

**De la nécessité d'outils effectifs
ou la quête des problèmes LMIs**

JNA 2003, Valenciennes

Gérard Scorletti LAP, ISMRA, Université de Caen

Avec

Marc Dinh LAP, ISMRA

Vincent Fromion LASB, INRA, Montpellier

Stéphane Font Service Automatique, Supélec, Gif-sur-Yvette

Eric Magarotto LAP, ISMRA

Contexte

Nouvelles contraintes systèmes asservis :

- *cahier des charges* de + en + serrés \implies effets *non linéaires* système + correcteur
- *cahier des charges* de + en + évolutifs \implies mise au point rapide correcteur
- systèmes toujours mals connus (*Incertitude*)

Automatique Fréquentielle classique basée sur l'utilisation de *critères graphiques*

- l'incertitude au centre
- bien que théorie mathématique profonde, outils "ingénieur"
- Mais
cahier des charges peu formalisé \rightarrow méthodologies limitées—systèmes mono variables

\hookrightarrow Il faut un outil + puissant...

l'Automatique en mutation

A partir des années 80, du linéaire...

- Commande dite robuste : Zames, Doyle, Safonov, etc
 - Cadre mathématique rigoureux pour le cahier des charges–performance et robustesse
 - Synthèse du correcteur comme un problème d'optimisation (C.A.O.)
 - Systèmes multivariables
 - Unification des différentes méthodes de synthèse
- Optimisation LMI : N & N, Boyd, etc
 - Rôle de l'optimisation convexe en Automatique
 - Développement d'algorithmes efficaces pour des classes générales

l'Automatique en mutation

...au non linéaire

- Approche entrée/sortie (le retour) (années 90 à 00) : Megretsky, etc
Reprise travaux années 60/70 car nouveaux outils (optimisation LMI)

- Commande robuste non linéaire (années 90 à 00) : Fromion, etc
Extension au cadre non linéaire de la formalisation cahier des charges

Optimisation sous contrainte LMIs

- Contexte
- Optimisation LMI
- De l'art d'obtenir des formulations LMIs
- Exemples de mise en œuvre

Optimisation sous contrainte LMIs

$$\min_{\xi \in \mathcal{C}} f(\xi)$$

- dimension finie : $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ + défini par nombre fini égalités et inégalités
- *faisabilité* : trouver ξ , s'il existe, tel que $\xi \in \mathcal{C}$
- optimisation convexe = f convexe + \mathcal{C} convexe
- cas sympathique : optimisation convexe + dimension finie
- optimisation LMI : $\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T F(\xi)x > 0\}$
avec $F(\xi) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i$ – Notation $F(\xi) > 0$

Un exemple simple de Problèmes d'optimisation LMI

$$\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T F(\xi) x > 0\}$$

avec

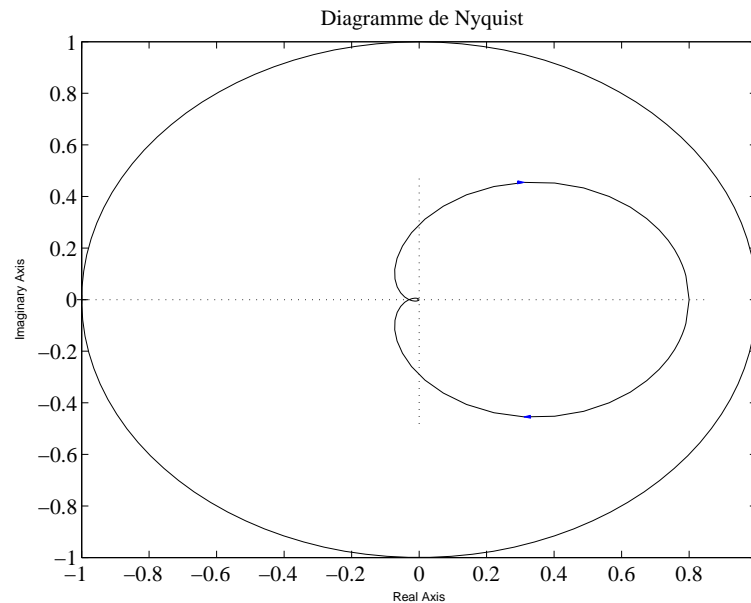
$$F(\xi) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i$$

Exemple

$$P > 0$$

$$A^T P + P A < 0$$

L'optimisation LMI comme extension des critères graphiques



Rôle fondamental du Lemme de Kalman Yakubovitch Popov, cas particulier :

$$\forall \omega, \begin{cases} |H(j\omega)| \leq 1 \\ H(j\omega) = D + C(j\omega I - A)^{-1}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } \underline{P} > 0 \text{ telle que} \\ \begin{bmatrix} A^T \underline{P} + \underline{P}A + C^T C & \underline{P}B + C^T D \\ B^T \underline{P} + D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} \leq 0 \end{cases}$$

nombre contraintes ∞

optimisation LMI de dim. finie

Optimisation sous contrainte LMIs

- Contexte
- Optimisation LMI
- De l'art d'obtenir des formulations LMIs
- Exemples de mise en œuvre

De l'art d'obtenir des formulations LMIs

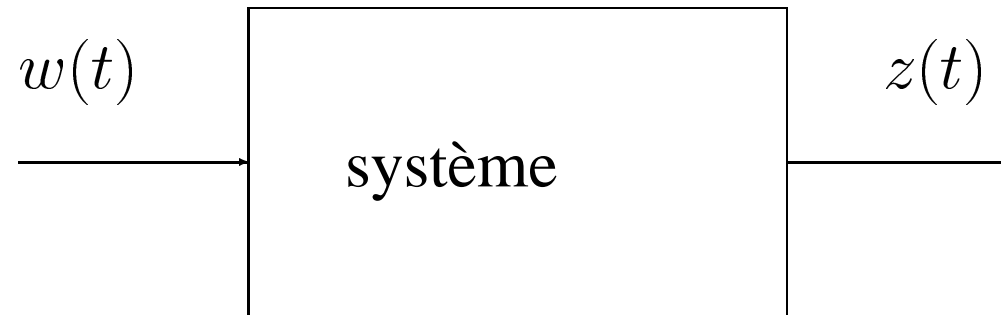
I Comportement d'un système
Caractérisé par contraintes quadratiques

II Modélisation d'un système
par Interconnexion

Analyse des systèmes par optimisation
III Stabilité : Séparation des graphes
Performance : \mathcal{S} procédure

IV Synthèse de Correcteurs
Lemme d'Elimination

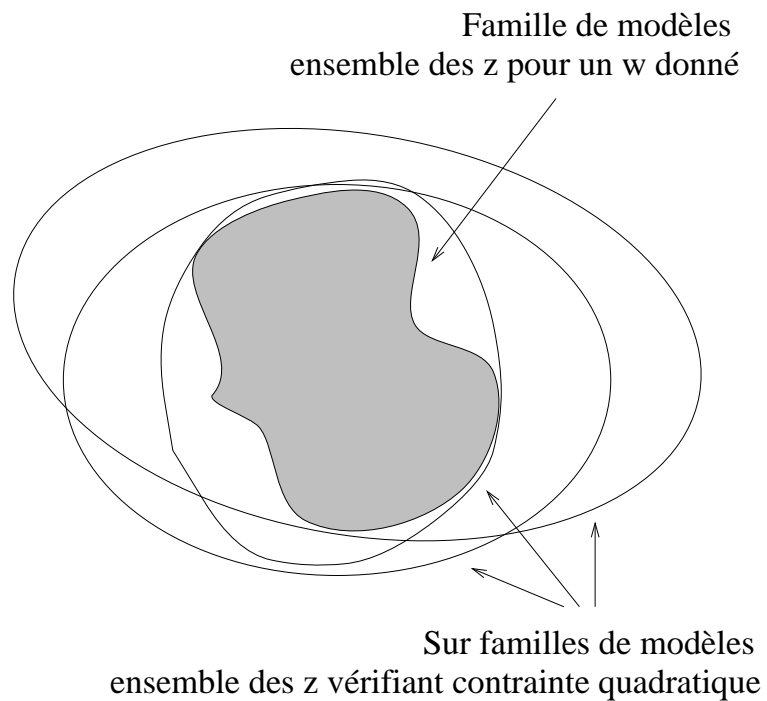
Comment caractériser le comportement d'un système ?



