :** Seul le deuxième point est à démontrer (i.e.  $\|H\|_{\Delta} = \sup_{u_0 \in L_2^m} \|DH_{u_0}\|_{i_2}$ ).

Pour cela, posons :

$$K = \sup_{u_0 \in L_2^m} \|DH_{u_0(t)}\|_{i_2}.$$

La relation (2.7) assure

$$\|H\|_{\Delta} \leq K \quad (2.8)$$

Dans ce qui suit nous démontrons l'inégalité inverse.

Il existe, par définition, une entrée  $u_0 \in L_2^m$  telle que pour  $\varepsilon > 0$ , on ait :

$$\|DH_{u_0}\|_{i_2} \geq K - \varepsilon \quad (2.9)$$

Par ailleurs, la définition de la norme incrémentale assure pour tout  $\lambda h \in L_2^m$

$$\|H\|_{\Delta} \geq \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|H(u_0 + \lambda h) - H(u_0)\|}{\|\lambda h\|} \quad (2.10)$$

Combinant la relation (2.10) avec l'inégalité :

$$\|H(u_0 + \lambda h) - H(u_0)\| \geq \|DH_{u_0} \lambda h\| - \|H(u_0 + \lambda h) - H(u_0) - DH_{u_0} \lambda h\|$$

on déduit :

---

<sup>6</sup>(2.5) est une fonction continue de  $\alpha$  puisque  $H$  est supposé  $C^1$ .

$$\|H\|_{\Delta} \geq \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|DH_{u_0} \lambda h\| - \|H(u_0 + \lambda h) - H(u_0) - DH_{u_0} \lambda h\|}{\|\lambda h\|} \quad (2.11)$$

La définition de la dérivée de Fréchet assure que, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $\|u\| < \delta$  on ait l'inégalité :

$$\|H(u_0 + u) - H(u_0) - DH_{u_0} u\| \leq \varepsilon \|u\| \quad (2.12)$$

On déduit alors des relations (2.12), (2.11) et (2.9), l'inégalité :

$$\|H\|_{\Delta} \geq \frac{\|DH_{u_0} h\|}{\|h\|} - \varepsilon \geq K - 2\varepsilon \quad (2.13)$$

qui, combinée avec (2.8), donne l'encadrement suivant :

$$K - 2\varepsilon \leq \|H\|_{\Delta} \leq K \quad \forall \varepsilon > 0$$

C.Q.F.D.

Remarques :

- (i) - Le lemme 2.1 est énoncé dans [Ge] (sans référence au lemme de Willems).
- (ii) - Nous avons particularisé le résultat dans  $L_2$  mais il reste vrai dans  $L_p$ .

L'importance de ce lemme, dans le contexte de la commande  $H_{\infty}$ , est maintenant discutée.

### **3. Norme incrémentale pondérée et son lien avec le $H_{\infty}$ linéaire non stationnaire.**

Nous voulons dans ce paragraphe illustrer le lien existant entre des objectifs de type incrémental pondéré et des objectifs, plus locaux, associés aux linéarisations du système. Nous montrons, dans un premier temps, que résoudre un problème de type incrémental pondéré, est équivalent à la résolution d'une infinité de problèmes  $H_{\infty}$  non stationnaires sous optimaux.<sup>7</sup> Nous précisons ensuite la nature des pondérations associées à ces problèmes  $H_{\infty}$  linéaires non stationnaires.

Considérons le système augmenté :

$$M_{zw} = W_o H W_i \quad (3.1)$$

où  $W_i$  et  $W_o$  sont les pondérations représentant les différents objectifs de commande.

#### **Proposition 3.1**

<sup>7</sup>Le gain de l'opérateur linéaire temps variant est inférieur à une valeur donnée et non, le plus faible possible.

Si le système augmenté,  $M_{zw} = W_o HW_i$ , est Fréchet différentiable et de norme incrémentale inférieure ou égale à 1 (i.e.  $\|M_{zw}\|_{\Delta} \leq 1$ ) alors pour tout  $w_0 \in L_2$ , on a

$$\left\| DW_o \Big|_{HW_i(w_0)} DH \Big|_{W_i(w_0)} DW_i \Big|_{w_0} \right\|_{i_2} \leq 1 \quad (3.2)$$

où

$DW_i \Big|_{w_0}$  est la dérivée de  $W_i$  le long de  $w_0$

$DH \Big|_{W_i(w_0)}$  est la dérivée de  $H$  le long de  $W_i(w_0)$

et

$DW_o \Big|_{HW_i(w_0)}$  est la dérivée de  $W_o$  le long de  $HW_i(w_0)$ .

**Démonstration :** Il suffit de rappeler le principe de superposition associé à la dérivation de la composition d'opérateurs non linéaires. La dérivée de  $M_{zw}$ , le long d'une entrée particulière  $w_0$ , est égale à :

$$DM_{zw} \Big|_{w_0} = DW_o \Big|_{HW_i(w_0)} DH \Big|_{W_i(w_0)} DW_i \Big|_{w_0} \quad (3.3)$$

Le Lemme 2.1 assure le résultat pour tout  $w_0 \in L_2$ .

C.Q.F.D.

Remarques :

(i) - Le critère incrémental assure, sous certaines hypothèses, que les systèmes linéaires tangents associés aux points d'équilibre du système vérifient un critère  $H_{\infty}$  classique (Corollaire V.5.1).

(ii) - La  $L_2$  stabilité d'un système linéaire non stationnaire peut être vérifiée, sous certaines hypothèses, à l'aide d'une équation de Riccati temps variant ([SuTh73b],[HiMo80a], [Ra-NaKh]).

En rappelant que  $DM_{zw} \Big|_{w_0}$  est un opérateur linéaire, la Proposition 3.1 prouve que toutes les linéarisations de  $M_{zw}$  satisfont un critère  $H_{\infty}$  pondéré temps variant. Nous explicitons les conséquences de cette proposition à travers l'exemple suivant.

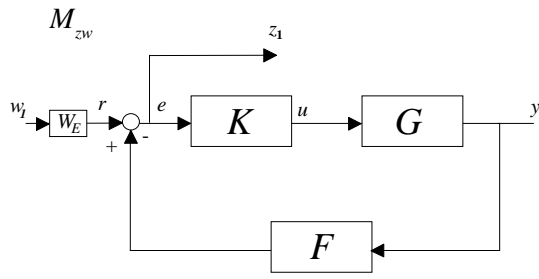


figure 3.1a

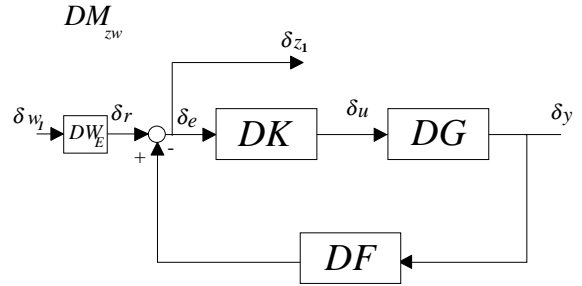


figure 3.1b

Soit le système augmenté de la figure 3.1a, où seuls les objectifs de performance sont considérés à travers l'utilisation d'une pondération  $W_E$  linéaire. Si le système augmenté vérifie les hypothèses de la Proposition 3.1, on a alors :

$$\left\| DH|_{W_e(w_0)} W_E \right\|_{i_2} \leq 1 \quad (3.4)$$

où  $H = (I + FGK)^{-1}$ .

(3.4) n'est rien d'autre qu'un critère assurant que le système linéarisé de la figure 3.1b est asymptotiquement performant, pour les entrées appartenant à  $R_d^e$ . En effet, pour tout  $\delta r \in R_d^e$  on a :

$$\left\| W_E^{-1} \delta r \right\| \ll \delta r \quad (3.5)$$

et donc

$$\left\| DH|_{W_e(w_0)} \delta r \right\| \leq \left\| W_E^{-1} \delta r \right\| \ll \delta r.$$

Ce résultat peut être interprété de deux façons différentes :

- soit comme une contrainte sur la linéarisation associée à la trajectoire de référence générée par  $W_E$  depuis  $w_0$ , et par la même, comme la garantie d'un bon comportement du système non linéaire le long de cette trajectoire, face à de faibles consignes appartenant à  $R_d^e$  ;

- soit, au vu de la discussion du paragraphe IV.2, comme une condition contraignant, de façon directe, les incréments de réponse, face à des incréments de commande particuliers. Cette dernière remarque implique, par exemple, que la réponse à un échelon de consigne peut être vue comme une succession de réponses à des échelons de consigne associés aux linéarisations du système, le long de la trajectoire générée par ce même échelon; la qualité de ces réponses « locales » est directement liée à la pondération  $W_E$ .

De façon plus générale, si  $W_E$  n'est plus supposée linéaire, la performance locale est maintenant spécifiée en  $w_0$  par  $DW_E|_{w_0}$  et la relation (3.4) est vérifiée lorsque  $\delta r$  appartient à l'ensemble :

$$R_d^e[w_0] = \{ \delta r \in L_2 \mid \left\| DW_E|_{w_0}^{-1} \delta r \right\| \ll \delta r \} \quad (3.6)$$

qui, en général, ne coïncide pas avec  $R_d^e$ .

Notons, dans ce dernier cas, que la nature non linéaire de la pondération permet en fait de spécifier une « performance locale » dépendant du point de fonctionnement du système.

Le cas où, pondérations de performance et de robustesse se mélangent, peut être analysé de la même façon. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

En [ShAt90], dans le cadre des gains variables, on demande implicitement que le système non linéaire satisfasse un objectif de type incrémental. Ceci permet de noter le rôle joué par les systèmes linéaires, dépendant de paramètres, dans le contexte de la commande robuste non linéaire. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre IX.

Dans le paragraphe suivant, nous analysons le lien existant entre le problème général de la désensibilisation par bouclage et des contraintes de type incrémental pondéré.

#### 4. Désensibilisation et commande non linéaire

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, l'utilisation de loi à contre-réaction est historiquement liée à ses propriétés de désensibilisation. Nous montrons, dans ce paragraphe, le lien existant entre le problème général de la désensibilisation par bouclage et des contraintes de type incrémental. On s'intéresse ici au problème de la désensibilisation vis à vis d'erreurs additives de modèle, en notant que cette analyse peut être faite, de la même façon, dans tous les autres cas.

Nous rappelons, tout d'abord, les définitions, ainsi que certains résultats concernant la désensibilisation des systèmes non linéaires.

Sans perdre en généralité, nous supposons  $F=I$  et associons au système bouclé de la figure 4.1, le système en boucle ouverte équivalent de la figure 4.2, noté  $Ho_{yr}$ .

$$Ho_{yr} = GK_o = G \cdot K(I + GK)^{-1} \text{ (i.e. } Ho_{yr} = H_{yr} \text{)}.$$

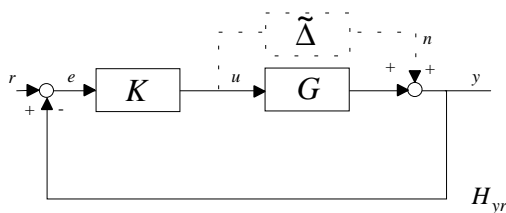


figure 4.1

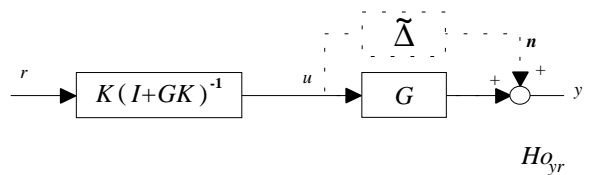


figure 4.2

A partir de  $G$ , perturbé par une incertitude de type additif,



$$\tilde{G} = G + \tilde{\Delta}$$

on désire comparer l'effet de cette perturbation sur les sorties du système commandé en boucle fermée :

$$\Delta H_{yr} = \tilde{G}K(I + \tilde{G}K)^{-1} - GK(I + GK)^{-1} \quad (4.1)$$

à l'effet de cette même perturbation sur le système commandé en boucle ouverte :

$$\begin{aligned} \Delta Ho_{yr} &= \tilde{G}.K(I + GK)^{-1} - G.K(I + GK)^{-1} \\ &= \tilde{\Delta}K_o \end{aligned} \quad (4.2)$$

On dira ([CrPe]) que le système bouclé est désensibilisé, si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\int_0^{\infty} \Delta H_{yr}^T(t) \Delta H_{yr}(t) dt \leq \int_0^{\infty} \Delta Ho_{yr}^T(t) \Delta Ho_{yr}(t) dt \quad (4.3)$$

Afin d'expliciter le lien existant entre le problème de la désensibilisation et des contraintes de type incrémental, nous rappelons un résultat exprimant la relation entre la perturbation boucle ouverte (4.2) et la perturbation boucle fermée (4.1).

**Théorème 4.1** [DeWa80].

Si l'on suppose que la boucle fermée perturbée est bien posée (i.e.  $\tilde{G}K(I + \tilde{G}K)^{-1}$  est causal et est défini de  $L_2^e$  dans  $L_2^e$ ) et que  $(I + \tilde{G}K)^{-1}$  et  $\tilde{G}K$  sont  $C^1$ , alors les erreurs introduites par la perturbation  $\tilde{\Delta}$  en sortie de la boucle fermée (i.e.  $\Delta H_{yr}$ ) et en sortie de la boucle ouverte (i.e.  $\Delta Ho_{yr}$ ), vérifient :

$$\Delta H_{yr} = \int_0^1 [I + D(\tilde{G}K)]^{-1} d\alpha . \Delta Ho_{yr} \quad (4.4)$$

où  $D(\tilde{G}K)$  est évalué en  $(I + \tilde{G}K)^{-1}(r + \alpha \Delta r)$  avec  $\Delta r = \Delta Ho_{yr}$  et  $\alpha \in [0,1]$ .

Ce Théorème, combiné avec la proposition 3.1, permet d'expliciter l'intérêt et les possibilités offertes par la norme incrémentale dans le cadre du problème de la désensibilisation par bouclage.

Pour cela, nous considérons, dans un premier temps, le système soumis à une faible variation de modèle et nous lions alors la désensibilisation à la performance asymptotique. Dans un deuxième temps, nous élargissons la classe des perturbations possibles et discutons des liens existant entre désensibilisation et performance robuste.

Supposons que la perturbation de modèle soit suffisamment faible pour approcher (4.4) par :

$$\Delta H_{yr} \cong (I + D(GK))^{-1} \Delta H o_{yr} \quad (4.5)$$

Il y a désensibilisation dès lors que  $\Delta H o_{yr}$  appartient à l'ensemble :

$$S_d^e[w_0] = \{\delta r \in L_2 \mid \|DW_{E_{w_0}}^{-1} \delta r\| \leq \|\delta r\|\}$$

puisque, dans ce cas, on a :

$$\|(I + D(GK))^{-1} \Delta H o_{yr}\| \leq \|W_E^{-1} \Delta H o_{yr}\| \leq \|\Delta H o_{yr}\|$$

Ce résultat implique que l'on puisse, à l'aide de pondérations, spécifier notre demande de désensibilisation.

La désensibilisation ne peut avoir lieu que pour une classe de perturbations données. En effet, comme l'indique la proposition suivante, la norme incrémentale associée à la fonction de sensibilité d'un système bouclé est nécessairement supérieure ou égale à 1.

**Proposition 4.1**

Si l'opérateur de bouclage  $FGK$  est strictement causal, alors  $\|(I + FGK)^{-1}\|_{\Delta} \geq 1$ .

**Démonstration :** On démontre la Proposition par l'absurde.

Posons  $S = (I + FGK)^{-1}$ , le théorème du faible gain incrémental assure que  $(I - S)^{-1}$  existe si  $\|S\|_{\Delta} < 1$ . Par ailleurs, on a :

$$I = (I + FGK)(I + FGK)^{-1} = (I + FGK)^{-1} + FGK(I + FGK)^{-1}$$

et  $FGK(I + FGK)^{-1}$  est strictement causal; le produit d'un opérateur causal par un opérateur strictement causal est strictement causal. Ceci implique que l'opérateur :

$$(I - S) = FGK(I + FGK)^{-1}$$

n'est pas inversible ([Wil70a]) d'où la contradiction.

C.Q.F.D.

Remarques :

(i) - A l'instar du cas linéaire ([Bo45, Za81, FrLo]), une dynamique des zéros instables ([Is89]) limite la désensibilisation par bouclage ([Sh91]). Certaines demandes de robustesse en stabilité s'opposent à la désensibilisation du système par bouclage car elles limitent, de façon naturelle, le gain de boucle.

(ii) - Si  $\Delta H_{o_{yr}}$  appartient  $R_d^e[w_0]$ , alors on a  $\|(I + D(GK))^{-1} \Delta H_{o_{yr}}\| \ll \|\Delta H_{o_{yr}}\|$  qui indique simplement que la désensibilisation, dans ce cas, est d'autant plus forte que la perturbation appartient à l'ensemble des signaux qui nous intéressent (localement).

(iii) - Si  $G$  et  $H_{yr}$  sont supposés inversibles, alors  $\Delta H_{o_{yr}} = \tilde{\Delta} G^{-1} GK(I + GK)^{-1}$  et  $\Delta H_{yr} H_{yr}^{-1} = \int_0^1 [I + D(\tilde{G}K)]^{-1} d\alpha \cdot \tilde{\Delta} \cdot G^{-1}$ . Cette dernière relation permet de quantifier l'effet d'une variation relative de  $G$  sur  $H_{yr}$ . De façon plus précise, en [B134 et Bo45], la désensibilisation du système est caractérisée à travers la limite :

$$\lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \frac{\Delta H_{yr} / H_{yr}}{\tilde{\Delta} / G}$$

qui correspond à l'effet relatif créé par une variation infinitésimale du système commandé sur la relation entrée/sortie du système bouclé.

Rappelons que cette limite, dans le cas linéaire, est égale à la fonction de sensibilité du système :

$$\lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \frac{\Delta H_{yr} / H_{yr}}{\tilde{\Delta} / G} = \frac{dH_{yr}}{dG} \frac{G}{H_{yr}} = S^{\Delta} = (I + GK)^{-1}$$

et, dans le contexte non linéaire, à la fonction de sensibilité différentielle [Po] :

$$\lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \frac{\Delta H_{yr} / H_{yr}}{\tilde{\Delta} / G} = [I + D(GK)]^{-1} \quad (4.6)$$

(4.6) montre de nouveau l'intérêt d'une contrainte directe sur la fonction de sensibilité du système. Notons que (4.1) est plus générale que (4.6) qui impose au système nominal, ainsi qu'à la boucle fermée, d'être inversibles ([CrPe]).

La relation (4.1) permet de considérer de grandes variations de modèle. Nous allons, dans ce cas, préciser le lien existant entre désensibilisation et performance robuste.

Considérons le système robuste en performance vis à vis d'une erreur additive de modèle appartenant  $\Omega_{\Delta}$  (défini en II.4) et spécifions les objectifs de performance à l'aide de pondérations linéaires (i.e.  $W_i = W_E, W_o = I$ ).

La performance robuste assure que :

$$\|(I + \tilde{G}K)^{-1} W_E\|_{\Delta} \leq 1 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \Omega_{\Delta}$$

et le Lemme 2.1 que :

$$\|(I + D(\tilde{G}K))^{-1} W_E\|_{i_2} \leq 1$$

Ceci implique qu'il y a désensibilisation dès lors que  $\Delta r (= \Delta H_{o_{yr}})$  appartient à :

$$S_d^e = \{w \in L_2 \mid \|W_E^{-1}w\| \leq \|w\|\}$$

En effet, dans ce cas, on a pour tout  $\alpha \in [0,1]$ , l'inégalité :

$$\|(I + D(\tilde{G}K))^{-1} \alpha \Delta r\| \leq \|W_E^{-1} \alpha \Delta r\| \leq \|\alpha \Delta r\|$$

qui implique :

$$\|\Delta H_{yr}\| \leq \int_0^1 \|[I + D(\tilde{G}K)]^{-1}\| d\alpha \cdot \|\Delta H_{o_{yr}}\| \leq \|\Delta H_{o_{yr}}\|$$

La linéarité de  $W_E$  assure l'équivalence entre performance robuste et désensibilisation.

De façon générale, c'est la linéarisation de  $W_E$  qui spécifie les objectifs locaux (i.e.  $DW_E|_{w(\alpha)}$ ) où  $w(\alpha) = W_E^{-1}(r + \alpha \Delta r)$ . Il n'y a donc plus, dans ce cas, équivalence entre performance robuste et désensibilisation. En effet, la perturbation  $\Delta r (\stackrel{\Delta}{=} \Delta H_{o_{yr}})$ , créée par l'erreur de modèle, peut faire sortir du domaine de fonctionnement où la performance est définie. Notons que l'adéquation entre la désensibilisation vis à vis d'erreurs additives de modèle et la demande de performance asymptotique est liée au fait qu'elles imposent au système des contraintes de même type.

### 5. Atténuation et commande non linéaire

Enfin, nous nous intéressons au problème de l'atténuation des perturbations de sortie. Pour cela, supposons que le système est sujet à une perturbation additive de sortie (figure 5.1) et comparons la variation de sortie associée à cette perturbation sur le système bouclé à celle associée au système équivalent en boucle ouverte.

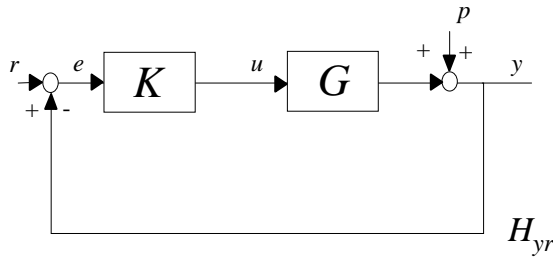


figure 5.1

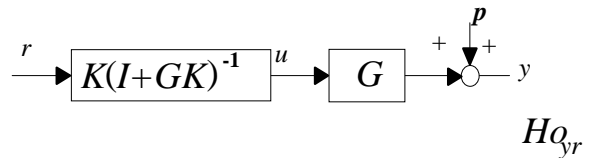


figure 5.2

Posons

$$\tilde{G}u = Gu + p.$$

et comparons l'effet de  $p$  sur les sorties du système commandé en boucle fermée

$$\Delta H_{yr} = \tilde{G}K(I + \tilde{G}K)^{-1} - GK(I + GK)^{-1} \quad (5.1)$$

à l'effet de cette même perturbation, sur le système commandé en boucle ouverte :

$$\Delta H_{o_{yr}} = p \quad (5.2)$$

Rappelons un résultat exprimant la relation entre la perturbation boucle ouverte (5.2) et la perturbation boucle fermée (5.1).

**Théorème 5.1** [DeWa80].

Si  $(I + GK)^{-1}$  et  $\tilde{G}K$  sont  $C^1$ , alors les erreurs introduites par la perturbation  $p$  en sortie de la boucle fermée (i.e.  $\Delta H_{yr}$ ) et en sortie de la boucle ouverte (i.e.  $\Delta H_{o_{yr}}$ ) vérifient :

$$\Delta H_{yr} = \int_0^1 [I + D(GK)]^{-1} d\alpha \cdot p \quad (5.3)$$

où  $D(GK)$  est évalué en  $(I + \tilde{G}K)^{-1}(r + \alpha\Delta r)$  avec  $\Delta r = p$  et  $\alpha \in [0,1]$ .

A nouveau, ce Théorème, combiné avec la proposition 3.1, montre l'intérêt de la norme incrémentale dans le cadre de la commande des systèmes non linéaires.

