

Automatique Fréquentielle :
des critères graphiques à l'optimisation LMI

CIFA 2002, Nantes

Gérard Scorletti LAP, ISMRA, Caen

Avec

Vincent Fromion LASB, INRA, Montpellier

Stéphane Font Service Automatique, Supélec, Gif-sur-Yvette

Gilles Ferreres ONERA, Toulouse

Contexte

Nouvelles contraintes systèmes asservis :

- *cahier des charges* de + en + *serrés* \implies effets *non linéaires* système + correcteur
- *cahier des charges* de + en + *évolutifs* \implies mise au point rapide correcteur

Approche proposée : **Automatique Fréquentielle**

- *progrès* important sur la *formalisation* du cahier des charges
- *révolution* au niveau des outils avec l'*optimisation*

Plan

Automatique fréquentielle : un peu d'histoire

Evolution de l'Automatique fréquentielle vers la CAO : synthèse H_∞ , μ analyse

Du linéaire vers le non linéaire

(De l'art de formuler comme un problème d'optimisation)

Automatique fréquentielle : un peu d'histoire

- Automatique fréquentielle classique (années 30 à 60) : Black, Bode, Horowitz, etc
Concepts forts : rejet de perturbation non mesurée, incertitude
Théorie mathématique profonde mais outils “ingénieur” : représentations graphiques, schéma-blocs
Cahier des charges peu formalisé → méthodologies limitées—systèmes mono variables
- Approche entrée/sortie (années 60 à 70) : Zames, Willems, Safonov, etc
Analyse de la stabilité de systèmes bouclés non linéaires
Beaucoup de résultats théoriques pas toujours applicables et accessibles
Limitation des outils disponibles (essentiellement graphiques)

Automatique fréquentielle : un peu d'histoire (suite)

- Commande robuste (années 80 à 00) : Zames, Doyle, Safonov, etc

Cadre mathématique rigoureux pour le cahier des charges–performance et robustesse
Synthèse du correcteur comme un problème d'optimisation (C.A.O.)
Systèmes multivariables

- Optimisation LMI (années 90 à 00) : N & N, Boyd, etc

Rôle de l'optimisation convexe en Automatique
Développement d'algorithmes efficaces pour des classes générales

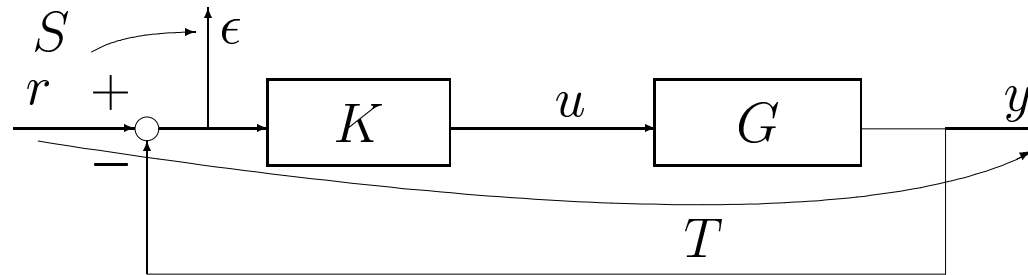
- Approche entrée/sortie (le retour) (années 90 à 00) : Megretsky, etc

Reprise travaux années 60/70 car nouveaux outils (optimisation LMI)

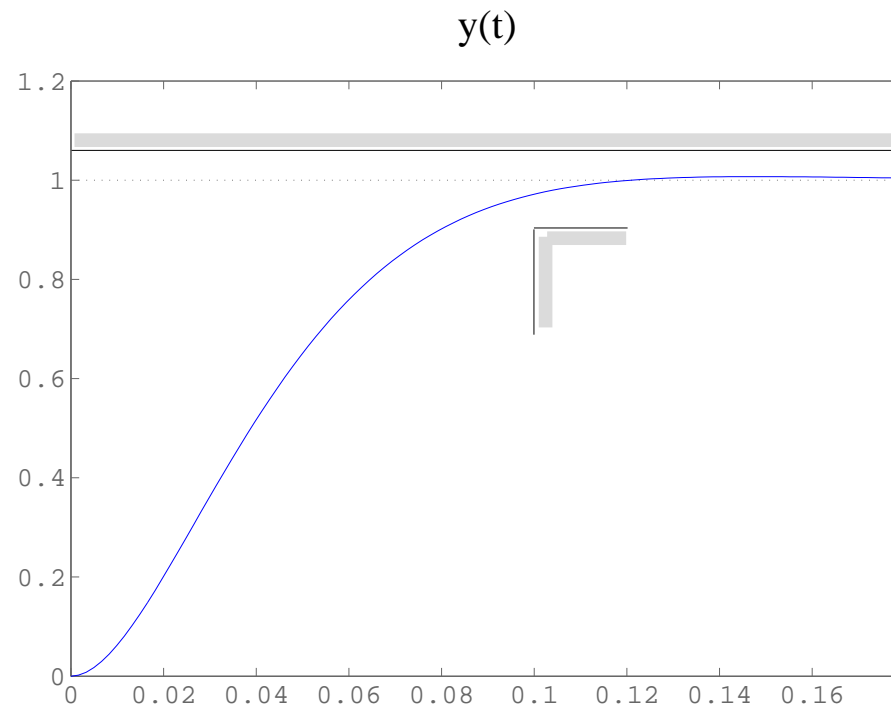
- Commande robuste non linéaire (années 90 à 00) : Fromion, etc

Extension au cadre non linéaire de la formalisation cahier des charges

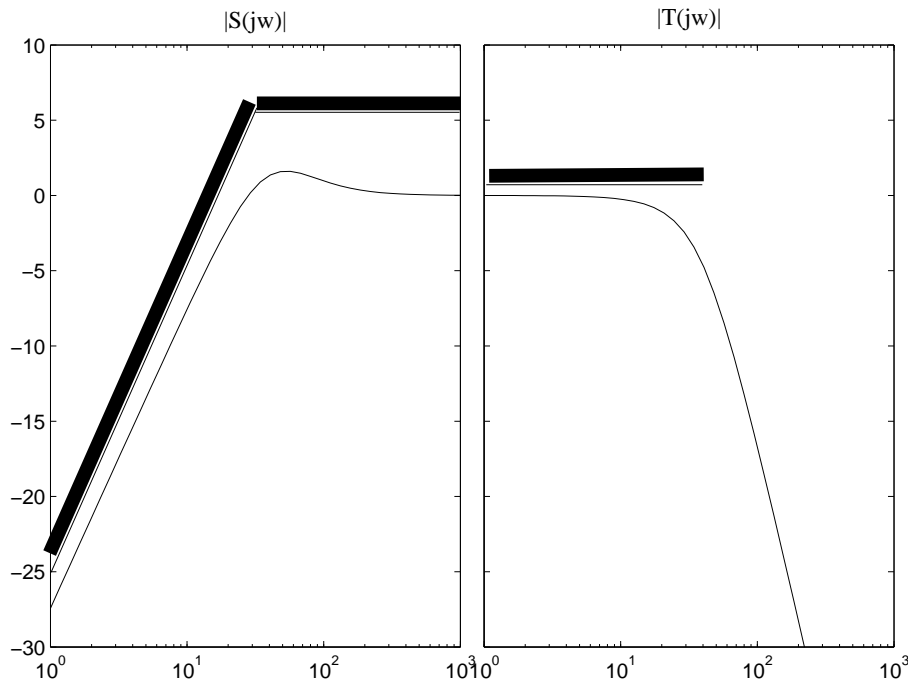
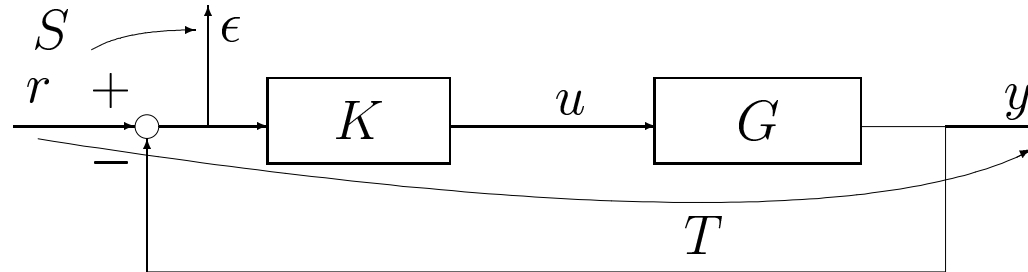
CAO en Automatique fréquentielle à travers un exemple



Trouver K tel que



Gabarits sur les modules des transferts BF



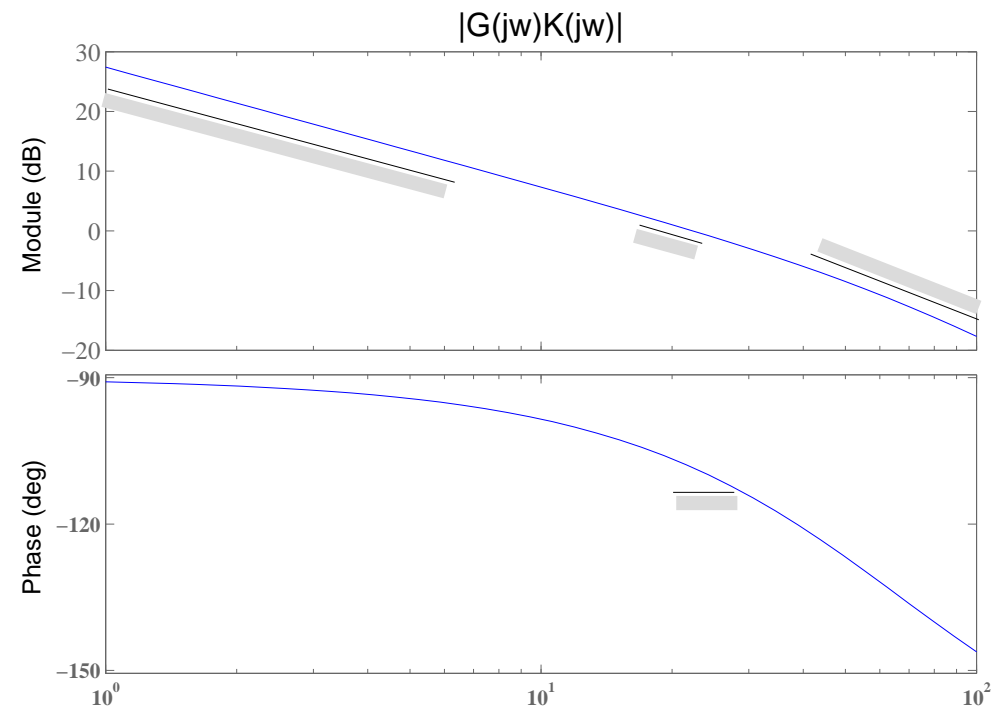
Trouver $K(p)$ tel que

$$\begin{cases} S(p) = \frac{1}{1+G(p)K(p)} \\ T(p) = \frac{G(p)K(p)}{1+G(p)K(p)} \end{cases}$$