A une entrée $w(t)$ donnée : \rightarrow une famille de $z(t)$ (1 famille de modèles)

\Leftrightarrow Caractériser comportement par contraintes sur graphe $(z(t), w(t))$

Dissipativité



- Gain :

$$\int_0^T z(t)^T z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T w(t)^T w(t) dt$$

- Passivité :

$$\int_0^T p(t)^T q(t) dt \geq 0$$

- $\{X, Y, Z\}$ -dissipativité, $X \leq 0$

$$\forall T \geq 0, \int_0^T \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt \geq 0$$

De l'art d'obtenir des formulations LMIs

I Comportement d'un système
Caractérisé par contraintes quadratiques

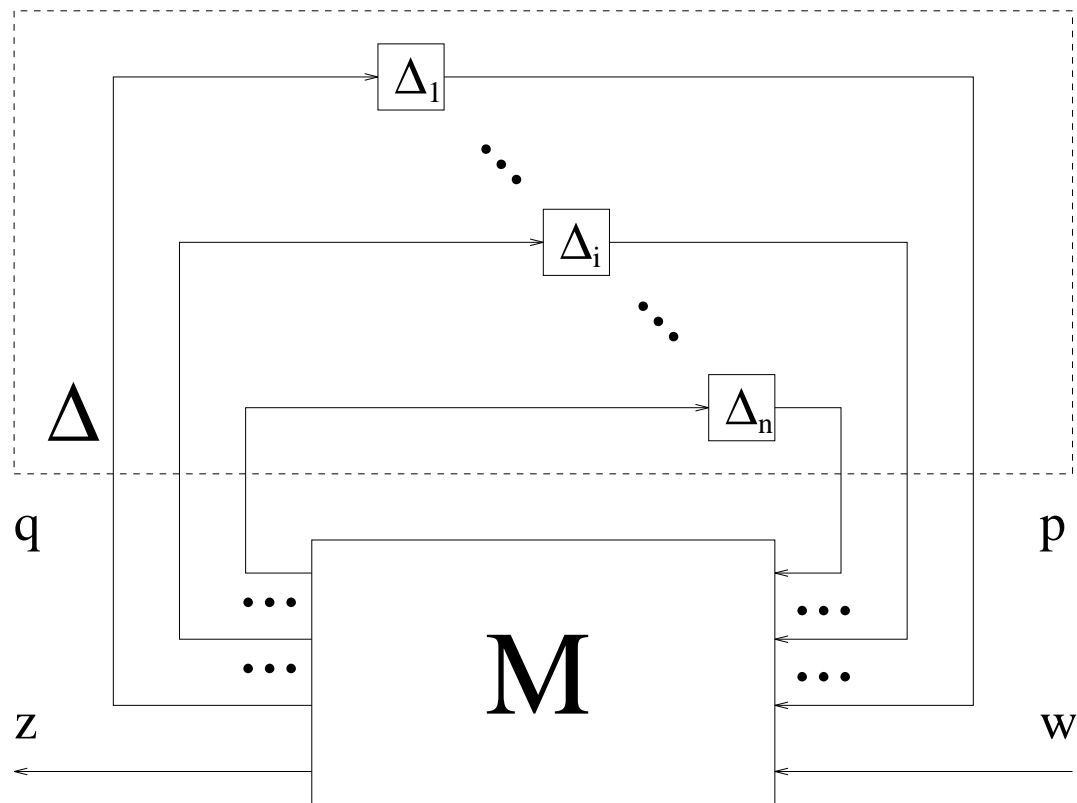
II Modélisation d'un système
par Interconnexion

Analyse des systèmes par optimisation
III Stabilité : Séparation des graphes
Performance : \mathcal{S} procédure

IV Synthèse de Correcteurs
Lemme d'Elimination

Interconnexion

Modélisation systèmes complexes comme interconnexions de systèmes élémentaires



Δ_i sous systèmes élémentaires regroupés dans Δ
 M systèmes linéaire stationnaire

De l'art d'obtenir des formulations LMIs

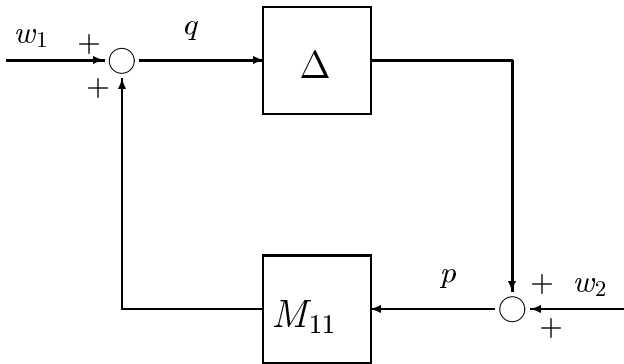
I Comportement d'un système
I Caractérisé par contraintes quadratiques

II Modélisation d'un système
II par Interconnexion

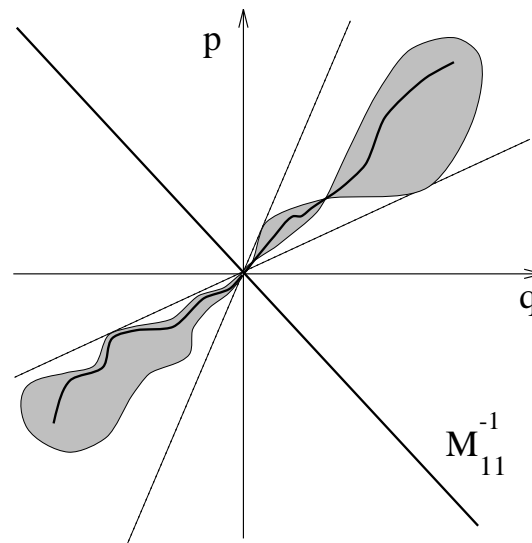
Analyse des systèmes par optimisation
III Stabilité : Séparation des graphes
Performance : \mathcal{S} procédure

IV Synthèse de Correcteurs
IV Lemme d'Elimination

Notion de séparation des graphes



$\Delta = f$ et M_{11} gain



Analyse de la stabilité

Idée clef : Séparation des graphes

(i) pour $p = \Delta(q)$: à l'intérieur du secteur, défini par

$$\forall T > 0, \int_0^T \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^t & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \geq 0$$

(ii) pour $q = M_{qp}p$: à l'extérieur de ce secteur, c'est-à-dire $\exists \epsilon > 0, \forall T > 0$

$$\int_0^T \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^t & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \leq -\epsilon \int_0^T (p^t p + q^t q)$$

Théorème Stabilité interne s'il existe $X \in \underline{\mathbf{X}}(\underline{\Delta})$, $Y \in \underline{\mathbf{Y}}(\underline{\Delta})$ et $Z \in \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\Delta})$ telles que

$$\begin{bmatrix} M_{qp} \\ I \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} Z & Y^t \\ Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{qp} \\ I \end{bmatrix} < 0$$