Nous illustrons cela à travers un exemple simple en supposant, dans un premier temps, qu'il existe un opérateur  $W_r$  linéaire causal et inversible tel que pour tout  $p \in P^e$  et tout  $T \geq T_o$  on ait :

$$\|W_r^{-1}p\|_T \cong \|p\|_T$$

Le problème de l'atténuation «optimale» revient ici à minimiser par un correcteur  $K$  la norme incrémentale de l'opérateur

$$(I + GK)^{-1}W_r$$

En effet, supposons qu'il existe un correcteur  $K$  et une constante  $\varepsilon \ll 1$  tel que

$$\|(I + GK)^{-1}W_r\|_{\Delta} \leq \varepsilon$$

alors, on a :

$$\|(I + D(GK))^{-1}W_r\|_{i_2} \leq \varepsilon$$

et donc pour  $\delta p \in P^e$

$$\|(I + D(\tilde{G}K))^{-1}\delta p\| \leq \varepsilon \|W_r^{-1}\delta p\| \ll \|\delta p\|$$

puisque  $\|W_r^{-1}\delta p\|_T \cong \|\delta p\|_T$ .

Ceci assure

$$\|\Delta H_{yr}\| \ll \|\Delta H_{o_{yr}}\|$$

La généralisation de ces résultats ne pose pas de difficultés particulières (voir le paragraphe précédent)

Ces deux derniers paragraphes montrent que la norme incrémentale pondérée est, à l'instar de la norme  $H_\infty$  pondérée, apte à ramener le problème de la désensibilisation et de l'atténuation par bouclage, à un problème de minimisation de norme incrémentale pondérée.

## V. Lipschitz continuité et stabilité asymptotique<sup>1</sup>

### 1. Introduction

Nous terminons dans ce chapitre l'étude des propriétés associées aux systèmes incrémentalement stables. Nous nous intéressons tout particulièrement aux propriétés de stabilité au sens de Lyapunov, associées à des trajectoires particulières d'un système Lipschitz continu.

Comme nous l'avons rappelé dans l'annexe A, la  $L_2$  stabilité implique la stabilité asymptotique de l'état d'équilibre du système (A.11.1). Plus récemment, Hill et Mohlan [HiMo80] donnent une version locale de ce résultat permettant de traiter le problème de multiples points d'équilibre associés à la commande nulle. Dans ce même article, ils montrent qu'il est nécessaire, dans le contexte non linéaire, de différencier les systèmes  $L_2$ -gain stables (i.e.  $\|y\|_2 \leq \gamma \|u\|_2$ ) des systèmes faiblement  $L_2$ -gain stables ( $\|y\|_2 \leq \gamma \|u\|_2 + \beta$ ); la stabilité asymptotique ne pouvant être déduite que dans le premier cas.

Par ailleurs, dans de multiples applications, garantir la stabilité asymptotique du point d'équilibre associé à la commande nulle n'est pas suffisant, on désire prouver la stabilité des points d'équilibre associés à des commandes constantes, de valeur quelconque.

Les résultats présentés dans ce chapitre montrent que, sous l'hypothèse de la minimalité de la représentation d'état du système, la Lipschitz continuité assure la stabilité asymptotique des points d'équilibre associés aux commandes constantes. En se restreignant à la classe des systèmes dynamiques possédant une représentation d'état générée par des équations différentielles, on démontre que toutes les trajectoires du système (ainsi que la sortie) sont asymptotiquement stables au sens de Lyapunov.

Enfin, nous nous intéressons aux propriétés des systèmes linéaires tangents associés au point d'équilibre du système et démontrons qu'ils sont nécessairement stables et vérifient un critère  $H_\infty$ . Ce dernier point permet de remarquer que des méthodes de commande classiques (gain variable et pseudo - linéarisation) approchent des objectifs incrémentaux au voisinage de la variété d'équilibre du système.

### 2. Lipschitz continuité et conditions initiales.

Dans ce paragraphe, l'opérateur,  $y = H_{x_0} u$  de  $L_2^{m,e}$  dans  $L_2^{p,e}$ , est supposé causal et stationnaire. Rappelons<sup>2</sup> que  $\varphi: \mathbb{R}_2^+ \times X \times L_2^{m,e} \rightarrow X$  et  $r: \mathbb{R}^+ \times X \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  sont

<sup>1</sup>Les résultats présentés dans ce paragraphe ont donné lieu à l'écriture d'un article soumis à IEEE T.A.C..

<sup>2</sup>Voir appendice A.9.

respectivement l'application de transition de l'état et l'application de sortie, associées à la représentation d'état de  $H_{x_0}$

Notons tout d'abord qu'un opérateur  $H_{x_0}$ , non biaisé, possédant un gain incrémental fini est Lipschitz continu. En effet, si  $H_{x_0}(0) = 0$  et  $\|H_{x_0}\|_{\Delta} < \infty$ , on a par définition  $\|H_{x_0}(u) - H_{x_0}(0)\|_2 \leq \eta \|u\|_2$  et donc pour tout  $u \in L_2^m$ ,  $\|H_{x_0}(u)\|_2 \leq \eta \|u\|_2$ .

**Définition 2.1 :** Soit  $Z_e$ , l'ensemble des couples d'équilibres associé à  $H_{x_0}$  défini par :

$$Z_e = \{(x_e, u_e) \in X \times R^m \mid \varphi(t, 0, x_e, u_e) = x_e \quad \forall t \in R^+\}.$$

$Z_e$  est supposé non vide.

On montre que si l'on suppose que tous les états appartenant à  $Z_e$  sont atteignables depuis  $x_0$  et que le système est de gain incrémental fini pour la condition initiale  $x_0$  alors, il existe un système  $L_2$  gain stable associé à chaque couple  $(x_e, u_e)$  de  $Z_e$ .

**Lemme 2.1**

Si l'état  $x_i \in X$  est atteignable depuis  $x_0$  et si  $H_{x_0}$  est de gain incrémental fini alors  $H_{x_i}$  a le même gain incrémental que  $H_{x_0}$ .

**Démonstration :** L'hypothèse d'atteignabilité assure l'existence des entrées :

$$u_1(t) = \begin{cases} \hat{u}(t) & -\bar{t} \leq t \leq 0 \\ \tilde{u}_1(t) & t > 0 \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} \hat{u}(t) & -\bar{t} \leq t \leq 0 \\ \tilde{u}_2(t) & t > 0 \end{cases}$$

telles que  $x(-\bar{t}) = x_0$  et  $x(0) = x_i$ .

$H_{x_0}$  étant incrémentalement stable, on vérifie :

$$\|H_{x_0} u_1 - H_{x_0} u_2\|_2 = \|(H_{x_0} \hat{u} + H_{x_i} \tilde{u}_1) - (H_{x_0} \hat{u} + H_{x_i} \tilde{u}_2)\|_2 \leq \eta \|(\hat{u} + \tilde{u}_1) - (\hat{u} + \tilde{u}_2)\|_2$$

et donc

$$\|H_{x_i} \tilde{u}_1 - H_{x_i} \tilde{u}_2\|_2 \leq \eta \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_2 \quad \forall \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in L_2^m$$

ceci démontre que  $H_{x_i}$  est incrémentalement borné car il est supposé stationnaire.

C.Q.F.D.



Si l'on définit l'opérateur :

$$G_{x_0}[\tilde{u}, \tilde{y}](u) \stackrel{\Delta}{=} H_{x_0}(\tilde{u} + u) - \tilde{y} \quad (2.1)$$

où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{y}$  appartiennent respectivement à  $L_2^{m,e}$  et à  $L_2^{p,e}$ , on montre que  $G_{x_0}[\tilde{u}, \tilde{y}]$  a le même gain incrémental que  $H_{x_0}$ . Ceci n'est pas immédiat puisque  $\tilde{u}$  et  $\tilde{y}$  appartiennent à un espace étendu.

**Lemme 2.2**

Si  $H_{x_0}$  est de gain incrémental fini alors pour tout  $\tilde{u} \in L_2^{m,e}$  et  $\tilde{y} \in L_2^{p,e}$ ,  $G_{x_0}[\tilde{u}, \tilde{y}]$  a le même gain incrémental.

**Démonstration :** Rappelons ici que la constante de Lipschitz d'un opérateur  $H_{x_0}$  sur  $L_2$  et sur l'espace étendu  $L_2^e$  sont égales. En effet, d'après le Théorème A.4.1, la relation  $\|H_{x_0}(u_1) - H_{x_0}(u_2)\|_2 \leq \eta \|u_1 - u_2\|_2$  est vérifiée pour tout  $u_1, u_2 \in L_2^m$  si et seulement si pour tout  $u_1, u_2 \in L_2^{m,e}$  et pour tout  $T \in R^+$  on vérifie  $\|H_{x_0}(u_1) - H_{x_0}(u_2)\|_{2,T} \leq \eta \|u_1 - u_2\|_{2,T}$ .

Dans notre cas, puisque  $H_{x_0}$  est de gain incrémental fini, il existe  $\eta$  tel que pour tout  $\tilde{u} \in L_2^{m,e}$ ,  $\tilde{y} \in L_2^{p,e}$ ,  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in L_2^m$  et  $T \in R^+$  on ait :

$$\|(H_{x_0}(\tilde{u} + \tilde{u}_1) - \tilde{y}) - (H_{x_0}(\tilde{u} + \tilde{u}_2) - \tilde{y})\|_{2,T} \leq \eta \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{2,T}$$

et donc pour tout  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in L_2^m$  :

$$\|G_{x_0}[\tilde{u}, \tilde{y}](\tilde{u}_1) - G_{x_0}[\tilde{u}, \tilde{y}](\tilde{u}_2)\|_2 \leq \eta \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_2$$

C.Q.F.D.

**Remarques :**

- (i) - Le Lemme 2.2 n'implique pas la stabilité incrémentale de  $G_{x_0}[\tilde{u}, \tilde{y}]$ .
- (ii) - Ce résultat reste vrai dans n'importe quel espace fonctionnel  $L_p$ .

Soit  $G_{x_0}[u_e, y_e]$ , le système associé au couple  $(x_e, u_e) \in Z_e$ , où  $y_e = H_{x_e}(u_e)$  (i.e.  $G_{x_e}[u_e, y_e](0) = 0$ ). Le résultat principal de ce paragraphe est maintenant donné :

**Théorème 2.1**

Soit  $\eta$  le gain incrémental de  $H_{x_0}$ , i.e.  $\|H_{x_0}\|_{\Delta} \leq \eta$ . Si tous les états appartenant  $Z_e$  sont atteignables depuis  $x_0$  alors, pour tout couple  $(x_e, u_e) \in Z_e$  fixé, le système associé  $G_{x_e}[u_e, y_e]$  est  $L_2$ -gain stable et de  $L_2$ -gain inférieur ou égal à  $\eta$  (i.e.  $\|G_{x_e}[u_e, y_e]\|_{i_2} \leq \eta$ ).

**Démonstration :** On doit démontrer que pour tout  $(x_e, u_e) \in Z_e$  fixé on a  $\|G_{x_e}[u_e, y_e](u)\|_2 \leq \eta \|u\|_2$  pour tout  $u \in L_2^m$ . Il suffit pour cela d'utiliser les Lemme 2.1 et 2.2 pour démontrer que

$$\|G_{x_e}[u_e, y_e]\|_{\Delta} \leq \eta$$

et conclure, puisque l'opérateur  $G_{x_e}[u_e, y_e]$  est non biaisé.

C.Q.F.D.

**3. Lipschitz continuité et stabilité asymptotique des points d'équilibre**

Sur la base du Théorème 2.1, la stabilité asymptotique des points d'équilibre appartenant à  $Z_e$  est étudiée. Pour cela, une hypothèse permettant de lier la stabilité interne de  $H_{x_0}$  à sa stabilité entrée/sortie est posée.

**H3.1 :** Pour tout couple  $(x_e, u_e) \in Z_e$ , le point d'équilibre  $x_e$  de  $G_{x_0}[u_e, y_e](0)$  est supposé uniformément observable et l'espace d'état de (2.1) est supposé uniformément atteignable depuis  $x_e$ .

Remarque :

- Notons ici que **H3.1** implique l'unicité du point d'équilibre associé à  $u_e$ .

**Théorème 3.1**

Si  $H_{x_0}$  est de gain incrémental fini et **H3.1** est satisfaite, alors, pour tout couple  $(x_e, u_e) \in Z_e$ , le point d'équilibre  $x_e$  associé à  $G_{x_0}[u_e, y_e](0)$  est globalement asymptotiquement stable.

**Démonstration :** Le Théorème 2.1 assure que  $G_{x_e}[u_e, y_e](u)$  est  $L_2$  gain stable, ce qui permet d'utiliser le Théorème A.1.11 pour conclure.

C.Q.F.D.

Remarques :

(i) - Le résultat ici énoncé est possible car les fonctions d'évolution de l'état de  $G_{x_0}[u_e, y_e]$  et de  $H_{x_0}$  sont identiques, à une commande constante près (i.e.  $\varphi_G(t, t_0, x_0, u) = \varphi_H(t, t_0, x_0, u + u_e)$ ).

(ii) - Le Théorème 3.1 prouve que le bouclage permet de rejeter les perturbations de sortie constantes et les commandes constantes. En effet, supposons que le correcteur commandant le système contienne un intégrateur sur l'erreur de poursuite :

$$\dot{e}(t) = K(u - y_m(t))$$

alors, pour toute entrée constante  $u_0$ , sous les hypothèses du Théorème 3.2, l'erreur de poursuite tend asymptotiquement vers zéro (i.e.  $y_m(t) \rightarrow u_0$  quand  $t$  tend vers  $\infty$ ). Le Théorème 3.1 généralise donc les résultats obtenus en [DeWa79].

(iii) - Notons l'intérêt de ce résultat dans le contexte des systèmes linéaires soumis à des non linéarités sans mémoire, où il peut être combiné avec le Théorème du faible gain incrémental<sup>3</sup>, ou tout autre théorème démontrant la stabilité incrémentale du système (Théorème de la passivité (incrémentale), utilisation de multiplieurs constants, de Popov, etc.).

(iv) - Ce théorème pourrait, au vu des résultats de [GlSh], être utilisé pour démontrer la stabilité asymptotique de systèmes comportant des saturations ainsi que de systèmes commandés par des PID, saturés en la commande (l'intégrateur étant gelé pendant la saturation de la commande).

**Corollaire 3.1**

Si  $H_{x_0}$  vérifie les hypothèses du Théorème 3.1 alors la sortie de  $G_{x_0}[u_e, y_e](0)$  est globalement asymptotiquement stable.

**Démonstration :** Ce résultat est assuré par le Théorème 1 de [Wi71a] qui affirme que tout système, Lipschitz continu, possède une représentation d'état dont la fonction de lecture est Lipschitz continue (i.e.  $\exists K$  tel que  $\|y(t)\|_{R^p} = \|r(t, x, 0) - r(t, 0, 0)\|_{R^p} \leq K\|x - 0\|_X$ )

C.Q.F.D.

---

<sup>3</sup>Voir appendice A.14.

Ci dessous l'hypothèse **H3.1** concernant les points d'équilibre du système est affaiblie, afin d'obtenir des résultats plus locaux et de pouvoir considérer le problème des points d'équilibre multiples associés à une même commande constante.

**Définition 3.1** : Soit  $\Omega_e(u_e)$  l'ensemble de tous les états d'équilibre de  $H_{x_0}$  associés à la commande constante  $u_e \in R^m$ , i.e. :

$$\Omega_e(u_e) = \{x_m \in X \mid \varphi(t, 0, x_m, u_e) = x_m \quad \forall t \in R^+\}$$

On suppose qu'il existe au moins une commande constante,  $u_e \in R^m$ , telle que l'ensemble  $\Omega_e(u_e)$  soit non vide et l'on pose :

**H3.2** : Il existe  $d_1 > 0$  tel que  $X_1 = \{x \in X \mid d(x, \Omega_e(u_e)) \leq d_1\}$  soit uniformément atteignable depuis  $\Omega_e(u_e)$  et détectable depuis  $\Omega_e(u_e)$ .

### **Théorème 3.2**

Sous **H3.2**, si  $H_{x_0}$  est de gain incrémental fini et si tous les états de  $\Omega_e(u_e)$  sont atteignables depuis  $x_0$  alors il existe  $d_2 > 0$ , tel que toutes les trajectoires partant de  $X_2 = \{x: d(x, \Omega(u_e)) \leq d_2\}$ , sous l'action de la commande  $u_e$ , restent dans  $X_1$  et approchent asymptotiquement  $\Omega_e(u_e)$ .

**Démonstration** : Le Théorème 2.1 assure que  $G_{x_e}[u_e, y_e](u)$  est  $L_2$  gain stable, il ne nous reste plus qu'à utiliser le Théorème 6 en [HiMo80] pour conclure. Ce Théorème 6 est une version locale des théorèmes de stabilité asymptotique donnés en [Wil71a et Wil72a]. Ces résultats reposent sur le concept de dissipativité introduit en [Wil72a] qui associe à un système  $L_2$  gain stable, une fonction dépendant de l'état du système qui est, sous certaines hypothèses de minimalité de la représentation d'état du système, une fonction de Lyapunov pour le système. Les conditions de détectabilité et d'atteignabilité assurent l'existence de deux fonctions de classe  $K$  encadrant la fonction de Lyapunov (voir tout particulièrement [Ha] pour une discussion entre stabilité au sens de Lyapunov et les fonctions de classe  $K$ ,  $L$  et  $KL$ ).

C.Q.F.D.

Remarques :

(i) - On peut modifier les hypothèses concernant l'atteignabilité et la détectabilité de l'état, voir par exemple [ByIsWi], [So], [HiMo77&80a] et [MoVaVi].

(ii) - En [ViVa], les auteurs considèrent des systèmes localement  $L_p$  stables, (i.e. l'amplitude des signaux d'entrée est bornée dans le temps).

**4. Lipschitz continuité et stabilité du mouvement.**

Nous allons démontrer que la continuité entrée/sortie garantit, sous certaines hypothèses, la stabilité des trajectoires du système au sens de Lyapunov.

Pour cela, on suppose que la fonction de l'évolution de l'état,  $\varphi$ , associée à  $H_{x_{0r}}$ , est générée par une l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = r(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_{0r} \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^p$ ,  $x(t) \in R^n$  et où  $f, r$  sont supposées  $C^1$  et de dérivés partielles bornées sur leur domaine de définition.

On appelle mouvement non perturbé, associé à  $H_{x_{0r}}$ , la solution  $x_r(t)$  de l'équation différentielle (4.1), associée à l'entrée particulière  $u_r(t)$  et à la condition initiale  $x_{0r}$  (i.e.  $x_r(t) = \varphi(t, t_0, x_{0r}, u_r(t))$ ).

Nous allons démontrer que la continuité entrée/sortie garantit que les trajectoires du système sont Lyapunov stables. Pour cela, nous rappelons la définition suivante :

**Définition 4.1 :** [Zu p.49] Le mouvement non perturbé  $x_r(t)$ , est dit *uniformément asymptotiquement stable* au sens de Lyapunov si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $t \geq 0$  et  $\|x_0 - x_{0r}\| \leq \delta$ , on ait

$$\|\varphi(t, 0, x_0, u_r(t)) - x_r(t)\| \leq \varepsilon$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, 0, x_0, u_r(t)) - x_r(t)\| = 0$$

Si ces deux propriétés sont vraies pour tout  $x_0 \in X$ , le mouvement non perturbé est dit *globalement uniformément asymptotiquement stable*.

Si l'on associe à l'entrée  $u_r(t) \in L_2^{m,e}$ , le système :

$$y_G = G_{x_0}[u_r, y_r](\bar{u}) \stackrel{\Delta}{=} H_{x_0}(u_r + \bar{u}) - y_r \quad (4.2)$$

où  $y_r = H_{x_0}(u_r)$ , nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**Théorème 4.1**

Si  $H_{x_0}$  est de gain incrémental fini et si pour l'entrée  $u_r(t) \in L_2^{m,e}$  donnée,  $G_{x_0}[u_r, y_r]$  possède un point d'équilibre uniformément observable et un espace d'état uniformément atteignable (depuis son point d'équilibre) alors, le mouvement non perturbé associé à  $u_r(t)$  est globalement uniformément asymptotiquement stable.

**Démonstration :** On démontre, dans un premier temps, que la fonction d'évolution associée à  $G_{x_0}[u_r, y_r]$  est égale à la différence entre le mouvement non perturbé et le mouvement perturbé. Par ailleurs, les hypothèses permettent d'assurer que la fonction d'évolution de  $G_{x_0}[u_r, y_r]$  tend asymptotiquement vers son point d'équilibre. Il en résulte que le mouvement perturbé tend asymptotiquement vers le mouvement non perturbé.

Dans un premier temps, définissons les nouvelles variables :

$$x(t) = x_r(t) + \bar{x}(t), \quad u(t) = u_r(t) + \bar{u}(t)$$

et la fonction :

$$F(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \stackrel{\Delta}{=} f(\bar{x}(t) + x_r(t), \bar{u}(t) + u_r(t)) - f(x_r(t), u_r(t))$$

L'équation différentielle associée à la variation de  $x(t)$  par rapport à  $x_r(t)$  est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = F(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ \bar{x}(0) = x_0 - x_{0r} \end{cases} \quad (4.3)$$

En notant que  $\bar{x} = 0$  est le point d'équilibre de (4.3) (i.e.  $F(t, 0, 0) = 0$ ), démontrer la stabilité asymptotique de  $\bar{x} = 0$  revient à prouver la stabilité asymptotique du mouvement non perturbé de  $H_{x_0}$  puisque  $x(t) - x_r(t) = \bar{x}(t)$ .

On prouve la stabilité asymptotique de (4.3) en remarquant que  $\bar{x}(t)$  est une fonction d'évolution possible pour  $G_{x_0}[u_r, y_r]$ . En effet, si l'on définit :

$$r_G(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \stackrel{\Delta}{=} r(\bar{x}(t) + x_r(t), \bar{u}(t) + u_r(t)) - r(x_r(t), u_r(t))$$

alors on a

$$y_G = r_G(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à utiliser le Lemme 2.2, et noter que  $G_{x_0}[u_r, y_r]$  est, par définition, non biaisé et donc incrémentalement stable. Par ailleurs,  $\bar{x} = 0$  est uniformément observable et l'espace d'état de  $G_{\bar{x}_0}[\bar{u}, \bar{y}]$  est uniformément atteignable depuis  $\bar{x} = 0$ . Il en résulte que  $\bar{x} = 0$  est globalement uniformément asymptotiquement stable et que le mouvement non perturbé de  $H_{x_{0r}}$  est lui même globalement uniformément asymptotiquement stable.

C.Q.F.D.

Remarque :

- La sortie du système est, elle même, globalement uniformément asymptotiquement stable; i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $t \geq 0$  et  $\|x_0 - x_{0r}\| \leq \delta$ , on ait

$$\|H_{x_0}(u_r(t)) - H_{x_{0r}}(u_r(t))\| \leq \varepsilon$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{x_0}(u_r(t)) - H_{x_{0r}}(u_r(t))\| = 0.$$

On utilise la Lipschitz continuité de  $r$  ( $r$  est  $C^1$  et de dérivées partielles bornées).

### 5. Norme incrémentale, pseudo linéarisation, et gains variables.

Associons maintenant au couple  $(x_e, u_e) \in Z_e$ , le système  $\bar{y} = DG_{u_e} \bar{u}$ , défini comme la linéarisation de (4.1) autour de  $(x_e, u_e)$  et admettant la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = F\bar{x} + G\bar{u} \\ \bar{y} = H\bar{x} + J\bar{u} \\ \bar{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $\bar{u} \in R^m$ ,  $\bar{x} \in R^n$ ,  $\bar{y} \in R^p$ ,  $F = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$ ,  $G = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$ ,  $H = \frac{\partial r}{\partial x}(x_e, u_e)$ .  $J$  est supposé nul pour simplifier l'exposé.

**Corollaire 5.1**

Si  $H_{x_0}$  vérifie les hypothèses du Théorème 2.1 alors, pour tout couple  $(x_e, u_e)$  appartenant à  $Z_e$ , la linéarisation (5.1) est de  $L_2$ -gain  $\gamma \leq \eta$ , i.e.  $\|DG_{u_e}\|_{\infty} \leq \eta$ .

