# DES OUTILS POUR LA COMMANDE NON LINÉAIRE PAR SÉQUENCEMENT DE GAINS

Vincent Fromion[1]

INRA- LASB - Montpellier
e-mail : fromion@ensam.inra.fr

Mai 2003

[1]En collaboration avec G. Scorletti (LAP-ISMRA).

# LES ORIGINES DES GAINS VARIABLES

# Réguler autour d'un point d'équilibre

**Problème :** Réguler un système non linéaire autour d'un point d'équilibre.

**Solution possible :** La stabilisation exponentielle de la linéarisation stationnaire de $\Sigma$ au point d'équilibre assure la stabilisation exponentielle de $\Sigma$ (dans un voisinage du point d'équilibre).

**Intérêt pratique :** «Récupérer» les outils de synthèse associés aux systèmes linéaires stationnaires.

**Inconvénient :** Méthode locale et qui demande la stabilisation exponentielle des linéarisations (demande assez forte du point de vue non linéaire).

# Changer le point de régulation

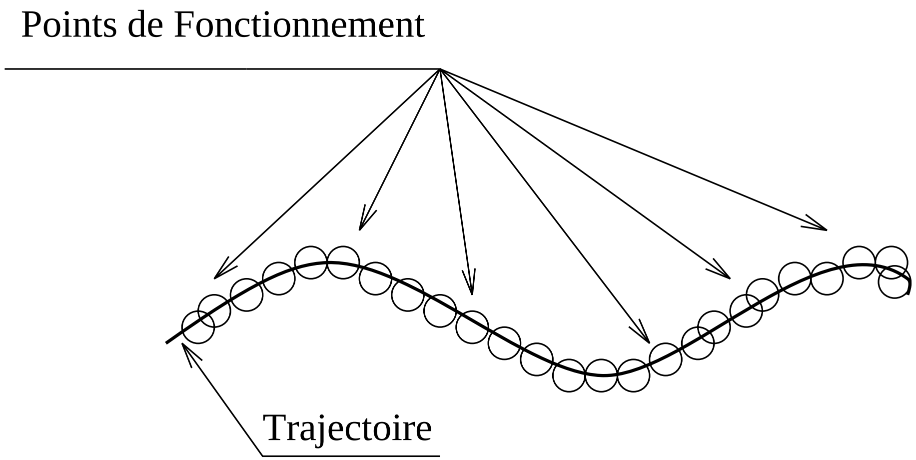



FIG. 1 – Trajectoire du systèmes vue comme un ensemble continu de points d'équilibre

**Problème :** Changer le point de régulation.

**Solution possible :** Définir une trajectoire constituée uniquement de points d'équilibre permettant de passer continûment du point de régulation courant au point de régulation souhaité.

**Inconvénient :** la performance !

# PRINCIPES TRADITIONNELS

# DU SÉQUENCEMENT DE GAINS

# Systèmes considérés

Le système considéré est décrit par :

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & h(x(t), u(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \qquad (1)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $y(t) \in \mathcal{R}^m$, et $u(t) \in \mathcal{R}^p$. Les fonctions $f$ et $h$ sont $C^2$, (uniformément) Lipschitz continues et telles que $f(x_0, 0) = 0$ et que $h(x_0, 0) = 0$.

Sous ces hypothèses, $\Sigma$ est bien-posé, *i.e.* $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u)$, la solution de la partie différentielle du système est unique et appartient à $\mathcal{L}_2^e$ pour tout $x_0 \in \mathcal{R}^n$ et pour tout $u \in \mathcal{L}_2^e$. De plus, la sortie du système appartient elle aussi à $\mathcal{L}_2^e$.

# Principe de “quasi-staticité”

On associe à $\Sigma$, l'ensemble de «ses points d'équilibre» :

$$Z_e = \{(x_e, u_e) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p \mid f(x_e, u_e) = 0\}$$

et à chaque point de $Z_e$, une linéarisation qui possède la représentation d'état suivante :

$$D\Sigma_{(x_e,u_e)} \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) & = & A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) & = & C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \\ \bar{x}(t_0) & = & 0 \end{cases}$$

où $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$, $C = \frac{\partial h}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $D = \frac{\partial h}{\partial u}(x_e, u_e)$.

Sur cette base et pour « chaque point » de $Z_e$, on synthétise un correcteur linéaire stationnaire, *i.e.*

$$DK_{(x_e,u_e)} \begin{cases} \dot{z}(t) & = & A_{(x_e,u_e)}z(t) + B_{(x_e,u_e)}\bar{y}(t) \\ \bar{u}(t) & = & C_{(x_e,u_e)}z(t) + D_{(x_e,u_e)}\bar{y}(t) \\ z(t_0) & = & 0 \end{cases}$$

qui soit tel que la boucle fermée linéaire stationnaire constituée de $D\Sigma_{(x_e,u_e)}$ et de $DK_{(x_e,u_e)}$ possède de «bonnes propriétés» (principe de “quasi-staticité”).

# Réaliser le correcteur non linéaire

On cherche alors le correcteur $K$ décrit par :

$$K \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_K(t) & = & f_K(x_K(t), y(t)) \\ u(t) & = & h_K(x_K(t), y(t)) \\ x_K(t_0) & = & x_{K0} \end{array} \right.$$

qui soit tel que ses linéarisations autour de chaque valeur $(x_{Ke}, y_e)$ telle que $y_e = h(x_e, u_e)$ et $f_k(x_{Ke}, y_e) = 0$ vérifient :

$$A_{(x_e,u_e)} = \frac{\partial f_K}{\partial x}(x_{Ke}, y_e) \text{ et } B_{(x_e,u_e)} = \frac{\partial f_K}{\partial u}(x_{Ke}, y_e)$$

$$C_{(x_e,u_e)} = \frac{\partial h_K}{\partial x}(x_{Ke}, y_e) \text{ et } D_{(x_e,u_e)} = \frac{\partial h_K}{\partial u}(x_{Ke}, y_e)$$

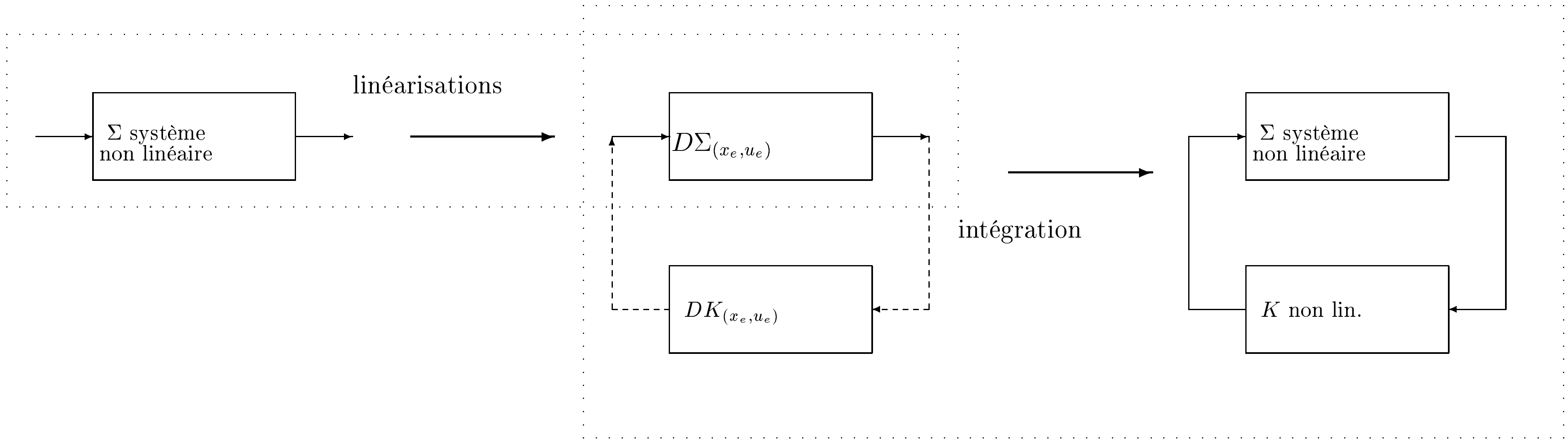
et où

$$u_e = h_K(x_{Ke}, y_e)$$

$\Rightarrow$ Ajoute une contrainte d'intégrabilité aux linéarisations du correcteur (cf. Théorème de Frobenius )

# Intégration des correcteurs linéaires solutions

Synthèse d'un correcteur à séquencement de gains pour asservir un système non linéaire au voisinage de la surface d'équilibre



# ÉTENDRE LA “QUASI-STATICITÉ” À L’ENSEMBLE

# DES TRAJECTOIRES

# Les linéarisations du système

On associe à $\Sigma$, sa linéarisation, le long d'une entrée spécifique $u_r \in \mathcal{L}_2^e$ :

$$\bar{y} = D\Sigma_G[u_r](\bar{u}) \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= C(t)\bar{x}(t) + D(t)\bar{u}(t) \\ \bar{x}(t_0) &= 0 \end{cases}$$

avec $A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_r(t), u_r(t))$, $B(t) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_r(t), u_r(t))$, $C(t) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(x_r(t), u_r(t))$ et $D(t) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(x_r(t), u_r(t))$ et où $x_r(t) = \phi(t, t_0, x_0, u_r)$ est la solution du système (1) pour l'entrée $u_r(t)$ et l'état initial $x(t_0) = x_0$.