Analyse de la performance

- Idée clef : S procédure

$$\sigma_0 = \int_0^T \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{perf} & Y_{perf} \\ Y_{perf}^T & Z_{perf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt > 0$$

pour z, w, p et q tel que $\begin{bmatrix} q(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} p(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$

$$\sigma_1 = \int_0^T \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \geq 0$$

vérifiée si $\exists \tau \geq 0$ tel que

$$\forall (p, w), \quad \sigma_0(p, w) > \tau \sigma_1(p, w)$$

Théorème Performant s'il existe $X \in \underline{\mathbf{X}}(\underline{\Delta})$, $Y \in \underline{\mathbf{Y}}(\underline{\Delta})$ et $Z \in \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\Delta})$ telles que

$$\begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{cc|cc} Z & 0 & Y^T & 0 \\ 0 & -X_{perf} & 0 & -Y_{perf} \\ \hline Y & 0 & X & 0 \\ 0 & -Y_{perf}^T & 0 & -Z_{perf} \end{array} \right] \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} < 0$$

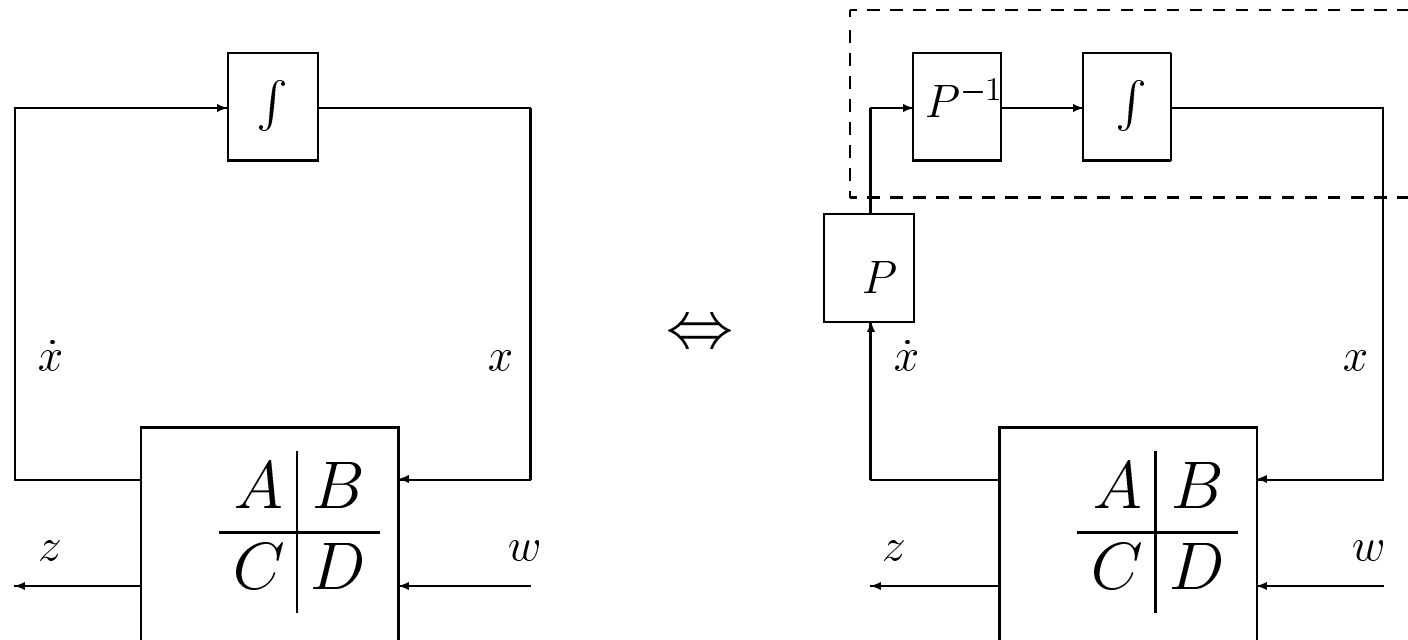
Mise en œuvre

- Analyse des systèmes linéaires stationnaires
- Analyse des systèmes linéaires stationnaires incertains \hookrightarrow complète et étend la μ analyse
- Analyse des systèmes non linéaires
 - Propriété de (\mathcal{L}_2) gain
 - Stabilité et performance incrémentale
 - $\hookrightarrow \mu_{nl}$, Integral Quadratic Constraints

voir exposé *Du linéaire au non linéaire ou la quête de la désensibilisation*

Analyse d'un système linéaire stationnaire

$$\text{Exemple : } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Cx + Dw \end{cases}$$



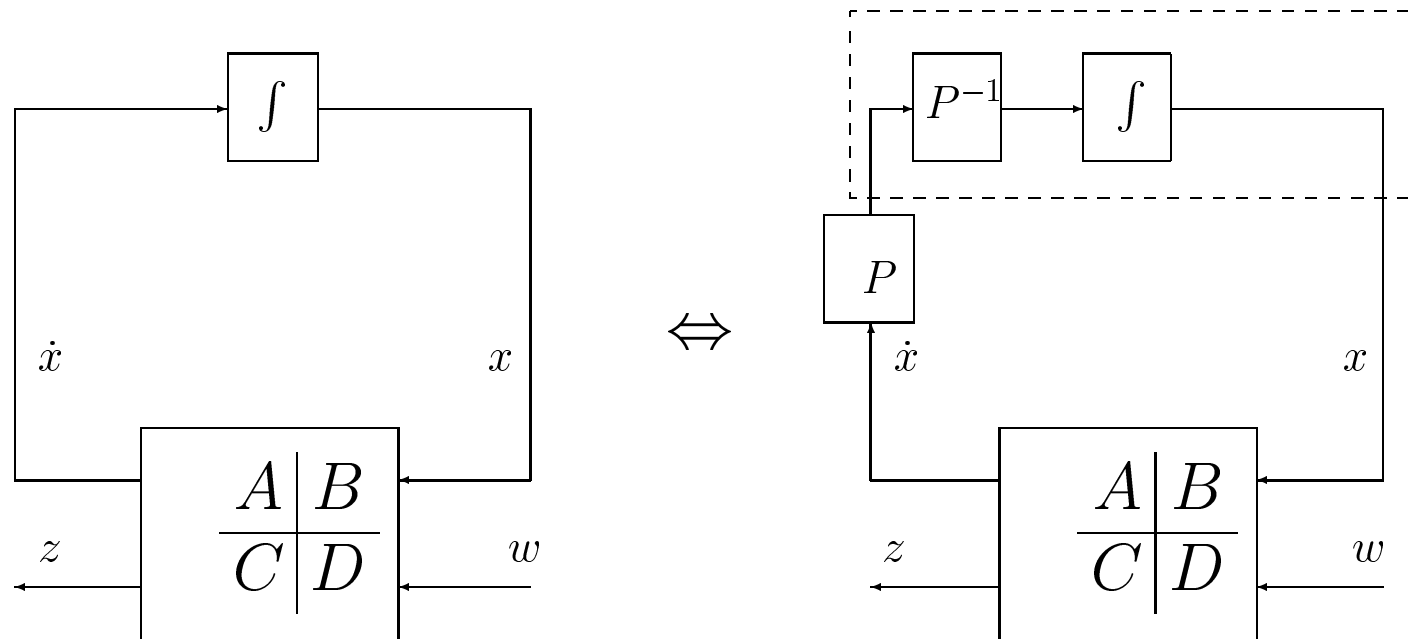
- Système linéaire stationnaire = interconnexion d'intégrateurs

- Caractérisation par contraintes quadratiques : avec $P > 0$: $p = P^{-1} \int q$

$$\forall T > 0, \int_0^T p(t)^T q(t) dt \geq 0$$

Analyse d'un système linéaire stationnaire

$$\text{Exemple : } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Cx + Dw \end{cases}$$



Stabilité : Séparation des graphes : $P > 0$, $A^T P + PA < 0$ (Généralisation Th. petit gain)

Performance : S -procédure : $P > 0$, $\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} < 0$

Mise en œuvre

- Analyse des systèmes linéaires stationnaires
- Analyse des systèmes linéaires stationnaires incertains \hookrightarrow complète et étend la μ analyse
- Analyse des systèmes non linéaires
 - Propriété de (\mathcal{L}_2) gain
 - Stabilité et performance incrémentale
 - $\hookrightarrow \mu_{nl}$, Integral Quadratic Constraints