Si de plus,  $(F, G)$  est commandable et  $(H, F)$  est observable, il existe une matrice,  $P \in R^{n \times n}$ , symétrique et strictement définie positive telle que

$$PF + F^T P + \tilde{\eta}^{-2} PGG^T P + H^T H = 0 \quad \forall \tilde{\eta} > \eta.$$

**Démonstration :** On peut utiliser le Lemme 2.1 assurant que le système associé à (4.1) est de gain incrémental inférieur ou égal à  $\eta$ . Il suffit ensuite d'utiliser le Lemme IV.2.1, assurant que la linéarisation autour de la trajectoire nulle est de  $L_2$ -gain inférieur ou égal à  $\eta$  (i.e.  $\gamma \leq \eta$ ).

On peut également utiliser un résultat donné en [VDS91], liant le  $L_2$ -gain du système non linéaire à celui de sa linéarisation au voisinage de zéro. La deuxième partie du Corollaire est classique (voir par exemple [DGFK]).

C.Q.F.D.

**Remarques :**

(i) - D'après le Corollaire 5.1, le système (4.1) est, sous l'action de  $u_e$ , localement exponentiellement stable dans un voisinage du point d'équilibre  $x_e$ .

(ii) - Ce résultat doit être comparé à des méthodes classiques de commande telle celle des gains variables, ou toute autre technique garantissant les propriétés des linéaires tangents sur la variété d'équilibre, (voir par exemple [ReMo, WaRu, BaRu, Ru, HuRu92a&b, GuRu]).



## VI. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité incrémentale

### 1. Introduction

L'idée ici poursuivie consiste à remplacer des conditions de type entrée/sortie par des conditions sur la représentation d'état du système. Ce type de problème fût abordé dans le contexte linéaire par Yakubovich et Kalman qui établirent le lien entre les conditions fréquentielles données par Popov et l'existence d'une matrice positive vérifiant une inégalité matricielle (i.e. le Lemme réel positif ou encore le Lemme de Yakubovich-Kalman-Popov [Le]). Dans les années 70, Willems montre le lien existant entre ce Lemme, certains problèmes d'optimisation quadratique et le problème de l'existence de solutions associées aux équations de Riccati [Wil71b]. Il élargit l'approche et l'étend au cadre non linéaire à travers l'introduction des concepts se rapportant à la dissipativité des systèmes [Wil72a&b]. Dans cet article, il reconduit la vérification de la dissipativité des systèmes à un problème d'optimisation ([Th.1, Wil72a] voir Th. A.10.1). Sur cette base, il propose des conditions algébriques (qui ne sont rien d'autre que des équations de type Hamilton-Jacobi) assurant la dissipativité des systèmes.<sup>1</sup> Ces résultats sont repris en [HiMo76].

Dans ce paragraphe, utilisant la dissipativité d'un système augmenté associé à notre système initial, nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes assurant la stabilité incrémentale du système non linéaire initial.

### 2. Cas non linéaire

Considérons le système  $\bar{y}(t) = H_{\bar{x}_0}(\bar{u}(t))$ , possédant la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) + g(\bar{x})\bar{u} \\ \bar{y} = h(\bar{x}) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\bar{u}(t) \in R^m$ ,  $\bar{y}(t) \in R^p$  et  $\bar{x}(t) \in R^n$ .  $f, g, h$  sont  $C^1$  et de dérivées partielles bornées. On suppose qu'il existe  $\bar{x}_e \in R^n$  tel que  $f(\bar{x}_e) = 0$  et, sans perte de généralité, on suppose  $h(\bar{x}_e) = 0$  et  $\bar{x}_e = 0$ . Enfin nous supposons que le système vérifie l'hypothèse :

**H2.1** : L'espace d'état du système (2.1) est atteignable depuis le point d'équilibre  $\bar{x}_e$ .

<sup>1</sup>Systèmes non linéaires ayant une représentation d'état générée par une équation différentielle de dimension finie.

**Théorème 2.1**

Soit  $\eta$ , une constante positive fixée. Le système non linéaire (2.1) est incrémentalement stable, de gain incrémental inférieur ou égal à  $\eta$ , s'il existe une fonction  $V$ , définie de  $R^{n \times n}$  dans  $R, C^1$ , qui satisfait les conditions suivantes pour tout  $x_1, x_2 \in R^n$  :

(i)  $V(0,0) = 0$

(ii)  $V(x_1, x_2) \geq 0$

(iii) 
$$\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} f(x_1) + \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} f(x_2) + \frac{1}{4} \eta^{-2} \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} g(x_1) g^T(x_1) \frac{\partial V^T(x_1, x_2)}{\partial x_1} + (h(x_1) - h(x_2))^T (h(x_1) - h(x_2)) \leq 0$$

(iv) 
$$\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} g(x_1) + \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} g(x_2) = 0$$

**Démonstration :** Associons au système (2.1), le système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)u_1 \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + g(x_2)u_2 \\ y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{10} \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour simplifier les notations, on pose  $x^T = (x_1^T, x_2^T)$  et l'on définit les nouvelles variables :

$$u = u_1 - u_2$$

$$y = y_1 - y_2$$

Le système 2.1 est incrémentalement stable si et seulement si pour tout  $u, u_2 \in L_2^m$ , on a

$$\|y\|_2 \leq \eta \|u\|_2 \quad (2.3)$$

lorsque  $x(0) = 0$ .

Nous utilisons maintenant des arguments classiques se rapportant à la dissipativité des systèmes dynamiques. Pour cela, définissons « supply rate » fonction suivante :

$$w(t) = \eta^2 \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2 \quad (2.4)$$

et rappelons que (2.3) est vérifiée si et seulement si le système (2.2) est dissipatif en fonction de  $w(t)$  ([Wil72a&b, HiMo76]).

Le Théorème A.10.1 assure que (2.2) est dissipatif si et seulement si l'intégrale suivante est finie, pour toute condition initiale  $x \in R^{2n}$  :

$$V_a(x) = \sup_{\substack{x \rightarrow \\ T > 0}} \int_0^T w(t) dt \quad (2.5)$$

Le sup. étant pris sur  $u, u_2 \in L_2^m$ , et  $y(t)$  correspondant à la réponse du système (2.2) pour les entrées  $u(t)$  et  $u_2(t)$ .

$V_a(x)$  n'est pas «available» fonction du système (2.1).

Démontrons maintenant que les conditions du Théorème 2.1 garantissent la finitude de l'intégrale (2.5).

Pour cela, on définit l'intégrale :

$$J(x_0, u, u_2, T) = \int_0^T (\|y(t)\|^2 - \eta^2 \|u(t)\|^2) dt \quad (2.6)$$

où  $y(t)$  est la sortie du système (2.2) pour les entrées  $u, u_2$  et la condition initiale  $x_0^T = (x_{10}^T, x_{20}^T)$ .

Si l'on ajoute à (2.6) les deux quantités nulles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)u + g(x_1)u_2 - \dot{x}_1) &= 0 \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} (f(x_2) + g(x_2)u_2 - \dot{x}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} J(x_0, u, u_2, T) &= \int_0^T [\|y\|^2 - \eta^2 \|u\|^2 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} (f(x_2) + g(x_2)u_2 - \dot{x}_2)] dt + \\ &+ \int_0^T \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)u + g(x_1)u_2 - \dot{x}_1) dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

Une intégration par parties du terme  $-\frac{\partial V}{\partial x} \dot{x}$  conduit à :

$$\begin{aligned} J(x_0, u, u_2, T) &= -[V(x(t))]_0^T + \int_0^T [\|y\|^2 - \eta^2 \|u\|^2 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} (f(x_2) + g(x_2)u_2)] dt + \\ &+ \int_0^T \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)u + g(x_1)u_2) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

Posons maintenant :

$$\Psi = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} f(x_1) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} f(x_2) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} g(x_1)u + \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} g(x_1) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} g(x_2) \right] u_2 - \eta^2 u^T u + y^T y$$

que l'on réécrit en complétant le carré comme :

$$\Psi = - \left\| \eta u - \frac{1}{2} \eta^{-1} g(x_1)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \right\|^2 + \frac{1}{4} \eta^{-2} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} g(x_1) g(x_1)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}^T$$

$$+ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} f(x_2) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} f(x_1) + y^T y + \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} g(x_1) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} g(x_2) \right] u_2$$

En utilisant les conditions (iii) et (iv), on obtient alors l'inégalité:

$$\Psi \leq - \left\| \eta u - \frac{1}{2} \eta^{-1} g(x_1)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \right\|^2 \quad (2.10)$$

qui assure pour tout  $u, u_2 \in L_2^{m,e}$  et tout  $T \in R^+$ , l'inégalité :

$$J(x_0, u, u_2, T) + [V(x(t))]_0^T \leq - \int_0^T \left\| \eta u - \frac{1}{2} \eta^{-1} g(x_1)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \right\|^2 dt \leq 0$$

Par ailleurs, la condition (ii) assure

$$J(x_0, u, u_2, T) - V(x(0)) \leq -V(x(T)) \leq 0$$

et donc nécessairement, pour  $x \in R^{2n}$  :

$$V_a(x) < \infty$$

C.Q.F.D.

L'obtention d'une condition nécessaire et suffisante est un problème difficile et bien connu dans le contexte de la commande optimale (voir [Ka60], [Bo], [Be76]). L'obtention de telles conditions est passé par une caractérisation des propriétés nécessairement satisfaites par la fonction de coût optimal (voir par exemple [Fri], [Jam93a] et [Vi]) et par un élargissement de la notion de solutions associées aux équations d'Hamilton-Jacobi (voir par exemple [Fri] et de façon plus générale [CrLi]).

Remarque :

(i)- En [HiMo76] « *available* » fonction est supposée différentiable lorsqu'elle existe.<sup>2</sup>

(ii)- En [HiMo80a], les auteurs contournent le problème en supposant le système fortement commandable.

Nous allons ci-dessous énoncer un théorème exprimant des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (2.1) soit incrémentalement stable. Ce résultat est la conséquence d'un résultat donné en [Jam93a] concernant les systèmes dissipatifs. Il est en effet montré que « *available* » fonction d'un système dissipatif possède toujours une

<sup>2</sup>Il semble que la source de cette hypothèse doive être cherchée dans l'article [Mo] et dans [AnMo], où les auteurs indiquent que des hypothèses sur la différentiabilité de  $f, g$  et  $w$  sont suffisantes pour garantir la différentiabilité de la fonction de coût optimal, les références qu'ils indiquent infirment cela (tout particulièrement [KA60]).

enveloppe semi-continue inférieurement; à partir de cela, des conditions nécessaires et suffisantes sont obtenues à partir des résultats récents sur les solutions d'équations aux dérivées partielles [CrLi].

**Théorème 2.2**

Soit  $\eta$  une constante positive fixée. Le système non linéaire (2.1) est incrémentalement stable, de gain incrémental inférieur ou égal à  $\eta$ , si et seulement si il existe une fonction réelle,  $V$  définie de  $R^{n \times n}$  dans  $R$ , telle que les condition (i), (ii) du Théorème 2.1 soient satisfaites pour tout  $x_1, x_2 \in R^n$  et telle que  $V$  vérifie les inégalités aux dérivées partielles (iii) et (iv) au sens faible (viscosité); i.e. pour chaque  $\varphi \in C^1(R^{2n})$  et pour tout minimum local  $x_0^T = (x_{01}^T, x_{02}^T) \in R^{2n}$  de  $V_* - \varphi$ , les deux équations suivantes doivent être vérifiées :

$$(v) \quad \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_1} f(x_{01}) + \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_2} f(x_{02}) + \frac{1}{4} \eta^{-2} \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_1} g(x_{01}) g^T(x_{01}) \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_1} + (h(x_{01}) - h(x_{02}))^T (h(x_{01}) - h(x_{02})) \leq 0$$

$$(vi) \quad \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_1} g(x_{01}) + \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_2} g(x_{02}) = 0$$

$V_*(x)$  est l'enveloppe semi-continue inférieurement de  $V(x)$  définie comme :

$$V_*(x) = \liminf_{z \rightarrow x} V(z)$$

**Démonstration :** Le résultat énoncé dans [Jam93a] impose aux « storage » fonctions d'être localement bornées; cette hypothèse est ici satisfaite, car nous avons supposé que l'espace d'état du système (2.1) était atteignable depuis  $x$ . Ceci assure que toutes les « storage » fonctions sont bornées ( [Th.2 (ii) , Wil72a]).

Remarques :

(i) - En [Jam93b], un schéma numérique permettant d'approcher la solution d'une équation aux dérivées partielles, dans la cadre de la norme induite 2, est donné.

### 3. Les systèmes linéaires comme exemple

Cette partie a pour simple but de démontrer, à l'aide du Théorème 2.1, un fait classique d'analyse fonctionnelle : tout système linéaire borné est continu.

Pour cela, considérons que  $y(t) = T_{x_0} u(t)$  est un système linéaire invariant, possédant la représentation minimale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^p$  et  $x(t) \in R^n$ .

#### Corollaire 3.1

*Le système linéaire (3.1) est incrémentalement stable et de gain incrémental inférieur ou égal à 1 si et seulement s'il est de gain inférieur ou égal à 1.*

**Démonstration :** La démonstration de ce corollaire est classique et repose sur la simple égalité :

$$T_{x_0}(u_1 - u_2) = T_{x_0}(u_1) - T_{x_0}(u_2).$$

Nous allons, en fait, utiliser le Théorème 2.1 pour démontrer qu'un système borné est nécessairement incrémentalement stable. Pour cela, rappelons le Lemme réel borné (Anderson, pour une démonstration voir [DGKF]) :

#### Théorème 3.1

*Le système (3.1) est de norme induite 2 inférieure ou égale à 1 si et seulement si il existe une matrice,  $P \in R^{n \times n}$ , symétrique, définie positive telle que :*

$$PA + A^T P + PBB^T P + C^T C = 0 \quad (3.2)$$

**Démonstration du Corollaire 3.1 :** Considérons la fonction quadratique :

$$V(x_1, x_2) = x_1^T P x_1 + x_2^T P x_2 - 2x_1^T P x_2$$

Les conditions (i) et (ii) du Théorème 2.1 sont satisfaites.

La condition (iv) est vérifiée, en effet :

$$\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} B + \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} B = (2x_1^T P - 2x_2^T P)B + (2x_2^T P - 2x_1^T P)B = 0$$

Calculons maintenant le membre de gauche de l'inégalité (iii) :

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} A x_1 + \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} A x_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} B B^T \frac{\partial V^T(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ + (C x_1 - C x_2)^T (C x_1 - C x_2) \end{aligned}$$

qui peut se réécrire comme :

$$\Pi = (x_1^T, x_2^T) \begin{bmatrix} PA + A^T P + PBB^T P + C^T C & -PA - A^T P - PBB^T P - C^T C \\ -PA - A^T P - PBB^T P - C^T C & PA + A^T P + PBB^T P + C^T C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Le Théorème implique que la condition (iii) est vérifiée, pour tout  $x_1, x_2 \in R^n$ , puisque  $\Pi = 0$ .

C.Q.F.D.

## VII. Synthèse incrémentale

### 1. Introduction

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous explicitons les conséquences de la définition de la stabilité interne<sup>1</sup> sur la synthèse d'un correcteur incrémental.

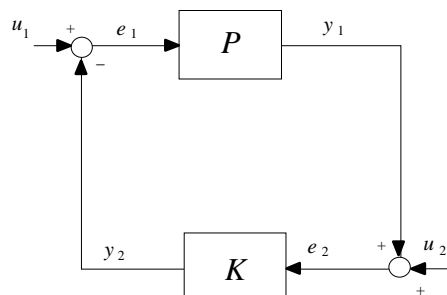
En fait, sur la base d'un résultat énoncé en [Wi70a], on montre que garantir la stabilité interne du système bouclé est équivalent à garantir que toutes les linéarisations du correcteur stabilisent le système non linéaire.

Il découle de ce résultat que la synthèse d'un correcteur assurant la stabilité incrémentale du système bouclé n'est possible que, si et seulement si, il existe un correcteur linéaire stationnaire rendant le système incrémentalement stable. Cette équivalence est due à la définition de la stabilité interne d'un système bouclé qui ajoute, de façon systématique, un signal quelconque appartenant à  $L_2$ , sur les mesures issues du système commandé : le correcteur ne dispose pas « d'information » sur le point de fonctionnement du système commandé.

Dans la pratique, les mesures comportent ces informations. Pour tenir compte de cette remarque, nous proposons de modifier la définition de la stabilité interne en restreignant l'amplitude des signaux perturbateurs à l'aide d'opérateurs incrémentalement stables. Cette modification, a pour intérêt majeur de nous laisser dans le cadre des problèmes d'optimisation quadratique<sup>2</sup>.

Dans le deuxième paragraphe, nous proposons une solution au problème de la synthèse incrémentale par retour d'informations complètes (on mesure l'état du système et la perturbation agissant sur le système). Ce paragraphe permet de souligner les diverses difficultés de ce problème.

### 2. Le paradoxe de la stabilité interne



<sup>1</sup>Voir appendice A.13

<sup>2</sup>On pourrait s'interroger ici sur l'intérêt de rester dans  $L_2$  et se demander s'il ne vaudrait pas mieux travailler dans  $B_\infty$ . La réponse à cette question en pose une autre : sait-on résoudre un problème dans  $B_\infty$  ?



figure 2.1

Supposons ici que l'on sache calculer un correcteur  $K$  assurant la stabilité incrémentale du système bouclé de la figure 2.1. De plus, supposons  $H$  et  $K$  de classe  $C^1$ .

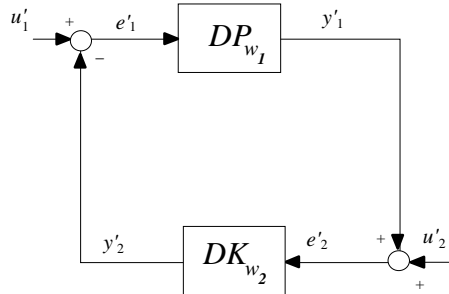


figure 2.2

**Théorème 2.1** [Wi70a]

Le système bouclé de la figure 2.1 étant bien posé, si l'on suppose que les opérateurs  $H$  et  $K$  sont dérivables sur  $L_2^c$  alors, le système bouclé est incrémentalement stable si et seulement si le système linéarisé de la figure 2.2 est incrémentalement stable pour tout  $(w_1, w_2) \in L_2^c \times L_2^c$  (uniformément en  $(w_1, w_2)$ ).

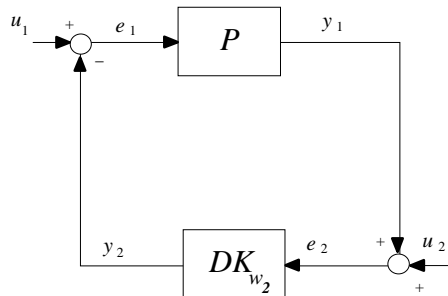


figure 2.3

Le corollaire suivant est immédiat :

**Corollaire 2.1**

Si le système bouclé de la figure 2.1 vérifie les hypothèses du Théorème 2.1 alors le système bouclé, constitué de toute linéarisation de  $K$  et du système commandé  $P$  (figure 2.3), est incrémentalement stable.

Ce résultat est lié au fait qu'aucune information statique n'est échangée entre le système  $P$  et le correcteur  $K$ .

Remarque :

- De façon parallèle et par une approche différente, un résultat similaire est proposé en [Ge].

Le corollaire 2.1 montre la limite de à la définition de la stabilité interne d'un système bouclé. En fait, dans la pratique, les sorties du processus commandé contiennent une « information statique » permettant de connaître la zone de fonctionnement du système. Ceci montre que, pour rester dans  $L_2$ , il faut modifier la définition de la stabilité interne afin de pouvoir limiter l'amplitude des perturbations exogènes agissant sur les sorties du système.

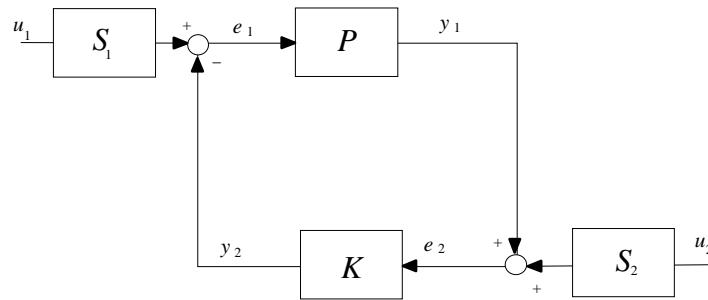


figure 2.4

Nous introduisons pour cela, entre les entrées du système bouclé et les perturbations  $u_1$  et  $u_2$ , les opérateurs de saturation  $S_1$  et  $S_2$  (figure 2.4) définis comme :

$$S_i = \text{diag}(f_{i,1}, \dots, f_{i,n})$$

où les fonctions  $f_{i,j}$  sont des saturations régulières (i.e.  $C^1$ ) (figure 2.5). On peut démontrer, sans difficulté, que la norme incrémentale associée aux opérateurs  $S_1$  et  $S_2$  est finie. Le problème de la synthèse peut ainsi toujours être traité dans  $L_2$ .

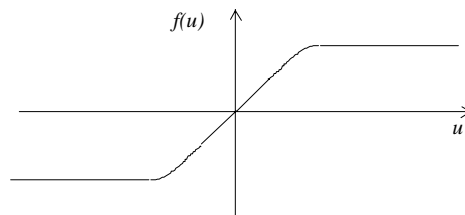


figure 2.5

### 3. Une condition suffisante

Soit un système dynamique,  $y = H(u, w)$ , de représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + l(x)u + g(x)w \\ y &= h(x) + Du \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $u(t) \in R^s$ ,  $w(t) \in R^m$ ,  $z(t) \in R^p$  et  $x(t) \in R^n$ .  $f$ ,  $g$ ,  $h$  sont  $C^1$  et de dérivées partielles bornées. On suppose qu'il existe  $x_e \in R^n$  tel que  $f(x_e) = 0$  et sans perte de généralité, on suppose  $h(x_e) = 0$  et  $x_e = 0$ .

On suppose que l'état, ainsi que la perturbation agissant sur (3.1), sont mesurés et l'on cherche un correcteur  $K$ , dépendant de  $x$  et de  $w$ , tel que le système (3.1), bouclé par  $K$  ( $u = -K(x, w)$ ), soit incrémentalement stable et de gain incrémental inférieur à  $\eta$ .

Remarque :

- On cherche ici un correcteur sous optimal. Le problème optimal correspond à chercher le  $\eta$  minimum.