# Étendre la "quasi-staticité" à l'ensemble des trajectoires

On associe au système linéaire non stationnaire, une infinité de systèmes linéaires stationnaires définis par

$$D\Sigma_\tau \begin{cases} \dot{z}(t) &= A(\tau)z(t) + B(\tau)\eta(t) \\ \zeta(t) &= C(\tau)z(t) + D(\tau)\eta(t) \\ z(t_0) &= 0 \end{cases}$$

où $\tau$ est une **constante** qui appartient $[t_0, \infty)$.

Sur cette base et pour « chaque valeur » de $\tau$, on synthétise un correcteur linéaire stationnaire, *i.e.*

$$DK_\tau \begin{cases} \dot{\xi}(t) &= A_c(\tau)\xi(t) + B_c(\tau)\zeta(t) \\ \eta(t) &= C_c(\tau)\xi(t) + D_c(\tau)\zeta(t) \\ \xi(t_0) &= 0 \end{cases}$$

qui soit tel que la boucle fermée linéaire stationnaire constituée de $D\Sigma_\tau$ et de $DK_\tau$ possède de «bonnes propriétés» (principe de "quasi-staticité").

$\Rightarrow$ + Intégration de $DK_\tau$ !

# La synthèse d’un correcteur de type gains variables

La recherche d’un correcteur par une méthode traditionnelle de séquencement de gains suit le processus suivant :

1. Détermination et paramétrisation de l’ensemble des linéarisations stationnaires du système non linéaire le long des trajectoires recherchées ;

2. Pour chaque linéarisé stationnaire obtenu, recherche d’un correcteur linéaire assurant de bonnes propriétés ;

3. Intégration de l’ensemble des correcteurs obtenus en un correcteur non linéaire tel qu’après linéarisation du système bouclé, on retrouve la linéarisation du système connecté au correcteur linéaire synthétisé dans l’étape précédente ;

4. Vérification des propriétés globales du système bouclé.

# La pratique

Les différentes étapes sont réalisées de façon approchées :

1. Seul un ensemble fini de linéarisations est recherché, le long des trajectoires considérées : “plus il y en a, mieux c'est ” est une règle heuristique courante ;

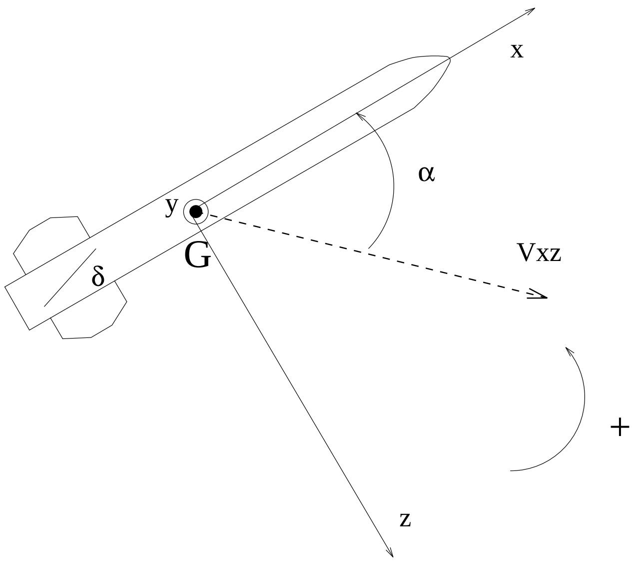
2. Pour chaque élément, un correcteur linéaire assurant localement de bonnes propriétés est ici effectivement synthétisé ;

3. Le correcteur final n'est pas obtenu par intégration mais par simple interpolation de l'ensemble fini des correcteurs obtenus lors de l'étape précédente ;

4. Les propriétés globales du système bouclé sont vérifiées par simple simulation numérique.

DEUX EXEMPLES

# Commande d'un Missile




Modèle fortement non linéaire (Reichert))

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= cos(\alpha)K_\alpha M C_n(\alpha,\delta) + q \\ \dot{q} &= K_q M^2 C_m(\alpha,\delta)\end{aligned}$$

où les coefficients aérodynamiques (incertains) sont donnés par

$$C_n(\alpha,\delta) = a_n\alpha^3 + b_n|\alpha|\alpha + c_n(2 - \frac{M}{3})\alpha + d_n\delta$$
$$C_m(\alpha,\delta) = a_m\alpha^3 + b_m|\alpha|\alpha + c_m(-7 + \frac{8M}{3})\alpha + d_m\delta$$

Sortie (accélération) : $\eta = \frac{K_z}{grav} M^2 C_n(\alpha,\delta,M)$

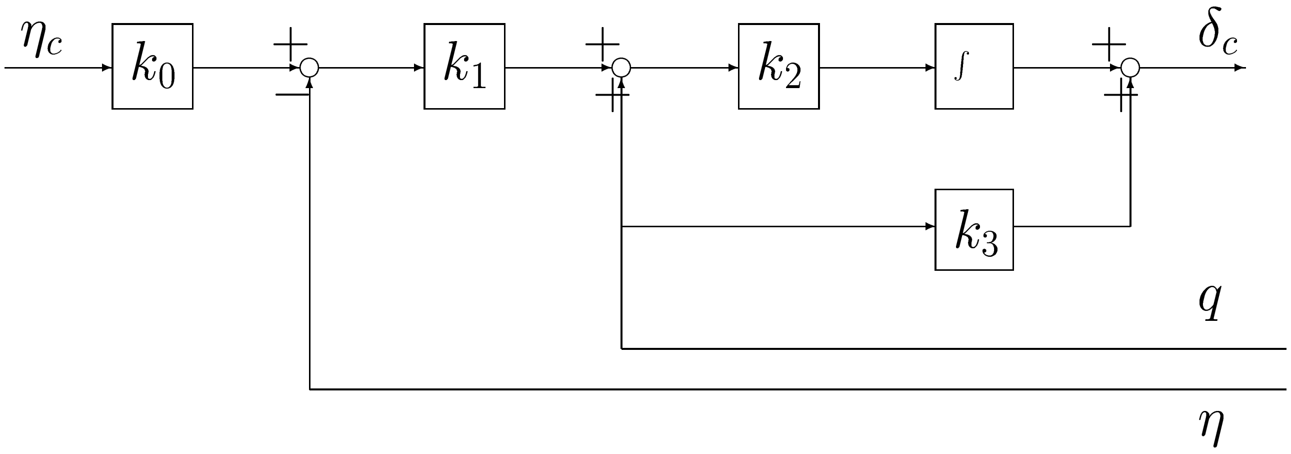
Actionneur (vérin) : $\delta(s) = \dfrac{\omega_a^2}{s^2 + 2\xi_a\omega_a s + \omega_a^2}\delta_c(s)$

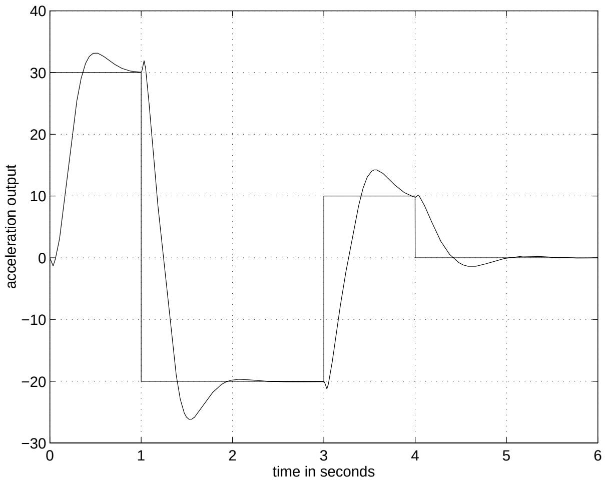
Cahier des charges[2]

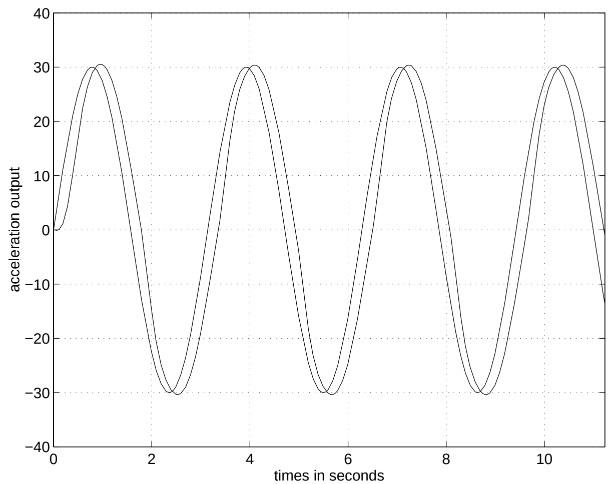
– Poursuite des échelons, temps de réponse $\leq$ 0.35 s, dépassement $\leq$ 20%.
– Poursuite des entrées périodiques.

[2] R. T. Reichert. Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles. *IEEE Control Syst. Mag.*, 12(10) :35–42, 92.