↪ Non linéaires en $K(p)$

Gabarits sur le module du transfert BO GK

$ G(j\omega)K(j\omega) $	$\gg 1$	$\ll 1$
$ S(j\omega) $	$\sim \frac{1}{ G(j\omega)K(j\omega) }$	~ 1
$ T(j\omega) $	~ 1	$\sim G(j\omega)K(j\omega) $



Recherche de K

Rechercher K tel que $G(j\omega)K(j\omega)$ vérifie contraintes BO

Outils utilisés : *représentations graphiques* de $G(j\omega)K(j\omega)$ (p.e. Black)

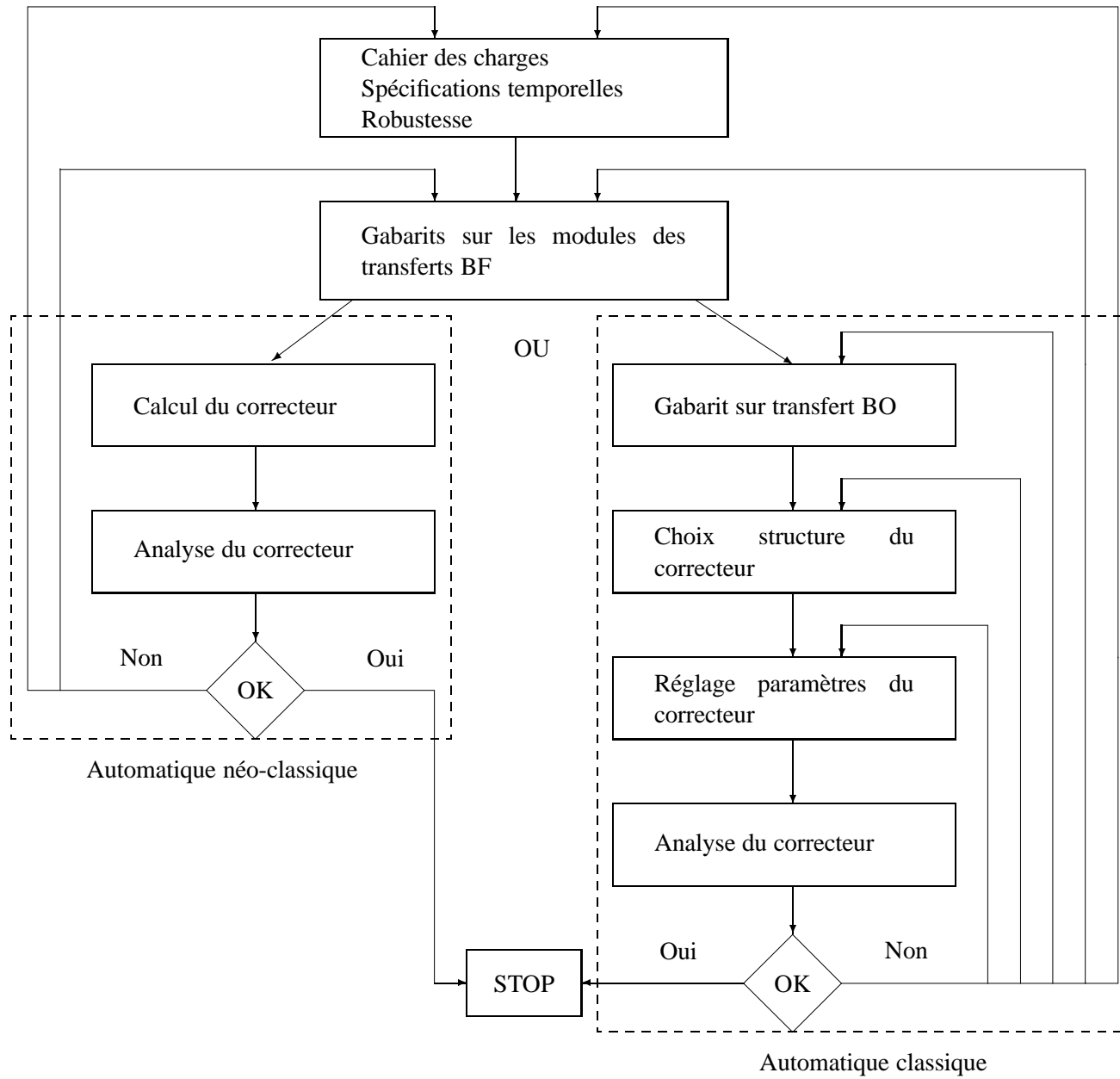
Choix de la structure de K et réglage de ses paramètres

Exemple : Proportionnel Integral Avance de Phase

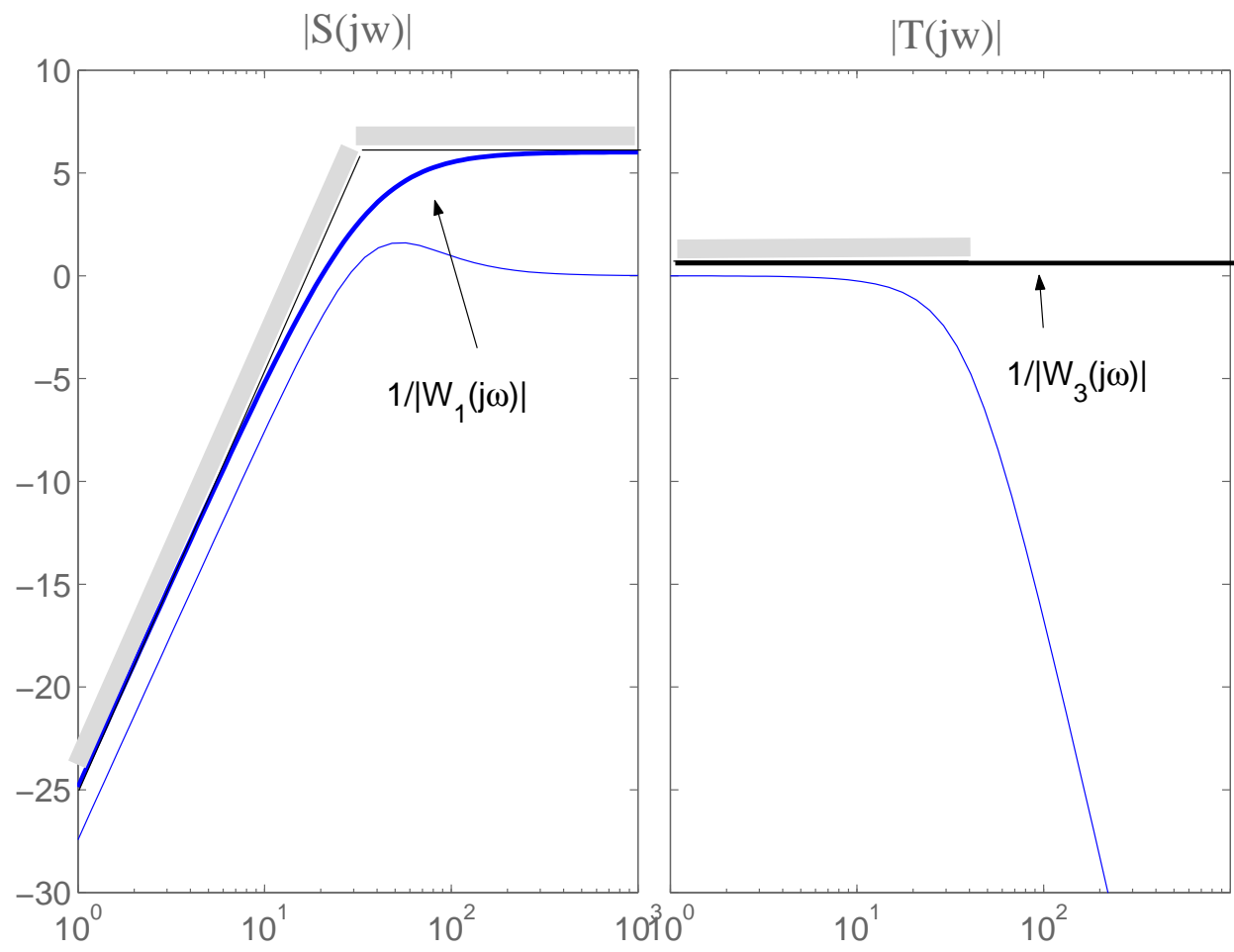
$$K(p) = k^c \frac{p + a}{p} \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1}.$$

Paramètres à régler : a , k^c , τ_1 et τ_2

↔ Si $K(p)$ obtenu pas OK beaucoup de sources de problèmes !



Alternative : formaliser la performance



- $|W_1(j\omega)S(j\omega)| \leq 1$
pour tout ω , soit
 $\|W_1S\|_\infty \leq 1$

- $\|W_3T\|_\infty \leq 1$

$W_1, W_3 \xrightarrow{\text{Algorithme (?)}} K / \|W_1S\|_\infty \leq 1 \text{ et } \|W_3T\|_\infty \leq 1$

De la nécessité d'un algorithme "efficace"

Processus de recherche de K itératif...

↔ nécessité d'un algorithme qui se termine en temps raisonnable !