Posons les hypothèses suivantes:

**H3.1 :** Il existe une fonction  $V(x_1, x_2)$ , de  $R^{n \times n}$  dans  $R$ ,  $C^1$  et définie positive telle que  $V(0,0) = 0$  et vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & V_{x_2} l(x_2) + V_{x_1} l(x_1) = 0 \\ (ii) \quad & V_{x_2} g(x_2) + V_{x_1} g(x_1) = 0 \\ (iii) \quad & V_{x_1} f(x_1) + V_{x_2} f(x_2) + \frac{1}{4} \eta^{-2} V_{x_2} g(x_2) g(x_2)^T V_{x_2}^T - \frac{1}{4} V_{x_1} l(x_1) l(x_1)^T V_{x_1}^T - \\ & - V_{x_1} l(x_1) D^T (h(x_1) - h(x_2)) = 0 \end{aligned}$$

**H3.2 :** Il existe  $\gamma \leq \eta$  et une fonction,  $S(x_1, \hat{x}_2)$ , de  $R^{n \times n}$  dans  $R$ ,  $C^1$  et définie positive telle que  $S(0,0) = 0$  et vérifiant l'équation suivante :

$$(iv) \quad S_{x_e} f_e(x_e) + h_r^T(x_e) h_r(x_e) + \gamma^2 \alpha_1(x_e)^T \alpha_1(x_e) - \alpha_2(x_e)^T \alpha_2(x_e) = 0$$

où

$$\begin{aligned} x_e^T &= (x_1^T, \hat{x}_2^T) \\ h_r(x_e) &= h(x_1) + D(u^*(x_e)) \end{aligned}$$

$$f_e(x_e) = \begin{pmatrix} f(x_1) + l(x_1)u^*(x_e) \\ f(\hat{x}_2) - g(\hat{x}_2)w^*(x_e) \end{pmatrix}, \quad l_e(x_e) = \begin{pmatrix} l(x_1) \\ l(\hat{x}_2) \end{pmatrix}, \quad g_e(x_e) = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(\hat{x}_2) \end{pmatrix}$$

$$u^*(x_e) = -\frac{1}{2}(D^T D)^{-1}[l(x_1)^T V_{x_1}(x_e)^T + 2D^T(h(x_1) - h(\hat{x}_2))]$$

$$w^*(x_e) = \frac{1}{2}g(x_1)^T V_{x_1}(x_e)^T$$

$$\alpha_1(x_e) = \frac{1}{2\gamma^2}g_e(x_e)^T S_{x_e}(x_e)$$

$$\alpha_2(x_e) = -\frac{1}{2}l_e(x_e)^T S_x(x_e)$$

**H3.3** : Il existe une fonction  $W(x, z)$ , de  $R^{2n \times 2n}$  dans  $R$ ,  $C^1$  et définie positive telle que  $W(0,0) = 0$  et vérifiant les équations suivantes :

$$(v) \quad W_{x_e} F_e(x_e) + W_{z_e} F_e(z_e) + \frac{1}{4}\eta^{-2}W_{x_e} G_e(x_e)G_e(x_e)^T W_{x_e}^T + \\ + (H_e(x_e) - H_e(z_e))^T (H_e(x_e) - H_e(z_e)) = 0$$

$$(vi) \quad W_{x_e} G_e(x_e) + W_{z_e} G_e(z_e) = 0$$

où

$$F_e(x_e) = \begin{pmatrix} f(x_1) + l(x_1)u^*(x_e) + l(x_1)u_2^*(x_e) \\ f(\hat{x}_2) + l(\hat{x}_2)u_2^*(x_e) - g(\hat{x}_2)w^*(x_e) \end{pmatrix}$$

$$u_2^*(x_e) = -\frac{1}{2}l_e(x_e)^T S_x(x_e)$$

$$G_e(x_e) = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(\hat{x}_2) \end{pmatrix}$$

$$h_e(x_e) = h(x_1) + D[u^*(x_e) + u_2^*(x_e)]$$

et  $z_e^T = (z_1^T, z_2^T)$

**Théorème 3.1**

Si H3.1, H3.2 et H3.3 sont satisfaites, alors le problème de la synthèse d'un correcteur par retour d'informations complètes admet une solution dynamique donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_2 &= f(\hat{x}_2) + l(\hat{x}_2)u_2^*(x, \hat{x}_2) + g(\hat{x}_2)w^*(x, \hat{x}_2) + g(\hat{x}_2)w \\ u &= u^*(x, \hat{x}_2) + u_2^*(x, \hat{x}_2)\end{aligned}$$

**Démonstration :** Elle est réalisée en deux étapes. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le calcul de la norme incrémentale nécessite l'introduction d'un système fictif, doublant la dimension de l'état du système considéré. Sur cette base nous ramenons le problème de synthèse à la résolution d'un problème de jeux différentiels à somme nulle. Notons que cette première étape nécessite la résolution d'un problème doublement singulier en la commande et en la perturbation.

La solution, obtenue lors de cette première étape, dépend des variables d'état du système augmenté. Elle dépend donc explicitement de variables d'état non mesurées (les variables d'état du système fictif). La recherche d'une solution ne dépendant que des variables mesurées oblige à considérer un problème de jeux différentiels à information incomplète (l'un des joueurs ne possède qu'une partie de l'état du système). La deuxième étape de cette démonstration propose une solution à ce type de problème.

**Etape 1**

Considérons le système augmenté :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + l(x_1)u - l(x_2)u_2 + g(x_1)w + g(x_1)w_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + l(x_2)u_2 + g(x_2)w_2 \\ y &= h(x_1) - h(x_2) + Du \\ x_1(0) &= x_0 \\ x_2(0) &= x_0\end{aligned}\tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned}u &= u_1 - u_2, \\ w &= w_1 - w_2.\end{aligned}$$

et posons

$$\begin{aligned}x_t^T &= (x_1^T, x_2^T) \\ w_t^T &= (w_1^T, w_2^T) \\ u_t^T &= (u^T, u_2^T)\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour simplifier l'exposé, on pose  $\eta = 1$ .

Maintenant, on associe au système 3.2, l'intégrale :

$$J(u_t, w_t) = \int_0^T (\|y(t)\|^2 - \|w(t)\|^2) dt \quad (3.3)$$

et l'on cherche une commande  $u_t$  rendant le système (3.1) incrémentalement stable, i.e. pour toute condition initiale  $x_{t_0} \in R^{2n}$  et pour tout  $T > 0$ , le système bouclé doit vérifier la condition :

$$\sup_{w_t} [J(u_t, w_t)] < \infty \quad (3.4)$$

Ceci est équivalent à demander que « l'available » fonction associée au système (3.2), lorsqu'il est bouclé par  $u_t$ , soit finie (voir Théorème A.10.1).

Le choix de  $u_t$  peut être lui aussi fait de façon optimale en minimisant  $J$ . En d'autres termes on cherche  $u_t$  tel que :

$$\sup_{w_t} [\inf_{u_t} J(u_t, w_t)] < \infty \quad (3.5)$$

Nous sommes donc confrontés à un problème de jeux différentiels à somme nulle ( $u_t$  et  $w_t$  ont une action antagoniste sur le critère).

Pour résoudre ce problème nous introduisons l'hamiltonien  $H: R^{2n} \times R^{2n} \times R^{2m} \times R^{2s} \rightarrow R$  associé à (3.5), sous la contrainte (3.2), définie par :

$$H(x_t, \lambda^T, w_t, u_t) = \lambda^T (f(x_1) + g(x_1)w + l(x_1)u + g(x_1)w_2 + l(x_1)u_2, f(x_2) + g(x_2)w_2 + l(x_2)u_2) + \|y\|^2 - \|w\|^2 \quad (3.6)$$

Dans la suite  $\lambda$  sera séparé en deux termes de dimensions égale.

$$\lambda^T = (\lambda_1^T, \lambda_2^T)$$

Ecrivons les conditions nécessaires associées au critère à satisfaire :

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u_t} \right|_{(w_t, u_t) = (w_t^*, u_t^*)} = 0 \quad \left. \frac{\partial H}{\partial w_t} \right|_{(w_t, u_t) = (w_t^*, u_t^*)} = 0 \quad (3.7)$$

qui conduisent à un problème de commande optimale singulière en  $u_2$  et  $w_2$  puisque :

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = \lambda_1^T l(x_1) + \lambda_2^T l(x_2) = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial w_2} = \lambda_1^T g(x_1) + \lambda_2^T g(x_2) = 0 \quad (3.9)$$

impliquent :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial^2 w_2} = 0$$

Les commandes  $u$  et  $w$  peuvent être calculées :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)_{u=u^*} = \lambda_1^T l(x_1) + 2Y^T D + 2u^{*T} D^T D = 0$$

et

$$\left( \frac{\partial H}{\partial w} \right)_{w=w^*} = \lambda_1^T g(x_1) - 2w^{*T} = 0$$

où

$$u^*(x_t, \lambda^T) = -\frac{1}{2} (D^T D)^{-1} [l(x_1)^T \lambda_1 + 2D^T Y] \quad (3.10)$$

$$w^*(x_t, \lambda^T) = \frac{1}{2} g(x_1)^T \lambda_1 \quad (3.11)$$

et  $Y = h(x_1) - h(x_2)$ .

Le hessien de  $H$  par rapport aux commandes étant égal à :

$$R \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial^2 H}{\partial^2 (u_t, w_t)} = \begin{pmatrix} 2D^T D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a, pour tout  $\lambda \in R^{2n}$  et  $x \in R^{2n}$ , l'inégalité :

$$H(x_t, \lambda^T, w_t, u_t^*(x_t, \lambda^T)) \leq H(x_t, \lambda^T, w_t^*(x_t, \lambda^T), u_t^*(x_t, \lambda^T))$$

où

$$u_t^*(x_t, \lambda^T) = (u^*(x_t, \lambda^T), u_2)$$

$$w_t^*(x_t, \lambda^T) = (w^*(x_t, \lambda^T), w_2)$$

puisque

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 w} < 0 \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} > 0 \quad (3.12)$$

En fait, (3.12) assure que pour tout  $\lambda \in R^{2n}$  et tout  $x \in R^{2n}$ , on a

$$H(x_t, \lambda^T, w_t, u_t^*(x_t, \lambda^T)) \leq H(x_t, \lambda^T, w_t^*(x_t, \lambda^T), u_t^*(x_t, \lambda^T)) \leq H(x_t, \lambda^T, w_t^*(x_t, \lambda^T), u_t) \quad (3.13)$$

( $u_t^*, w_t^*$  est un point de selle de  $H$ )

On réécrit alors  $H$  en fonction de  $u_t^*(x_t, \lambda^T)$ , de  $w_t^*(x_t, \lambda^T)$  et de  $R$  :

$$H(x_t, \lambda^T, w_t, u_t) = H(x_t, \lambda^T, w_t^*, u_t^*) + \begin{bmatrix} u - u^* \\ w - w^* \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} u - u^* \\ w - w^* \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

**H3.1** assure l'existence de  $\lambda^T$ . En effet, posons

$$\lambda^T = \frac{\partial V}{\partial x_t} \quad (3.15)$$

les conditions (i) et (ii) assurent (3.8) et (3.9). On obtient l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= V_{x_1}(f(x_1) + g(x_1)w + l(x_1)u + g(x_1)w_2 + l(x_1)u_2) + V_{x_2}(f(x_2) + g(x_2)w_2 + l(x_2)u_2) \\ &= V_{x_1}(f(x_1) + g(x_1)w + l(x_1)u) + V_{x_2}f(x_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

La condition (iii) assure que :

$$H(x_t, \frac{\partial V}{\partial x_t}(x_t), w_t^*(x_t, \frac{\partial V}{\partial x_t}), u_t^*(x_t, \frac{\partial V}{\partial x_t})) = 0 \quad (3.17)$$

et donc, en utilisant (3.14), que

$$H(x_t, \frac{\partial V}{\partial x_t}, w_t, u_t) = \begin{bmatrix} u_t - u_t^* \\ w_t - w_t^* \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} u_t - u_t^* \\ w_t - w_t^* \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

En combinant (3.6), (3.16) et (3.18), on obtient :

$$\frac{dV}{dt} - \|w(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 = H(x_t, u_t, w_t) = \|u - u^*(x_1, x_2)\|^2 - \|w - w^*(x_1, x_2)\|^2 \quad (3.19)$$

où

$$\begin{aligned} u^*(x_1, x_2) &\stackrel{\Delta}{=} u^*(x_t, \frac{\partial V}{\partial x_t}) \\ w^*(x_1, x_2) &\stackrel{\Delta}{=} w^*(x_t, \frac{\partial V}{\partial x_t}) \end{aligned}$$

En utilisant la commande  $u^*(x_1, x_2)$  et en intégrant (3.19) par rapport au temps, on a :

$$-V(x_{t_0}) + \int_0^T (\|y(t)\|^2 - \|w(t)\|^2) dt = -V(x_t(T)) - \int_0^T \|w(t) - w^*(x_t(t))\|^2 dt \quad (3.20)$$

et enfin,  $V$  étant définie positive, on a pour tout  $T$  et  $w \in L_2^m$  :

$$\int_0^T (\|y(t)\|^2 - \|w(t)\|^2) dt \leq V(x_{t_0}) < \infty$$

Ceci permet de vérifier (3.4).



**Etape 2**

Au vu du calcul précédent on envisage deux cas.

$u^*(x_1, x_2)$  se divise en deux fonctions identiques dépendant respectivement de  $x_1$  et de  $x_2$  :

$$u^*(x_1, x_2) = k(x_1) - k(x_2)$$

Si l'on pose :

$$u_2(x_1(t), x_2(t)) \stackrel{\Delta}{=} k(x_2(t))$$

On écrit (3.2) comme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + l(x_1)[k(x_1) - k(x_2)] + l(x_1)k(x_2) + g(x_1)(w_1 - w_2) \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + l(x_2)k(x_2) + g(x_2)w_2 \\ y &= h(x_1) + D(k(x_1)) - h(x_2) - D(k(x_2)) \\ x_1(0) &= x_0 \\ x_2(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Ces équations correspondent au système augmenté associé au système initial commandé par

$$u = k(x).$$

Nous obtenons, dans ce cas, un correcteur statique et les conditions **H3.2** et **H3.3** sont caduques.

**Remarques :**

(i) - Pour analyser les conséquences liées à la décomposition de  $u^*(x_1, x_2)$  en deux termes ne dépendant que de  $x_1$  et de  $x_2$ , supposons que  $l(x_1) = B$  et que  $V$  soit  $C^2$  et rappelons

$$u^*(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}(D^T D)^{-1}[l(x_1)^T V_{x_1}^T + 2D^T Y]$$

Si l'on s'intéresse uniquement à la partie contenant les termes croisés qui dépendent de  $V_{x_1}(x_1, x_2)$ , on différentie le terme croisé par rapport à  $x_1$  :

$$F(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} B V_{x_1}(x_1, x_2)$$

et par rapport à  $x_2$  :

$$F(x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} B V_{x_1}(x_1, x_2)$$

En différentiant maintenant la condition (ii) de **H3.1**, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} [B V_{x_1}] + [B \frac{\partial}{\partial x_2} V_{x_2}] = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [B V_{x_1}] + [B \frac{\partial}{\partial x_1} V_{x_2}] = 0$$

qui impliquent que, pour tout  $(x_1, x_2) \in R^{2n}$ , on a :

$$F(x_1) = -F(x_2)$$

et donc nécessairement :

$$F(x_1) = A$$

où  $A$  est une matrice constante

La commande optimale admet donc la forme :

$$u^*(x_1, x_2) = Ax_1 + D^T h(x_1) - Ax_2 - D^T h(x_2)$$

Ce calcul explique les simplifications du cas linéaire.

(ii) - La nature singulière du critère a pour conséquence directe que la commande  $u^*(x_1, x_2)$  n'assure pas la stabilité asymptotique du système (3.2). Un simple exemple l'illustre : supposons que le système 3.1 soit instable en boucle ouverte et que  $u_2$  et  $w_2$  soient égales à zéro alors il est clair que  $x_2$  est instable.

(iii) - Une conséquence directe de la remarque précédente est que la condition (3.13) n'implique pas que  $(w_t^*, u_t^*)$  soit un point selle pour le jeu à horizon infini (i.e. on ne peut pas démontrer la relation  $J(w_t^*, u_t^*) \leq J(w_t^*, u_t^*) \leq J(w_t^*, u_t)$ ). Ceci a pour conséquence que  $u^*$  joue de façon sûre mais pas nécessairement de façon optimale. Ce problème est lié à l'absence de contrainte sur  $x(T)$  (par exemple  $\lim_{T \rightarrow \infty} x_t(T) = 0$ ) (voir [Ma, MaHo]).

Nous nous intéressons maintenant au cas où  $u^*(x_1, x_2)$  ne peut pas se diviser en deux termes; il manque l'état  $x_2$ .

On peut aborder ce problème de deux façons différentes, soit du point de vue de la théorie des jeux différentiels avec information incomplète ([RhLu69a&b, BeCo, Be91a&b, BaBe]) soit en utilisant le « lemme incrémental borné » (Théorème VI.2.1) comme dans le cadre  $H_\infty$  linéaire (voir par exemple [PeAnJo, GaAp]) ou non linéaire (voir IsAs92a&b, BaHeWa]).

Nous allons utiliser une heuristique consistant à « estimer » l'état manquant au sens du pire cas et à utiliser le « principe d'équivalence certaine », c'est à dire remplacer dans notre retour d'état complet  $x_2$  par son « estimé » [RhLu69a&b].

On considère donc que  $x_2(t)$  est reconstitué à l'aide d'un observateur dynamique de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= f(\hat{x}_2) + l(\hat{x}_2)u_2 - g(\hat{x}_2)w^*(x_1, \hat{x}_2) + g(\hat{x}_2)w \\ \hat{x}_2(0) &= x_2(0) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Puisque  $w_2 = w_1 - w^*(x_1, \hat{x}_2)$ ,  $\hat{x}_2$  parcourt la trajectoire « pire cas ». Par ailleurs, il n'y a pas de « recalage » puisque l'on ne dispose d'aucune mesure concernant  $x_2$  si ce n'est sa condition initiale. C'est en fait un observateur « boucle ouverte ».

La boucle fermée est de la forme :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f(x_1) + l(x_1)u^*(x_1, \hat{x}_2) + l(x_1)u_2 + g(x_1)w \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= f(\hat{x}_2) + l(\hat{x}_2)u_2 - g(\hat{x}_2)w^*(x_1, \hat{x}_2) + g(\hat{x}_2)w \\
 x_1(0) &= x_{10} \\
 \hat{x}_2(0) &= x_{10} \\
 y &= h(x_1) + D[u^*(x_1, \hat{x}_2) + u_2]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Au vu de la remarque (ii) ci dessus, le système (3.22) n'est pas nécessairement stable. Nous allons, pour résoudre ce problème, utiliser le degré de liberté laissé par le choix de  $u_2$ .

Si le système (3.22) est incrémentalement stable alors il est nécessairement  $L_2$  gain stable. On va donc choisir une commande  $u_2$  rendant (3.22)  $L_2$  gain stable et de gain inférieur à  $\eta = 1$ .

On cherche donc  $u_2^*(x_1, \hat{x}_2)$  telle que, pour toute condition initiale, tout  $T$  et tout  $w \in L_2^m$ , on ait :

$$\int_0^T (\|y(t)\|^2 - \|w(t)\|^2) dt < \infty$$

Pour cela, on utilise les résultats classiques concernant la minimisation de la norme induite 2 (voir par exemple [Is91]). Posons :

$$\begin{aligned}
 x^T &= (x_1^T, \hat{x}_2^T) \\
 f_e(x) &= \begin{pmatrix} f(x_1) + l(x_1)u^*(x_1, \hat{x}_2) \\ f(\hat{x}_2) - g(\hat{x}_2)w^*(x_1, \hat{x}_2) \end{pmatrix} \\
 l_e(x) &= \begin{pmatrix} l(x_1) \\ l(\hat{x}_2) \end{pmatrix} \\
 g_e(x) &= \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(\hat{x}_2) \end{pmatrix} \\
 h_r(x) &= h(x_1) + D[u^*(x_1, \hat{x}_2)]
 \end{aligned}$$

alors, en considérant l'hamiltonien :

$$H(x, \lambda^T, w, u_2) = \lambda^T (f_e(x) + g_e(x)w + l_e(x)u_2) + \|y\|^2 - \|w\|^2$$

on peut démontrer que la condition (iv) **H3.2**, assure :

$$H(x, \frac{\partial S_e}{\partial x}, w, u_2) = \|u_2 - \alpha_2(x)\|^2 - \|w - \alpha_1(x)\|^2$$

et

$$S_x(f_e + g_e w + l_e u) = \|u_2 - \alpha_2(x)\|^2 - \|w - \alpha_1(x)\|^2 - \|y\|^2 + \|w\|^2$$

En utilisant la commande  $u_2^*(x_1, \hat{x}_2) = \alpha_2(x_1, \hat{x}_2)$  et en intégrant cette dernière égalité, on obtient :

$$-S(x_0) + \int_0^T (\|y(t)\|^2 - \|w(t)\|^2) dt = -S(x(T)) - \int_0^T \|w(t) - \alpha_1(x(t))\|^2 dt$$

et donc, pour toute condition initiale  $x_0$ , tout  $T$  et  $w \in L_2^m$  :

$$\int_0^T (\|y(t)\|^2 - \|w(t)\|^2) dt \leq S(x_0)$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à noter que le système (3.1), commandé par le correcteur dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= f(\hat{x}_2) + l(\hat{x}_2)u_2^*(x, \hat{x}_2) + g(\hat{x}_2)w^*(x, \hat{x}_2) + g(\hat{x}_2)w \\ u &= u^*(x, \hat{x}_2) + u_2^*(x, \hat{x}_2) \end{aligned}$$

est incrémentalement stable puisque l'hypothèse **H3.3** assure qu'il existe une fonction  $W$  satisfaisant les conditions du Théorème VI.2.2.

C.Q.F.D.

## VIII. Approximation d'objectifs incrémentaux et L.M.I.

### 1. Introduction

Sur la base du Lemme IV.2.1, nous proposons une méthode de synthèse garantissant la stabilité incrémentale du système non linéaire en combinant stabilité quadratique et demande de type  $L_2$ .

L'utilisation de fonctions quadratiques dans le contexte entrée/sortie est apparue en [Saf80] et [SaAt78] où le problème de la robustesse des correcteurs  $LQ$  est abordé. L'approche utilise la solution de l'équation de Riccati associée à la résolution du problème  $LQ$  comme un multiplicateur particulier, les marges de robustesse sont alors caractérisées à travers le maintien de la positivité d'un produit de matrices. Ce critère garantit la stabilité absolue du système à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique.

Les récents développements concernant la stabilité quadratique, le  $L_2$  gain et la résolution d'Inégalités Matricielles Linéaires (L.M.I.), permettent de proposer une solution au problème de la synthèse incrémentale.

Dans un premier temps, nous donnons une condition suffisante pour qu'un système soit incrémentalement stable. Dans le paragraphe 3, nous nous intéressons au problème de la synthèse d'un correcteur par retour d'état complet. Enfin, dans le paragraphe 4, nous discutons le problème de la synthèse d'un correcteur par retour d'état partiel.

### 2. Stabilité incrémentale et stabilité quadratique

On considère l'opérateur non linéaire,  $z = H_{x_0}(w)$  et sa représentation d'état associée :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) + j(x)w \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $w(t) \in R^m$ ,  $z(t) \in R^p$  et  $x(t) \in R^n$ . On suppose que  $f, g, h, j$  sont  $C^1$  et de dérivées partielles bornées et qu'il existe  $x_e \in R^n$  tel que  $f(x_e) = 0$ . Sans perdre en généralité on suppose que  $h(x_e) = 0$  et  $x_e = 0$ .

On associe au système (2.1) sa linéarisation le long de l'entrée  $w_r(t)$ ,  $\bar{z} = DH_{x_0, w_r} \bar{w}$ , possédant la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A(x_r)\bar{x} + B(x_r)\bar{w} \\ \bar{z} = C(x_r)\bar{x} + D(x_r)\bar{w} \\ \bar{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} w_r$ ,  $B(x) = g(x)$ ,  $C(x) = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial x} w_r$ ,  $D(x) = J(x)$ ,  $\bar{w}(t) = w(t) - w_r(t)$ ,  $\bar{x}(t) = x(t) - x_r(t)$ ,  $\bar{z}(t) := z(t) - z_r(t)$  et où  $x_r(t)$  est la solution de (1.1) pour l'entrée  $w_r(t)$  et la condition initiale  $x(0) = x_0$ .

On définit la fonction :

$$\omega(x) = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix}$$

et l'on fait l'hypothèse suivante :

**H2.1** : L'ensemble  $\Omega = \{\omega(x) | x \in R^n\}$  est fermé.

**Lemme 2.1**

S'il existe  $\tilde{\eta} > 0$  et  $X \in R^{n \times n}$  où  $X = X^T > 0$ , tels que, pour tout  $x \in R^n$  :

$$\begin{bmatrix} A^T(x)X + XA(x) & XB(x) & \tilde{\eta}^{-1}C^T(x) \\ B^T(x)X & -I_{m \times m} & \tilde{\eta}^{-1}D^T(x) \\ \tilde{\eta}^{-1}C(x) & \tilde{\eta}^{-1}D(x) & -I_{p \times p} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3)$$

alors, (2.1) est incrémentalement stable pour tout  $x_0 \in R^n$  et il existe  $\eta < \tilde{\eta}$  tel que  $\|H_{x_0}\|_{\Delta} \leq \eta$ .