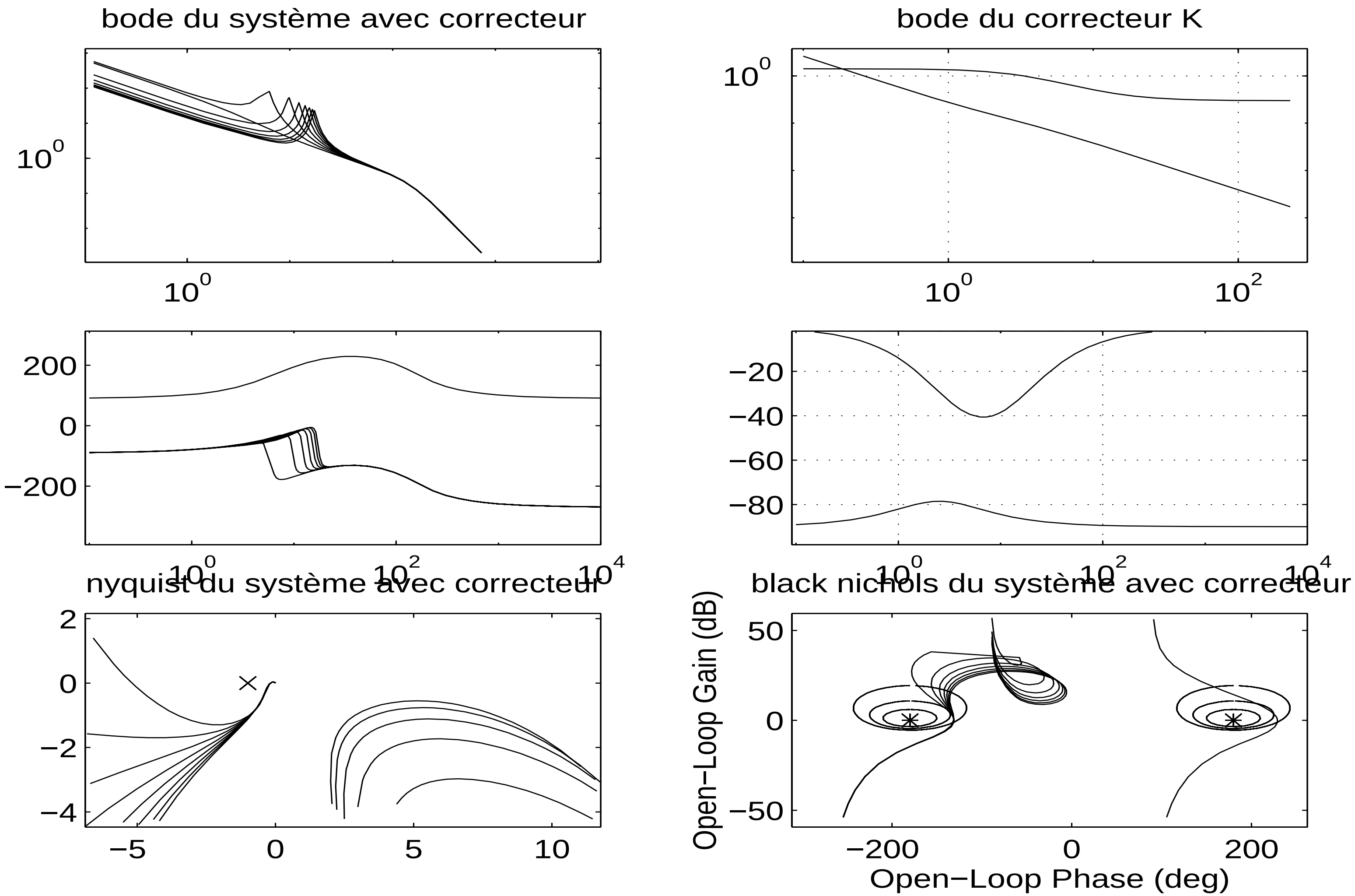
# Un contrôleur PI comme solution



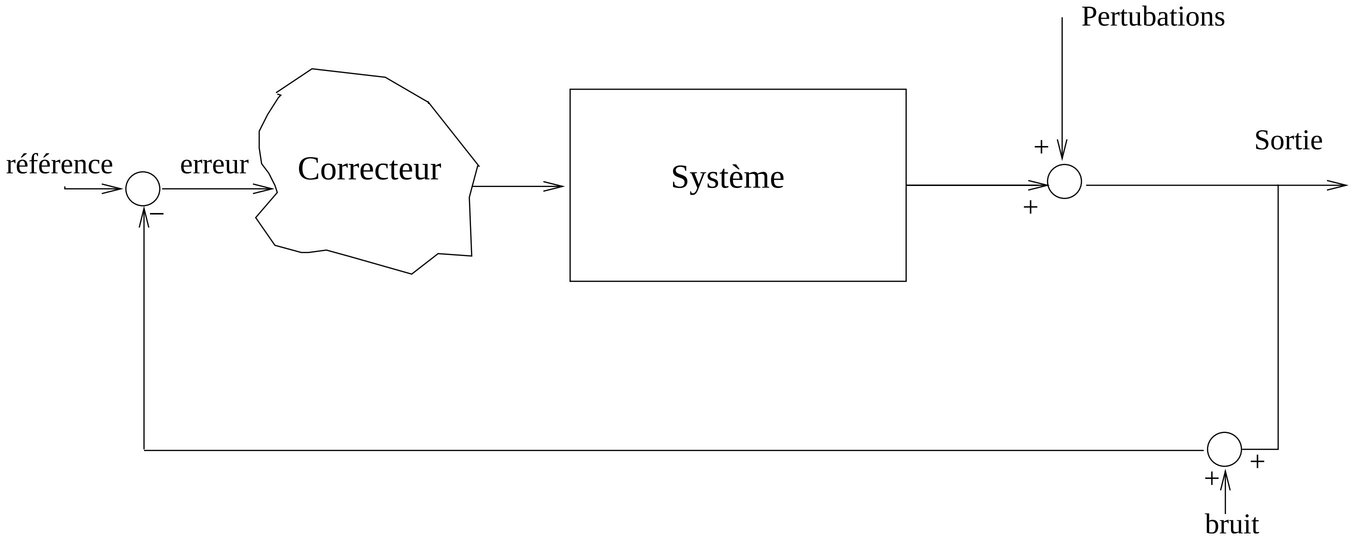



# Base du réglage : l'étude des linéarisations gelées



# Filtrage non linéaire




Un système linéaire du second ordre : $G(s) = \frac{9.09}{(0.1s+1)(2\times10^{-2}s+1)}$

Une sortie bruitée : $y = G(s)u + d$

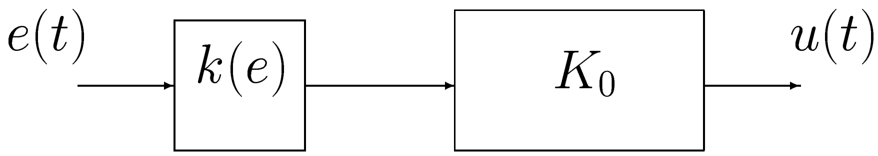
où $d$ un bruit de faible amplitude mais basses fréquences.

---

Cahier des charges :

- Améliorer le compromis réjection de perturbation/bruit.
- Comportement qualitatif proche du cas linéaire (sans la superposition) !

# Un PID non linéaire comme solution



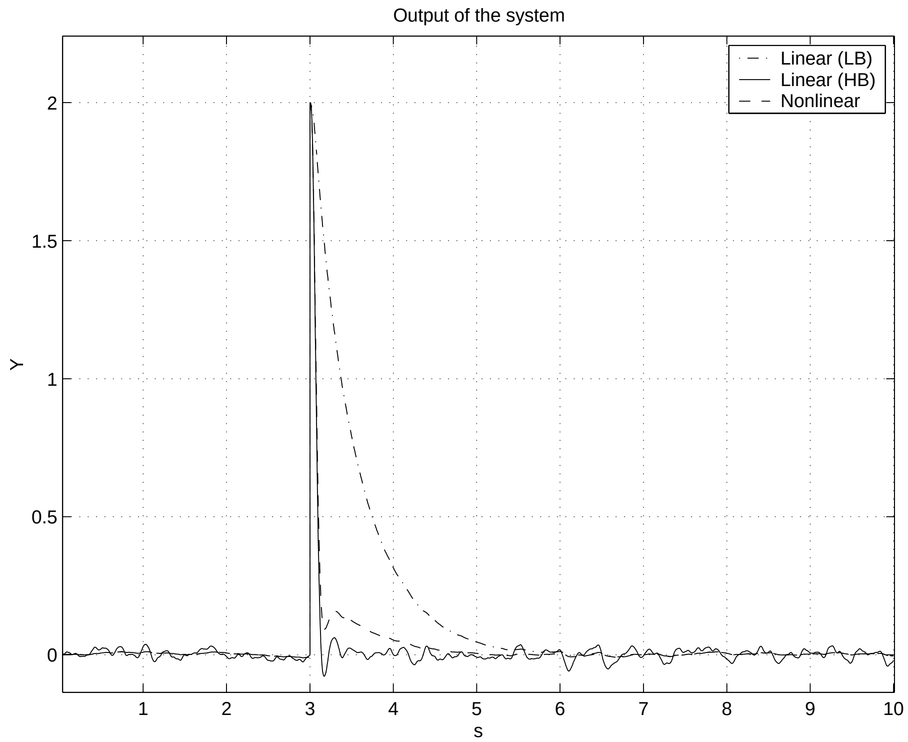

La partie linéaire du contrôleur :