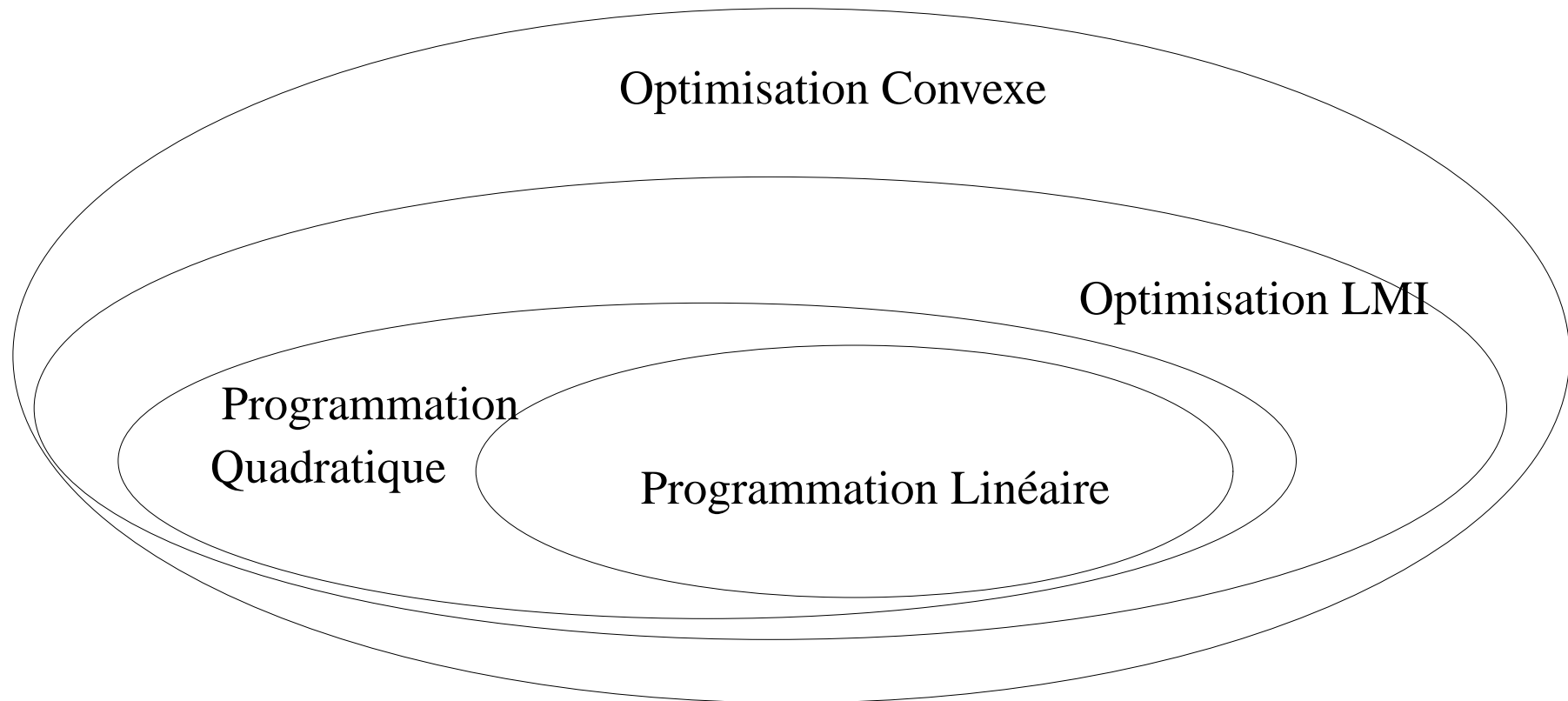
Complexité	Taille n du problème				
	10	20	30	40	50
n^3	0,01 s	0,08 s	0,27 s	0,64 s	1,25 s
	10 s	1,33 mn	4,50 mn	10,67 mn	20,83 mn
2^n	0,01 s	10,24 s	2,91 h	124,3 jours	348,7 ans
	10 s	2,84 h	121,4 jours	348,7 ans	$3,49 \times 10^5$ ans

Algorithme efficace : optimisation convexe

$$\min_{\xi \in \mathcal{C}} f(\xi)$$

- dimension finie : $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ + défini par nombre fini égalités et inégalités
- *faisabilité* : trouver ξ , s'il existe, tel que $\xi \in \mathcal{C}$
- optimisation convexe = f convexe + \mathcal{C} convexe
- cas sympathique : optimisation convexe + dimension finie
- optimisation LMI : $\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T F(\xi)x > 0\}$
avec $F(\xi) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i$ – Notation $F(\xi) > 0$

Rôle fondamental en automatique de l'optimisation LMI



Retour à l'exemple

Trouver $\mathbf{K}(p)$ tel que :

1. Boucle fermée stable

$$2. \forall \omega, \left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)\mathbf{K}(j\omega)} \right| \leq 1 \quad (\|W_1S\|_\infty \leq 1)$$

$$3. \forall \omega, \left| W_3(j\omega) \frac{G(j\omega)\mathbf{K}(j\omega)}{1 + G(j\omega)\mathbf{K}(j\omega)} \right| \leq 1 \quad (\|W_3T\|_\infty \leq 1)$$

Problème de faisabilité, de dimension ∞ , non convexe en la variable $\mathbf{K}(j\omega)$...

Rendre le problème convexe : paramétrisation de Youla

Tout correcteur $\mathbf{K}(p)$ stabilisant $G(p)$ s'écrit :

$$\mathbf{K}(p) = (Y(p) - M(p)\mathbf{Q}(p))(X(p) - N(p)\mathbf{Q}(p))^{-1}$$

avec $\mathbf{Q}(p)$ transfert stable et où $X(p)$, $Y(p)$, $M(p)$ et $N(p)$ fonctions de $G(p)$

Propriété : tout transfert BF est *affine* en $\mathbf{Q}(p)$ ($G(p)$ stable) :

$$S(p) = I - G(p)\mathbf{Q}(p) \text{ et } T(p) = G(p)\mathbf{Q}(p)$$

\Leftrightarrow *Changement de variable* : $\mathbf{K}(p) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(p)$

Application à notre problème

Trouver $\mathbf{Q}(p)$ telle que :

1. \mathbf{Q} stable
2. $\forall \omega, \quad |W_1(j\omega)(1 + G(j\omega)\mathbf{Q}(j\omega))| \leq 1$
3. $\forall \omega, \quad |W_3(j\omega)\mathbf{Q}(j\omega)| \leq 1$

Bonne nouvelle problème de faisabilité convexe en \mathbf{Q}

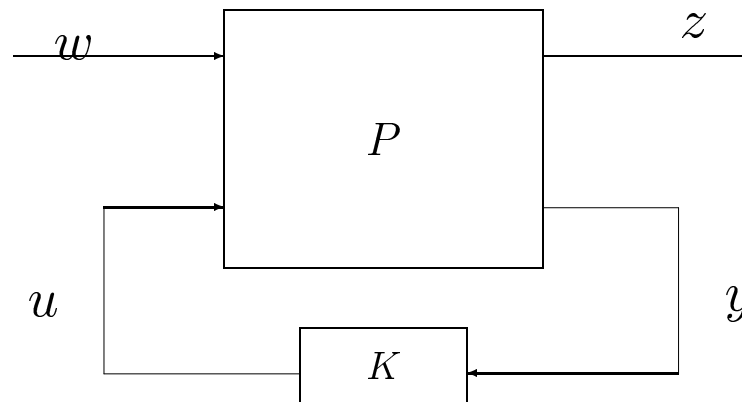
Mauvaise nouvelle problème de dimension $\infty \rightarrow$ résolution approchée

Que faire ? Regardons cas simplifié synthèse *mono critère* : trouver $K(p)$ /

1. Boucle fermée stable
2. $\forall \omega, \quad \left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$

Synthèse H_∞

Trouver K tel que le système ci-dessous stable + norme $H_\infty \leq 1$

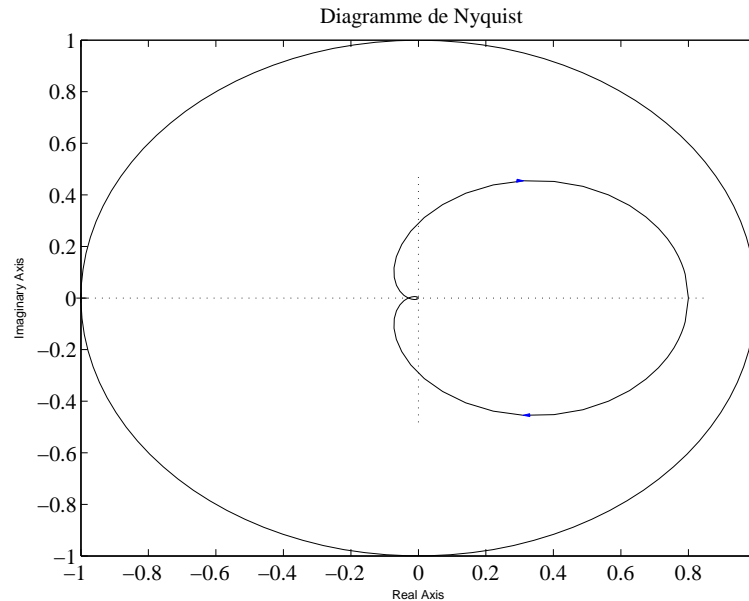


Solution basée sur représentation d'état :

- K paramétré par ses matrices de représentation d'état
- Lemme de Kalman Yakubovitch Popov

Solution sous la forme d'un problème d'optimisation LMI de dimension finie

Critère graphique et optimisation LMI



Rôle fondamental du Lemme de Kalman Yakubovitch Popov, cas particulier :

$$\forall \omega, \quad |H(j\omega)| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{P} > 0 \text{ telle que} \\ \left[\begin{array}{cc} A^T \underline{P} + \underline{P} A + C^T C & \underline{P} B + C^T D \\ B^T \underline{P} + D^T C & D^T D - I \end{array} \right] \leq 0 \end{array} \right.$$

nombre contraintes ∞

optimisation LMI de dim. finie

Retour à l'exemple : trouver K / $\|W_1 S\|_\infty \leq 1$ et $\|W_3 T\|_\infty \leq 1$

Problème de synthèse multi critère : 1 alternative

1. Adapter démonstration synthèse H_∞

conditions nécessaires et suffisantes \leftrightarrow optimisation dimension finie *non convexe*
conditions suffisantes \leftrightarrow optimisation de dimension finie convexe

2. Se ramener à la synthèse mono critère :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \|W_1 S\|_\infty \leq 1 \\ \|W_3 T\|_\infty \leq 1 \end{cases}$$

Pour outil ingénieur, 2. $>$ 1. car 1. demande connaissance en optimisation

\hookrightarrow Intérêt fondamental synthèse H_∞

Synthèse H_∞ : bilan

1. Concepts fondamentaux automatique fréquentielle classique :
↪ cahier des charges \sim gabarits sur modules transferts BF
2. Formalisation mathématique rigoureuse (\neq automatique fréquentielle classique) :
↪ utilisation norme H_∞ pondérée
3. Recherche solution (c.n.s) pour “qualifier” la difficulté :
↪ problème d’optimisation convexe mais de dimension infinie
4. Recherche de solutions basées c.s. mais avec algorithme efficace :
↪ optimisation convexe, de préférence de dimension finie (LMI)
5. Outil simple à utiliser :
↪ remplacement de la manipulation des diagrammes par des algo. d’optimisation
↪ pré requis = automatique fréquentielle classique

Synthèse H_∞ : bilan (suite)

Bénéfices pour l'ingénieur :

1. considérable simplification de la synthèse grâce puissance ordinateurs :
étape 1 : tracés graphiques rapides
étape 2 : calcul du correcteur : du réglage à la main à la CAO
2. traiter problèmes jusque-là inabordables : multivariables, compromis serrés, etc..
3. prérequis : bagage de l'automatique fréquentielle classique :
pas connaissance des espaces de Hardy ou optimisation convexe pour synthèse H_∞ !