**Démonstration** : La démonstration se fait en deux étapes. La première étape démontre que le système 2.2 est  $L_2$  gain stable pour tout  $x \in R^n$  et donc que (2.1) est incrémentalement borné. La seconde étape démontre que le système non linéaire (2.1) est  $L_2$  gain stable pour toute condition initiale  $x_0$  et donc que (2.1) est incrémentalement stable.

**Etape 1** : Nous démontrons que  $z = H_{x_0}(w)$  est incrémentalement borné.

On simplifie le problème en remarquant que la condition (2.3) assure que, pour tout  $x \in R^n$  :

$$\begin{bmatrix} -I_{m \times m} & \tilde{\eta}^{-1}D^T(x) \\ \tilde{\eta}^{-1}D(x) & -I_{p \times p} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4)$$

et donc que  $(I - \tilde{\eta}^{-2} D^T(x)D(x))^{-1}$  est toujours inversible. Soit le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}^{-1} D^T(x) & (I - \tilde{\eta}^{-2} D^T(x)D(x))^{\frac{1}{2}} \\ (I - \tilde{\eta}^{-2} D^T(x)D(x))^{\frac{1}{2}} & -\tilde{\eta}^{-1} D(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

tel que  $\eta^{-1} \|\bar{z}\| - \|\bar{w}\| = \|\tilde{z}\| - \|\tilde{w}\|$ .

On considère le nouveau système,  $\tilde{z} = \tilde{G}\tilde{w}$ , ayant la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}(x_r)\tilde{x} + \tilde{B}(x_r)\tilde{w} \\ \tilde{z} &= \tilde{C}(x_r)\tilde{x} \\ \tilde{x}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x) &= A(x) + \eta^{-2} B(x)(I - \eta^{-2} D^T(x)D(x))^{-1} D^T(x)C(x), \\ \tilde{B}(x) &= \tilde{B}(x)(I - \eta^{-2} D^T(x)D(x))^{-\frac{1}{2}}, \\ \tilde{C}(x) &= \eta^{-1} (I - \eta^{-2} D(x)(I - \eta^{-2} D^T(x)D(x))^{-1} D^T(x))^{\frac{1}{2}} C(x); \end{aligned} \quad (2.7)$$

Après ce changement de variable, la condition (2.3), peut, à l'aide d'une Lemme de Schur, être transformée en une inégalité de Riccati :

$$\tilde{A}^T X(x) + X\tilde{A}(x) + \tilde{C}^T(x)\tilde{C}(x) + X\tilde{B}(x)B^T(x)X < 0 \quad (2.8)$$

Dans la suite, pour simplifier les expressions, nous supprimons la dépendance explicite en  $x$ . Considérons, maintenant, la fonction :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T X\bar{x}$$

que l'on dérive par rapport au temps,

$$\dot{V}(\bar{x}) = \bar{x}^T X\dot{\bar{x}} + \bar{x}^T X\dot{\bar{x}} = \bar{x}^T X[A\bar{x} + B\tilde{w}] + [A\bar{x} + B\tilde{w}]^T X\bar{x}$$

On utilise alors (2.8) et la technique du complément du carré pour obtenir :

$$\dot{V}(\bar{x}) + \|\bar{z}\|^2 - \|\tilde{w}\|^2 + \|\tilde{w} - \tilde{B}^T(x)X\bar{x}\|^2 < 0$$

que nous intégrons de  $t = 0$  à  $t = T$ , pour obtenir :

$$V(x(T)) - V(x_0) + \int_0^T \left( \|\bar{z}(t)\|^2 - \|\tilde{w}(t)\|^2 + \|\tilde{w}(t) - \tilde{B}^T(x(t))X\bar{x}(t)\|^2 \right) dt < 0$$

Comme  $\bar{x}_0 = 0$ , et que  $X > 0$ , on a

$$\int_0^T \left( \|\bar{z}(t)\|^2 - \|\tilde{w}(t)\|^2 \right) dt < 0$$

et donc, pour tout  $\tilde{w}(t) \in L_2^m$ , l'inégalité attendue :

$$\int_0^\infty \|\bar{z}(t)\|^2 dt < \int_0^\infty \|\tilde{w}(t)\|^2 dt$$

La norme de  $G$  est donc strictement inférieure à 1 (i.e.  $\|G\|_{i_2} < 1$ ).

Comme  $\tilde{\eta}^{-1}\|\bar{z}\| - \|\bar{w}\| = \|\bar{z}\| - \|\tilde{w}\|$ , la norme induite de la linéarisation de (2.3) est strictement inférieure à  $\tilde{\eta}$  (i.e.  $\|DH_{x_0, w_r}\|_{i_2} \leq \eta < \tilde{\eta}$ ).

Il ne reste plus qu'à utiliser le Lemme IV.3.1 pour obtenir le résultat suivant :

$$\|H_{x_e}\|_{\Delta} = \sup_{w_r \in L_2^m} \|DH_{x_0, w_r}\| \leq \eta$$

**Etape 2 :** Nous démontrons que  $H_{x_0}(w)$  est  $L_2$  gain stable.

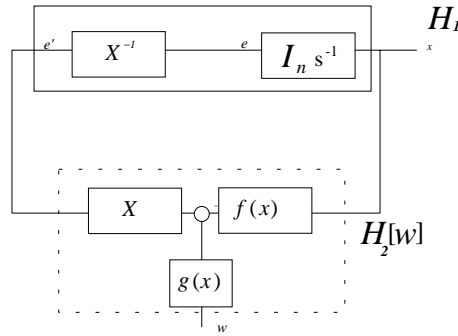


figure 2.1

On étudie la stabilité de l'interconnexion (figure 2.1) des deux opérateurs suivants:

$$H_2[w] = X[f(x) + g(x)w] \quad (2.9)$$

et

$$H_1 = X^{-1} \text{diag}(1/s, \dots, 1/s) \quad (2.10)$$

les intégrateurs sont initialisés en  $x(0) = x_0$ . Nous utilisons pour démontrer le résultat le Théorème A.15.1.

Pour cela, rappelons un résultat démontré en [Saf80], liant les propriétés de  $H$  à celles de sa dérivée :

Si  $H$  est un opérateur Fréchet différentiable et que toutes ses dérivées sont strictement passives uniformément (i.e.  $\langle u, DH_x u \rangle < 0$ ), alors,  $H$  est strictement passif (i.e.  $\langle u, Hu \rangle < 0$ ).

Nous en donnons une démonstration rapide.

Si  $H$  est dérivable, on a :

$$\langle x, H(x) \rangle = \left\langle x, \int_0^x D_z H dz \right\rangle$$



que l'on normalise par rapport à  $x$  :

$$\langle x, H(x) \rangle = \left\langle x, \int_0^1 D_{\alpha z} H d\alpha \right\rangle$$

Il ne reste qu'à permuter l'ordre d'intégration pour obtenir :

$$\langle x, H(x) \rangle = \int_0^1 \langle x, D_{\alpha z} H \rangle d\alpha$$

et conclure :

$$\langle u, DH_x u \rangle < 0 \Rightarrow \langle u, Hu \rangle < 0$$

L'équation (2.3) garantit la passivité de la dérivée de  $H_2[0]$  par rapport à  $x$  (pour  $w = 0$ , on a  $DH_{2x} = PA(x)$ ). Ceci assure que  $\langle u, H_2[0]u \rangle < 0$ . Cette implication se traduit en termes sectoriels par l'inclusion suivante :

$$[\text{Graph}(H_2)]^I \text{ est strictement à l'intérieur du } \text{Secteur}(F_p) \quad (2.11)$$

$$\text{où } F_p = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, un intégrateur multiplié par une matrice positive étant passif, quelque soit la condition initiale ([DeVi p175]), ceci implique :

$$\text{Graph}(H_1) \text{ est à l'extérieur du } \text{Secteur}(F_p) \quad (2.12)$$

Les condition (i) et (ii) du Théorème A.15.1 sont satisfaites. Il ne reste donc à démontrer que l'opérateur  $H_2[w]$  est stable, de gain fini par rapport à l'ensemble  $\bar{H}_2[0] = \text{Graph}(H_2[0])$ , au sens de la terminologie introduite par Safonov (voir def. A.15.1); i.e. il existe une constante  $k > 0$  telle que pour tout  $w \in L_2^e$ , et tout  $(x, y) \in \text{Graph}(H_2[w])$ , il existe un point  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{Graph}(H[0])$  tel que :

$$\|P_T(\tilde{y} - y)\|^2 + \|P_T(\tilde{x} - x)\|^2 \leq k \|P_T w\|^2 \quad \forall T \in \mathbb{R}^+ \quad (2.13)$$

Comme la dérivée partielle de  $g$  par rapport à  $x$  est bornée, on a, pour tout  $w_1, w_2 \in L_2^{m,e}$  :

$$\|P_T[g(x)w_1 - g(x)w_2]\| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \bar{\sigma}\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right) \|P_T[w_1 - w_2]\| \quad \forall T \in \mathbb{R}^+$$

Maintenant, si nous posons :

$$y = f(x)$$

et

$$\tilde{y} = f(x) + g(x)w$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \|P_T(\tilde{y} - y)\|^2 + \|P_T(\tilde{x} - x)\|^2 &= \|P_T[g(x)w]\|^2 \\ &\leq \sup_{x \in R^n} \bar{\sigma}\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right) \|P_T[w]\| \end{aligned}$$

Ceci démontre (2.13) et implique l'existence de deux constantes positives  $\gamma, \beta$  telles que

$$\|x\| \leq \gamma \|w\| + \beta$$

Il ne reste plus, pour conclure, qu'à utiliser la bornitude des dérivées partielles de  $h$  et  $j$  :

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq \|h(x)\| + \|j(x)w\| \\ &\leq \sup_{x \in R^n} \bar{\sigma}\left(\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right) \|x\| + \sup_{x \in R^n} \bar{\sigma}\left(\frac{\partial j(x)}{\partial x}\right) \|w\| \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarques :

(i) - On peut appliquer le Lemme 2.1 à des systèmes de la forme  $\dot{x} = f(x, w)$ , en supposant  $f$  Lipschitz continue en ses arguments.

(ii) - L'inégalité (2.3) est une A.M.I. (Inégalité Matricielle Affine) qui constitue (pour  $\tilde{\eta}$  fixé) une contrainte convexe sur  $X$ . Par ailleurs,  $X^T = X > 0$  est aussi une contrainte convexe sur  $X$ . En fait, les hypothèses faites sur les fonctions  $f, g, h$  et  $j$  assurent que l'on puisse ramener ce problème à un problème d'optimisation convexe ayant un nombre infini de contraintes. Un tel problème peut être résolu de façon approchée en le discrétisant. On renvoie à [BGFV] et [Gu93&94] pour une discussion approfondie de la nature et du mode de résolution d'un tel problème. La référence [Ne] explicite la nature N.P. dur (Non Polynomial dur) des algorithmes devant résoudre ce type de problème; ceci implique que la résolution de ce type de problème ne soit possible que pour un faible nombre de paramètres (i.e. faible dimension du vecteur d'état du système).

### 3. Synthèse d'un correcteur linéaire avec retour d'état complet

On s'intéresse dans ce chapitre au problème de la synthèse d'un correcteur par retour d'état complet assurant la stabilité incrémentale du système. Nous utilisons pour cela des résultats récents ([BGFV] , [Gu93&94]) qui permettent de transformer ce problème en un problème d'optimisation convexe.

Soit le système non linéaire en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w + k(x)u \\ z = h(x) + j(x)w + q(x)u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $u \in R^q$ ; les autres variables ont été précédemment définies.

On associe à (3.1), sa linéarisation le long de l'entrée  $w_r(t)$ ,  $\bar{z} = DH_{x_0, w_r} \bar{w}$ , possédant la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A(x_r)\bar{x} + B_1(x_r)\bar{w} + B_2(x_r)\bar{u} \\ \bar{z} = C(x_r)\bar{x} + D_1(x_r)\bar{w} + D_2(x_r)\bar{u} \\ \bar{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

et soit

$$\omega_c(x) = \begin{bmatrix} A(x) & B_1(x) & B_2(x) \\ C(x) & D_1(x) & D_2(x) \end{bmatrix}$$

On suppose

**H3.1** : L'ensemble

$$\Omega_c = \{\omega(x) | x \in R^n\}$$

est fermé.

**Proposition 3.1**

S'il existe  $\tilde{\eta} > 0$ ,  $\hat{K}$  et  $X \in R^{n \times n}$  ( $X = X^T > 0$ ), tels que pour tout  $x \in R^n$  :

$$\begin{bmatrix} -I_{m \times m} & -\frac{1}{\tilde{\eta}} D_1 & -(C + D_2 \hat{K})X \\ -\frac{1}{\tilde{\eta}} D_1^T & -I_{p \times p} & \frac{1}{\tilde{\eta}} B_1^T \\ -X(C + D_2 \hat{K})^T & \frac{1}{\tilde{\eta}} B_1 & [X(A + B_2 \hat{K})^T + (A + B_2 \hat{K})X] \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3)$$

alors (3.1), commandé par  $u = \hat{K}X^{-1}x$ , est incrémentalement stable pour tout  $x_0 \in R^n$  et il existe  $\eta < \tilde{\eta}$  tel que  $\|H_{x_0}\|_{\Delta} \leq \eta$ .

Remarques :

(i) - L'intérêt de ce résultat est lié au fait que l'inégalité (3.3) est une *A.M.I.* (Inégalité Matricielle Affine) qui constitue, pour  $\tilde{\eta}$  fixé, une contrainte convexe sur  $X$ .

(ii) - Il est en fait possible de réduire le nombre infini de contraintes données par (3.3) en ajoutant des conditions sur  $\Omega_c$  (voir [BGFV], [BePa] et [Gu93&94]).

#### 4. Synthèse d'un correcteur non linéaire par retour d'état partiel

La synthèse d'un correcteur, par retour de sorties, assurant la stabilité quadratique du système ne peut pas, en générale, être formulée comme un problème d'optimisation convexe. Ceci a conduit les auteurs à s'intéresser aux systèmes possédant une structure particulière permettant de ramener le problème de la synthèse d'un correcteur par retour de sortie, à un problème d'optimisation convexe ou semi-convexe. La plupart des travaux généralisent les résultats obtenus dans le cadre  $H_\infty$  ([Gah, GahAp]) et concernent principalement les systèmes linéaires dépendant de paramètres variant dans le temps ([BPPB, BePa]) ou encore les problèmes pouvant être mis sous forme de L.F.T. ([ApGa, Pa]). Notre problème permet d'utiliser les résultats concernant les systèmes linéaires dépendant de paramètres variant dans le temps ([BePa]).

Soit le système non linéaire en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w + k(x)u \\ z = h(x) + j(x)w + q(x)u \\ y = l(x) + m(x)w + n(x)u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $y \in R^s$ , les autres variables étant définies comme précédemment.

On associe à (4.1) sa linéarisation le long de l'entrée  $w_r(t)$ ,  $\bar{z} = DH_{x_0, w_r} \bar{w}$ , possédant la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A(x_r)\bar{x} + B_1(x_r)\bar{w} + B_2(x_r)\bar{u} \\ \bar{z} = C_2(x_r)\bar{x} + D_{11}(x_r)\bar{w} + D_{12}(x_r)\bar{u} \\ \bar{y} = C_2(x_r)\bar{x} + D_{21}(x_r)\bar{w} + D_{22}(x_r)\bar{u} \\ \bar{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

et  $\omega_c$

$$\omega_c(x) = \begin{bmatrix} A(x) & B_1(x) & B_2(x) \\ C_1(x) & D_{11}(x) & D_{12}(x) \\ C_2(x) & D_{21}(x) & D_{22}(x) \end{bmatrix}$$

On suppose

**H4.1** : L'ensemble

$$\Omega_c = \{\omega(x) | x \in R^n\}$$

est fermé.

Pour simplifier les notations et les résultats présentés, nous considérons le cas suivant :

$$D_{11} = 0_{p \times m} \quad D_{22} = 0_{s \times q} \quad D_{12}^T D_{12} = I_q \quad D_{12}^T D_{21} = I_s \quad D_{12}^T C_1 = 0_{q \times n} \quad \text{et} \quad B_1^T D_{21} = 0_{n \times s}$$

Rappelons le résultat suivant :

**Théorème 4.1** [BePa]

S'il existe deux matrices  $X \in R^{n \times n}$  et  $Y \in R^{n \times n}$  telles que  $X = X^T > 0$ ,  $Y = Y^T > 0$  et telles que pour  $x \in R^n$  on ait :

$$\begin{bmatrix} AY + YA^T - B_2 B_2^T & Y C_1^T & \tilde{\eta}^{-1} B_1 \\ C_1 Y & -I & \\ \tilde{\eta}^{-1} B_1^T & & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A - C_2^T C_2 & X B_1 & \tilde{\eta}^{-1} C_1^T \\ B_1^T X & -I & 0 \\ \tilde{\eta}^{-1} C_1 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} X & \tilde{\eta}^{-1} I \\ \tilde{\eta}^{-1} I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.5)$$

alors le correcteur dynamique

$$\dot{x}_k(t) = A_k(x_r(t))x_k(t) + B_k(x_r) y(t)$$

$$u(t) = C_k(x_r(t))x_k(t) + D_k(x_r) y(t)$$

où

$$A_k(x) = A(x) + \tilde{\eta}^{-2} B_1(x) B_1^T(x) - B_2(x) B_2^T(x) - Z[C_2^T(x) C_2(x) + \eta^{-2} H(x)],$$

$$B_k(x) = Z C_2^T(x), \quad C_k(x) = -B_2^T(x) Y^{-1}, \quad D_k(x) = 0, \quad Z = (X - \tilde{\eta}^{-1} Y)^{-1}$$

et

$$H(x) = -[Y^{-1} A(x) + A^T(x) Y^{-1} - Y^{-1} B_2(x) B_2^T(x) Y^{-1} + C_1(x) C_1^T(x) + \tilde{\eta}^{-2} Y^{-1} B_1(x) B_1^T(x) Y^{-1}]$$

rend le système (4.2)  $L_2$ -gain stable et il existe  $\eta < \tilde{\eta}$  tel que  $\|DH_{x_0, w_r}\|_{i_2} \leq \eta$ .

Remarque :

(i) - Les inégalités (4.3) et (4.4) sont des A.M.I. qui constituent, pour  $\tilde{\eta}$  fixé, des contraintes convexes sur  $X$  et  $Y$ ; par ailleurs, l'inégalité (4.5) est elle-même une contrainte convexe sur  $X$  et  $Y$ .

La difficulté principale, dans le contexte non linéaire, réside ici dans le fait que les paramètres variant dans le temps sont les états du système non linéaire. Ce résultat ne s'applique que si d'une part on mesure (parfaitement) une partie de l'état et d'autre part si les systèmes non linéaires dépendent uniquement de ces mêmes états. Par ailleurs, il faut que la linéarisation du correcteur non linéaire soit égale à la solution proposée dans ce Théorème, en d'autres termes le correcteur doit être intégrable. Au vu de la solution, il apparaît que la matrice  $A(x_r)$  n'est pas concernée par ce problème. Les autres matrices doivent, posséder des structures particulières de telle sorte que le correcteur final soit intégrable (Théorème de Frobenius [Is89]).

## IX. Gains variables et systèmes Linéaires dépendant de paramètres variant dans le temps

### 1. Introduction

La technique des gains variables est une technique courante de commande qui consiste à associer à un système linéaire dépendant de paramètres variant dans le temps (L.P.V.), plusieurs contrôleurs linéaires invariant pour certaines valeurs « gelées » des paramètres variant dans le temps, puis à interpoler ces correcteurs en fonction des paramètres variables [Sha]. Il semble dès lors intéressant de caractériser la stabilité et la robustesse de tels schémas de commande, sachant que les lois de commandes associées aux systèmes « gelés » sont stables et possèdent de « bonnes propriétés » de robustesse.

Des articles récents [HyGI91a,b et 93] et [BaPa], proposent pour analyser de tels schémas de commande d'utiliser a  $\mu$  analyse à « scaling constant » ([PaDo90] [DoPaZh]). Hydes et Glover soulignent le conservatisme d'une telle analyse en remarquant que l'application du Théorème du faible gain dans ce cadre, ne permet de tenir compte que de l'amplitude de variation des paramètres d'interpolation et en aucun cas de la vitesse de variation de ces mêmes paramètres (stabilité sectorielle). On peut remarquer, par ailleurs que l'application du Théorème du faible gain, dans ce contexte, revient à demander au système linéaire « nominal » (celui qui est utilisé pour la  $\mu$  analyse) d'être non seulement robuste vis à vis de ses propres paramètres variables mais aussi vis à vis des paramètres du correcteur interpolé.

De nombreux travaux se sont intéressés au problème de la stabilité des systèmes dépendant de paramètres variant dans le temps, aussi bien dans le contexte entrée/sortie [FrZa, SuTh 73a&b], que dans le cadre de la représentation d'état [De69]. On doit noter ici, une contribution récente ([ZaWa]) qui place ce problème dans le cadre général de la stabilité entrée/sortie (i.e., condition d'inversibilité d'opérateurs dans certaines algèbres [Wil70a]). Les auteurs introduisent le concept de double algèbre, permettant de lier l'inversibilité de l'opérateur variant dans le temps à l'inversibilité des opérateurs gelés associés et à la capacité de ces derniers à commuter avec le « shift ».

Dans ce chapitre, nous transposons cette approche en considérant ici que la stabilité et la robustesse des systèmes gelés sont liées à l'existence de solutions de Lyapunov particulières et à la conservation de la positivité de certaines relations matricielles associées ([BoYa], [DoPaZh]). Sur cette base, nous obtenons un théorème de stabilité pour les systèmes LPV. Nous caractérisons ensuite le  $L_2$  gain du système « globale » à travers des propriétés de robustesse associées aux systèmes « gelés ».

Dans le paragraphe 2, nous rappelons l'idée qui est à la base de la technique des gains variables dans le cadre des systèmes non linéaires. Le paragraphe 3 est constitué de la traduction

d'un article intitulé « *Robustness and stability of LPV plants through frozen systems analysis* » accepté pour publication dans International Journal of Robust and Nonlinear Control.

Nous terminons ce chapitre en revenant au problème de la stabilité des gains variables dans le contexte non linéaire.

## 2. Le fondement classique de la technique des gains variables

Dans ce chapitre, nous rappelons l'origine de la technique des gains variables.

Etant donné un système dynamique de représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $u(t) \in R^m$  et  $x(t) \in R^n$ , étudions la stabilité de la trajectoire  $x_n(t)$  (supposée unique), associée à l'entrée  $u_n(t)$ .

Pour cela, définissons les variables :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_n(t) + y(t) \\ u(t) &= u_n(t) + v \end{aligned}$$

permettant d'écrire (2.1) comme :

$$\begin{cases} \dot{y} = G(t, y, v) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où

$$G(t, y, v) = f(t, x_n + y, u_n + v) - f(t, x_n, u_n)$$

et  $G(t, 0, 0) = 0$ .

Il en résulte que  $v = 0$  entraîne  $y = 0$ .

Supposons que le système (2.2) puisse se réécrire sous la forme:

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v + H(t, y, v) \quad (2.3)$$

où  $A(t)$  et  $B(t)$  sont des matrices continues, réelles, définies pour  $t \geq 0$ , d'éléments bornés et où

$$\|H(t, y, v)\| \leq L(\|y\| + \|v\|)^{1+\alpha} \quad (2.4)$$

pour  $\alpha > 0$  et une constante  $L$ .

On peut alors démontrer que la stabilité exponentielle de la partie linéaire de (2.3) assure la stabilité exponentielle de (2.3) dans un voisinage de  $y = 0$  lorsque  $v = 0$ .

De façon plus précise, étant donné le système linéaire :

$$\dot{z} = A(t)z \quad (2.5)$$



On peut énoncer le résultat suivant.

**Théorème 2.1** [Zu, Ha]

Si le système linéaire (2.5) est exponentiellement stable alors, chaque solution de (2.2) pour  $v = 0$ , issue d'un voisinage suffisamment petit du point  $y = \mathbf{0}$ , est exponentiellement stable.