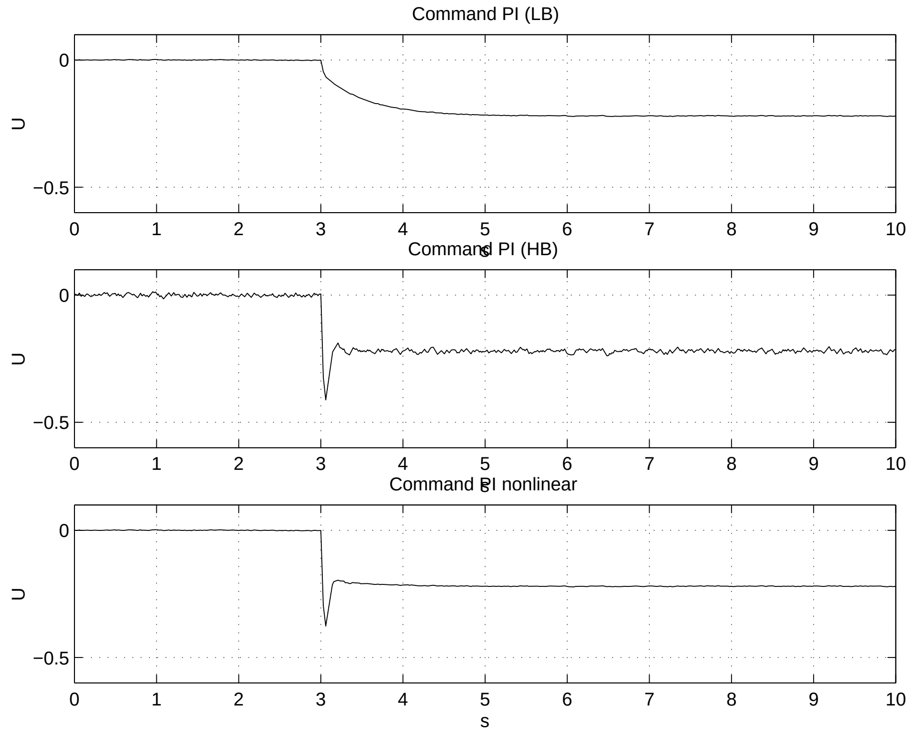
$$K_0 = \frac{25(s+8)}{2s(s+100)^2}$$

et un gain non linéaire, $k(e(t))e(t) = k_1 e(t) - k_2 \mathbf{sat}(e(t))$ où

$$\mathbf{sat}(e(t)) = \begin{cases} -0.2, & e(t) \leq -0.2 \\ e(t), & |e(t)| \leq 0.2 \\ 0.2, & e(t) \geq 0.2. \end{cases}$$

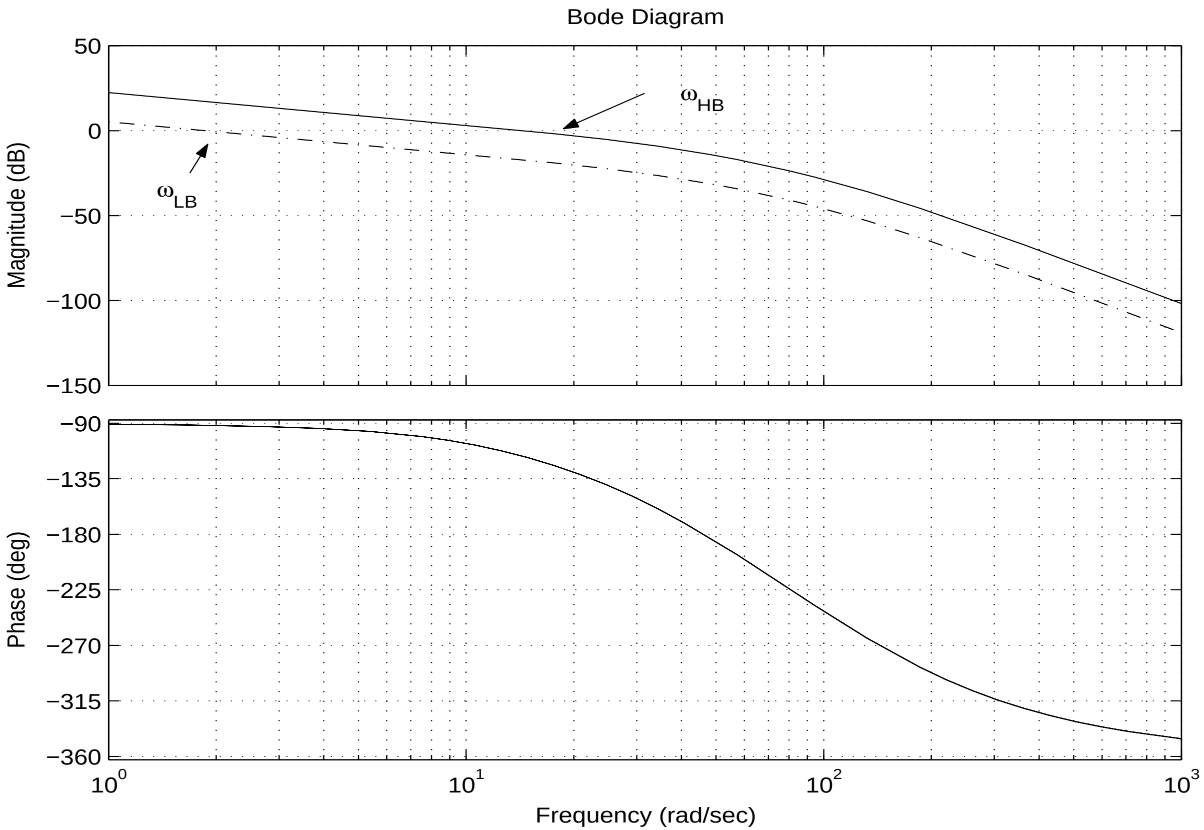
# Fonctionne parfaitement



# Base du réglage : l'étude des linéarisations gelées

L'ensemble des linéarisations gelées vérifient les « canons de l'automatique classique»



LES GAINS VARIABLES COMME TECHNIQUE

DE COMMANDE

DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES ?

# Une approche avant tout heuristique

1/ L'approche gains variables est avant tout **une approche heuristique** permettant d'aborder de façon pratique la commande des systèmes non linéaires.

2/ L'heuristique est fondée sur l'idée qu'il est possible de contraindre le comportement d'un système bouclé non linéaire en contraignant de façon directe ou indirecte ses linéarisations.

3/ L'intérêt des gains variables est avant tout lié à l'existence de nombreux outils permettant non seulement d'analyser mais aussi de commander les systèmes linéaires stationnaires.

# Une approche communément utilisée

Domaines d'application nombreux :

- Aéronautique (avions civiles et militaires, missile, engins spatiaux, etc.) ;
- Automobile (contrôle moteur, amortisseur, ABS, etc.) ;
- Contrôle de procédés physiques etc. ;
- etc.

mais ...

# Deux questions ouvertes

1 – **Peut-on justifier l'approche pragmatique des ingénieurs ?**

2 – **La stabilité exponentielle des linéarisations est-elle nécessaire ?**

| | | |
|---|---|---|
| **Oui aux deux** | $\Rightarrow$ | Les contraintes de **désensibilisation** |