Démarche pour aboutir synthèse H_∞ = cas d'école pour le chercheur

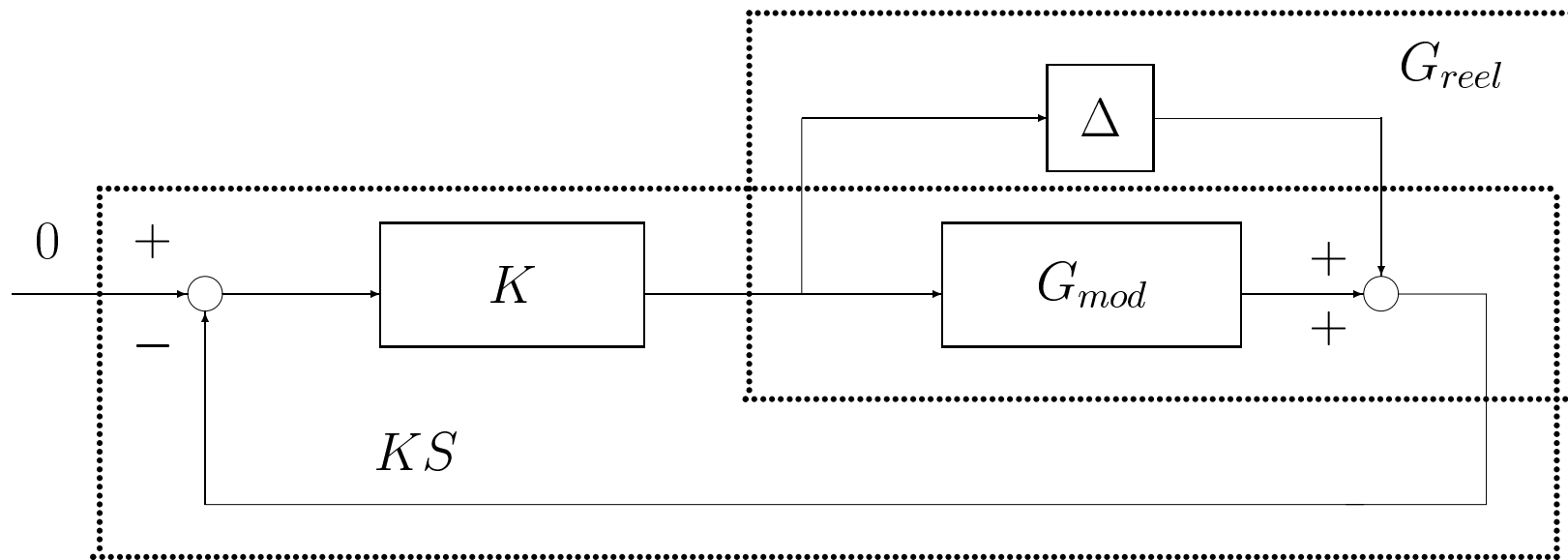
Comme synthèse H_2 , synthèse $H_\infty \rightarrow$ performance

Contrairement synthèse H_2 , synthèse $H_\infty \rightarrow$ robustesse

Robustesse

notion de **famille de modèles** → exemple :

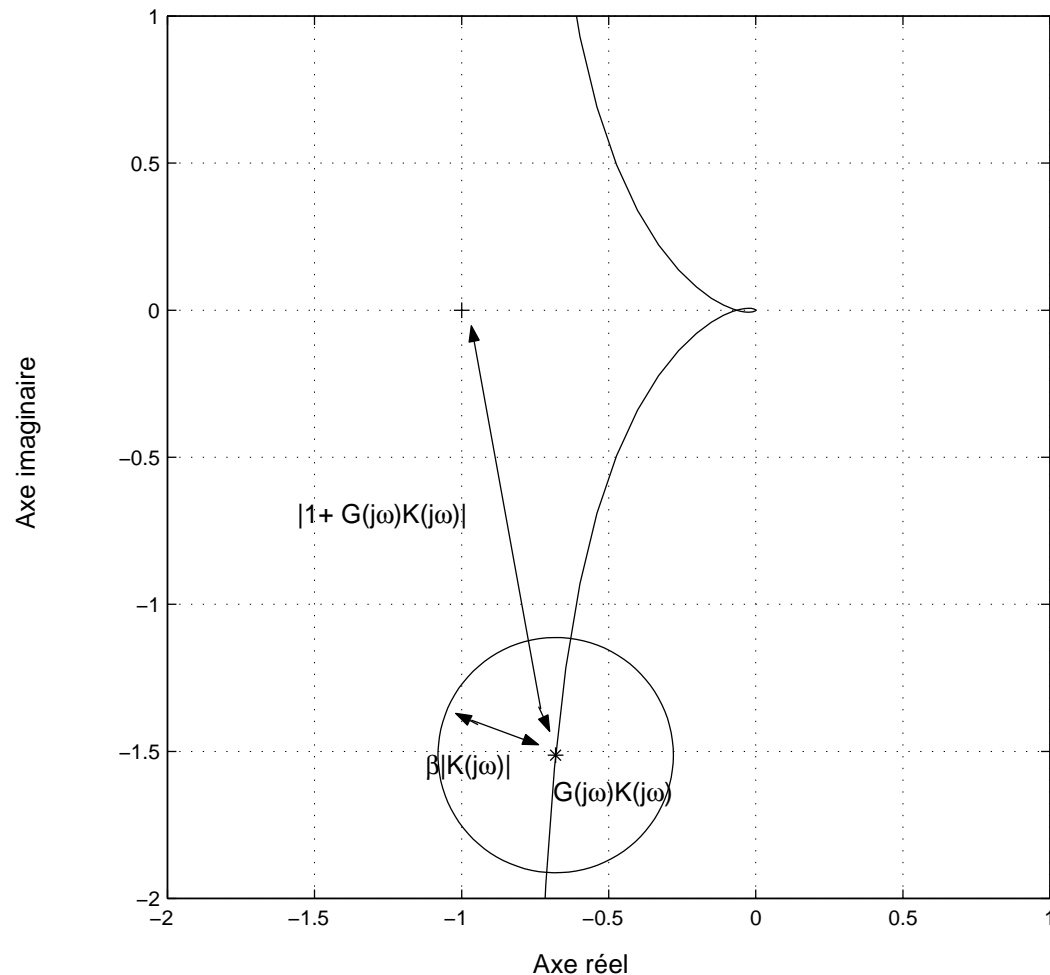
$$G_{reel} \subset \{G \mid \exists \Delta, \|\Delta\|_{\infty} \leq \beta, G = G_{mod} + \Delta\}$$



Analyse par application critère de Nyquist sur la famille de transferts BO

Robustesse : exemple

Diagramme de Nyquist de $G(j\omega)K(j\omega)$



Stabilité famille de modèles avec
 $|\Delta(j\omega)| < \beta$ si

Stabilité pour G_{mod} et

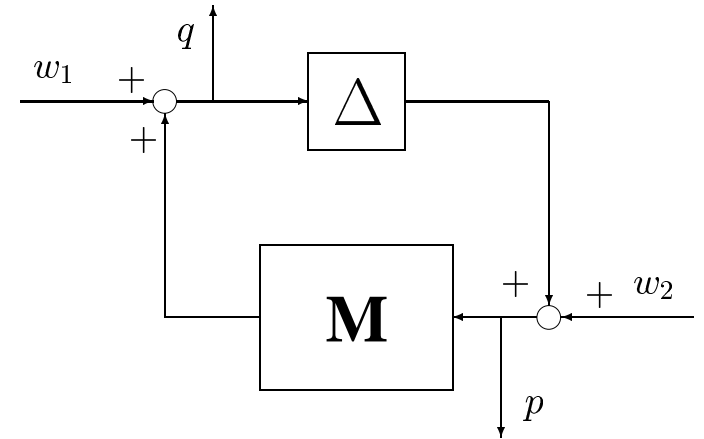
$$\forall \omega, |1 + G_{mod}(j\omega)K(j\omega)| > \beta|K(j\omega)|$$

$$\text{soit } \|KS\|_{\infty} < \frac{1}{\beta}$$

Des critères graphiques \rightarrow optimisation

Théorème du petit gain

famille (M, Δ) stable $\forall \Delta / \|\Delta\|_\infty \leq \beta \Leftrightarrow \|M\|_\infty < \frac{1}{\beta}$



Optimisation convexe dim. finie par Lemme Kalman Yakubovitch Popov

Théorème du petit gain :

initialement pour étude stabilité de deux NL interconnectées \rightarrow conservatif (c.s.)

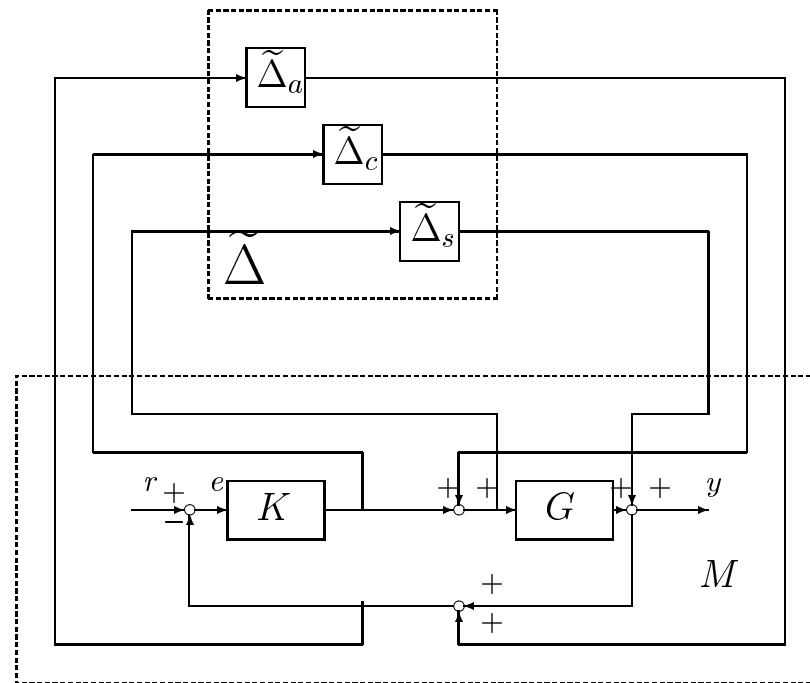
non conservatif (c.n.s.) pour étude *robustesse*

Interaction linéaire/non linéaire au sein automatique “fréquentielle”

μ analyse

Généralisation de l'analyse de la robustesse dans le cas de

- plusieurs incertitudes dynamiques



- incertitudes paramétriques

μ analyse : complexité

Mauvaise nouvelle NP difficile

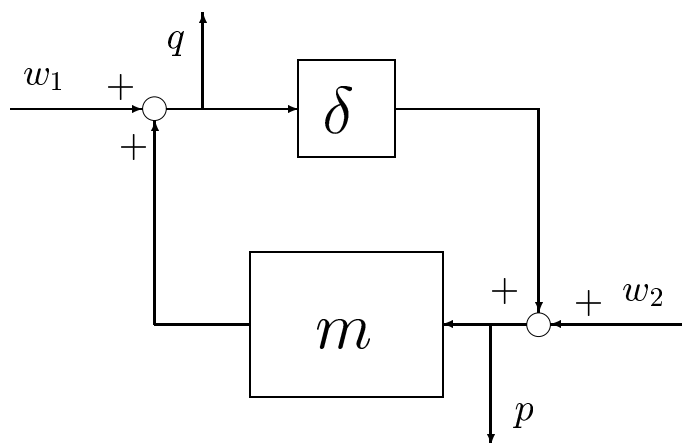
Bonne nouvelle des bornes de faibles complexité sont disponibles

—→ 1 = optimisation convexe sous contrainte LMI (c.s.)

correspond à une c.n.s cas d'incertitudes dynamiques lentement variant dans le temps !

