



**UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE**  
**UFR de SCIENCES CAEN**

# Introduction à l'analyse des systèmes non linéaires

## Méthodes du premier harmonique

Cours EL401T2

Master 1A Mention EEA Parcours AEII

Gérard Scorletti, Guy Binet et Eric Pigeon

Maîtres de conférences à l'Université de Caen Basse Normandie

GREYC AUTOMATIQUE

6 bd du Maréchal Juin, F14050 Caen cedex

Tel : 02 31 45 27 12

e-mail : {scorletti,binet,pigeon}@greyc.ensicaen.fr

©Gérard Scorletti 2006

Page WEB : [http://www.greyc.ensicaen.fr/EquipeAuto/Gerard\\_S/Maitrise\\_NL.html](http://www.greyc.ensicaen.fr/EquipeAuto/Gerard_S/Maitrise_NL.html)

20 juin 2006

## **Remerciements**

Je remercie tous les étudiants de maîtrise EEA de l'année 2002-2003 qui m'ont aidé à corriger les coquilles de la première version de ce document.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Remerciements</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1 Introduction aux systèmes non linéaires (suite)</b>                        | <b>5</b>  |
| 1.1 Comportement oscillant en régime libre et en régime forcé . . . . .         | 5         |
| 1.1.1 Oscillations en régime libre . . . . .                                    | 6         |
| 1.1.2 Comportement en régime forcé : réponse à une entrée sinusoïdale . . . . . | 7         |
| 1.2 Systèmes non linéaires à non linéarité séparable . . . . .                  | 9         |
| <b>2 Introduction à l'analyse par la méthode du premier harmonique</b>          | <b>11</b> |
| 2.1 Analyse du régime libre des systèmes à non linéarité séparable . . . . .    | 11        |
| 2.1.1 Principe de la méthode du premier harmonique . . . . .                    | 11        |
| 2.1.2 Analyse du comportement du schéma-bloc équivalent . . . . .               | 13        |
| 2.1.3 Détermination du gain complexe équivalent $N(\epsilon_1)$ . . . . .       | 24        |
| 2.2 Analyse du régime forcé des systèmes à non linéarité séparable . . . . .    | 28        |
| <b>3 Annexe</b>   | <b>37</b> |
| 3.1 Tracé asymptotique de diagrammes de Bode . . . . .                          | 37        |
| 3.1.1 Exemple . . . . .   | 40        |
| 3.1.2 Exercices . . . . .   | 41        |
| 3.1.3 Solution des exercices . . . . .  | 42        |



# Chapitre 1

## Introduction aux systèmes non linéaires (suite)

Au premier semestre, les systèmes non linéaires définis par une représentation d'état ont été introduits. La notion de point d'équilibre a été définie et il a été vu comment étudier les propriétés de stabilité d'un système non linéaire autour d'un de ses points d'équilibre en analysant un système linéaire temps invariant particulier appelé linéarisation autour du point d'équilibre. Dans ce cours, nous allons nous concentrer sur une classe particulière de systèmes non linéaires appelés systèmes à non linéarité séparable. Nous allons voir comment il est possible de prévoir l'apparition (ou non) d'oscillations au sein de ces systèmes et comment il est possible de déterminer leur comportement vis-à-vis de signaux d'entrée sinusoïdaux.

Dans ce chapitre, après avoir rappelé ce que sont les systèmes non linéaires et les systèmes linéaires temps invariants, nous observerons les similitudes et différences de comportement. Le chapitre se clôt sur la définition des systèmes à non linéarité séparable.

**Rappels** Un système non linéaire peut être défini par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), e(t)) \\ y(t) = g(x(t), e(t)) \end{cases}$$

où

- $e(t)$  est le signal d'entrée du système ;
- $y(t)$  est le signal de sortie du système ;
- $x(t)$  est le vecteur d'état du système de longueur  $n$

et où

- $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans  $\mathbb{R}^n$  ;
- $g$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Un système est dit linéaire temps invariant si

$$\begin{cases} f(x(t), e(t)) = Ax(t) + Be(t) \\ g(x(t), e(t)) = Cx(t) + De(t) \end{cases}$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}$ .