# Un cadre théorique pour les gains variables est nécessaire

W. J. Rugh[3]

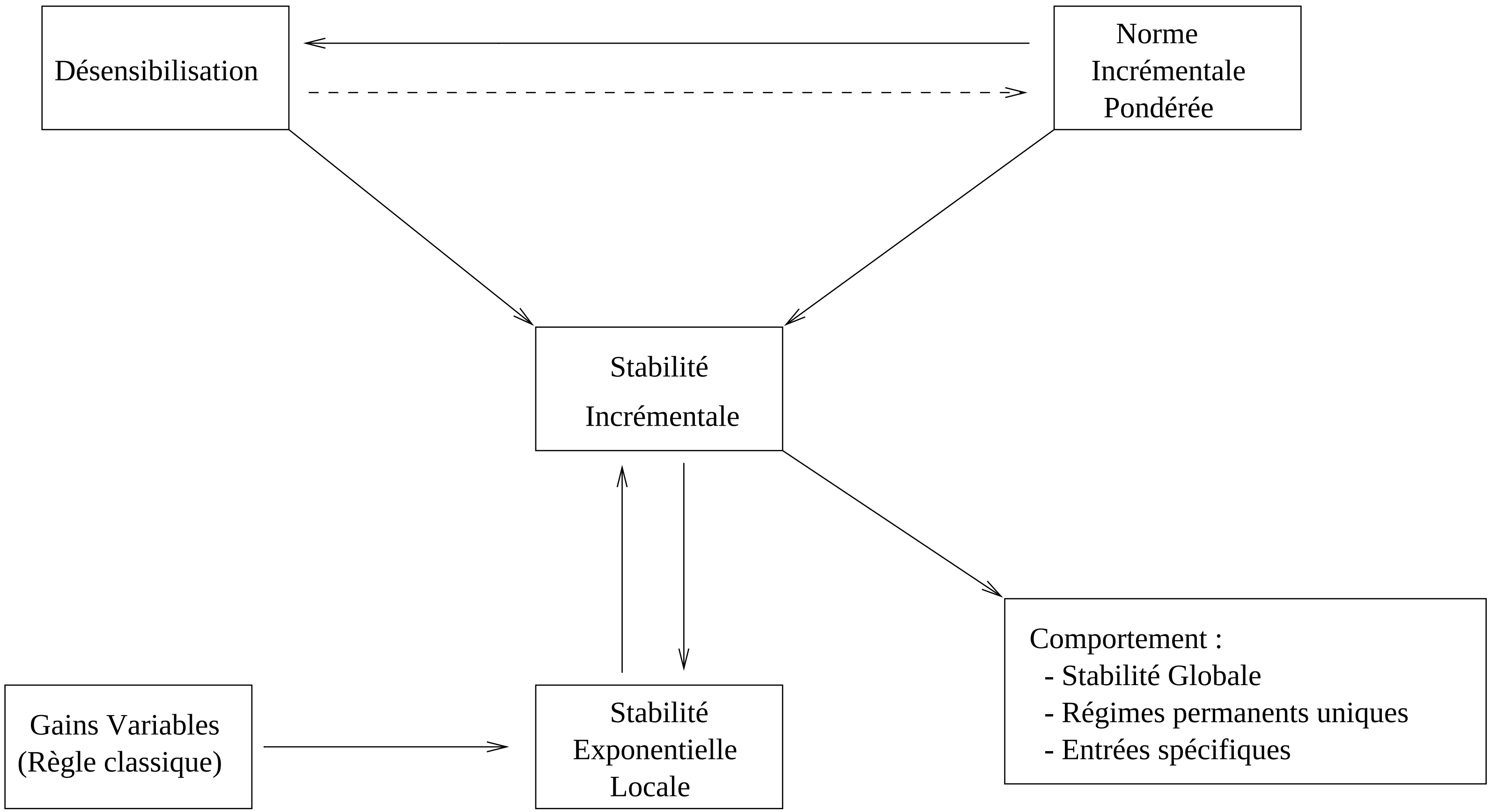
*"What is most striking about gain-scheduling is that, while it is ever more widely used in practice, it has been widely ignored from a theoretical perspective. In particular, it remains unstudied as an explicitly nonlinear control approach. So it seems that gain scheduling is another example of the lamented theory/application gap but in this case application is ahead of theory".*

3 – **Existe-t-il un cadre théorique pour les gains variables ?**

| **Oui** | $\Rightarrow$ | **L'approche incrémentale pondérée** |
|---|---|---|

[3]Rugh W. J. Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control Systems Magazine* 1991 : (**11) :79–84.**

# Les implications présentées dans la suite de l'exposé [4]




[4] V. Fromion and G. Scorletti. A theoritical framework for gain scheduling. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* à paraître 2003.

# NOTATIONS ET DÉFINITIONS

# Espaces de fonctions considérés

**Espace $\mathcal{L}_2$ :**

$$\mathcal{L}_2 = \{f : [t_0, \infty) \to \mathcal{R}^n \mid \ \|f\|_2 < \infty\}.$$

où

$$\|f\|_2 = \sqrt{(\int_{t_0}^{\infty} \|f(\tau)\|^2 d\tau}$$

**Espace étendu associé :**

$$\mathcal{L}_2^e = \{f : [t_0, \infty) \to \mathcal{R}^n \mid \ \|f\|_{2,T} < \infty, \quad (\forall T \in [t_0, \infty))\}.$$

où

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{\int_{t_0}^{T} \|f(\tau)\|^2 d\tau}$$

**Remarque :** rappelons que pour toutes valeurs fixées de $T \in [t_0, \infty)$, on a l'inclusion suivante :

$$\mathcal{L}_\infty([t_0, T]) \subset \mathcal{L}_2([t_0, T])$$

où $\mathcal{L}_\infty([t_0, T]) = \{f : \mathcal{R}^+ \mapsto \mathcal{R}^n \mid \ \sup_{t\in[t_0,T]} \|f(t)\| < \infty \text{ p.p.}\}$.

# Systèmes considérés

Dans la suite, nous supposons que les systèmes sont décrits par :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & h(x(t), u(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases} \tag{2}$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $y(t) \in \mathcal{R}^m$, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ et $u$ et $y$ appartiennent à des sous-ensembles de $\mathcal{L}_2^e$. De plus, on suppose que $f(x_0, 0) = 0$ and $h(x_0, 0) = 0$ et que $f$ et $h$ sont $C^2$ et uniformément Lipschitz continues. Tout cela assure que $\Sigma$ est bien-posé et non biaisé.

**Définition.** $\Sigma$ est $\mathcal{L}_2$ gain stable s'il existe $\gamma \geq 0$ telle que pour tout $u \in \mathcal{L}_2$, on ait $\|\Sigma(u)\|_2 \leq \gamma \|u\|_2$.

**Définition.** $\Sigma$ est incrémentalement stable sur $\mathcal{L}_2$ s'il existe $\eta \geq 0$ telle que pour tout $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_2$, on ait $\|\Sigma(u_1) - \Sigma(u_2)\|_2 \leq \eta \|u_1 - u_2\|_2$.

# De $\mathcal{L}_2$ à ... $\mathcal{L}_2^e$

**Théorème** [Sandberg,Willems]
Soit $\Sigma$ un opérateur défini de $\mathcal{L}_2^e$ dans $\mathcal{L}_2^e$ et $\eta$ une constante positive. On a

$$\|\Sigma(u_1) - \Sigma(u_2)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \eta \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{L}_2}$$

**si et seulement si** pour tout $T \in [t_0, \infty)$, on a

$$\|\Sigma(u_1) - \Sigma(u_2)\|_{\mathcal{L}_{2,T}} \leq \eta \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{L}_{2,T}}$$

$\Rightarrow$ Une propriété entrée/sortie qui est satisfaite sur $\mathcal{L}_2$ l'est aussi sur $\mathcal{L}_2^e$.

# Dérivée de Gâteaux d'un opérateur

**Définition.** $D\Sigma_G[u_r]$ est la dérivée de Gâteaux de $\Sigma$, un opérateur défini de $\mathcal{L}_2$ dans $\mathcal{L}_2$ au point $u_r \in \mathcal{L}_2$ si c'est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{L}_2$ dans $\mathcal{L}_2$ et si pour tout $h \in \mathcal{L}_2$ , on a

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left\| \frac{\Sigma(u_r + \lambda h) - \Sigma(u_r)}{\lambda} - D\Sigma_G[u_r](h) \right\|_2 = 0.$$

Cette définition est en fait très restrictive puisque un système linéaire instable n'a pas de dérivée de Gâteaux.

**Définition.** $D\Sigma_G[u_r]$ défini de $\mathcal{L}_2^e$ dans $\mathcal{L}_2^e$ est la dérivée de Gâteaux au point $u_r$ d'un opérateur causal $\Sigma$, défini de $\mathcal{L}_2^e$ dans $\mathcal{L}_2^e$, s'il est linéaire et continu sur $\mathcal{L}_2^e$ et si pour tout $T \in [t_0, \infty)$, $P_T D\Sigma_G[u_r]$ est la dérivée de Gâteaux de $P_T\Sigma$ au point $P_T u_r$.

# Dérivée de Gâteaux de $\Sigma$

**Proposition**
Soit $\Sigma$ un opérateur défini de $\mathcal{L}_2^e$ dans $\mathcal{L}_2^e$ et supposons que $f$ et $g$ soient $C^1$ et uniformément Lipschitz continues. Alors pour tout $u_r \in \mathcal{L}_2^e$, $\Sigma$ a une dérivée de Gâteaux qui satisfait le système différentiel suivant :

$$\bar{y} = D\Sigma_G[u_r](\bar{u}) \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) & = & A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) & = & C(t)\bar{x}(t) + D(t)\bar{u}(t) \\ \bar{x}(t_0) & = & 0 \end{cases}$$

avec $A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_r(t), u_r(t))$, $B(t) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_r(t), u_r(t))$, $C(t) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(x_r(t), u_r(t))$ et $D(t) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(x_r(t), u_r(t))$ et où $x_r(t) = \phi(t, t_0, x_0, u_r)$ est la solution du système (2) pour l'entrée $u_r(t)$ et $x(t_0) = x_0$.

# UN RÉSULTAT CLÉ

# POUR

# LES GAINS VARIABLES

# Le théorème de la moyenne sur $\mathcal{L}_2^e$

Soit $\mathcal{U}^e$ un sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathcal{L}_2^e$, *i.e.* si $u_1$ et $u_2 \in \mathcal{U}^e$, alors $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in \mathcal{U}^e$ pour tout $\lambda \in (0,1)$.