Excellente nouvelle : problème physiquement plus pertinent !

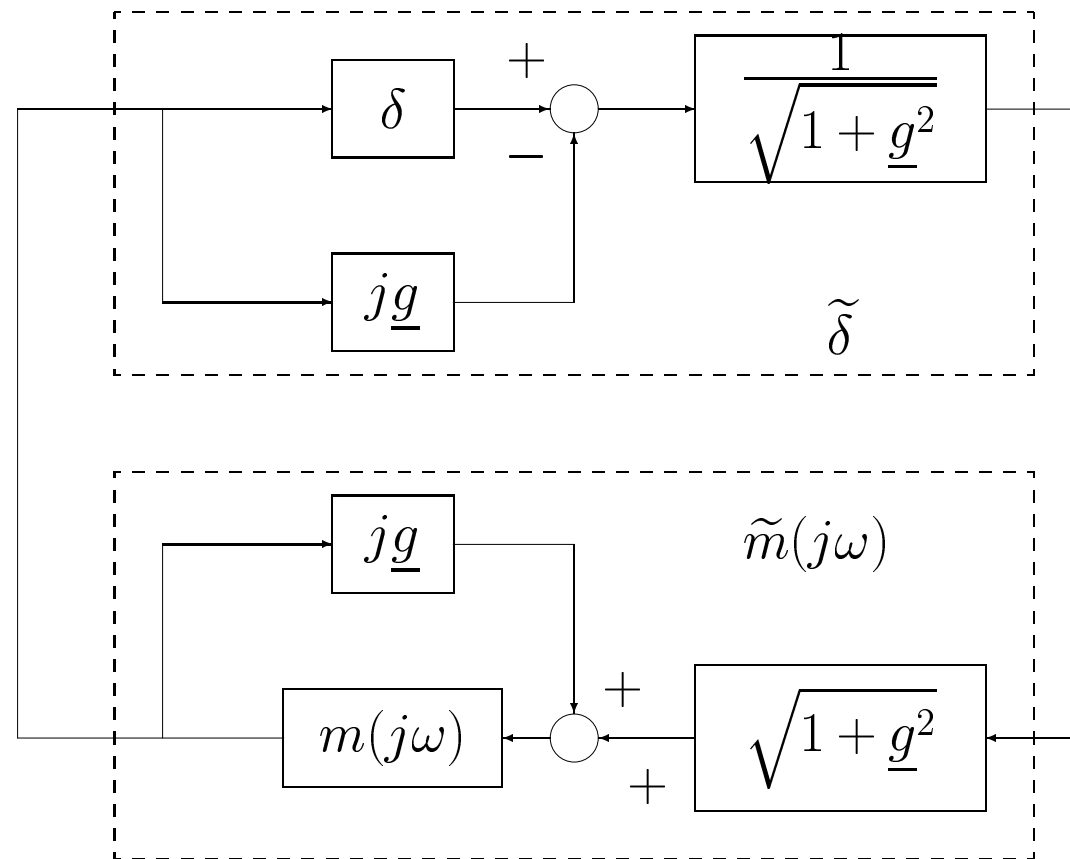
Robustesse : cas d'un paramètre incertain $\delta \in] - 1, 1[$



Application théorème petit gain :
comme $|\delta| < 1$ condition suffisante

$$m(j\omega)^* m(j\omega) - 1 \leq 0$$

\hookrightarrow conservatisme \rightarrow



$\forall \underline{g}, |\tilde{\delta}| < 1$ petit gain : $\tilde{m}(j\omega)^* \tilde{m}(j\omega) - 1 \leq 0$ soit

$$m(j\omega)^* m(j\omega) + j\underline{g}(m(j\omega) - m(j\omega)^*) - 1 \leq 0$$

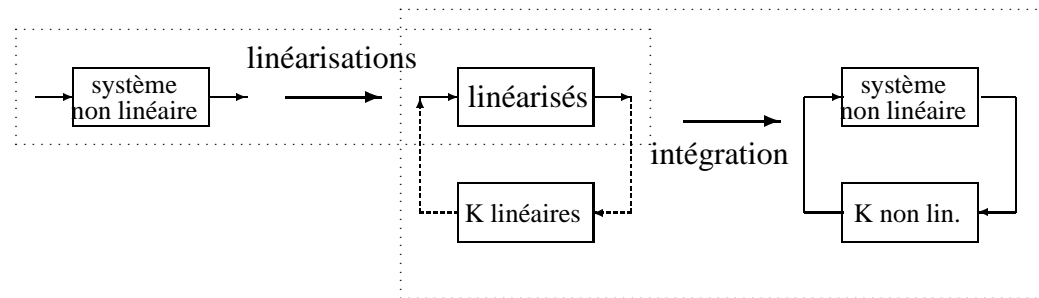
Robustesse : bilan

1. Concepts fondamentaux automatique fréquentielle classique :
 - ↪ système \sim famille de modèles
 - ↪ schéma-blocs = support du raisonnement
2. Formalisation mathématique rigoureuse (\neq automatique fréquentielle classique) :
 - ↪ utilisation norme H_∞ pondérée
3. Recherche solution (c.n.s) pour “qualifier” la difficulté
4. Recherche de solutions basées c.s. mais avec algorithme efficace :
 - ↪ optimisation convexe, de préférence de dimension finie (LMI)
5. Outil simple à utiliser :
 - ↪ remplacement de la manipulation des diagrammes par des algo. d’optimisation
 - ↪ pré requis = automatique fréquentielle classique

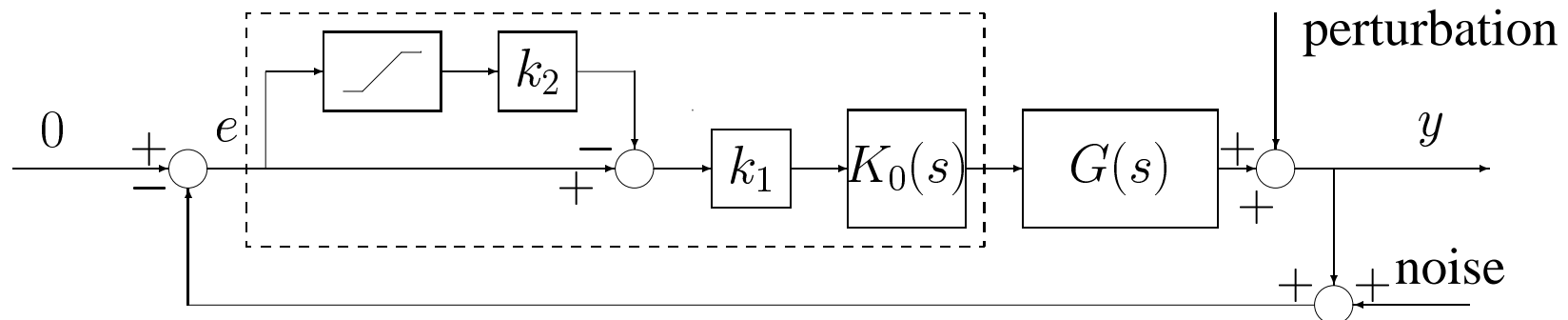
Quelques pratiques “ingénieur” en non linéaire

Correcteur linéaire en général calculé sur une linéarisation (commande PI missile)