**Démonstration :** Si (2.5) est exponentiellement stable, il existe une fonction de Lyapunov pour le système (2.5) vérifiant les inégalités :

$$c_1 \|z\|^2 \leq \bar{V}(z, t) \leq c_2 \|z\|^2 \quad (2.6)$$

$$-d_1 \|z\|^2 \leq \bar{W}(z, t) \leq -d_2 \|z\|^2 \quad (2.7)$$

où  $\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{W}$ , le long de la trajectoire de (2.5) et où  $c_1, c_2, d_1$  et  $d_2$  sont des constantes positives.

Si l'on exprime la dérivée totale de  $\bar{V}$ , le long d'une trajectoire de (2.3), c'est à dire :

$$W_1 \triangleq \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{W} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} H \quad (2.8)$$

la condition (2.6) assure qu'il existe  $h > 0$ , tel que

$$\left\| \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} H \right\| \leq h \|y\|^{2+\alpha} \quad (2.9)$$

Puisque  $v = 0$ , ceci implique

$$W_1 \leq \|y\|^2 (-d_2 + h \|y\|^\alpha) \quad (2.10)$$

et donc la stabilité asymptotiquement dans un voisinage de  $y = 0$ .

La stabilité exponentielle est démontrée en notant que (2.4) et (2.10) assurent l'existence de  $\delta > 0$ ,  $r_1 > 0$  et de  $r_2 > 0$  tels que

$$-r_1 \|y\|^2 \leq \bar{W}_1 \leq -r_2 \|y\|^2$$

pour  $\|y\| < \delta$ .

C.Q.F.D.

Démontrer la stabilité exponentielle de la linéarisation de (2.1) le long d'une trajectoire particulière suffit donc à démontrer sa stabilité dans un voisinage de cette trajectoire.

La technique des gains variables repose sur l'idée que l'on puisse lier la stabilité du système linéaire non stationnaire (2.5) à la stabilité des systèmes linéaires « gelés », associés à chaque valeur constante du temps i.e. les systèmes définis pour  $\tau$  constant :

$$\dot{z} = A(\tau)z \quad (2.11)$$

Le paragraphe suivant étudie les liens entre la stabilité de (2.5) et celle de (2.11).

### 3. Des résultats de stabilité pour les systèmes LPV

#### a. Un résultat sur la stabilité

Considérons l'opérateur linéaire,  $z(t) = H_{x_0}(\theta(t))w(t)$ , dépendant d'un vecteur de paramètres  $\theta(t)$ , variant dans le temps et possédant la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= C(\theta(t))x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pour tout  $t \geq 0$ , l'état  $x(t)$ , l'entrée  $w(t)$ , la sortie  $z(t)$  et  $\theta(t)$  appartiennent respectivement à  $R^n$ ,  $R^m$ ,  $R^p$  et  $R^k$ . De plus, le signal d'entrée  $w$  appartient à  $L_2^m$  et le système est supposé bien posé, i.e.,  $\forall w \in L_2^{m,e}$ ,  $x_0 \in R^n$  la solution  $x(t)$  est unique et  $z \in L_2^{m,e}$ .

On pose les hypothèses habituelles.

**H3.1 :** Toute réalisation de  $\theta$  est bornée et possède une dérivée bornée, i.e.  $\theta \in \Omega$  où

$$\Omega = \{ \theta : R^+ \rightarrow \Omega^V \mid \|\dot{\theta}(t)\| < \infty, \forall t \in R^+ \}$$

et  $\Omega^V \subset R^k$  est un ensemble ouvert *borné*.

**H3.2 :** Il existe trois constantes strictement positives  $\bar{\alpha}_A, \bar{\alpha}_B$  et  $\bar{\alpha}_C$ , telles que pour tout  $v \in \Omega^V$  on ait :

$$\bar{\sigma}(A(v)) < \bar{\alpha}_A, \bar{\sigma}(B(v)) < \bar{\alpha}_B \text{ et } \bar{\sigma}(C(v)) < \bar{\alpha}_C$$

Sous ces hypothèses, on peut énoncer le résultat suivant.

**Théorème 3.1**

Sous les hypothèses **H3.1** et **H3.2**, et l'existence deux matrices  $P(v)$  et  $L(v)$  symétriques, définies positives pour tout  $v \in \Omega^V$ , avec  $P(v)$  uniformément bornée et différentiable, telles que

- (i)  $\dot{P}(\theta(t)) - 2L(\theta(t))P(\theta(t)) \leq 0$
- (ii)  $P(v)(A(v) + L(v)) + (A(v) + L(v))^T P(v) < 0$

alors le système LPV (3.1) est globalement uniformément asymptotiquement stable et  $L_2$  gain stable.

**Démonstration :** Considérons la fonction quadratique :

$$V(x, t) = x(t)^T P(\theta(t))x(t) \quad (3.2)$$

que l'on dérive, en fonction du temps :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \dot{x}(t)^T P(\theta(t))x(t) + x(t)^T P(\theta(t))\dot{x}(t) + x(t)^T \dot{P}(\theta(t))x(t) \\ &= (Ax + Bw)^T Px + x^T P(Ax + Bw) + x^T \dot{P}x \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pour simplifier l'écriture,  $\theta(t)$  et  $t$  ont été omis.

La condition (i) assure que (3.3) vérifie l'inégalité suivante :

$$\dot{V} - x^T 2LPx - (Ax + Bw)^T Px - x^T P(Ax + Bw) = x^T (\dot{P} - 2LP)x \leq 0 \quad (3.4)$$

et donc

$$\dot{V} \leq x^T (A^T + L)Px + x^T P(A + L)x + 2 \langle Px, Bw \rangle \quad (3.5)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz (dans  $R^n$ ) et en notant  $\bar{\alpha}_p$  la borne supérieure de  $P(v)$ , on obtient :

$$\langle Px, Bw \rangle \leq \|x^T P\| \|Bw\| \leq \bar{\alpha}_p \bar{\alpha}_B \|x\| \|w\| \quad (3.6)$$

par ailleurs, la condition (ii) assure l'existence d'une constante  $\varepsilon > 0$  telle que :

$$x^T (A^T + L)Px + x^T P(A + L)x \leq -\varepsilon x^T x. \quad (3.7)$$

et donc majorer (3.5) comme :

$$\dot{V} \leq 2 \bar{\alpha}_p \bar{\alpha}_B \|x\| \|w\| - \varepsilon \|x\|^2 \quad (3.8)$$

Intégrons (3.8) le long de la trajectoire de (3.1) de  $t = 0$  à  $t = T$ , et obtenons

$$2\bar{\alpha}_p \bar{\alpha}_B \int_0^T \|x(t)\| \|w(t)\| dt - \varepsilon \int_0^T \|x(t)\|^2 dt \geq V(x(T), T) - V(0, 0) \geq 0 \quad (3.9)$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy Schwarz (dans  $L_2$ ), on obtient :

$$\sqrt{\int_0^T \|x(t)\|^2 dt} \leq 2 \frac{\bar{\alpha}_p \bar{\alpha}_B}{\varepsilon} \sqrt{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \quad \forall T \in R^+ \quad (3.10)$$

Comme  $w \in L_2^m$ , on a :

$$\|x\|_2 \leq 2 \frac{\bar{\alpha}_p \bar{\alpha}_B}{\varepsilon} \|w\|_2 \quad (3.11)$$

et finalement l'hypothèse **H3.2** assure que :

$$\|z\|_2 \leq \|C\|_{i2} \|x\|_2 \leq 2 \left( \frac{\bar{a}_c \bar{a}_p \bar{a}_B}{e} \right) \|w\|_2.$$

Ceci démontre que le système est  $L_2$  gain stable.

Pour conclure à la stabilité asymptotique, on démontre, sans difficulté, que  $V(x,t)$  est une fonction de Lyapunov pour le système (voir [Ha, Zu]).

C.Q.F.D.

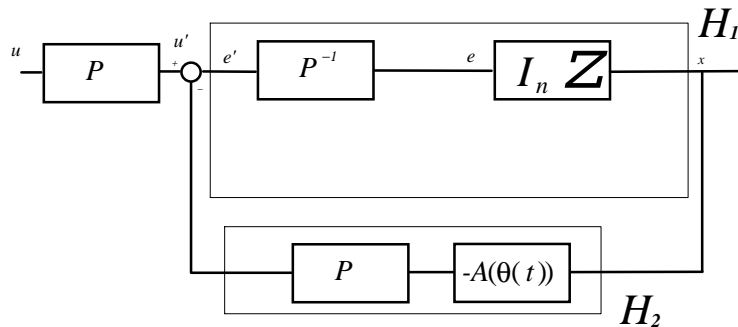


figure 3.1

On peut démontrer également ce Théorème en utilisant une approche entrée/sortie ([Saf80, Lemme 3.1 p. 78]). Dans cette référence, une matrice  $P$ , solution constante d'une équation de Lyapunov associée à une linéarisation du système non linéaire est utilisée comme multiplieur particulier. La stabilité du système est alors déduite de la stabilité de la boucle fermée décrite par la figure 3.1. En effet,  $H_2$  est un opérateur sans mémoire, défini positif par construction et  $H_1$  est positif, puisque le produit d'une diagonale d'intégrateurs par une matrice de gain, définie positive. Il ne reste alors, pour conclure, qu'à utiliser le Théorème de la passivité [Za66a,DeVi].

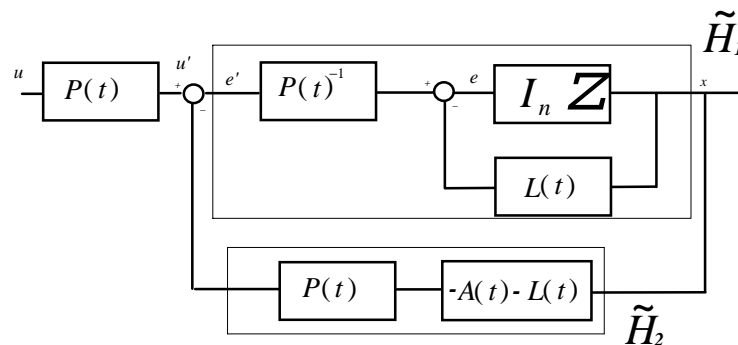


figure 3.2

Une argumentation semblable peut être utilisée dans notre cas. Pour cela, on utilise la matrice  $P(\theta)$  comme multiplieur. La difficulté majeure est ici de démontrer que l'opérateur  $\tilde{H}_1$ , l'analogue de l'opérateur  $H_1$ , est passif alors que les intégrateurs sont multipliés par une ma-

trice de gain ici variant dans le temps. Pour contourner cette difficulté, sur la base des références [FrZa] [SuTh72] et [SuTh73a], sur de la stabilité des systèmes linéaires stationnaires bouclés par un gain variant dans le temps (voir aussi [DeVi]), on modifie  $H_1$  en ajoutant un multiplicateur « exponentiel ». L'idée est d'absorber les accroissements positifs de  $P(\theta(t))$  à l'aide d'une exponentielle de matrice de sorte que le produit de  $P(\theta(t))$  et de cette exponentielle reste toujours décroissant, i.e.  $\frac{d}{dt}[P(\theta(t))e^{-2Lt}] \leq 0$ . On modifie alors l'opérateur  $H_2$ , comme cela est indiqué sur la figure 3.1, de sorte que l'équivalence des boucles fermées soit conservée. Les conditions (i) et (ii) du Théorème 3.1 peuvent être interprétées comme des conditions assurant respectivement la passivité de  $\tilde{H}_1$  et de  $\tilde{H}_2$ .

C.Q.F.D.

Il est intéressant de noter que le Théorème 3.1 permet de retrouver deux résultats « extrêmes » l'un concernant la stabilité de systèmes linéaires stationnaires dépendant de paramètres inconnus mais fixes et l'autre concernant la stabilité des systèmes soumis à des paramètres variant de façon quelconque. De façon plus précise, si  $P = cst$ , alors la condition (i) est toujours vérifiée et la condition (ii) est une condition assurant la stabilité quadratique du système ([Will, BoYa]). Dans ce cas, la vitesse de variation des paramètres n'est plus limitée. D'autre part, si  $\dot{\theta}(t) = 0$ , alors la condition (i) est toujours vérifiée et la condition (ii) correspond à une condition assurant la stabilité du système linéaire quelle que soit la valeur du paramètre (un test de type  $\mu$ ).

Faisons quelques commentaires sur le résultat et les conditions (i) et (ii).

D'un point de vue général, le Théorème 3.1 peut être appliqué lorsque le système LPV est discontinu. Ceci est particulièrement intéressant lorsque le système est commandé à l'aide de correcteurs commutés [HyGl]. Par ailleurs, la condition (i) peut toujours être satisfaite par un choix judicieux de  $L(v)$ . Notons que si la matrice  $L$  est constante, la condition (i) est équivalente à la condition :

$$\frac{d}{dt}[P(\theta(t))e^{-2Lt}] \leq 0.$$

Des commentaires plus techniques peuvent être faits pour les conditions (i) et (ii) du Théorème 3.1.

(i) - Supposons que  $A(v)$  soit une fonction analytique de  $v$  et que ses valeurs propres soient à partie réelle négative pour tout  $v \in \Omega^V$ . Alors, il existe une matrice  $P(v)$ , analytique, symétrique et définie positive telle que  $P(v)A(v) + A(v)^T P(v) < 0$  ([Del]).

(ii) - On peut utiliser les solutions des équations de Riccati associées au calcul des correcteurs minimisant la norme  $H_\infty$  ou  $H_2$  (sous l'hypothèse que ces solutions soient différentiables en fonction des paramètres)

(iii) - Dans certains cas, la matrice  $L(v)$  est facilement calculable. En effet, supposons que  $P(v)$  soit égal à :

$$P(v) = v P_1 + (1-v)P_2$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont les solutions d'équations de Lyapunov associées à deux valeurs extrêmes de  $\theta(t)$  ( $\theta(t)$  varie de 0 à 1). Notons qu'une telle situation arrive lorsque l'on utilise des correcteurs de type gains variables obtenus par une simple interpolation linéaire.

Calculons la dérivée de  $P(\theta(t))$  :

$$\dot{P}(t) = \left. \frac{\partial P(v)}{\partial v} \right|_{\theta(t)} \dot{\theta}(t) = (P_1 - P_2) \dot{\theta}(t)$$

Si l'on fait une hypothèse sur la variation du paramètre  $|\dot{\theta}(t)| < \delta$  et si l'on suppose  $P_1 - P_2 \geq 0$ , alors la condition(ii) est satisfaite en prenant

$$L(v) \geq \frac{\delta (P_1 - P_2) P^{-1}(v)}{2}$$

Finalement, quelques commentaires sur la synthèse du correcteur.

(iv) - Le Théorème 3.1 illustre le compromis que l'on doit satisfaire entre la vitesse de variation des paramètres et la modification structurelle du système en fonction de ces mêmes paramètres, i.e. la variation des vecteurs propres des systèmes gelés. En effet, en présence de paramètres variant rapidement, on doit geler  $P$  (i.e.  $\frac{\partial P(v_i)}{\partial v_i} = 0$ ). Ceci implique une faible modification des matrices d'état associées aux systèmes gelés. La stabilité du système est dans ce cas assurée à l'aide de la stabilité quadratique. A l'opposé, on peut tolérer une grande modification structurelle du système dès lors que les paramètres varient lentement.

(v) - Supposons que les états  $x(t)$ ,  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  soient mesurés, on peut alors utiliser une loi de bouclage sur (3.1) pour affaiblir la condition (i). Pour cela, posons

$$w'(t) = w(t) + F\dot{P}(\theta(t))x(t)$$

Réécrivant (3.3), on obtient :

$$\dot{V}(x, t) = (Ax + Bw + BF\dot{P}x)^T Px + x^T P(Ax + Bw + BF\dot{P}x) + x^T \dot{P}x$$

et de façon équivalente :

$$\dot{V}(x, t) = (Ax + Bw)^T Px + x^T P(Ax + Bw) + x^T (I + 2PBF) \dot{P}x$$

Il suffit alors de choisir  $F$  pour que la contrainte liée au terme  $I + 2PBF$  soit minimale et diminue d'autant la condition (i) du Théorème 3.1.

**b. Robustesse du système LPV par rapport à des perturbations non linéaires**

Le corollaire énoncé dans ce paragraphe assure la stabilité de la dynamique (3.1) lorsque elle est perturbée par des termes non linéaires. Notons,  $z(t) = \tilde{H}_{x_0}(\theta(t))w(t)$ , l'opérateur perturbé possédant la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + f(x(t), t) + B(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= C(\theta(t))x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où  $f$  est définie de  $R^n \times R$  dans  $R^n$  et telle que  $f(0, t) = 0$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Dans un premier temps, réécrivons  $f$  comme

$$f(x(t), t) \equiv M(x(t), t) x(t)$$

où  $M(x, t)$  est définie de  $R^n \times R$  dans  $R^{n \times n}$  par

$$M_{i,j}(x(t), t) = \frac{1}{n-m} \frac{f_i(x(t), t)}{x_j(t)} \quad x_j(t) \neq 0$$

et

$$M_{i,j}(x(t), t) = 0 \quad x_j(t) = 0$$

$m$  est le nombre de coordonnées nulles de  $x(t)$ .

On suppose que le système (3.12), non perturbé, satisfait les hypothèses **H3.1** et **H3.2** et que la perturbation non linéaire satisfait l'hypothèse :

**H3.3** : Il existe deux constantes réelles  $\alpha_{i,j}$  et  $\beta_{i,j}$  telles que pour tout  $x \in R^n$ ,  $t \geq 0$  et tout  $i \in [1, n]$  et  $j \in [1, n]$  on ait :

$$\alpha_{i,j} \leq M_{i,j}(x, t) \leq \beta_{i,j}$$

Associés à  $f$ , l'ensemble  $S_f$  des matrices réelles telles que :

$$S_f = \{K \in R^{n \times n} \mid \alpha_{i,j} \leq K_{i,j} \leq \beta_{i,j}\}.$$

On peut alors démontrer le résultat suivant.

**Corollaire 3.1**

Sous les hypothèses **H3.1**, **H3.2** et **H3.3**, le système (3.12) est globalement asymptotiquement stable et  $L_2$  gain stable si les conditions (i) et (ii) du Théorème 3.1 sont satisfaites et si

$$(iii) P(v) K + K^T P(v) < S(v) \quad \forall v \in \Omega^V \text{ et } \forall K \in S_f$$

où  $S(v) \in R^{n \times n}$  est donnée par

$$(iv) S(v) = -P(v)(A(v) + L(v)) - (A(v) + L(v))^T P(v)$$

**Démonstration :** Les conditions (iii) et (iv) assurent que

$$P(v) K + K^T P(v) < -(P(v)(A(v) + L(v)) + (A(v) + L(v))^T P(v))$$

et donc

$$P(v)(A(v) + K + L(v)) + (A(v) + K + L(v))^T P(v) < 0$$

On déduit de **H3.3** que pour tout  $v \in \Omega^V$ ,  $x \in R^n$  et  $t \in R^+$ , on a :

$$P(v)(A(v) + M(x, t) + L(v)) + (A(v) + M(x, t) + L(v))^T P(v) < 0$$

Pour conclure, on utilise les arguments de la démonstration du Théorème 3.1.

C.Q.F.D.

### c. Lipschitz continuité du système perturbé

Nous démontrons la stabilité incrémentale du système perturbé (3.12) en supposant que  $f$  est  $C^1$  et vérifie l'hypothèse :

**H3.4 :** Il existe deux constantes réelles  $\varphi_{i,j}$  et  $\psi_{i,j}$  telles que pour tout  $x \in R^n$ ,  $t \geq 0$  et tout  $i \in [1, n]$  et  $j \in [1, n]$ , on ait :

$$\varphi_{i,j} \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, t) \leq \psi_{i,j}$$

Associés à  $f$  l'ensemble  $S_{J_f}$  des matrices réelles, telles que

$$S_{J_f} = \{K \in R^{n \times n} \mid \varphi_{i,j} \leq K_{i,j} \leq \psi_{i,j}\}$$

Nous pouvons alors énoncer le corollaire suivant.

### Corollaire 3.2

Sous les hypothèses **H3.1**, **H3.2** et **H3.4**, le système (3.12) est globalement asymptotiquement stable et incrémentalement stable si les conditions (i) et (ii) du Théorème 3.1 sont vérifiées et si



$$(v) P(v) K + K^T P(v) < S(v) \quad \forall v \in \Omega^V \text{ et } \forall K \in S_{J_f}$$

**Démonstration :** On utilise ici le même type de raisonnement que pour la démonstration du Lemme VIII.2.1.

C.Q.F.D.

**Remarque :**

(i) - On note que vérifier (iii) ou (v) est un problème *N.P.* dur [Ne] (i.e. la complexité du calcul croît exponentiellement avec le nombre de paramètres). De telles conditions ne peuvent donc être vérifiées que pour un faible nombre de paramètres.

#### 4. Propriétés de robustesse associées aux gains variables $H_\infty$

L'objectif principal de ce paragraphe est de caractériser la robustesse des systèmes LPV par rapport à des incertitudes non structurées de modèle. Nous cherchons simplement à caractériser le  $L_2$ -gain d'un système dépendant de paramètres en fonction des  $L_2$ - gains associés aux systèmes gelés. Pour cela, associons au système (3.1) et à chaque valeur de  $v \in \Omega^V$ , un système linéaire stationnaire :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(v)x + B(v) \\ z &= C(v)x \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

et notons,  $z = \bar{H}_v w$ , l'opérateur entrée/sortie correspondant.

Les hypothèses suivantes sont faites.

**H4.1 :**  $A(v)$ ,  $B(v)$ ,  $C(v)$  sont des matrices de fonctions réelles analytiques sur  $\Omega^V$ .

**H4.2 :** La représentation d'état de tous les systèmes gelés est minimale, i.e.,

la paire  $(A(v), B(v))$  est contrôlable pour tout  $v \in \Omega^V$

la paire  $(C(v), A(v))$  est observable pour tout  $v \in \Omega^V$

**H4.3 :** Il existe une fonction dépendant du paramètre  $v$ , notée  $\gamma(v)$ , analytique sur  $\Omega^V$  et majorée par  $\bar{\gamma}$ , telle que pour tout  $v \in \Omega^V$  :

$$\|\bar{H}_v(s)\|_\infty^\sigma < \gamma(v) \leq \bar{\gamma}.$$

Sous ces hypothèses, un résultat concernant la solution de l'équation de Riccati associée au problème  $H_\infty$  peut être établi.

**Proposition 4.1**

*Sous les hypothèses H4.1, H4.2 et H4.3, l'équation de Riccati*

$$(A(v) + \sigma I_n)^T X_\infty(v) + X_\infty(v)(A(v) + \sigma I_n) + X_\infty(v)(\gamma(v)^{-2} B(v)B(v)^T)X_\infty(v) + C(v)^T C(v) = 0 \quad (4.2)$$

*a une unique solution,  $X_\infty(v)$ , strictement définie positive qui est analytique sur  $\Omega^V$ .*

**Démonstration :** Les hypothèses **H4.2** et **H4.3** assurent l'existence, l'unicité et la stricte positivité de  $X_\infty(v)$ , pour tout  $v \in \Omega^V$  (voir par exemple [DGKF]). L'analyticité de la solution peut être déduite des propriétés de l'hamiltonien associé à l'équation de Riccati (4.2). L'hypothèse **H4.3** garantit que la norme  $H_\infty^\sigma$  de chaque système gel  est strictement inférieure à  $\gamma(v)$ , ceci implique, puisque les représentations d'état associées aux systèmes gelés sont minimales, que les valeurs propres de l'hamiltonien n'appartiennent pas à l'axe imaginaire pour tout  $v \in \Omega^V$ . La Proposition 2.4 en [RaRo] peut être appliquée. Sur cette base, il ne reste qu'à modifier la démonstration du Théorème 4.1 en [RaRo] pour conclure.

C.Q.F.D.

La Proposition 4.1 peut être utilisée pour démontrer la diff rentiability des solutions des équations de Riccati associées à la synthèse d'un correcteur  $H_\infty$  sous-optimal.