### 1.1 Comportement oscillant en régime libre et en régime forcé

L'étude en régime libre consiste à prévoir l'évolution temporelle du système (c'est-à-dire  $x(t)$  pour  $t \geq 0$ ) pour une condition initiale  $x(0) \neq 0$  et pour un signal d'entrée  $e$  nul ( $\forall t \geq 0$ ),

$e(t) = 0$ ). L'étude en régime forcé consiste à prévoir l'évolution temporelle du système (c'est-à-dire  $x(t)$  pour  $t \geq 0$ ) pour la condition initiale  $x(0) = 0$  et pour un signal d'entrée  $e$  sinusoïdal de pulsation propre donnée.

### 1.1.1 Oscillations en régime libre

Dans le cas d'un système linéaire temps invariant, pour une condition initiale  $x(0) \neq 0$ , on ne peut avoir, après un régime transitoire, comme oscillations que des oscillations sinusoïdales de pulsations bien déterminées. L'amplitude de ces oscillations va dépendre de la condition initiale  $x(0) \neq 0$ .

La présence d'oscillations peut se tester à l'aide des valeurs propres de la matrice  $A$  : on a oscillations si la matrice  $A$  présente au moins deux valeurs propres sur l'axe imaginaire en  $\pm j\omega_0$  avec les autres valeurs propres à partie réelle strictement négative. Dans ce cas-là, les composantes de  $x(t)$  sont des sinusoïdes de pulsation propre  $\omega_0$  et dont l'amplitude dépend de la condition initiale.

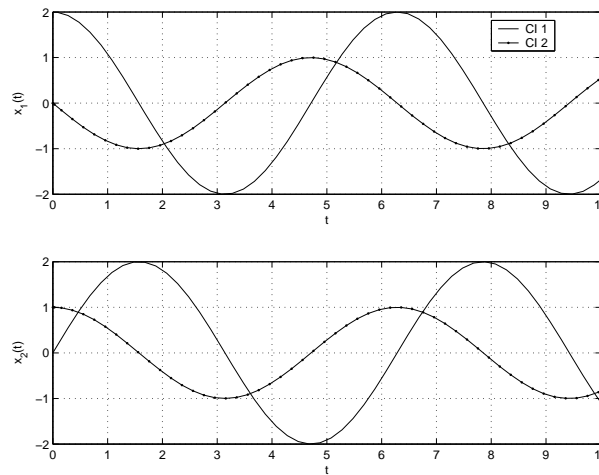


FIG. 1.1 –  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour deux conditions initiales

**Exemple** La matrice

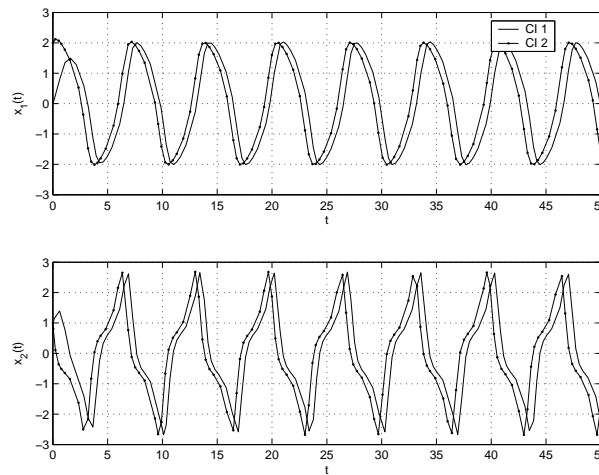
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a deux valeurs propres en  $\pm j$ . Le système linéaire temps invariant :  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  présente donc des oscillations (sinusoïdales) de pulsation 1 rad/s. La figure 1.1 représente l'évolution de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour deux conditions initiales :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On constate que si dans les deux cas, les signaux sont bien sinusoïdaux de même pulsation, ils présentent des déphasages et des amplitudes différentes.