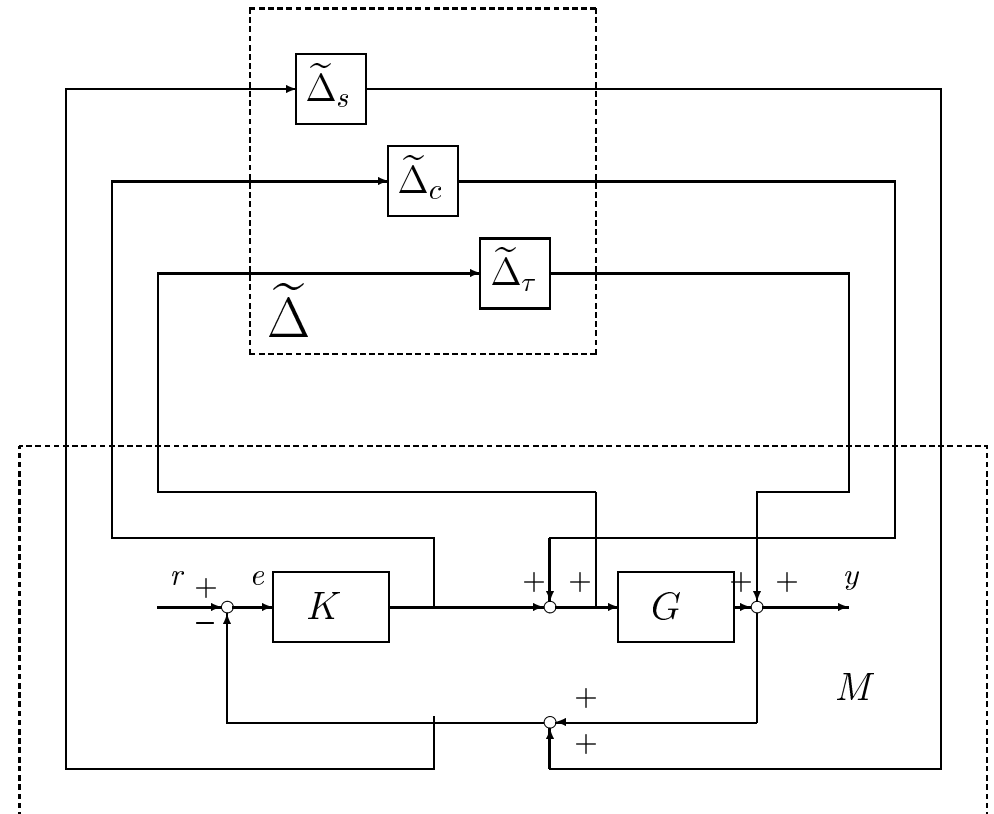
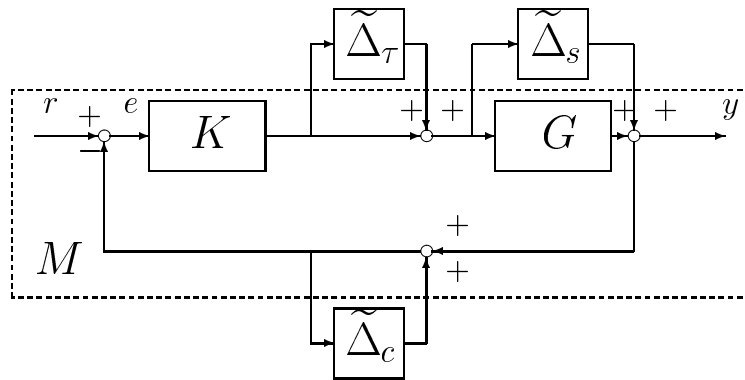
voir exposé *Du linéaire au non linéaire ou la quête de la désensibilisation*

Un exemple d'analyse des systèmes incertains

Controlled plant with

Uncertain dynamics: $\tilde{\Delta}_s$ and $\tilde{\Delta}_c$

Uncertain time-delay: $\tilde{\Delta}_\tau = e^{\tau s} - 1$



A Separation of Graphs Theorem

Let Δ be a **connected** set stable LTI transfers with time delays, $0 \in \Delta$

Theorem

Feedback connection M with Δ stable for every $\Delta(s) \in \Delta(s)$ if and only if there exists $\Phi(j\omega)$ such that

$\forall \Delta(j\omega) \in \Delta(j\omega), \forall \omega$

$$\begin{bmatrix} I \\ \Delta(j\omega) \end{bmatrix}^* \Phi(j\omega) \begin{bmatrix} I \\ \Delta(j\omega) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1)$$

and $\forall \omega$

$$\begin{bmatrix} M(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Phi(j\omega) \begin{bmatrix} M(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon (M(j\omega)^* M(j\omega) + I) \quad (2)$$

A Separation of Graphs Theorem: Discussion

Necessary and sufficient conditions for an NP Hard problem

↔ Depending on the problem “size”, can be useless

But, suggest (sufficient) **tractable** conditions !

Consider $\Phi(j\omega)$, an *affine* set of functions $\Phi(j\omega)$ such that:

$$\begin{bmatrix} I \\ \Delta(j\omega) \end{bmatrix}^* \Phi(j\omega) \begin{bmatrix} I \\ \Delta(j\omega) \end{bmatrix} \geq 0$$

New problem: Given the set $\Phi(j\omega)$, find in this set a $\Phi(j\omega)$ such that

$$\begin{bmatrix} M(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Phi(j\omega) \begin{bmatrix} M(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon (M(j\omega)^* M(j\omega) + I)$$

(Frequency dependent) Linear Matrix Inequality Optimization Problem !

De l'art d'obtenir des formulations LMIs

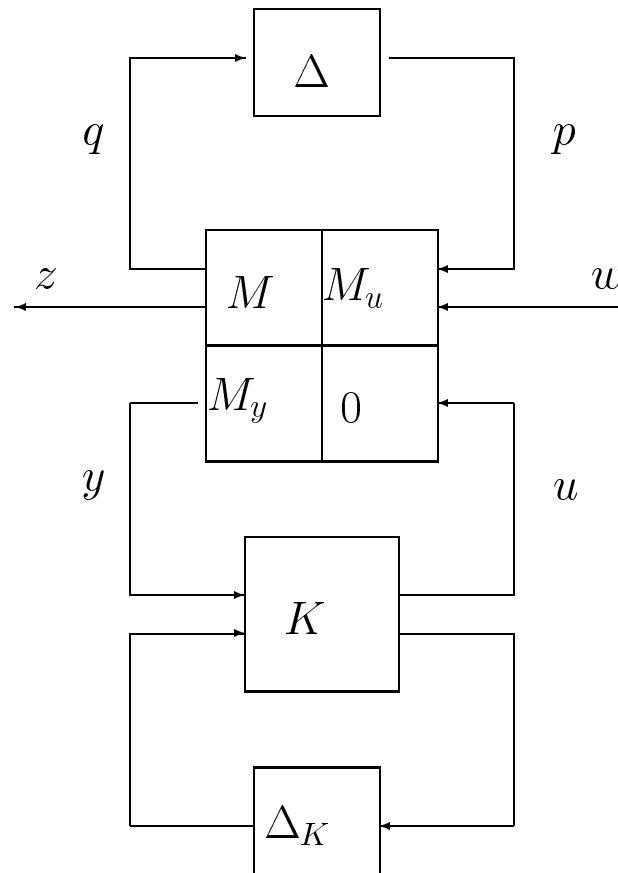
I Comportement d'un système
Caractérisé par contraintes quadratiques

II Modélisation d'un système
par Interconnexion

Analyse des systèmes par optimisation
III Stabilité : Séparation des graphes
Performance : \mathcal{S} procédure