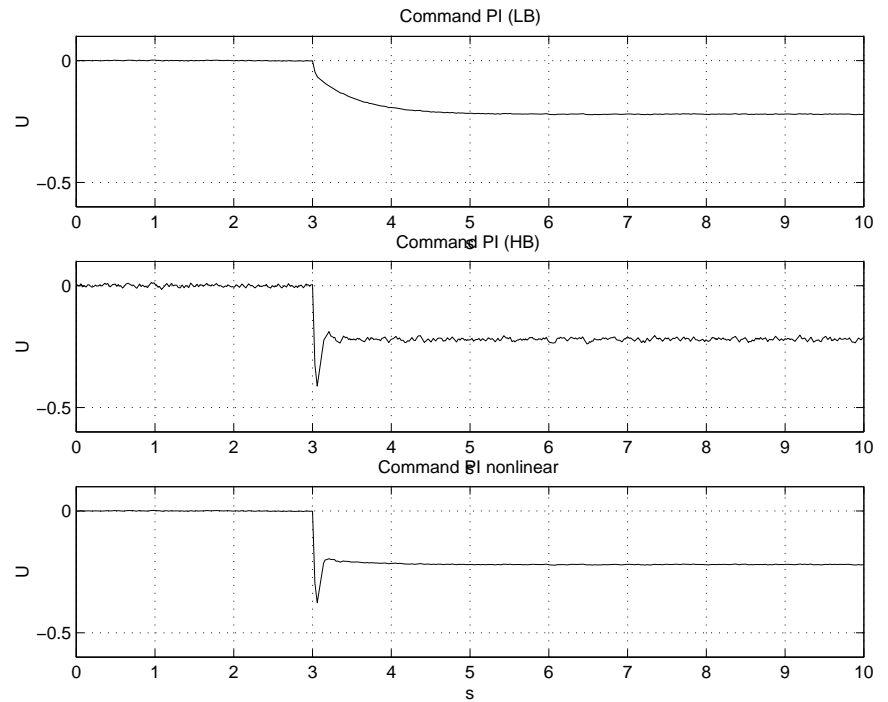
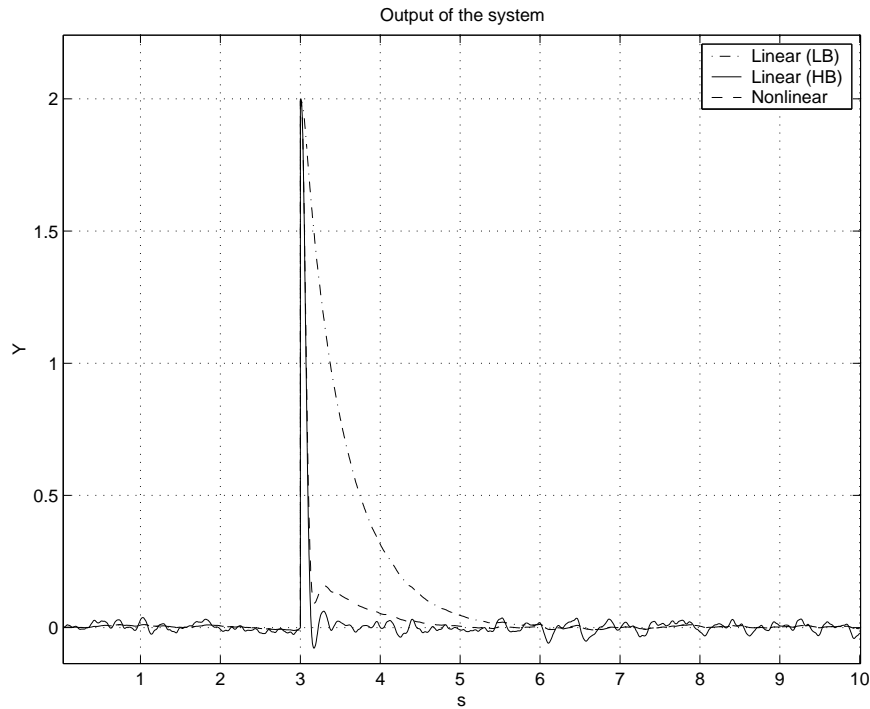
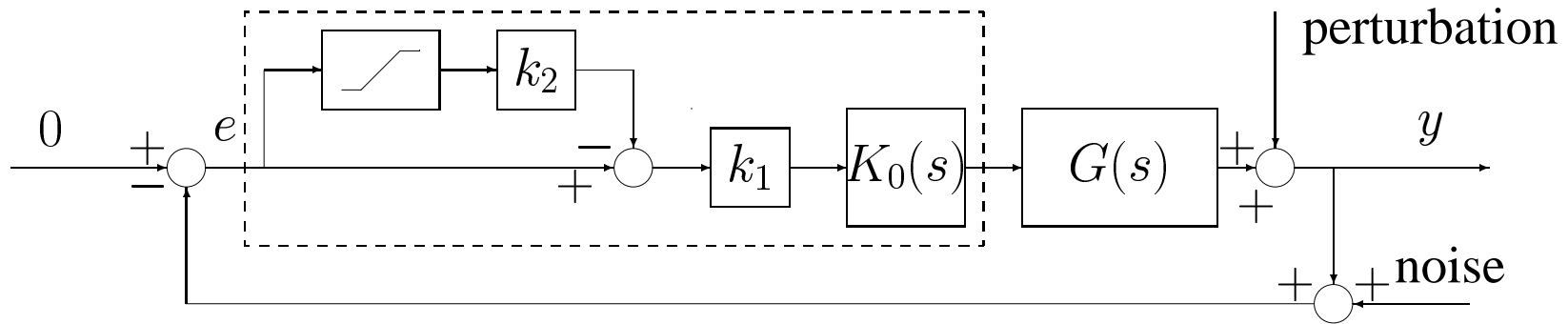
Séquencement de gains



Commandes non linéaires de systèmes linéaires



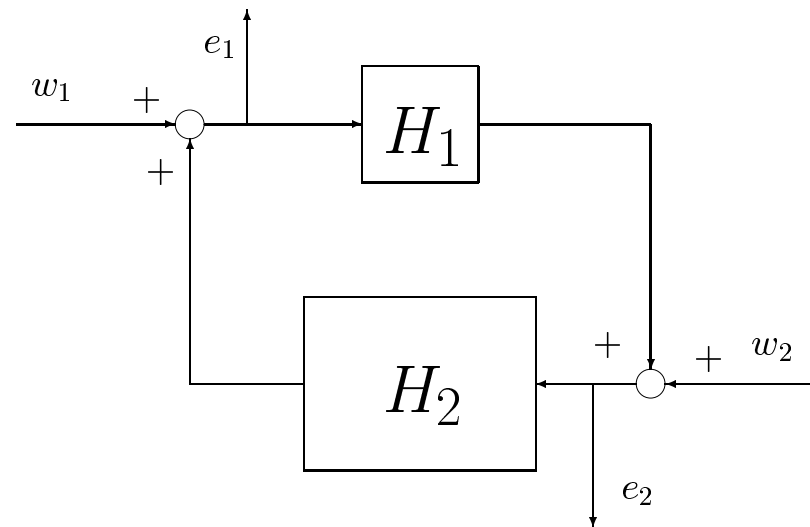
PID non linéaire



Approche entrée/sortie

→ Automatique fréquentielle : **du linéaire au non linéaire non stationnaire**

Une préoccupation ancienne Zames, années 60, **stabilité**



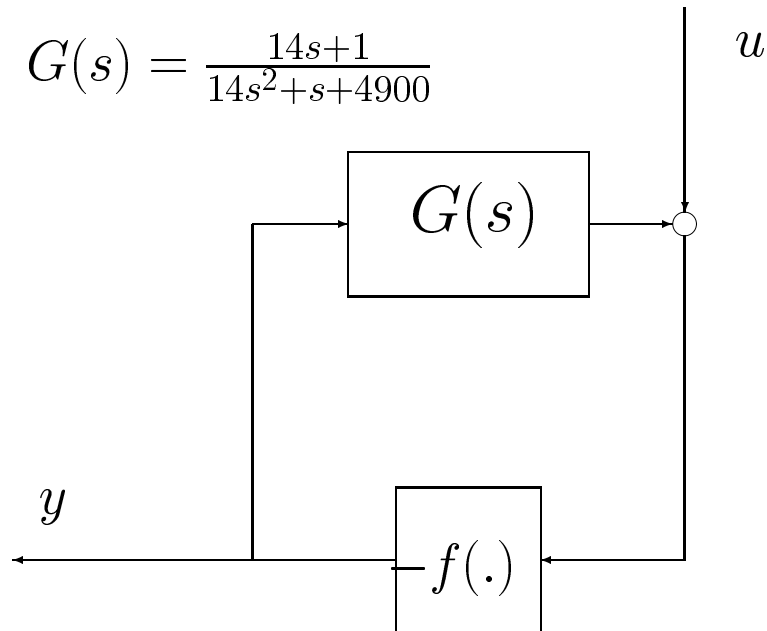
Des résultats théoriques “multipliers”, séparation des graphes (Safonov fin 70)
quelques outils (graphiques) : pas assez puissants

Renaissance fin 90 (IQC) LMI = outils intéressants pour la mise en œuvre !

Limitations de la (\mathcal{L}_2 gain) stabilité

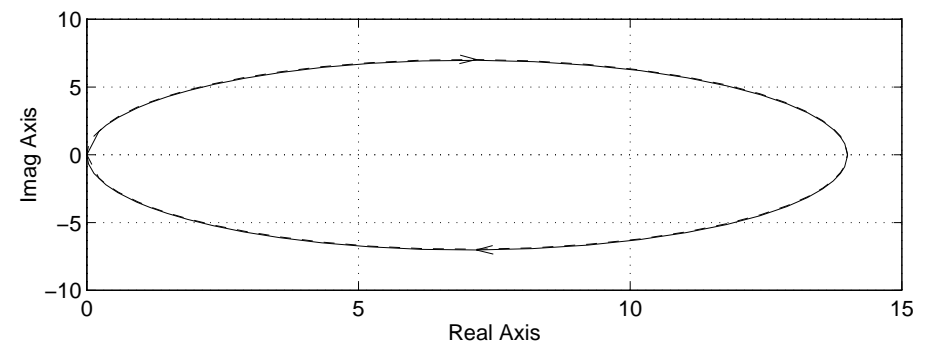
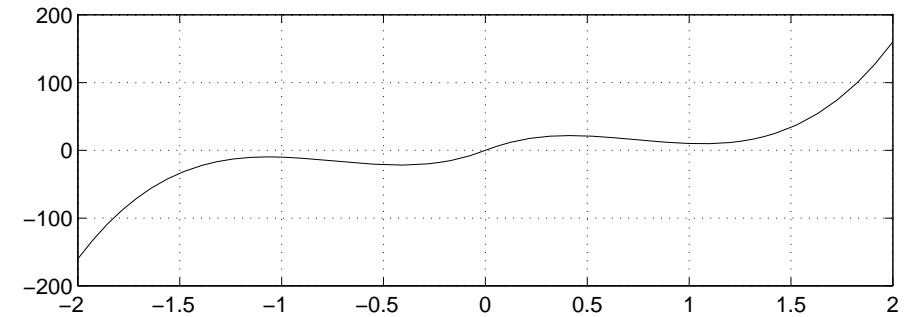
Systeme considéré