**Théorème de la moyenne en norme**
Supposons que $\Sigma$, un opérateur défini de $\mathcal{L}_2^e$ dans $\mathcal{L}_2^e$, ait une dérivée de Gâteaux en chaque point $u_r$ de $\mathcal{L}_2^e$. Alors il existe une constante finie $\eta$ telle que pour tout $T \geq t_0$ et pour tout $u_r, h \in \mathcal{U}^e$, on ait :

$$\|D\Sigma_G[u_r](h)\|_{2,T} \leq \eta \|h\|_{2,T}$$

**si et seulement si**

$$\|\Sigma(u_1) - \Sigma(u_2)\|_{2,T} \leq \eta \|u_1 - u_2\|_{2,T}$$

pour tout $T \geq t_0$ et tout $u_1$ et $u_2$ appartenant à $\mathcal{U}^e$.

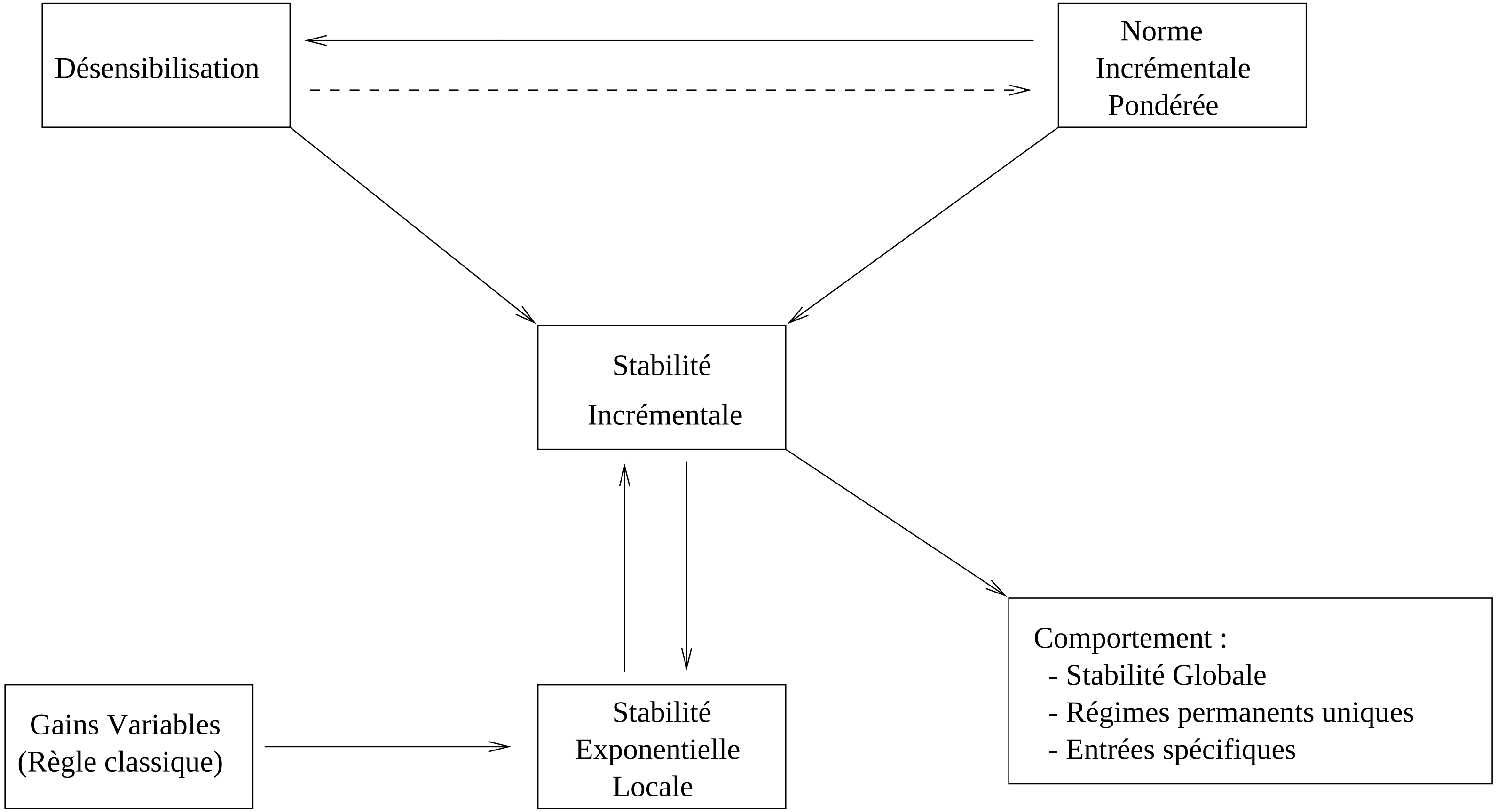
# De la stabilité incrémentale à la stabilité des linéarisations

**Théorème**

Soit $\Sigma$, un opérateur défini de $\mathcal{U}^e$ dans $\mathcal{L}_2^e$ où $\mathcal{U}^e$ est un sous ensemble ouvert et convexe de $\mathcal{L}_2^e$. Si $\Sigma$ est Gâteaux différentiable sur $\mathcal{U}_2^e$ et que la représentation d'état de chaque linéarisation de $\Sigma$ est minimale alors il existe une constante finie $\eta$ telle que pour tout $T \geq t_0$ et tout $u_1$ and $u_2$ appartenant à $\mathcal{U}^e$, on ait

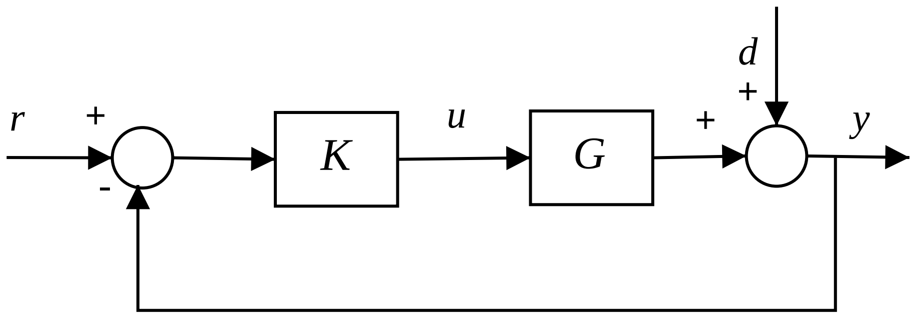
$$\|\Sigma(u_1) - \Sigma(u_2)\|_{2,T} \leq \eta \|u_1 - u_2\|_{2,T}$$

**si et seulement si** toutes les linéarisations sont exponentiellement stables.


Désensibilisation
Norme
Incrémentale
Pondérée
Stabilité
Incrémentale
Comportement :
- Stabilité Globale
- Régimes permanents uniques
- Entrées spécifiques
Gains Variables
(Règle classique)
Stabilité
Exponentielle
Locale

# LA DÉSENSIBILISATION COMME JUSTIFICATION

# Objectif de désensibilisation : rappels (I)




Boucle fermée perturbée

L'effet d'une perturbation de sortie sur le système en boucle fermée est donné par :

$$\delta H_{yr}(r,d) = \overbrace{d + GK(I+GK)^{-1}(r-d)}^{\text{Sortie du système perturbé}} - \overbrace{GK(I+GK)^{-1}(r)}^{\text{Sortie du système non perturbé}}$$

ou encore par

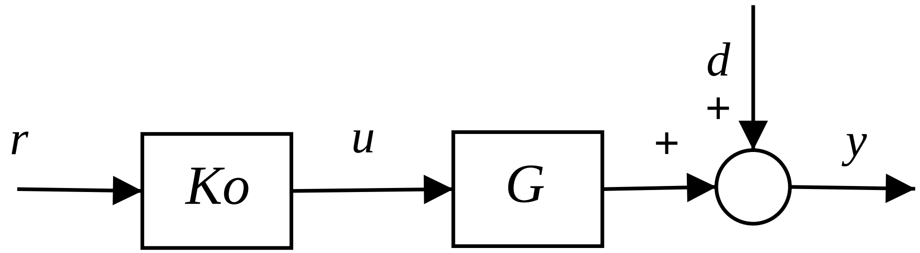
$$\delta H_{yr}(r,d) = S(r-d) - S(r)$$

où $S = (I+GK)^{-1}$.

# Objectif de désensibilisation : rappels (II)

Associons au système bouclé, un système en boucle ouverte équivalent, $Ho_{yr}$, où le correcteur en boucle ouverte $K_o = K(I+GK)^{-1}$ est tel que

$$Ho_{yr}(r,0) \triangleq H_{yr}(r,0)$$




Boucle ouverte équivalente

En boucle ouverte, l'effet de la perturbation sur la sortie du système est égal à

$$\begin{aligned} \delta Ho_{yr}(r,d) &= \overbrace{GK(I+GK)^{-1}(r)+d}^{\text{Sortie du système perturbé}} - \overbrace{GK(I+GK)^{-1}(r)}^{\text{Sortie du système non perturbé}} \\ &= d. \end{aligned}$$

# Causalité stricte et désensibilisation

La stratégie en boucle fermée est justifiée s'il existe $\epsilon << 1$ telle que

$$\|\delta H_{yr}(r,d)\|_{2,T} \leq \epsilon \|\delta Ho_{yr}(r,d)\|_{2,T},$$

ou de façon équivalente :

$$\|S(r-d) - S(r)\|_{2,T} \leq \epsilon \|d\|_{2,T}.$$

Mais, comme dans le cas linéaire, on a :

**Théorème**
Si l'opérateur de la boucle ouverte, $GK$, est strictement causal alors $\|S\|_\Delta \geq 1$.

$\Rightarrow$ La désensibilisation ne peut être réalisée que sur un sous ensemble de $\mathcal{L}_2^e$ !