IV Synthèse de Correcteurs
Lemme d'Elimination

Commande : formulation



avec $\Delta_K = \text{diag}(\Delta_{K_i})$, Δ_{K_i} à partir de Δ_i

Trouver K / système bouclé stable et $\{X_{perf}, Y_{perf}, Z_{perf}\}$ dissipatif entre w et z

Application à la commande des systèmes à paramètres variants

Système Linéaire, à Paramètres Variants

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}(\delta(t))x + \mathbf{B}_w(\delta(t))w + \mathbf{B}_u(\delta(t))u \\ z &= \mathbf{C}_z(\delta(t))x + \mathbf{D}_{zw}(\delta(t))w + \mathbf{D}_{zu}(\delta(t))u \\ y &= \mathbf{C}_y(\delta(t))x + \mathbf{D}_{yw}(\delta(t))w\end{aligned}$$

- $\delta(t)$ = vecteur paramètres variants mesuré, dans un intervalle
- $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{B}_w(\cdot)$, ... rationnelles en $\delta_i(t)$

Correcteur “séquencé” par $\delta(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \mathbf{A}_K(\delta(t))\bar{x} + \mathbf{B}_K(\delta(t))y \\ u &= \mathbf{C}_K(\delta(t))\bar{x}\end{aligned}$$

Objectif : Stabilité et Performance (gain \mathcal{L}_2 inférieur à γ donné)

$$\forall T > 0, \int_0^T z(t)^T z(t) dt < \gamma^2 \int_0^T w(t)^T w(t) dt$$

Commande par séquençement de gains : solution LPV usuelle (stabilité)

Correcteur dépendant de $\delta(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}(\delta(t))x + \mathbf{B}_u(\delta(t))u \\ y &= \mathbf{C}_y(\delta(t))x\end{aligned}$$

Principe de Séparation

- observateur

$$\dot{x}_{obs} = \mathbf{A}(\delta(t))x_{obs} + \mathbf{B}_u(\delta(t))u + L(y - \mathbf{C}_y(\delta(t))x_{obs})$$

- retour d'état $u = K_{s-f}x$

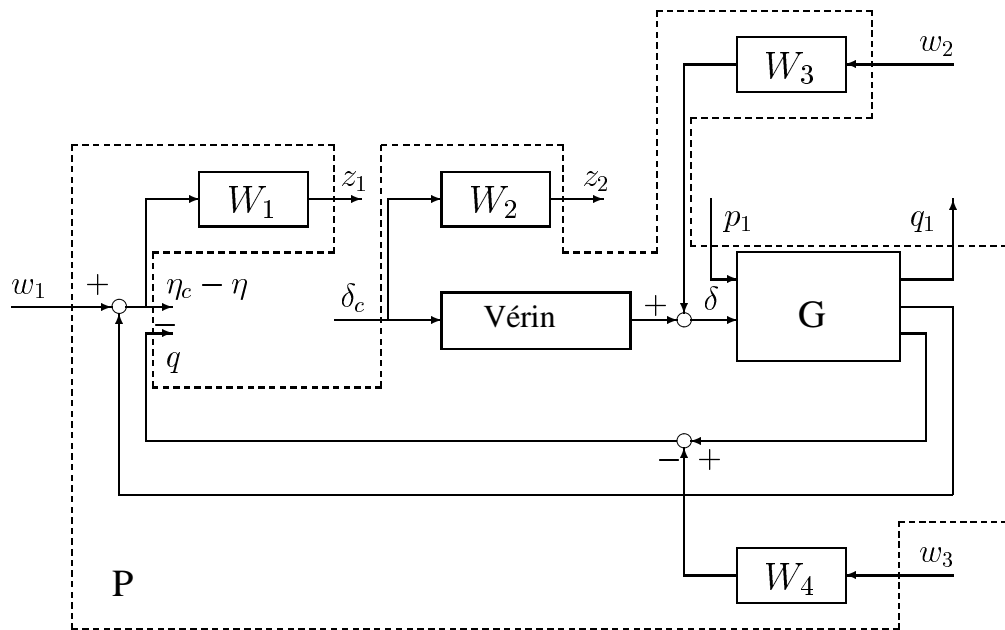
Pas vrai séquençement de gains :

- retour d'état constant
- vitesse $\delta(t)$ arbitrairement rapide
- stabilité quadratique : $V(x) = x^T P x$

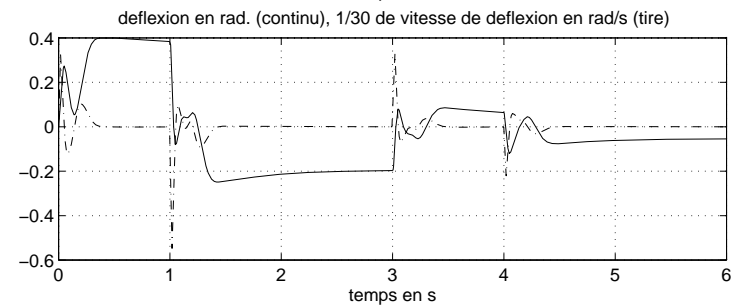
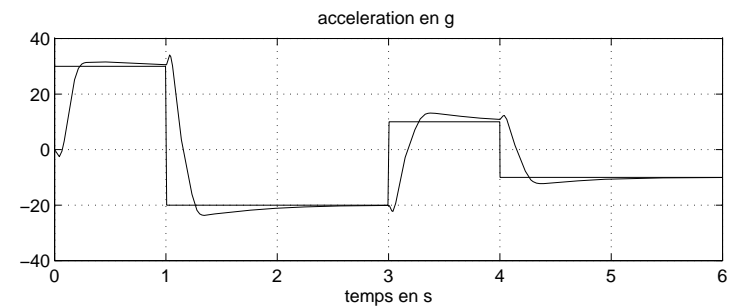
Mais

- faible complexité calcul
- marche dans certains cas (à suivre ...)

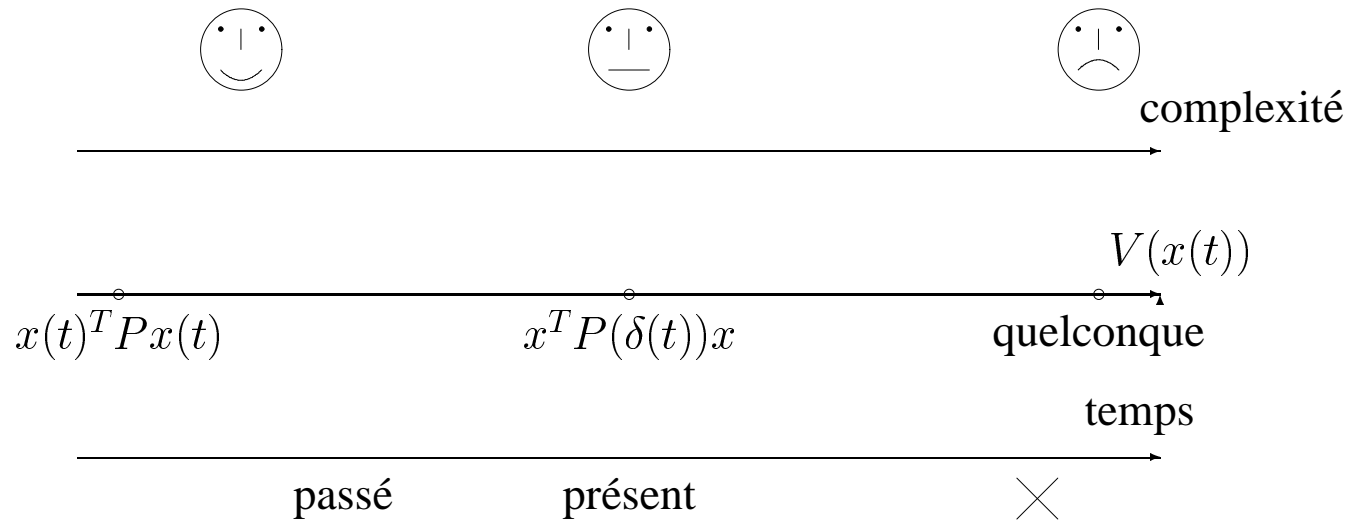
Missile : séquençement de gains



$$u(s) = \frac{0,26}{s} \frac{\frac{s}{2,07} + 1}{\frac{s}{3,1} + 1} (\eta_c(s) - \eta(s)) + 1,42 \frac{\frac{s}{14,7} + 1}{\frac{s}{3,1} + 1} q(s)$$