Cette proposition permet de retrouver le résultat donné en [WaZa] (voir la section V) concernant la continuité du correcteur  $H_\infty$  sous-optimal en fonction des paramètres.

La solution de l'équation (4.2) peut être utilisée pour caractériser le  $L_2$ -gain du système global. Sur la base de la Proposition 4.1 et du Théorème 3.1, on établit le résultat suivant.

**Théorème 4.1**

*Sous les hypothèses H3.1, H3.2, H4.1, H4.2 et H4.3, le système (3.1) est  $L_2$ -gain stable et sa norme induite est inférieure à  $\bar{\gamma}$ , i.e.  $\|H_0(\theta)\|_{i_2} \leq \bar{\gamma}$ , si la condition suivante est satisfaite :*

$$(i) \quad \frac{d(X_\infty(\theta(t))e^{-2\sigma t})}{dt} \leq 0$$

**Démonstration :** Considérons la fonction quadratique suivante :

$$V(x, t) = x^T(t) X_\infty(\theta(t)) x(t) \quad (4.3)$$

que l'on dérive en fonction du temps :

$$\dot{V}(x, t) = \dot{x}^T(t) X_\infty(\theta(t)) x(t) + x^T(t) X_\infty(\theta(t)) \dot{x}(t) + x^T(t) \frac{d}{dt} [X_\infty(\theta(t))] x(t) \quad (4.4)$$

et que l'on écrit comme

$$\dot{V}(x, t) = \Psi + x^T(t) \dot{X}_\infty x(t) \quad (4.5)$$

avec

$$\Psi = (Ax + Bw)^T X_\infty x + x^T X_\infty (Ax + Bw)$$

Les dépendances en fonction de  $\theta(t)$  et  $t$  ont été éliminées.

Réécrivons alors l'équation de Riccati (4.2)

$$(A^T X_\infty + X_\infty A) = -2\sigma X_\infty - (X_\infty \gamma^{-2} B B^T) X_\infty - C^T C$$

Après quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$\Psi = -\|Cx\|^2 - \|\gamma^{-1} B^T X_\infty x\|^2 + 2 \langle w, B^T X_\infty x \rangle - 2 \langle x, \sigma X_\infty x \rangle$$

que nous transformons à l'aide de la complétion du carré en :

$$\Psi = -\|z\|^2 + \|\gamma w\|^2 - \|(\gamma w - \gamma^{-1} B^T X_\infty x)\|^2 - 2 \langle x, \sigma X_\infty x \rangle \quad (4.6)$$

Substituant (4.6) dans (4.5) et intégrant de  $t = 0$  à  $t = T$ , pour  $x_0 = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} V(x(T), T) - V(x_0, 0) &= \int_0^T \|\gamma(t) w(t)\|^2 dt - \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \\ &\quad - \int_0^T \|(\gamma(t) w(t) - \gamma^{-1}(t) B(t)^T X_\infty(t) x(t))\|^2 dt + \int_0^T x^T(t) (\dot{X}_\infty(t) - 2\sigma X_\infty(t)) x(t) dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les deux derniers termes de (4.7) sont négatifs, on a donc pour tout  $T \in R^+$  :

$$\int_0^T \|\gamma(t) w(t)\|^2 dt - \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \geq 0$$

En rappelant que  $\bar{\gamma}$  est un majorant de  $\gamma(v)$ , on obtient :

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt \leq \bar{\gamma}^2 \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt$$

qui prouve que la  $L_2$  stabilité et la majoration.

$$\|H_0(\theta)\|_{i_2} \leq \bar{\gamma} .$$

C.Q.F.D.

Remarque :

- Une observation concerne la difficulté associée à la synthèse de correcteur minimisant le  $L_2$  gain d'un système LPV. En effet, la synthèse  $H_\infty$  non stationnaire (voir par exemple [LAKG]) nécessite l'intégration d'une équation de Riccati, non stationnaire, en temps rétrograde, ce qui est impossible ici puisque la réalisation du paramètre est inconnue dans le futur.

### 5. Quelques commentaires

L'approche proposée ne permet de conclure à la stabilité des systèmes non linéaires commandés par des gains variables que sous réserve de conditions sur :

- la vitesse de variation des états du système non linéaire,
- la stabilité quadratique du système non linéaire.

La première condition est classique dans le contexte des gains variables ([Ke, Sha88, Hu-Ru],...). Une telle condition est difficile à satisfaire dès lors que l'on s'intéresse à la robustesse en stabilité d'un système non linéaire perturbé par des dynamiques négligées. En effet, il est difficile dans ce cadre d'obtenir des conditions concernant la variation de l'état du système perturbé (voir [Sha]).

La seconde condition est évoquée de façon implicite en [ShBe90&92, ShLa] et considérée explicitement en [BPPB, Pa, PaBe, ApGah]. Elle est satisfaite dans le cas de la linéarisation par bouclage.

Notons enfin deux références récentes ([WaMiDe, PaHo]) évoquant les liens entre la stabilité quadratique d'un système et la stabilité d'une famille de systèmes linéaires invariants incertains.

La méthode des gains variables, fondée sur une heuristique [Ru], peut être maintenant considérée comme une solution approchée du problème de la synthèse incrémentale.

De façon anecdotique, il est frappant de noter qu'en [Sha], l'auteur s'intéresse aux propriétés entrée/sortie du système décrit par la figure 5.1. Comme nous l'avons vu, ceci revient à assurer que le schéma décrit par la figure 5.2 est incrémentalement stable (Lemme de Willems).

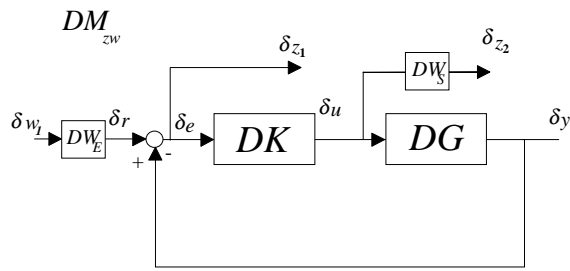


figure 5.1

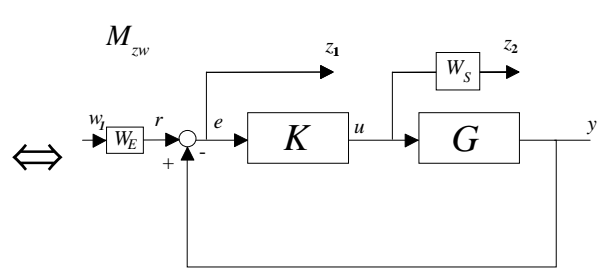


figure 5.2

## X. Conclusion et perspectives

La première partie de cette thèse montre que certains problèmes de commande non linéaire peuvent être ramenés à des problèmes de minimisation de norme incrémentale pondérée. Pour cela, nous avons examiné de façon systématique différentes questions se rapportant au problème de la commande des systèmes non linéaires. Cet examen a permis de montrer que la norme incrémentale est capable, non seulement de prendre en compte le problème de la robustesse en stabilité des systèmes bouclés, mais aussi de prendre en compte les objectifs de désensibilisation et de stabilité asymptotique.

Après avoir justifié l'intérêt du concept de normes incrémentales pondérées dans le cadre de la commande, nous avons proposé des résultats spécifiques. En premier lieu, une condition de type algébrique assurant qu'un système non linéaire est incrémentalement stable est obtenue. Nous nous sommes ensuite intéressés au problème de la synthèse. Nous abordons ce problème en deux temps : dans un premier temps nous nous intéressons au problème de l'optimisation non linéaire et obtenons une condition suffisante d'existence pour d'un correcteur non linéaire par retour d'information complète. Dans un second temps, nous utilisons des résultats récents concernant les *LMI* pour proposer des solutions spécifiques au problème de la synthèse incrémentale. Enfin, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la stabilité et à la robustesse des systèmes dépendant de paramètres variant dans le temps. Nous avons montré que la méthode des gains variables pouvait être utilisée pour approcher les solutions du problème de la synthèse incrémentale.

De nombreux points devront être développés.

Le problème qui nous semble le plus important est de rechercher des conditions nécessaires (et suffisantes) concernant la synthèse incrémentale; la question sous-jacente étant la nature du correcteur : est-il nécessairement dynamique ? La solution de ce problème passe, à notre avis, par l'utilisation des résultats concernant les jeux différentiels singuliers à information incomplète. Cette étude aurait des conséquences directes dans le cadre des gains variables.

Une deuxième perspective concerne les conditions de différentiabilité associées aux fonctions permettant de vérifier la stabilité incrémentale. En effet, dans notre contexte, cette question peut être associée à des résultats anciens caractérisant la différentiabilité des fonctions de Lyapunov de systèmes asymptotiquement stables.

Une troisième perspective concerne la formulation « plus locale » des théorèmes de stabilité robuste, ceci reste difficile car remet partiellement en cause l'approche classique utilisant les espaces étendus.

Un quatrième point concerne une étude analogue dans le contexte discret et échantillonné. Il nécessite le « réexamen » des différents résultats obtenus ici. Ce sujet apparaît important dans le cadre de l'implantation des méthodes permettant d'approcher un objectif incrémental.

On note enfin les perspectives ouvertes par les travaux récents sur la résolution des équations d'Hamilton Jacobi associées à la minimisation du  $L_2$  gain d'un système non linéaire, ceci à travers l'utilisation d'inégalités matricielles non linéaires (*NLMI*).

*Références*

*bibliographiques*



- [AdBa] Adams R. J. and Banda S. S., " An integrated approach to flight control design using dynamic inversion and  $\mu$ - synthesis," in *American Control Conference*, 1993.
- [AlTiFo] Alexéev V., Tikhomirov V. et Fomine S. , *Commande optimale*, Ed. MIR, 1982.
- [Ap] Apkarian P. *Robustesse de la commande des systèmes multivariables. Application au pilotage d'un hélicoptère*, Thèse ENSAE, 1988.
- [ApGah] Apkarian P. and Gahinet P., " Synthèse  $H_\infty$  des systèmes lineaires à parametres Variants," Ecole du printemps sur la commande robuste , Toulouse, 1994.
- [Ar] Araki M., " Stability of large-scale nonlinear systems-quadratic order theory of composite system method using M- Matrices," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-23, pp. 129-142, 1978.
- [ArWi] Arrows A. and Williams D. E., " Comparison of classical and modern missile autopilot design and analysis techniques," *J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12 pp. 220-227, 1989.
- [ArYo] Arrows A. and Yost D. J., " Large angle-of-attack missile control concepts for aerodynamically controlled missiles," *J. of Spacecraft*, Vol. 14, pp. 606-613, 1977.
- [Au] Aubin J.P., *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tome 1, P.U.F Mathématiques, 1987.
- [BaBe] Basar T. and Bernhard P.,  *$H_\infty$ -optimal control and related minimax design problems : a dynamic game approach* . Boston MA: Birkhauser, 1991.
- [BaHe89] Ball J. A. and Helton J. W., "  $H_\infty$  control for nonlinear plants : conection with differential games," in *Conference Decision and Control*, 1989.
- [BaHe92] Ball J. A. and Helton J. W., " Nonlinear  $H_\infty$  control theory for stable plants," *Mathematics of Control, Signals and Systems.*, Vol. 5, pp. 233-261, 1992.
- [BaHeWa] Ball J. A., Helton J. W and Walker M. L., "  $H_\infty$  control for nonlinear systems via output feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-38, pp. 546-559, 1993.
- [BaOl] Basar T. and Olsder G. J., *Dynamic noncooperative game theory*. New York : Academic Press, 1982.
- [BaPa] Balas G. J. and Packard A. K., " Design of robust, time-varying controllers for missile autopilots," in *Conference Control Applications*, Dayton, 1992.
- [BaRu] Baumann W. T. and Rugh W. J., " Feedback control of nonlinear systems by extended linearization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-31, pp. 40-46, 1986.
- [Be] Bernhard P., " La théorie de la seconde variation et le problème linéaire quadratique," *In Advance in Hamiltonian Systems*, Ekeland and Aubin eds., Birkhauser.
- [Be76] Bernhard P., *Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques*, Dunod Automatique, 1976.

- [Be91a] Bernhard P., " Application of the min-max certainty equivalence principle to sampled data output feedback  $H_\infty$  control problem," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 16, pp. 229-234, 1991.
- [Be91b] Bernhard P., *Théorie et applications de la commande robuste  $H_\infty$* , INRIA, Cours 1991 du 26-28 Juin 1991.
- [BeCo] Bernhard P. and Colomb A.L., *Saddlepoint conditions for a class of stochastic dynamical games with imperfect information*, Rapport de recherche de l'INRIA Pr. 5, n. 982 ,1989.
- [BeJa] Bell D. J. et Jacobson D. H., *Singular optimal control problems*, Mathematics in science and engineering, Volume 117, Academic Press, 1975.
- [BePa] Becker G. and Packard A., " Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 23, pp. 205-215, 1994.
- [BGFb] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E. and Balakrishnan V., *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, 1994.
- [Bl34] Black H. S., " Stabilized feedback amplifiers," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 44, pp. 1-18, 1934.
- [Bl77] Black H. S., " Inventing the negative feedback amplifier," *IEEE Spectrum*, Vol. 14, pp. 54-60, 1977.
- [Bo] Boltyanskii V.G., " Sufficient conditions for optimality and the justification of dynamic programming method," *J. SIAM Control*, Vol. 4, pp. 326-361, 1966.
- [Bo45] Bode H. W., *Network analysis and feedback amplifier design*. New York : D. Van Nostrand, 1945.
- [BoYa] Boyd S. and Yang Q., " Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems," *Int. J. control*, Vol. 49, pp. 2215-2240, 1989.
- [BPPB] Becker G., Packard A., Philbrick D. and Ballas G., " Control of parametrically depend linear systems : a single quadratic Lyapunov approach," *in American Control Conference*, 1993.
- [BrHo] Bryson A. E. and Ho Y. C., *Applied optimal control*, Ginn et Company, 1969.
- [ByIsWi] Byrnes C. I., Isidori A. and Willems J. C., " Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-36, pp. 1228-1240, 1991.
- [ChDe] Chen M. J. and Desoer C. A., " Necessary and sufficient condition for robust stability of linear distributed feedback systems," *Int. J. Control*, Vol. 35, pp. 255-267, 1982.
- [ChKo76] Chow J.H. and Kokotovic P.V., " A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-21 pp. 701-705, 1976.
- [ChKo81] Chow J.H. and Kokotovic P.V., " A two-stage Lyapunov -Bellman feedback design of a class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26 pp. 656-663, 1981.

- [ChSaTe] Chiang R. Y., Safonov M. G. and Tekawy J., "  $H_\infty$  flight control design with large parametric robustness," in *American Control Conference*, 1990.
- [ClEvFe] Cloutier J. R., Evers J. H. and Feeley J. J., " Assessment of air-to-air missile guidance and control technology, " *IEEE Control Systems Magazine*, October, pp. 27-35,1989.
- [CrFrLo] Cruz J. B., Freudenberg J. S. and Looze D. P., " A relation between sensitivity and stability of multivariable feedback systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 66-74, 1981.
- [CrLi] Crandall M. G. and Lions P. L., "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations," *Transaction of the Mathematical Society*, Vol. 277, N.1 pp.1-42, 1983.
- [CrPe] Cruz J. B. and Perkins W. R., " A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback system design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-9, pp. 216-223, 1964.
- [CSHMT] Chiang R.Y., Safonov M. G., Haiges K., Madden K. and Tekawy J., " A fixed  $H_\infty$  controller for supermaneuverable fighter performing the Herbst maneuver," *Automatica*, Vol. 29, pp. 111-127, 1993.
- [De] Delchamps D. F., " Analytic stabilization and algebraic Riccati equation," in *Conference Decision and Control*, 1983.
- [De69] Desoer C. A., " Slowly varying system  $\dot{x} = A(t)x$ ," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-14, pp. 780-781, 1969.
- [De75] Desoer C. A., " Plant perturbation in nonlinear multivariable feedback system," *J. Franklin Inst.*, Vol. 299, pp. 279-282, 1975.
- [De78] Desoer C. A., " Perturbation in the I/O map of nonlinear feedback system caused by large plant perturbation ," *J. Franklin Inst.*, Vol. 306, pp. 225-235, 1978.
- [DeKa] Desoer C. A. and Kabuli M. G., " Stabilization and robustness of non-linear unity-feedback system : factorization approach," *Int. J. Control*, Vol. 47, pp. 1133-1148, 1988.
- [DeLi] Desoer C. A and Lin. C. A., " Tracking and disturbance rejection of MIMO nonlinear systems with PI controller," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-30, pp. 861-867,1985.
- [DeVi] Desoer C. A., and Vidyasagar, M., *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.
- [DeWa79] Desoer C. A and Wang Y. T., " The robust nonlinear servomechanism problem," *Int. J. control*, Vol. 29, pp. 803-828, 1979.
- [DeWa80] Desoer C. A and Wang Y. T., " Foundations of feedback theory for nonlinear dynamical systems," *IEEE Trans. Cir. Sys.*, Vol. CAS-27, pp. 104-123, 1980.
- [DGKF] Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A., " State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-36, pp. 831-846, 1989.
- [Do79] Doyle J. C., " Robustness of multivariable linear feedback systems," in *Conference Decision and Control*, 1979.

- [Do82] Doyle J. C., " Analysis of feedback systems with structured uncertainties," *IEE Proc.*, Vol. 129, pp. 242-250, 1982.
- [Do85] Doyle J. C., " Structured uncertainties in control system design," in *Conference Decision and Control*, 1985.
- [DoFrTa] Doyle J. C., Francis B. A. and Tannenbaum A. R., *Feedback control theory*, Maxwell Macmillan International ed., 1992.
- [DoGeSm] Doyle J. C., Georgiou T.T. and Smith M. C., " On the parallel projection of nonlinear systems," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 20, pp. 79-85, 1993.
- [DoPaZh] Doyle J., Packard A. and Zhou K., " Review of LFTs, LMIs, and  $\mu$ ," in *Conference Decision and Control* , 1991.
- [DoSt] Doyle J. C. and Stein G., " Multivariable feedback design : concepts for a classical / modern synthesis," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 4-16, 1981.
- [DoWaSt] Doyle J. C., Wall J. E. and Stein G., " Performance robustness analysis for structured uncertainty," in *Conference Decision and Control*, 1982.
- [El] El-Sakkary A. K., " The gap metric : robustness of stabilization of feedback systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-30, pp. 240-247, 1985.
- [FaTiDo] Fan M. K. H., Tits A. L. and Doyle J. C., " Robustness in presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-36, pp. 25-38, 1991.
- [FiCh] Figueiredo R. J. P. and Chen G., " Optimal disturbance rejection for nonlinear control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-34, pp. 1242-1248, 1989.
- [FoTa] Foias C. and Tannenbaum A., " Weighted optimization theory for non linear systems ," *SIAM J. Contr. and Optim.*, Vol. 27, pp. 842-860, 1989.
- [Fr87] Francis B.A., *A course in  $H_\infty$  control theory*, Lec. Notes Contr. Inf. Sci. Vol 88, Springer-Verlag : Berlin, 1987.
- [Fre] Freudenberg J. S., " Analysis and design for ill-conditioned plants. Part 1 : lower bounds on the structured singular value," *Int. J. Control*, Vol. 49 pp. 851-871, 1989.
- [Fri] Friedman A., *Differential games*. New York : Wiley-Interscience, 1971.
- [FrZa] Freedman M. and Zames G., " Logarithmic variation criteria for stability of systems with time-varying gains," *SIAM J. Contr.*, Vol. 6, pp. 487-507, 1968.
- [Gah] Gahinet P." A convex parametrization of  $H_\infty$  suboptimal controllers," in *Conference Decision and Control*, 1992.
- [GahAp] Gahinet P. and Apkarian P., " State space  $H_\infty$  : a complete solution via convex Riccati inequalities," Special issue on  $H_\infty$  Control of *Int. J. Robust, Nonlinear Control*, 1994.
- [Gaz] Gazzina A., " How to control unstable missile airframes : methodology and limitations," *AGARD conference proc. 451*, Turkey, 1988.

- [Ge] Georgiou T.T., " Differential stability and robust control of nonlinear systems," *Mathematics of Control, Signals and Systems*, No 6, pp. 289-306, 1993 et in *Conference Decision and Control*, 1993.
- [GeSm] Georgiou T.T. and Smith M. C., " Optimal robustness in the gap metric," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-35, pp. 673-687, 1990.
- [Gi] Gilbert E. G., " Functional expansions for the response of nonlinear differential systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-22, pp. 909-921, 1977.
- [Gla84] Glad T. S., " On the gain margin of nonlinear and optimal regulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-29, pp. 615-620, 1984.
- [Gla87] Glad T. S., " Robustness of non linear State feedback-A survey," *Automatica*, Vol. 23, pp. 425-435, 1987.
- [GIDo] Glover K. and Doyle J. C., " State space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$  -norm bound and relations to risk sensitivity," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 11, pp. 167-172, 1988.
- [GIWa] Glattfelder A. H. and Schaufelberger W., " Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-28, pp. 1074-1081, 1983.
- [Go66a] Goh B. S., " Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables," *SIAM J. Contr.*, Vol. 4, pp. 716-731, 1966.
- [Go66b] Goh B. S., " The second variation for the singular Bolza problem," *SIAM J. Contr.*, Vol. 4, pp.309-325, 1966.
- [Gr] Grunberg D., *A methodology for designing robust multivariable nonlinear control systems*, Ph. D., Dept. of Electrical Engineering, M.I.T., 1986.
- [Gu93] Gu K., " The trade-off between  $H_\infty$  attenuation and uncertainty tolerance by quasiconvex optimization," in *American Control Conference*, 1993.
- [Gu94] Gu K., " Designing stabilizing control of uncertain systems by quasiconvex optimization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-39, pp. 127-131,1994.
- [GuRu] Guo D. and Rugh W. J., " An approach to gain scheduling on fast variables," in *Conference Decision and Control*, 1992.
- [Ha] Hahn W., *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [HaKiHe] Hanus R., Kinnaert M. and Henrotte M., " Conditioning technique, a general antiwindup and bumpless transfer method," *Automatica*, Vol. 23, pp. 729-739, 1987.
- [Har] Harcaut J.P. *Commande non linéaire appliquée au pilotage d'un engin*, Thèse ENSAE, 1991.
- [HaTuBo] Ha I. J., Tugcu A. K. and Boustany N. M., " Feedback linearizing control vehicle longitudinal acceleration," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-34, pp.689-698, 1989.
- [He] Helton J.W., " Two topics in systems engineering : Frequency domain design and nonlinear systems," in  *$H_\infty$ -Control Theory : Como 1990*, E. Mosca and L. Pandolfi, Ed. NY/ Springer Verlag , 1991.