# La désensibilisation contraint fortement les linéarisations

**Proposition**
Supposons que la fonction de sensibilité, *i.e.* $S = (I + GK)^{-1}$, soit Gâteaux différentiable sur $\mathcal{L}_2^e$ et que l'ensemble des perturbations agissant sur le système, $P^e$, soit un ensemble convexe qui contienne la perturbation nulle. Alors, la désensibilisation est obtenue avec le niveau $\epsilon > 0$, *i.e* pour tout $r \in \mathcal{L}_2^e$ et tout $d \in P^e$, on a

$$\|\delta H_{yr}(r, d)\|_{2,T} \leq \epsilon \|\delta Ho_{yr}(r, d)\|_{2,T}$$

**si et seulement si** pour tout $u_r \in \mathcal{L}_2^e$ et tout $w \in P^e$, on a

$$\|DS_G[u_r](w)\|_{2,T} \leq \epsilon \|w\|_{2,T}$$

$\Rightarrow$ Les linéarisations doivent satisfaire des contraintes de désensibilisation sur $P^e$.

# La désensibilisation implique la stabilité exponentielle

**Fait.** La dégradation induite par le feedback pour les signaux n'appartenant pas à $P^e$ est acceptable si $S$ est incrémentalement bornée, ce qui implique :

**Proposition**
Supposons que la fonction de sensibilité, *i.e.* $S = (I + GK)^{-1}$, soit Gâteaux différentiable sur $\mathcal{L}_2^e$ alors la désensibilisation ne peut être obtenue que si la réalisation minimale de chacune de ses linéarisations est exponentiellement stable.

# Désensibilisation et linéarisations stationnaires

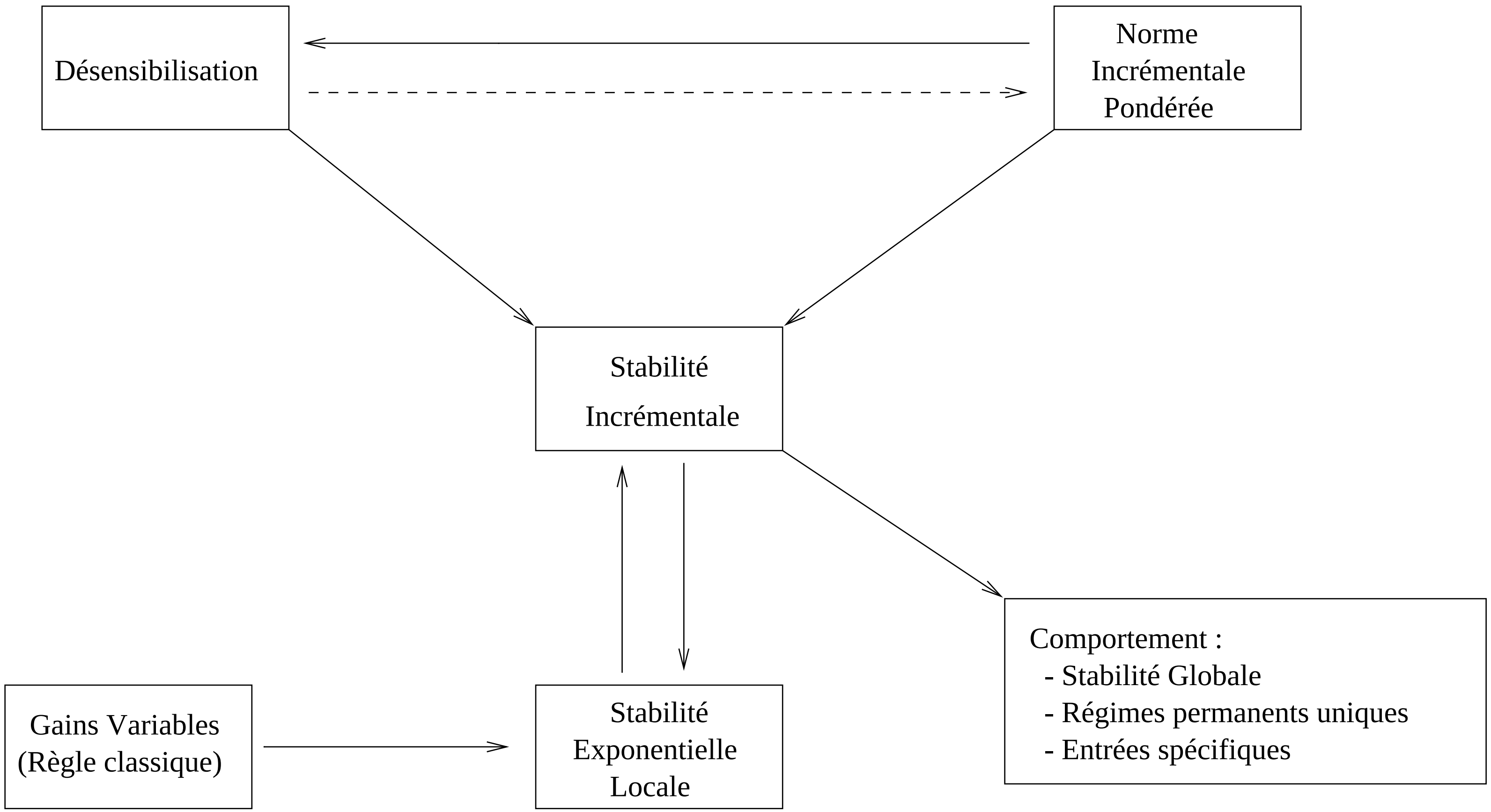
**Proposition**
Supposons que la fonction de sensibilité, *i.e.* $S = (I + GK)^{-1}$, soit Gâteaux différentiable sur $\mathcal{L}_2^e$, et que $x_e$ soit un point d'équilibre de $S$ associé à une entrée constante $u_e$. Si $x_e$ est atteignable depuis la condition initiale de $S$ alors la désensibilisation ne peut être obtenue que si la linéarisation stationnaire de $\Sigma$, donnée par

$$D\Sigma_S(u_e) \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \\ \bar{x}(t_0) &= 0 \end{cases}$$

avec $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$, $C = \frac{\partial h}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $D = \frac{\partial h}{\partial u}(x_e, u_e)$, a une norme $H_\infty$ finie (un $\mathcal{L}_2$ gain fini), *i.e.* il existe une constante finie $\eta$ telle que

$$\|DS_G[u_e]\|_i = \|DS_G[u_e]\|_\infty \leq \eta.$$

$\Rightarrow$ Pseudo linéarisation !


Désensibilisation
Norme Incrémentale Pondérée
Stabilité Incrémentale
Gains Variables (Règle classique)
Stabilité Exponentielle Locale
Comportement :
- Stabilité Globale
- Régimes permanents uniques
- Entrées spécifiques

# UN CADRE MATHÉMATIQUE

# POUR

# LES GAINS VARIABLES

# Au delà de la désensibilisation

On cherche à garantir

- des propriétés qualitatives :
  - existence d'un unique régime permanent pour chaque entrée.
  - existence de régimes permanents spécifiques (constant, périodique, etc.).
  - stabilité au sens de Lyapunov des trajectoires non perturbées du système.
  - etc.
- des propriétés quantitatives :
  - réjection des perturbations,
  - poursuite de signaux de référence,
  - robustesse vis à vis des incertitudes de modèle,
  - etc.

# L’APPROCHE INCRÉMENTALE PONDÉRÉE
# COMME
# CADRE MATHÉMATIQUE

# L'approche incrémentale pondérée : rappels

Les sources de cette approche[5] se trouvent dans les problèmes ouverts par l'extension de l'approche $H_\infty$ au cadre non linéaire.

L'approche incrémentale pondérée est utile pour analyser les propriétés des systèmes bouclés non linéaires :

- **Qualitativement**, les systèmes incrémentalement stables possèdent de nombreuses et utiles propriétés : régimes permanents uniques, stabilité au sens de Lyapunov de l'ensemble des trajectoires, etc.

- **Quantitativement**, il est possible d'analyser la robustesse et la performance des systèmes bouclés non linéaires.

[5] Fromion V., Monaco S., and Normand-Cyrot D. The weighting incremental norm approach : from linear to nonlinear $H_\infty$ control. *Automatica* 2001 ;**37** :1585–1592.

# Ramener la désensibilisation à un critère incrémental

A l'image de l'approche $H_\infty$, on fait l'hypothèse qu'il est possible de décrire l'ensemble des perturbations possibles comme :

$$P^e = \{d \in \mathcal{L}_2^e \| W_p^{-1}(d) - W_p^{-1}(w+d)\| \leq \epsilon \|d\| \text{ pour tout } w \in \mathcal{L}_2^e\}$$

où $W_p$ et $W_p^{-1}$ sont deux opérateurs causaux et incrémentalement stables.