$$G(s) = \frac{14s+1}{14s^2+s+4900}$$



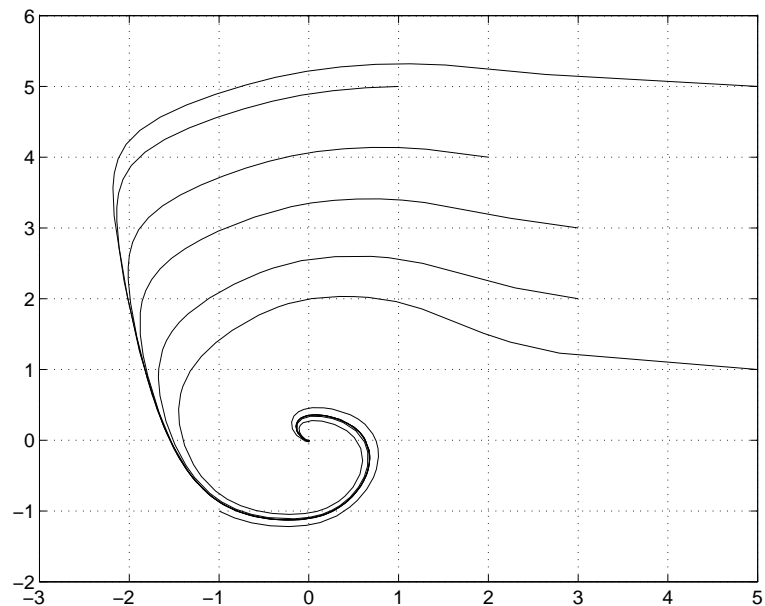
$$f(p) = 90p^3 - 200p|p| + 120p$$

Analyse de la stabilité via le critère du cercle

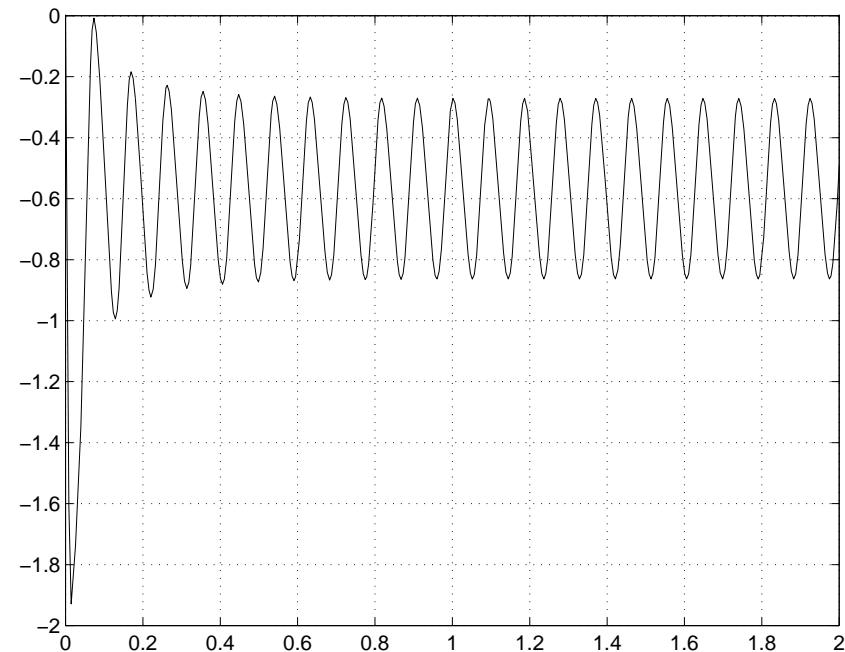


Limitations de la (\mathcal{L}_2 gain) stabilité (II)

Réponse à des conditions initiales



Réponse indicielle



Comment vérifier la performance: Du linéaire vers le non linéaire

Spécifications qualitatives : régime permanent

→ sortie asymptotiquement constante (périodique) pour entrée constante (périodique)

- Linéaire: garanti par (\mathcal{L}_2 gain) stabilité
- Non linéaire: pas toujours vrai !

Spécifs quantitatives : pour un ensemble de signaux d'entrée, quels signaux en sortie ?

→ dans le contexte linéaire : utilisation de la norme H_∞ pondérée

Robustesse

Un cadre formalise ces 3 aspects : Norme incrémentale pondérée

Norme incrémentale pour l'analyse des systèmes non linéaires

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), w(t)) & x(0) &= x_0 \\ z(t) &= h(t, x(t), w(t)) & f \text{ et } g & C^1, f(0, 0, 0) = 0 \text{ et } h(0, 0, 0) = 0\end{aligned}$$

(\mathcal{L}_2 gain) stabilité si $\exists \gamma \geq 0, \|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2$

Stabilité incrémentale si stabilité + $\exists \eta \geq 0 \|z_1(t) - z_2(t)\|_2 \leq \eta \|w_1(t) - w_2(t)\|_2$

Test exact de stabilité incrémentale : problème difficile

Typiquement proche équations d'Hamilton Jacobi

Bon compromis entre complexité et conservatisme

Formalisation du cahier des charges en non linéaire

Cas *linéaire stationnaire* : critère basé sur la norme H_∞ pondérée (G. Zames)

Proposition cas **non linéaire, non stationnaire** (V. Fromion) :

→ critère basé sur la **norme incrémentale pondérée**

Des propriétés qualitatives : réponse à des échelons, signaux T périodiques

Des propriétés quantitatives : suivi de référence, rejet de perturbations

Des propriétés robustes : famille de modèles

Un premier essai d'analyse non linéaire en Aéronautique

analyse et commande PI d'un missile non linéaire

$$\dot{\alpha} = \cos(\alpha)K_{\alpha}MC_n(\alpha, \delta) + q$$

$$\dot{q} = K_qM^2C_m(\alpha, \delta)$$

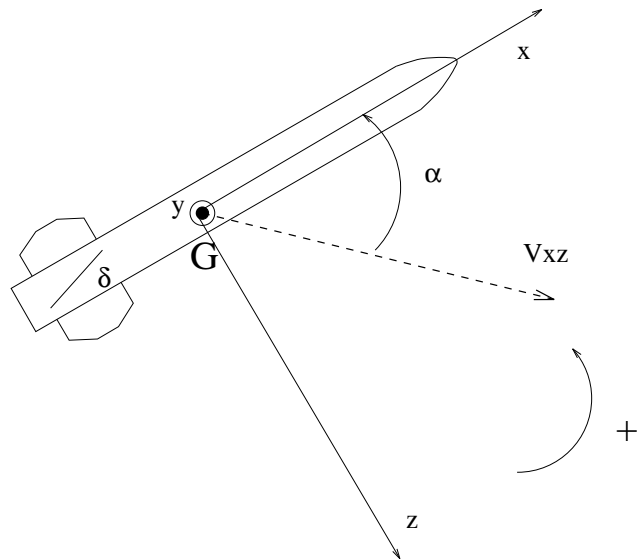
avec des coefficients aérodynamiques incertains

$$C_n(\alpha, \delta) = a_n\alpha^3 + b_n|\alpha|\alpha + c_n\left(2 - \frac{M}{3}\right)\alpha + d_n\delta$$

$$C_m(\alpha, \delta) = a_m\alpha^3 + b_m|\alpha|\alpha + c_m\left(-7 + \frac{8M}{3}\right)\alpha + d_m\delta$$

$$\text{Sortie : } \eta = \frac{K_z}{g}M^2C_n(\alpha, \delta, M)$$

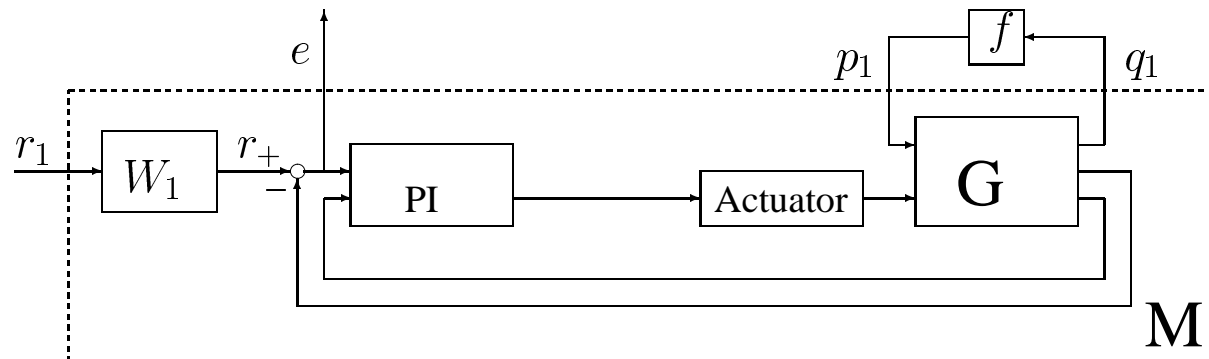
$$\text{Actionneur : } \delta(s) = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\xi_a\omega_a s + \omega_a^2}\delta_c(s)$$



Cahier des charges

- suivi d'échelon, temps de réponse ≤ 0.35 s, faible erreur statique
- robustesse

Analyse de la commande PI du missile



Performance non-linéaire garantie malgré des incertitudes (“marge de module” 6dB)
Bilan très positif :

- *Bons résultats encourageants*
 - montre la validité de l’approche
- Malgré utilisation d’outils de *faible complexité* mais *conservatifs* (c.s.)
(c.n.s. \simeq équations Hamilton Jacobi)
 - mise au point d’un outil avec compromis conservatisme/complexité réglable
- Enracinement des techniques dans l’automatique fréquentielle classique
 - facilité de diffusion auprès des ingénieurs

De l'art d'obtenir des formulations LMIs

I Comportement d'un système
Caractérisé par contraintes quadratiques

II Modélisation d'un système
par Interconnexion

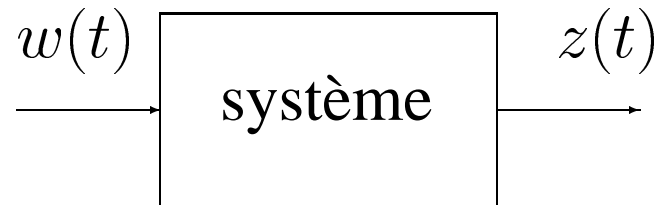
Analyse des systèmes par optimisation

III Stabilité : Séparation des graphes

Performance : \mathcal{S} procédure

IV Synthèse de Correcteurs
Lemme d'Elimination

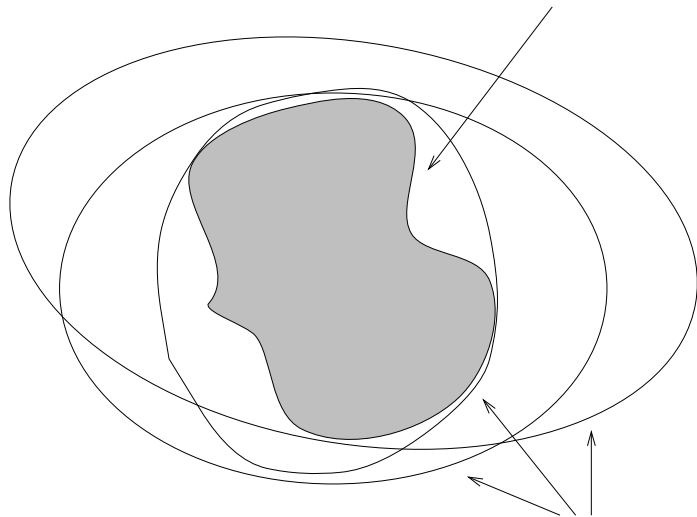
Dissipativité : Comment caractériser le comportement d'un système ?