- [HiMo76] Hill D. J. and Moylan P. J., " The stability of nonlinear dissipative systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-21, pp. 708-711, 1976.
- [HiMo77] Hill D. J. and Moylan P. J., " Stability results for nonlinear feedback systems," *Automatica*, Vol. 13, pp. 377-382, 1977.
- [HiMo80] Hill D. J. and Moylan P. J., " Connection between finite-gain stability and asymptotic stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-25, pp. 931-936, 1980.
- [HiMo80a] Hill D. J. and Moylan P. J., " Dissipative dynamical systems : basic input-output and state space properties," *J. Franklin Inst.*, Vol. 309, pp. 327-357, 1980.
- [Ho76] Horowitz I. M., " Synthesis of feedback systems with nonlinear time-varying uncertain plants to satisfy quantitative performance specifications," *Proc. of the IEE*, Vol. 64 , pp. 123-130,1976.
- [Ho81] Horowitz I. M., " Improvement in quantitative nonlinear feedback design by cancellation., " *Int. J. Control*, Vol. 34, pp. 547-560, 1981.
- [Ho82] Horowitz I. M., " Feedback systems with nonlinear uncertain plans," *Int. J. Control*, Vol. 36, pp. 155-171, 1982.
- [Hol] Holtzman J. M., " Contraction maps and equivalent linearisation," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 46, pp. 2405-2435, 1967.
- [HoSh] Horowitz I. M. and Shaked U., " Superiority of transfer function over state-variable methods in linear time-invariant feedback system design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-20, pp. 84-97, 1975.
- [HuRu92] Huang J. and Rugh W. J., " Stabilization on zero-error manifolds and the nonlinear servomechanism problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-37, pp. 1009-1013, 1992.
- [HuRu92] Huang J. and Rugh W. J., " An approximation method for nonlinear servomechanism problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-37, pp. 1395-1398, 1992.
- [HyGl90] Hyde R. A. and Glover K., " VSTOL aircraft flight control system design using  $H_\infty$  controllers and switching strategy," in *Conference Decision and Control*, 1990.
- [HyGl91a] Hyde R. A. and Glover K., " Meeting VSTOL aircraft performance requirements using scheduled  $H_\infty$  controllers," in *American Control Conference* , 1991.
- [HyGl91b] Hyde R. A. and Glover K., " A comparison of different scheduling techniques for  $H_\infty$  controllers," *Proc. Inst. Measurement Contr. Symp. Robust Contr. Sys. Design*, Cambridge, U.K., 1991.
- [HyGl93a] Hyde R. A. and Glover K., " The application of scheduled  $H_\infty$  controllers to a VSTOL aircraft," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-38, pp. 1021-1039, 1993.
- [HyGl93b] Hyde R. A. and Glover K., " Taking  $H_\infty$  control into flight," in *Conference Decision and Control*, 1993.
- [IJRNC] Special issue on Horowitz and QFT design methods, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, 1994.

- [Is89] Isidori A., *Nonlinear control systems*, 2nd edition, Springer-Verlag : Berlin - New York., 1989.
- [Is91] Isidori A., " Feedback control of nonlinear systems," in *1st European Control Conf.*, Grenoble, France, pp. 1001- 1012, 1991.
- [Is92] Isidori A., " Dissipation inequalities in nonlinear  $H_\infty$  control," in *Conference Decision and Control*, 1992.
- [IsAs92a] Isidori A. and Astolfi S., " Disturbance attenuation and  $H_\infty$  control via measurement feedback in nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-37, pp. 1283-1293, 1992.
- [IsAs92b] Isidori A. and Astolfi S., " Nonlinear  $H_\infty$  - control via measurement feedback," *J. Mathematics of Control, Signals and Systems.*, Vol. 2, pp. 31-44, 1992.
- [Jac69] Jacobson D. H., " A new necessary condition of optimality for singular control problems," *SIAM J. Contr.*, Vol. 7, pp. 578-595, 1969.
- [Jac70a] Jacobson D. H., " Sufficient conditions for non-negativity of second variation in singular and nonsingular control problems," *SIAM J. Contr.*, Vol. 8, pp. 578-595, 1970.
- [Jac70b] Jacobson D. H., " On condition of optimality for singular control problems ," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-15, pp. 109-110, 1970.
- [Jac71a] Jacobson D. H., " A general sufficiency theorem for the second variation," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 34, pp. 578-589, 1971.
- [Jac71b] Jacobson D. H., " Totally singular quadratic minimization problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-16, pp. 651-658, 1971.
- [Jam93a] James M. R., " A partial differential inequality for dissipative nonlinear systems," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 21, pp. 315-320, 1993.
- [Jam93b] James M. R., " Computing the  $H_\infty$  norm for nonlinear systems," in *12<sup>th</sup> IFAC World Congress*, Sydney, 1993.
- [JaSp] Jacobson D. H. and Speyer J. L., " Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems : a limit approach," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 34, pp. 239-266, 1971.
- [Ka60] Kalman R. E., " Contributions to the theory of optimal control," *Bol. Soc. Mat. Mex.*, Vol. 5, 1960.
- [Ka63] Kalman R. E., " The theory of optimal control and the calculus of variations," *Ch.16 of mathematical optimization techniques*, R. Bellman (ed.), University of California Press, 1963.
- [KaAk] Kantorovitch L. et Akilov G., *Analyse fonctionnelle*, Tome I et II, MIR, 1977.
- [Ke] Kelley H. J., " A transformation approach to singular subarc in optimal trajectory and control problems," *SIAM J. Contr.*, Vol. 2, pp. 234-240, 1964.
- [Kel] Kelemen M., " A stability property," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-31, pp. 766-768, 1986.
- [KhCh] Khalil K H. and Chen F. C., "  $H_\infty$  control of two-time-scale systems," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 19, pp. 35-42, 1992.

- [KhPeRo] Khargonekar P.P., Petersen I. R. and Rotea M. A., "  $H_\infty$  optimal control with state feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-33, pp. 786-788, 1988.
- [Kr68a] Kreindler E., " On the definition and application of sensitivity function," *J. Franklin Inst.*, Vol. 285, pp. 26-36, 1968.
- [Kr68b] Kreindler E., " Closed-loop sensitivity reduction of linear optimal control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-13, pp. 254-262, 1968.
- [Kr69] Kreindler E., " On sensitivity of closed loop nonlinear optimal control system," *SIAM J. Contr.*, Vol. 7, pp. 512-520, 1969.
- [KrJa] Kreindler E. and Jameson A., " On sensitivity reduction in nonlinear feedback systems," in *3rd IFAC Symposium on sensitivity, adaptativity and optimality*, Italy, 1973.
- [Kw] Kwakernaak H., " Minimax frequency domain performance and robustness optimization of linear feedback systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-30, pp. 994-1004, 1985.
- [LAKG] Limebeer J. N. D., Anderson B. D. O., Khargonekar P. P. and Green M., " A game theoretic approach to  $H_\infty$  control for time-varying systems," *SIAM. J. Contr. Optim.*, Vol. 30, pp. 262-283, 1992.
- [LaLe] LaSalle J. and Lefschetz S., *Stability by Lyapunov's direct method*, New York : Academic Press, 1961.
- [LaRu] Lawrence D. A. and Rugh W. J., " On a stability theorem for nonlinear systems with slowly varying inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-35, pp. 860-864, 1990.
- [Le] Lefschetz S., *Stability of nonlinear control systems*, Mathematics in science and engineering, Volume 13, Academic Press, 1965.
- [LeLaCh] Lee K. L., Langehough M. A. and Chamberlain R. A., " Modern control bank-to-turn autopilot for Have Dash II Missile," in *American Control Conference* , 1992.
- [LeSaAt] Lehtomaki N. A., Sandell N. R. and Athans M., " Robustness results in the linear quadratic gaussian based multivariable control designs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 75-92, 1981.
- [LiCh] Li X.P. and Chang B.C. , " On convexity of  $H_\infty$  Riccati solutions and its applications," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-38, pp. 963-966, 1993.
- [Lu] Lukes D., " Optimal regulation of nonlinear systems," *SIAM J. Contr.*, Vol. 7, pp. 75-100, 1969.
- [LuSo] Lusternik L. and Sobolev V. , *Precis d'analyse fonctionnelle*, MIR, 1989.
- [Ma] Magerious E. F. , " Values and strategies for infinite time linear quadratic games," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-21, pp. 547-550, 1976.
- [MaHo] Magerious E. F. and Ho Y. C., " Decentralized stabilization via game theoretic methods," *Automatica*, Vol. 13, pp. 88-896, 1977.
- [Me] Megretski A., " Necessary and Sufficient conditions of stability : a multiloop generalization of circle criterion," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-38, pp. 753-756, 1993.



- [Mi] Michel A., " On the status of stability of interconnected systems," *IEEE Trans. Cir. Sys.*, Vol. CAS-30, pp. 326-340, 1978.
- [MiSiBe] Michailesco G., Siret J. M. and Bertrand P., " Modélisation de grands systèmes par agrégation," *RAIRO Automatique, Systems Analysis and control*, Vol. 13-2, pp. 159-170, 1978.
- [Mo] Moylan P. J., " Implications of passivity in a class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-19, pp. 373-381, 1974.
- [MoAn] Moylan P. J. and Anderson B. D. O., " Nonlinear regulator theory and an inverse optimal control problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-18, pp. 460-465, 1973.
- [MoVaVi] Moylan P. J, Vannelli A. and Vidyasagar M., " On the stability and well-posedness of interconnected nonlinear dynamical systems," *IEEE Trans. Cir. Sys.*, Vol. CAS-27, pp. 1097-1101 1980.
- [Ne] Nemiroskii A., " Several NP-hard problems arising in robust analysis," *Mathematics of Control, Signals and Systems*, Vol. 6, pp. 99-105, 1993.
- [NiVDS] Nijmeijer H. and Van der Schaft A.J., *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag : Berlin -New York., 1990.
- [Ob] Oberkampf W. L., " Prediction of Roll Moment on finned bodies in supersonic flow," *J. Spacecraft*, Vol. 12, pp. 17-21, 1975.
- [Os] O'Shea R. P., " A combined frequency-time domain stability criterion for autonomous continuous systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-11, pp. 477-484, 1966.
- [Os] Ostroff A., " Application of variable-gain output feedback for high-alpha control," in *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1989.
- [Pa] Packard A., " Gain scheduling via linear fractional transformations," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 22, pp. 79-92, 1994.
- [PaBa] Pan Z. and Basar T., "  $H_\infty$  optimal control for singularly perturbed systems -Part I : imperfect state measurements," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-39 pp. 280-299, 1994.
- [PaDo88] Packard A. and Doyle J., " Structured singular value with repeated scalar blocks," in *American Control Conference*, 1988.
- [PaDo90] Packard A. and Doyle J., " Quadratic stability with real and complex perturbations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-35, pp. 198-201, 1990.
- [PaHo] Padmanabhan P. and Hollot," Quadratic stability of interval matrices," in *Conference Decision and Control*, 1993.
- [PBGM] Pontryagin L.S. Boltanskii V. G., Gamkrelidze R.S. and Mischenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Pergamon ,1964.
- [Pe] Pernebo L., " An algebraic theory for design of controllers for linear multivariable systems- Part I : structure matrices and feedforward design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 171-182, 1981.

- [PeAnJo] Petersen I. R., Anderson B. D. O. and Jonckheere E. A., " A first principle solution to nonsingular  $H_\infty$  control problem," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 1, pp. 153-170,1991.
- [Po] Porter W. A., " Minimizing system sensitivity trough feedback," *J. Franklin Inst.*, Vol. 286, pp. 225-240, 1968.
- [PoEdMa] Postlethwaite I., Edmunds J. M. and MacFarlane A. G. J., " Principal gains and principal phase in the analysis of linear multivariable feedback system," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 32-46, 1981.
- [RaNaKh] Ravi R., Nagpal K. M. and Khargonekar P. P., "  $H_\infty$  control for linear time-varying systems : a state-space approach," *SIAM J. Contr. and Optimi.*, Vol. 29, pp. 1394-1413, 1991.
- [RaRo] Ran A. C. M. and Rotdman L., " On parameter dependence of solutions of algebraic Riccati equations," *Mathematics of Control, Signals and Systems*, N.1, pp. 269-284, 1988.
- [Re90] Reichert R. T., " Modern robust control missile autopilot design," in *American Control Conference* , 1992.
- [Re92] Reichert R. T., " Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles," *IEEE Control Systems Magazine*, October, pp. 35-42, 1992.
- [ReCh] Reboulet C. et Champetier C., " A new method for linearizing nonlinear systems : the pseudolinarisation," *Int. J. control*, Vol. 40, pp. 631-638, 1984.
- [ReSaCo] Reissig R., Sansone G. et Conti R., *Non-linear Differential Equations of Higher Order*, Noordhorff International Publissers, 1974.
- [RhLu69a] Rhodes I.B. and Luenberger D., " Differential games with imperfect state information," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-14, pp. 29-38, 1969.
- [RhLu69b] Rhodes I.B. and Luenberger D., " Stochastic differential games with constrained state estimators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-14, pp. 476-481, 1969.
- [RiNa] Riesz F. et Nagy B. S. Z., *Leçons d'analyse fonctionnelles*, Gauthier-Villars, 1968.
- [Ro] Robbins H. M., " A generalized Legendre-clebsch condition for the singular cases of optimal control," *IBM J. Develop.*, Vol. 3, pp. 361-372, 1967.
- [RoMa] Rouche N. et Mawhin J., *Equations différentielles ordinaires : tome I et II*, Masson et Cie, 1973.
- [Ru] Rugh W. J., " Analytical framework for gain scheduling," *IEEE Control Systems Magazine*, January, pp. 79-84, 1991.
- [Rut] Ruth M. J., " Robust control of bank-to-turn missile," in *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1990.
- [SaAt77] Safonov M. G. and Athans M., " Gain and phase margin for multiloop LQG regulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-22, pp. 173-178, 1977.
- [SaAt78] Safonov M. G. and Athans M., " Robustness and computational aspects of nonlinear stochastic estimators and regulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-23, pp. 717-725, 1978.
- [SaAt81] Safonov M. G. and Athans M., " A multiloop generalization of the circle

- stability criterion for stability margin," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 415-422, 1981.
- [Saf80] Safonov M. G., *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*, The M.I.T. press, 1980.
- [Saf82] Safonov M. G., " Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback system," *IEE Proc.*, Vol. 129, pp. 251-256, 1982.
- [Saf84] Safonov M. G., " Stability of interconnected systems having slope-bounded nonlinearities", *6th International Conference on Analysis and Optimization of Systems*, Nice, France, pp. 276 -287, 1984.
- [Sag] Sage A. P., *Optimum systems control*, Prentice-Hall E.E. series, 1968.
- [SaLaHa] Safonov M. G., Laub A.J. and Hartmann G.L., " Feedback properties of multivariable systems : the role and use of the return difference matrix," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 47-65, 1981.
- [SaLe] Safonov M. G. and Lee P. H., " A multiplier method for computing real multivariable stability margins," *Proc. of the 1993 IFAC World Congress*, Sydney, 1993.
- [San63] Sandberg I. W., " On the theory of linear multiloop feedback system," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 42, pp. 355-382, 1963.
- [San64a] Sandberg I. W., " On the  $L_2$  boundedness of solutions of nonlinear functional equations," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 43, pp. 1581-1599, 1964.
- [San64b] Sandberg I. W., " A frequency-domain condition for the stability of systems containing a single time-varying nonlinear element," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 43, pp. 1601-1638, 1964.
- [San65a] Sandberg I. W., " Some results on the theory of physical systems governed by nonlinear functional equations," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 44, pp. 871-898, 1965.
- [San65b] Sandberg I. W., " An observation concerning the application of contraction-mapping fixed-point theorem, and result concerning the norm boundedness of solution of nonlinear functional equations," *The Bell Sys. Tech. J.*, pp. 1809-1812, 1965.
- [Sch] Schwartz L., *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, 1993.
- [Sh91] Shamma J. S., " Performance limitations in sensivity reduction for nonlinear plants," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 17, pp. 43-47, 1991.
- [Sh91a] Shamma J. S., " The necessity of small gain theorem for time varying and non linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-36, pp. 1138-1147, 1991.
- [Sha] Shamma J. S., *Analysis and design of gain scheduled control systems*, Ph. D., Dept. of Mechanical Engineering, M.I.T., 1988.
- [ShAt88] Shamma J. S. and Athans M., " Garanteed properties for nonlinear gain scheduled control systems," *in Conference Decision and Control*, 1988.
- [ShAt90] Shamma J. S. and Athans M., " Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-35, pp. 898-907, 1990.
- [ShAt91] Shamma J. S., Athans M., " Guaranteed Properties of Gain Scheduled Control for Linear Parameter-varying Plants," *Automatica* , Vol. 27, pp. 559-564, 1991.

- [ShAt92] Shamma J. S., Athans M., " Gain-scheduling : possible hazards and potential remedies," *IEEE Control Systems Magazine*, June, pp. 101-107,1992.
- [ShBe90] Shahruz S. M. and Behtash S., " Design of controllers for linear parameter-varying systems by the gain scheduling technique," in *Conference Decision and Control*, 1990.
- [ShBe92] Shahruz S. M. and Behtash S., " Design of controllers for linear parameter-varying systems by the gain scheduling technique," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 168, pp. 195-217, 1992.
- [ShCl92] Shamma J. S. and Cloutier J. R., " A linear parameter-varying approach to gain scheduled missile autopilot design," in *American Control Conference* , 1992.
- [ShCl93] Shamma J. S. and Cloutier J. R., " Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, pp. 256-263, 1993.
- [ShLa] Shahruz S. M and Langari G., " Design of compensator for linear parameter-varying feedback systems by gain scheduling technique," in *American Control Conference* , 1991.
- [SnEnGa89] Snell S. A., Enns D. F and Garrard W. L., " Nonlinear control for a supermaneuverable aircraft," in *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1989.
- [SnEnGa90] Snell S. A., Enns D. F and Garrard W. L. , " Nonlinear inversion flight control for a supermaneuverable aircraft," in *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1990.
- [So] Sontag E. D., " Smooth stabilization implies coprime factorization ," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-34, pp. 435-443, 1989.
- [SpJa] Speyer J. L. and Jacobson D. H., " Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems : a transformation approach," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 33, pp. 163-187, 1971.
- [SuTh72] Sundareshan M. K. and Thathachar M. A. L., "  $L_2$ -Stability of linear time varying systems- Conditions involving noncausal multipliers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-17, pp. 504-510, 1972.
- [SuTh73a] Sundareshan M. K. and Thathachar M. A. L., " Time-varying systems stability interchangeability of bounds on logarithmic variation of gain," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-18, pp. 405-407, 1973.
- [SuTh73b] Sundareshan M. K. and Thathachar M. A. L., " Time-domain criteria for the  $L_2$ -stability of nonstationary feedback systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-18, pp. 80-81, 1973.
- [SuTh74] Sundareshan M. K. and Thathachar M. A. L., " Average Variation  $L_2$ -Stability criteria for time varying feedback systems- a unified approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-19, pp. 427-429, 1974.
- [SuTh75] Sundareshan M. K. and Thathachar M. A. L., "  $L_2$ -Stability of class of nonstationary feedback systems with dynamical nonlinear subsystems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-20, pp. 412-415, 1975.
- [Ta91] Tadmor G., " Worst case design in time domain," *Math. Control Signals*

- Systems*, Vol. 3, pp. 301-324, 1991.
- [Ta92] Tadmor G., "Receding horizon revisited : an easy way to robustly stabilize an LTV system," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 18, pp. 285-294, 1992.
- [TiPo] Tikku A. and Poolla K., "Robust Performance against slowly-varying structured perturbations" in *Conference Decision and Control*, 1993.
- [VDS91] Van der Schaft A. J., "On a state space approach to nonlinear  $H_\infty$  control," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 16, pp. 1-8, 1991.
- [VDS92] Van der Schaft A. J., " $L_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear  $H_\infty$  control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-37, pp. 770-784, 1992.
- [VDS93] Van der Schaft A. J., "Nonlinear state space  $H_\infty$  control theory ," in *Essay on control : Perspectives in he theory and its applications*, H. J. Trentelman and J. C. Willems Ed. Birkhauser 1993.
- [Vi72] Vidyasagar M., " $L_p$  stability of time-varying linear feedback system," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-17, pp. 412-414, 1972.
- [Vi77a] Vidyasagar M., " $L_2$  stability of interconnected systems using a reformulation of the passivity theorem," *IEEE Trans. Cir. Sys.*, Vol. CAS-24, pp. 637-645, 1977.
- [Vi77b] Vidyasagar M., " $L_2$  instability criteria for interconnected systems," *SIAM J. Contr. and Optim.*, Vol. 15, pp. 312-328, 1977.
- [Vi78] Vidyasagar M., *Nonlinear systems analysis*, Academic Press, 1978.
- [Vi84] Vidyasagar M., "The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-29, pp. 403-417, 1984.
- [Vi85] Vidyasagar M., *Control Systems Synthesis : A factorization approach*, The M.I.T. press, 1985.
- [Vin] Vinnicombe G., *Measuring the robustness of feedback systems*, Doctoral Thesis, 1992.
- [ViVa] Vidyasagar M. and Vannelli A., "New Relationships Between Input-Output and Lyapunov Stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-27, pp. 481- 483, 1982.
- [VoVa] Voulgaris P. and Valavani L., "High performance linear quadratic and  $H_\infty$  designs for a supermaneuverable aircraft ," in *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1989.
- [WaMiDe] Wang K., Michel A. N. and Liu D., "Necessary and Sufficient conditions for the Hurwitz and Schur Stability of interval matrices," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-39, pp. 1251-1255, 1994.
- [WaRu] Wang K. and Rugh W. J., "On the pseudo-linearization problem for nonlinear systems," *Syst. and Contr. Lett.*, Vol. 12, pp. 161-167, 1989.
- [WaZa] Wang L. Y. and Zames G., "Local-global double algebras for slow  $H^\infty$  adaptation : Part II - Optimization of stable plants," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-36, pp. 143-151, 1991.
- [WeBo] Wendel T. R. and Boland J. R. , "High angle of attack control law development for a free-flight wind tunnel model using direct eigenstructure assignment," in

- AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1991.
- [Wi69a] Willems J. C., " Stability, instability, invertibility and causality," *SIAM J. Contr.*, Vol. 7, pp. 645-671, 1969.
- [Wi69b] Willems J.C., " Some results on the  $L_p$  stability of linear time-varying systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-14, pp. 660-665, 1969.
- [Wi70a] Willems J. C. *The analysis of feedback systems*, The M.I.T. press, 1970.
- [Wi71a] Willems J. C., " The generation of Lyapunov functions for input-output stable systems," *SIAM J. Contr.*, Vol. 9, pp. 105-134, 1971.
- [Wi71b] Willems J.C., " Least squares stationary optimal control and algebraic Riccati equation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-16, pp. 621-634, 1971.
- [Wi72a] Willems J. C., " Dissipative dynamical systems, Part I : general theory," *Arch. Rational Mech. Analysis*, Vol. 45 pp. 321-351, 1972.
- [Wi72b] Willems J. C., " Dissipative dynamical systems, Part II : Linear systems with quadratic supply rate," *Arch. Rational Mech. Analysis*, Vol. 45 pp. 352-393, 1972.
- [Wi76] Willems J.C., " Mechanisms for the stability and instability in feedback systems," *Proc. of the IEEE*, Vol. 64 , pp. 24-35, 1976.
- [WiBr] Willems J. C. and Brockett R. W., " Some new rearrangement inequalities having application in stability analysis," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-13, pp. 539-549, 1968.
- [Will] Willems J.L., " The circle criterion and quadratic Lyapunov functions for stability analysis," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-88, pp. 184-185, 1973.
- [Za63] Zames G., " Functional analysis applied to nonlinear feedback systems," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-10, pp. 392-404, 1963.
- [Za64] Zames G., " Realizability conditions for feedback systems," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 186-194, 1964.
- [Za66a] Zames G., " On the input-output stability of time varying nonlinear feedback systems - Part I : conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-11, pp. 228-238, 1966.
- [Za66b] Zames G., " On the input-output stability of time varying nonlinear feedback systems - Part II : conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities ," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-11, pp. 465-476, 1966.
- [Za81] Zames G., " Feedback and optimal sensitivity : model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 301-320, 1981.
- [ZaEl] Zames G. and El-Sakkary A. K., " Unstable systems and feedback : the gap metric," *in Allerton Conference*, pp. 380-385, 1980.
- [ZaFa268] Zames G. and Falb P. L., " Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities," *SIAM J. Contr.*, Vol. 6, pp. 89-108, 1968.
- [ZaFa67] Zames G. and Falb P. L., " On the stability of systems with monotone and slope-restricted nonlinearities," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-12, pp. 221-

223, 1967.

[ZaFr] Zames G. and Francis B. A., " Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-28, pp. 585-601, 1983.

[ZaWA] Zames G. and Wang L. Y., " Local-global double algebras for slow  $H^\infty$  adaptation : Part I - Inversion and stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-36, pp. 143-151, 1991.