**Proposition**
Si $\|SW_p\|_\Delta \leq 1$ où $S = (I+GK)^{-1}$ alors la désensibilisation est obtenue avec le niveau $\epsilon > 0$, *i.e.* pour tout $d \in P^e \subset \mathcal{L}_2^e$ et tout $r \in \mathcal{L}_2^e$, on a

$$\|\delta H_{yr}(r,d)\|_{2,T} \leq \epsilon \|\delta Ho_{yr}(r,d)\|_{2,T}$$

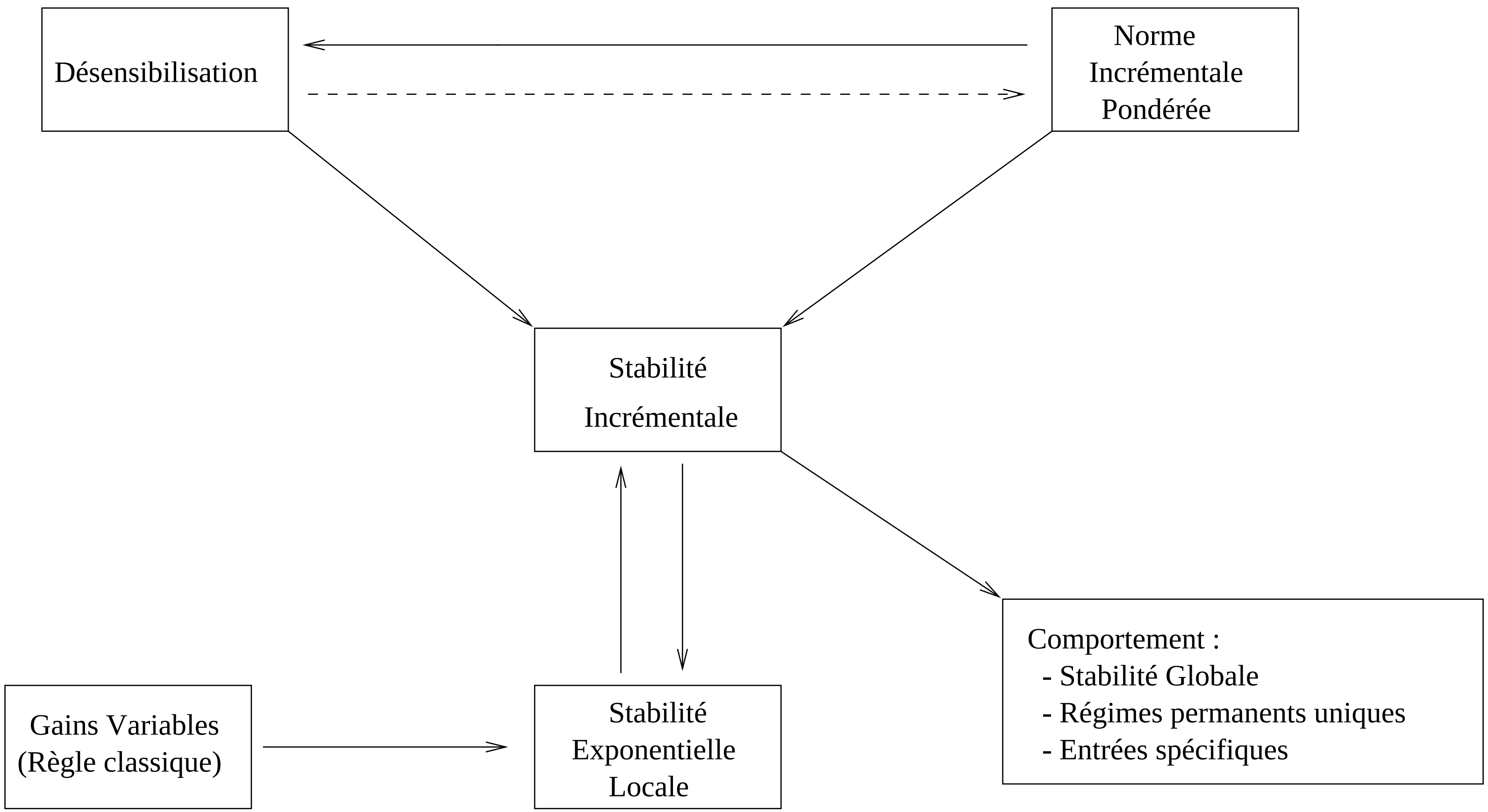
# Norme incrémentale pondérée et l'approche $H_\infty$

Supposons que $M_{zw} = W_o H W_i$ décrit un système bouclé augmenté des pondérations, et que $W_i$ et $W_o$ sont des pondérations permettant de représenter les objectifs de performance et de robustesse.

**Proposition**
Si le système augmenté, $M_{zw} = W_o H W_i$, est Gâteaux différentiable sur $\mathcal{L}_2^e$ alors sa norme incrémentale est inférieure 1, *i.e.* $\|M_{zw}\|_\Delta \leq 1$, **si et seulement** le $\mathcal{L}_2$ gain de toutes ses linéarisations est inférieur à 1, *i.e.*

$$\|DW_{oG}[H(W_i(w_0))]DH_G[W_i(w_0)]DW_{iG}[w_0]\|_i \leq 1 \ \ \forall w_0 \in \mathcal{L}_2^e.$$

$\Rightarrow$ Connection directe avec le travail de Shamma
$\Rightarrow$ Pour un point d'équilibre, cela implique que la linéarisation (stationnaire) du système satisfait un critère $H_\infty$ pondéré où les pondérations correspondent à la linéarisation des pondérations en ce point !


Désensibilisation
Norme
Incrémentale
Pondérée
Stabilité
Incrémentale
Gains Variables
(Règle classique)
Stabilité
Exponentielle
Locale
Comportement :
- Stabilité Globale
- Régimes permanents uniques
- Entrées spécifiques

# PREMIÈRE CONSÉQUENCE DE CE NOUVEAU CADRE

# De la stabilité locale à la stabilité globale

Supposons que les linéarisations associées à l'ensemble de toutes les entrées appartenant à $\mathcal{U}^e$ (sous ensemble ouvert et convexe de $\mathcal{L}_2^e$) soient exponentiellement stables alors le système non linéaire possède[6] :

- des régimes asymptotiques uniques pour toutes les entrées dans $\mathcal{U}^e$ ;
- des régimes permanents constants pour les entrées constantes ;
- des régimes permanents périodiques pour les entrées périodique ;
- des trajectoires non perturbées uniformément asymptotiquement stables[7] ;

[6]Fromion V. and Scorletti G. Characterization of nonlinear systems by their linearizations. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control* 2002.
[7]Il faut ajouter des hypothèses quant à l'atteignabilité de l'espace d'état du système depuis la condition initiale.

# RÉFERENCES

# Gains Variables


**Articles généraux**

**V. Fromion and G. Scorletti.** A theoritical framework for gain scheduling. *IJRNC* à paraître 2003

**Rugh W. J. and Shamma J. S.** Research on Gain Scheduling. *Automatica*, 36 :1401–1425, 2000.

**Leith D. J. and Leithead W. E.** Survey of gain-scheduling analysis and design. *Inter. J. of Control*, 73 :1001–1025, 2000.

**Rugh W. J.** Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control Systems Magazine*, 11 :79–84, 1991.

**Shamma J. S.** *Analysis and design of gain scheduled control systems.* PhD thesis, M.I.T., Dept. of Mechanical Engineering, 1988.

**Des aspects plus pratiques**

**Astrom K. J. and Wittenmark B.** *Adaptive Control 2nd edition*, Addison Wesley, 1995.

**Hyde R. A. and Glover K.** The application of scheduled $H_\infty$ controllers to a VSTOL aircraft. *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, 38 :1021–1039, 1993.

# Désensibilisation, etc..


**En linéaire (classique) :**

**Black H. S.** Stabilized feedback amplifiers.*Bell System Technical Journal*, 13 :1–18, 1934.

**Bode H. W.** *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.* Van Nostrand : New York, 1945.

**Horowitz I. M.** *Synthesis of Feedback Systems.* Academic Press : New York, 1963.

**Cruz J. B. and Perkins W. R.** A new approach to sensitivity problem in multivariable feedback system design. *IEEE Trans. on Auto. Cont.* 216–223, 1964.

**Néo-classique :**

**Safonov M.G., Laub A.J. and, Hartmann G.L.** Feedback properties of multivariable systems : the role and use of the return difference matrix. *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, 26 :47–65, 1981.

**Doyle J.C. and Stein G.** Multivariable feedback design : concepts for a classical / modern synthesis. *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, 26 :4–16, 1981.

**Zames G.** Feedback and optimal sensitivity : model reference transformations, mutiplicative seminorms, and approximate inverse.*IEEE Trans. on Auto. Cont.*, 26 :301–320, 1981.

**En non linéaire :**

**Kreindler E.** On the definition and application of sensitivity function. *Journal of the Franklin Institute*, 285 :26–36, 1968.

**Desoer C. A. and Wang Y. T.** Foundations of feedback theory for nonlinear dynamical systems. *IEEE Trans. on Cir. and Syst*, 27 :104–123,1980.