Il y a mieux mais c'est plus cher !



améliorer les conditions (vrais séquençement de gains) tout en gardant une complexité algorithmique raisonnable

↔ choisir un rapport qualité/prix adapté

Optimisation sous contrainte LMIs

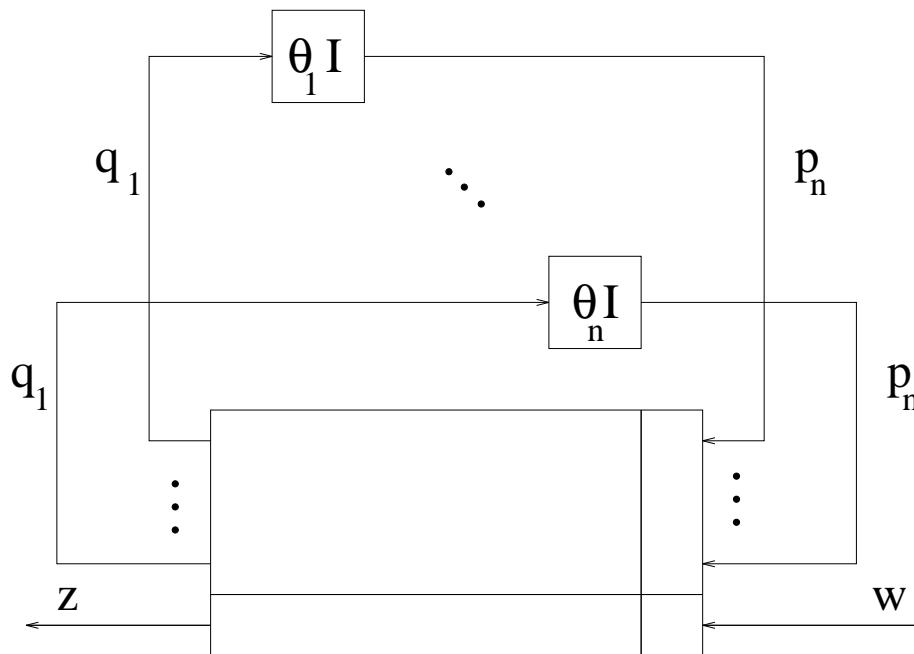
- Contexte
- Optimisation LMI
- De l'art d'obtenir des formulations LMIs
- Exemples de mise en œuvre

Autours du problème d'Automatique

Matrices de fonctions rationnelles

$$M(\theta_1, \dots, \theta_n) = M_1 + M_2 \Delta (I - M_4 \Delta)^{-1} M_3$$

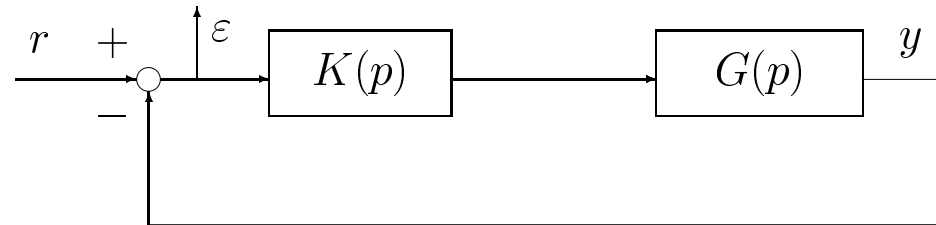
$$= \Delta \star \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$



$$\Delta = \mathbf{diag}(\theta_1 I_{n_1}, \dots, \theta_n I_{n_n})$$

$$z = M(\theta_1, \dots, \theta_n)w$$

Designing weighting functions for H_∞ control

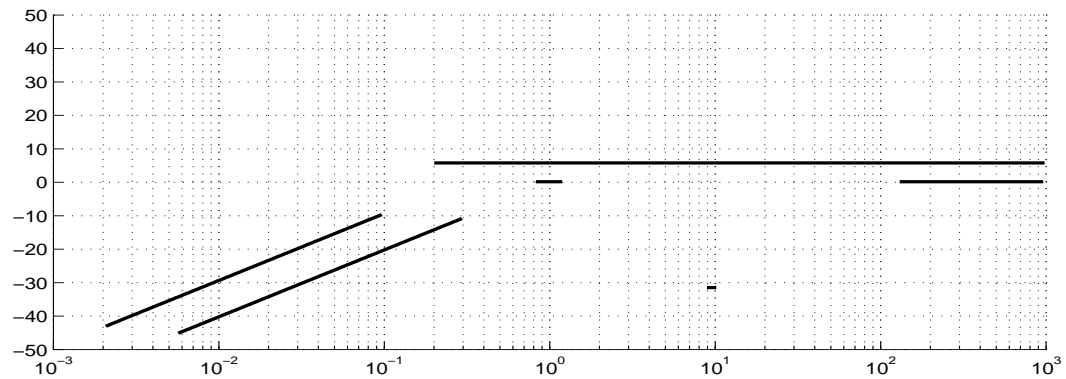


Step and sinusoidal reference signals r tracking \iff

Magnitude of $T_{r \rightarrow \epsilon}$ bounded by a weighting function magnitude satisfying the considered set of constraints

Purpose \implies

WEIGHTING FUNCTION DESIGN



General Problem Statement

1. N_u upper bounds $U_i(\omega)$ defined on sub intervals Ω_i^u
2. N_l lower bounds $L_j(\omega)$ defined on sub intervals Ω_j^l
3. a positive integer n

find if there exists a minimum phase proper stable filter F of order bounded by n such that :

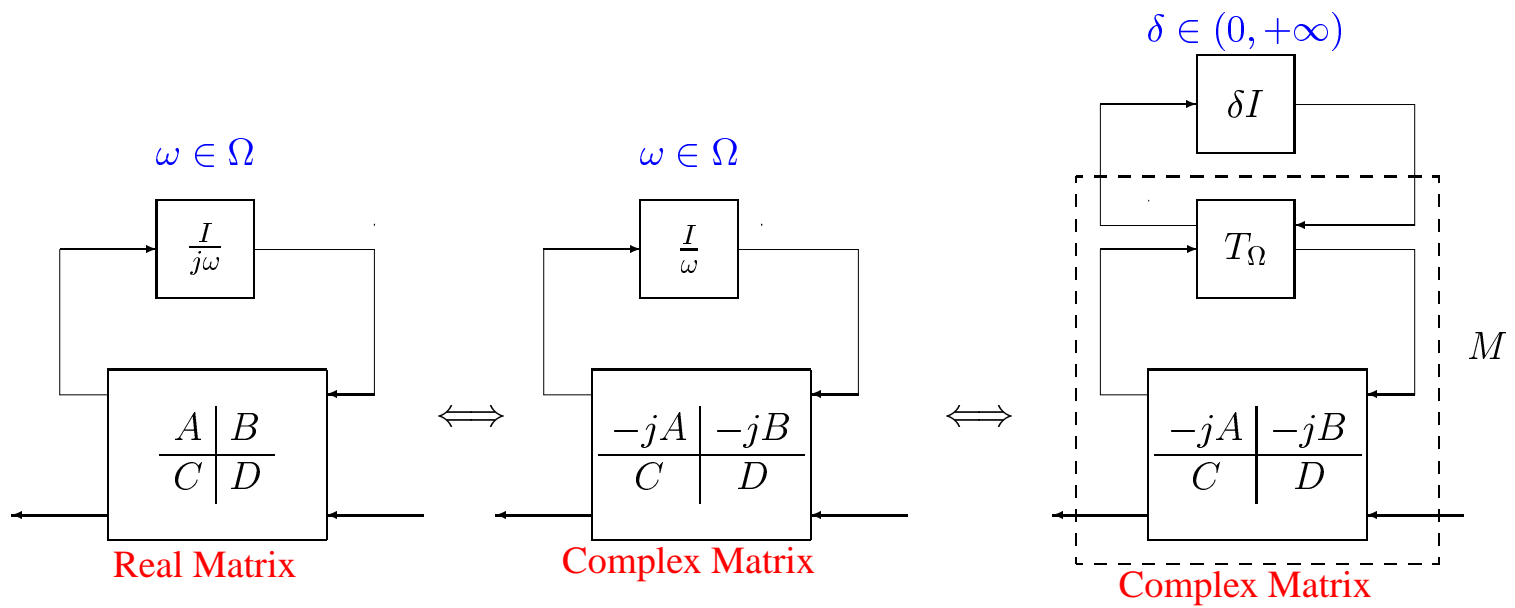
$$\begin{cases} \text{for all } i \in \{1, \dots, N_u\}, \text{ for all } \omega \in \Omega_i^u, |F(j\omega)| < U_i(\omega) \\ \text{for all } j \in \{1, \dots, N_l\}, \text{ for all } \omega \in \Omega_j^l, L_j(\omega) < |F(j\omega)| \end{cases}$$