Dans le cas d'un système non linéaire (qui n'est pas linéaire stationnaire), après un régime transitoire, il est possible d'avoir des oscillations qui ne sont pas sinusoïdales et dont les caractéristiques (pulsations propres et amplitudes) ne varient pas en fonction de la condition initiale.

FIG. 1.2 –  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour deux conditions initiales

**Exemple** Soit le système non linéaire :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ (1 - x_1(t)^2)x_2(t) - x_1(t) \end{bmatrix}$$

Sur la figure 1.2, sont représentées l'évolution de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour deux conditions initiales :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pour ces deux conditions initiales, ce système présente des oscillations :

1. qui ne sont pas sinusoïdales ;
2. qui sont de même période ;
3. qui sont de même amplitude.

Lorsque l'on veut mettre au point un oscillateur (par exemple en Electronique), un système non linéaire qui n'est pas linéaire temps invariant possède un avantage indéniable sur un système linéaire temps invariant : il est possible pour différentes conditions initiales d'obtenir des oscillations de même amplitude.

Pour prévoir les oscillations d'un système non linéaire, dans le cas d'un système à non linéarité séparable, une méthode sera présentée dans la section 2.1.

### 1.1.2 Comportement en régime forcé : réponse à une entrée sinusoïdale

Dans le cas d'un système linéaire temps invariant (stable), pour un signal d'entrée  $e(t)$  sinusoïdal, après un régime transitoire, le signal  $y(t)$  est un signal sinusoïdal de même pulsation. Dans le cas d'un système non linéaire qui n'est pas un système linéaire temps invariant, le signal de sortie obtenu n'est pas forcément sinusoïdal et son allure peut dépendre, par exemple, de l'amplitude du signal d'entrée  $e(t)$ .

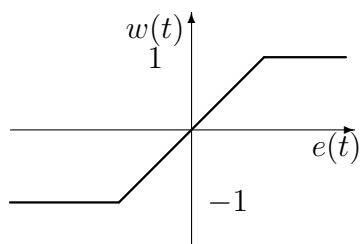
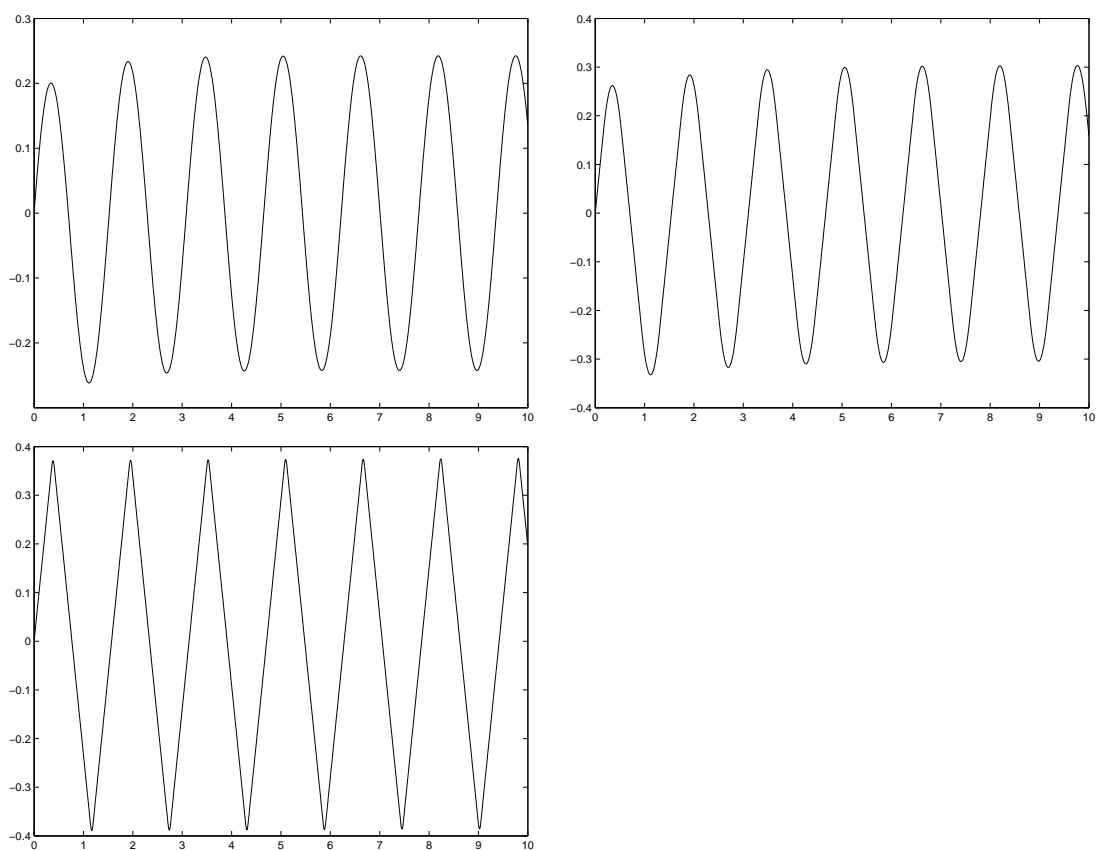