A une entrée $w(t)$ donnée : \rightarrow une famille de $z(t)$ (1 famille de modèles)

\hookrightarrow Caractériser comportement par contraintes sur graphe $(z(t), w(t))$

Famille de modèles
ensemble des z pour un w donné



Sur familles de modèles
ensemble des z vérifiant contrainte quadratique

• Gain :

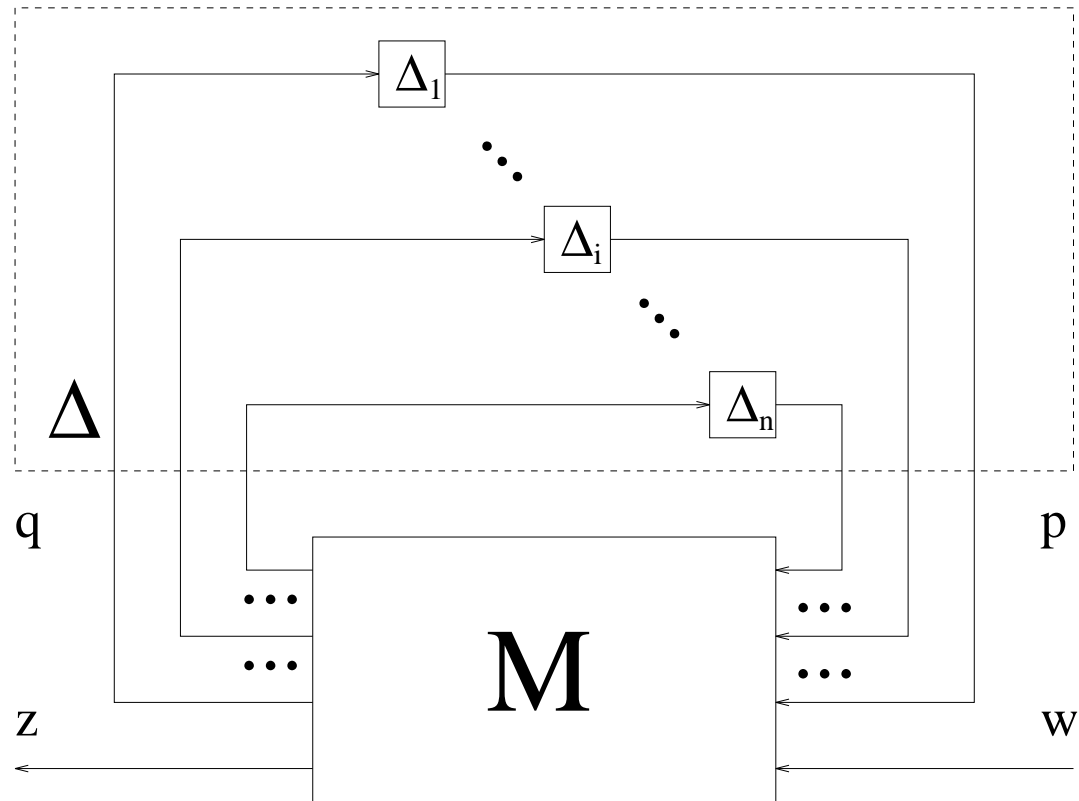
$$\int_0^T z(t)^T z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T w(t)^T w(t) dt$$

• Passivité :

$$\int_0^T p(t)^T q(t) dt \geq 0$$

Interconnexion

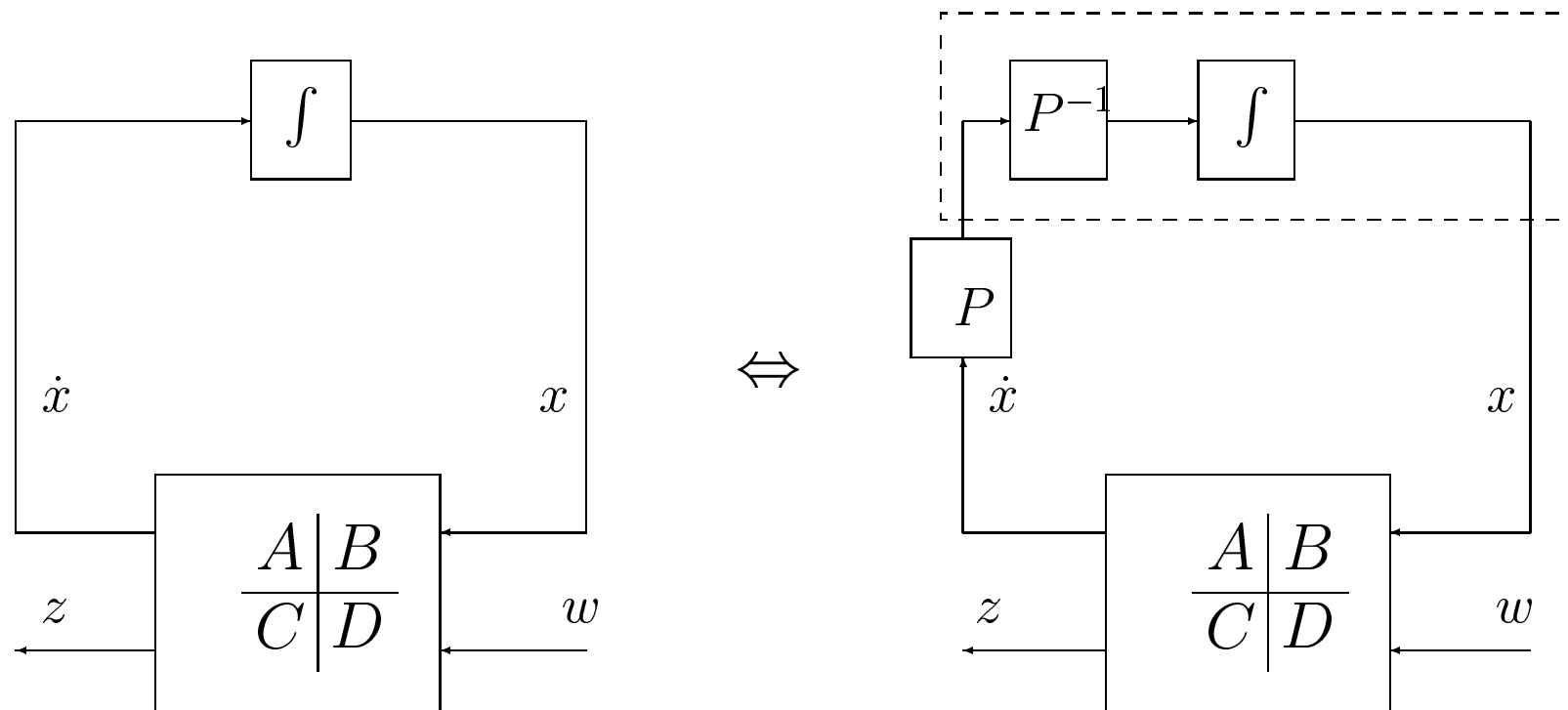
Modélisation systèmes complexes comme interconnexions de systèmes élémentaires



Δ_i sous systèmes élémentaires regroupés dans Δ
 M systèmes linéaire stationnaire

Séparation des graphes- \mathcal{S} procédure

Exemple :
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Cx + Dw \end{cases}$$



Stabilité : Séparation des graphes : $P > 0, A^T P + P A < 0$ (Généralisation Th. petit gain)

Performance : \mathcal{S} -procédure : $P > 0, \begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} < 0$

Conclusions

Automatique fréquentielle \longrightarrow Besoins industries :

méthodologies (pas forcément simplistes)
basées sur des outils (simples et accessibles)

Outils classiques (critères graphiques) inadéquats pour

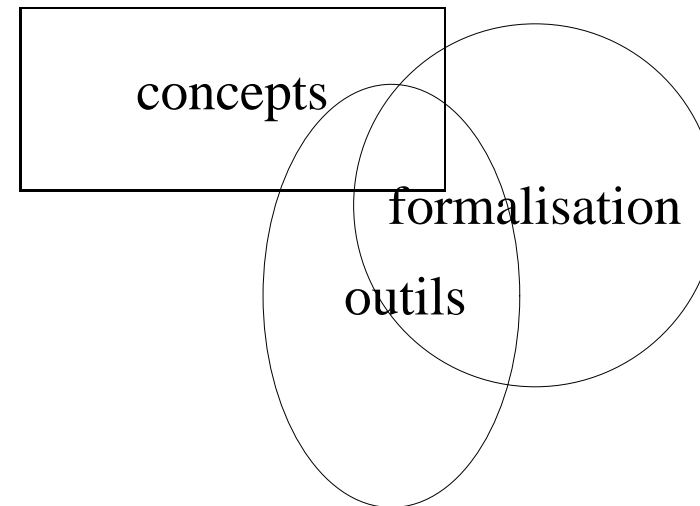
- cahier des charges serrés
- systèmes multivariables/non linéaires

Approche moderne (systématique) :

- concepts de l'automatique classique
- formalisation mathématique du cahier des charges
- optimisation convexe (compromis conservatisme/complexité)

\hookrightarrow Au delà de la querelle ancien/moderne, de la séparation linéaire/non linéaire

Perspectives



Linéaire stationnaire :

- formalisation du cahier des charges : très avancée
- outils : beaucoup de travail fait mais encore beaucoup à faire !
(big picture à faire)

Non linéaire :

- formalisation du cahier des charges : assez avancée
- outils : beaucoup de travail à faire !

Page WEB

A partir du 12 juillet, transparent et texte de la session disponible :

1. sur demande par email : `scorletti@greyc.ismra.fr`
2. sur page WEB du LAP :
`http://www.greyc.ismra.fr/LAP/Gerard_S/robust.html`

Milles excuses pour le retard...

Automatique, nouveaux défis, préprojet :

Approche entrée/sortie et optimisation convexe :
bases de nouveaux outils de
CAO pour la commande de systèmes complexes
Application en Aéronautique

Gilles Ferreres	ONERA, Toulouse	Animateur
Stéphane Font	Service Automatique, Supélec	
Vincent Fromion	LASB, INRA, Montpellier	
Jean-François Magni	ONERA, Toulouse	
Eric Magarotto	LAP, ISMRA, Caen	
Gérard Scorletti	LAP, ISMRA, Caen	Animateur

Objectifs de recherche du projet

Théoriques

Formaliser le cahier des charges en non linéaire (Analyse/synthèse)

Caractériser la complexité des formulations obtenues (c.n.s.)

Outils associés

Développer des critères aussi représentatifs que possible du cahier des charges, menant à des problèmes d'optimisation de complexité raisonnable (c.s., bornes)

Mise en œuvre

Valider ce cadre par des études de cas et des applications (Aéronautique, etc...)

Pistes en cours ou à explorer

Théoriques

Performance non linéaire : analyse et commande par l'approche incrémentale

Outils associés

1. Modélisation par LFT (extension schéma-blocs)
2. Approche entrée/sortie pour l'analyse des systèmes
 - μ , ν analyse, etc..
 - multipliers, IQCs, séparation des graphes
3. Analyse de type Lyapunov, dissipativité
4. Optimisation convexe en général, LMI en particulier
 - relaxation/restriction de problèmes d'optimisation non convexe
 - formulation en dimension finie de problèmes de dimension ∞