and **compute** it.

Problem difficulties

1. INFINITE number of decision variables
2. INFINITE number of inequalities

Interconnexion



Main result: General Problem Solution

Find $X_N = X_N^T$, $X_D = X_D^T$, $P_N = P_N^T$, $P_D = P_D^T$, P_i^u , P_j^l

$$\begin{bmatrix} C_b^T \\ D_b^T \end{bmatrix} \mathbf{X}_N \begin{bmatrix} C_b & D_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_b^T \mathbf{P}_N + \mathbf{P}_N A & \mathbf{P}_N B_b \\ B_b^T \mathbf{P}_N & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} C_b^T \\ D_b^T \end{bmatrix} \mathbf{X}_D \begin{bmatrix} C_b & D_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_b^T \mathbf{P}_D + \mathbf{P}_D A & \mathbf{P}_D B_b \\ B_b^T \mathbf{P}_D & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (4)$$

$$\forall i, \mathbf{P}_i^u + \mathbf{P}_i^{u*} > 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{C}_i^* \\ \bar{D}_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_D & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_i & \bar{D}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_i^* \mathbf{P}_i^{u*} + \mathbf{P}_i^u \bar{A}_i & \mathbf{P}_i^u \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^* \mathbf{P}_i^{u*} & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$\forall j, \mathbf{P}_j^l + \mathbf{P}_j^{l*} > 0, \quad \begin{bmatrix} \underline{C}_j^* \\ \underline{D}_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_D & 0 \\ 0 & -\mathbf{X}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_j & \underline{D}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{A}_j^* \mathbf{P}_j^{l*} + \mathbf{P}_j^l \underline{A}_j & \mathbf{P}_j^l \underline{B}_j \\ \underline{B}_j^* \mathbf{P}_j^{l*} & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

where $A_b, B_b, C_b, D_b, \bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i, \underline{A}_i, \underline{B}_i, \underline{C}_i, \underline{D}_i$ are defined from the problem data.

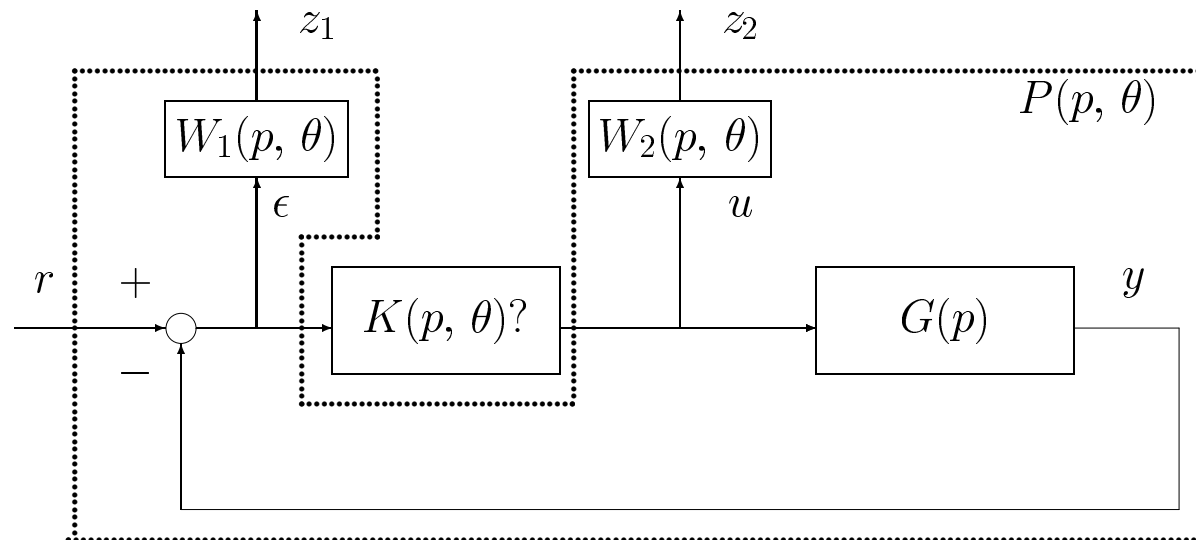
\implies **An LMI optimization Problem**

accepté pour IJNRC 2003

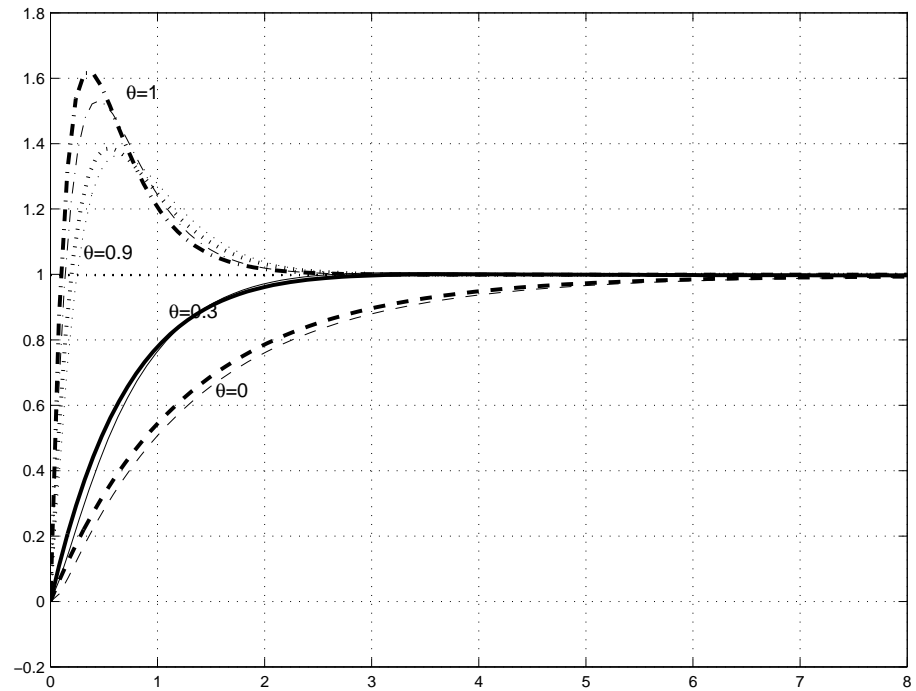
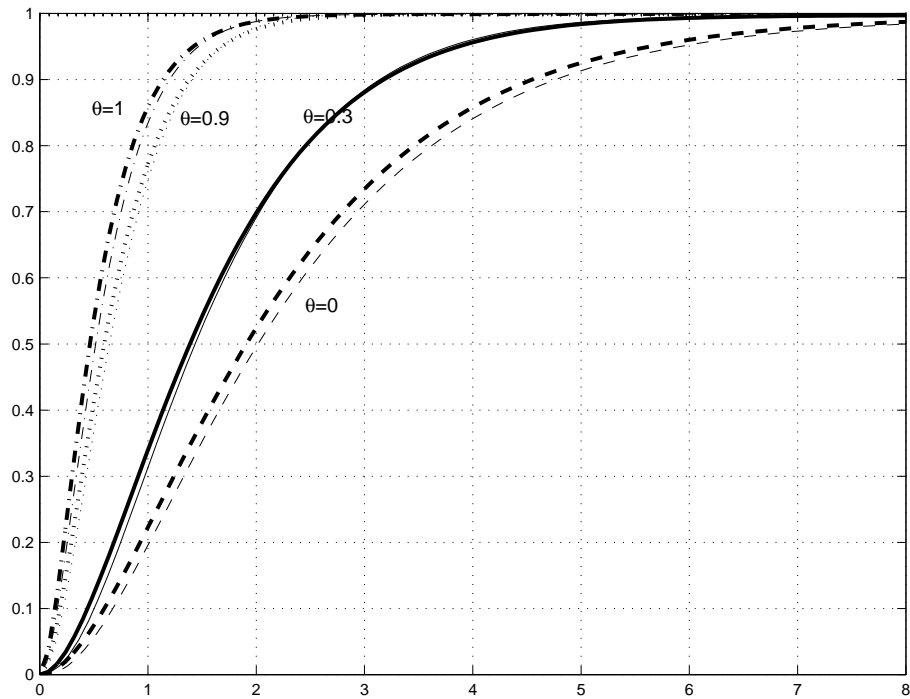
Etendre H_∞

Pour un ensemble de cahiers des charges paramétrisé par θ

Synthétiser un correcteur $\begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K(\theta)x_K(t) + B_K(\theta)(r(t) - y(t)) \\ u(t) = C_K(\theta)x_K(t) + D_K(\theta)(r(t) - y(t)) \end{cases}$



Etendre H_∞ : un exemple



accepté pour ECC 2003

Problem solution

$$\forall \theta \in [0, 1]$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{bmatrix} > 0$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A\mathcal{X}(\theta) + B_u\mathcal{C}(\theta) + \star & \star & \star & \star \\ \hline \mathcal{A}(\theta) + (A + B_u\mathcal{D}(\theta)C_y)^T & A^T\mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{B}(\theta)C_y + \star & \star & \star \\ \hline (B_w + B_u\mathcal{D}(\theta)D_{yw})^T & (\mathcal{Y}(\theta)B_w + \mathcal{B}(\theta)D_{yw})^T & -\gamma I & \star \\ \hline C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{C}(\theta) & C_z(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{D}(\theta)C_y & D_{zw}(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{D}(\theta)D_{yw} & -\gamma I \end{array} \right] < 0$$

Infinite dimensional formulation

1. Infinite number of decision variables
2. Infinite number of inequalities

INFINITE \iff FINITE number of inequalities

Extension of **Kalman Yakubovic Popov** lemma: consider $F(\theta) = \theta I \star \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$

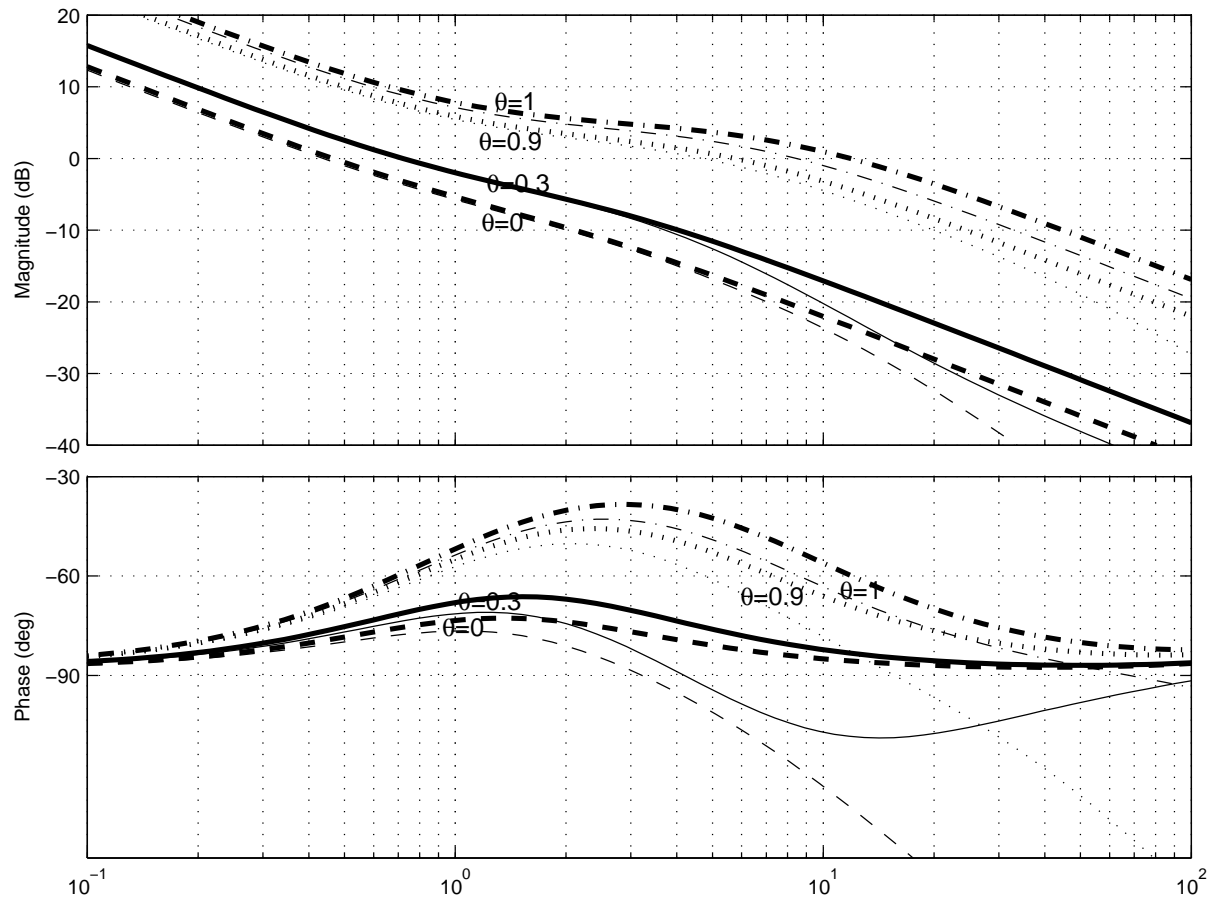
$$\forall \theta \in [0, 1], \quad F(\theta) + F(\theta)^T > 0 \quad \rightarrow \textit{infinite number of inequalities}$$



$$\exists \mathcal{S} = \mathcal{S}^T > 0, \exists \mathcal{G} = -\mathcal{G}^T, \left[\begin{array}{cc} (\mathcal{S} + \mathcal{G})A^T + A(\mathcal{S} - \mathcal{G}) - 2\mathcal{S} & (\mathcal{S} + \mathcal{G})C^T - B \\ C(\mathcal{S} - \mathcal{G}) - B^T & -D - D^T \end{array} \right] < 0$$

$\rightarrow \textit{finite dimensional optimization problem}$

Correcteurs obtenus



Conclusions

- Optimisation LMI comme outil central
- Approche systématique :
 - concepts de l'automatique classique
 - formalisation mathématique de nombreux problèmes
 - optimisation convexe (compromis conservatisme/complexité)
- Au delà de la querelle ancien/moderne, de la séparation linéaire/non linéaire