FIG. 1.3 – Saturation

FIG. 1.4 – Réponse harmonique d'un système linéaire,  $A = 1$  (haut gauche),  $A = 1.5$  (haut droite),  $A = 10$  (bas gauche)



**Exemple**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{sat}(e(t) - x(t)) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

avec **sat** la fonction définie par la caractéristique représentée figure 1.3. Pour des entrées  $e(t) = A \sin(\omega t)$  d'amplitude inférieure à 1, la sortie  $y(t)$  est sinusoïdale. Par contre, pour des entrées sinusoïdales d'amplitude plus importante (par exemple  $A = 10$ ) même si la sortie  $y(t)$  est périodique, elle n'est pas sinusoïdale (voir figure 1.4). De plus, la forme de  $y(t)$  va dépendre de l'amplitude  $A$ .

Dans le cas de systèmes non linéaires à non linéarité séparable, une méthode de prévision du comportement sera présentée dans la section 2.2.

**1.2 Systèmes non linéaires à non linéarité séparable**

Soit la fonction de transfert  $G(p) = C(pI_n - A)^{-1}B$ , avec  $\mathbf{dim}C = 1 \times n$  et  $\mathbf{dim}B = n \times 1$  et  $\Phi$  une fonction non linéaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Un système avec non linéarité séparable est défini par le schéma bloc 1.5.

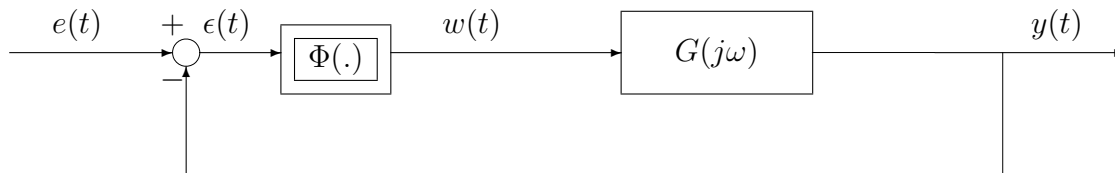


FIG. 1.5 – Système avec non linéarité séparable

A ce schéma-bloc, on peut associer le système d'équations :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ w(t) &= \Phi(\epsilon(t)) \\ \epsilon(t) &= e(t) - y(t)\end{aligned}$$

soit en éliminant  $w(t)$  et  $\epsilon(t)$  entre les équations :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\Phi(e(t) - Cx(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

En posant  $f(x(t), e(t)) = Ax(t) + B\Phi(e(t) - Cx(t))$  et  $g(x(t), e(t)) = Cx(t)$  on a :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), e(t)) \\ y(t) &= g(x(t), e(t))\end{aligned}$$

Conclusion : un système avec non linéaire séparable est un cas particulier de systèmes non linéaires.

Différents types de non linéarités séparables  $\Phi$  sont généralement considérées :

1. saturation (voir figure 1.3), pour tenir compte de la limitation de la commande ;
2. relais (voir figure 1.6) ;
3. zone morte (voir figure 1.7) ;
4. quantification (voir figure 1.8).
5. etc..

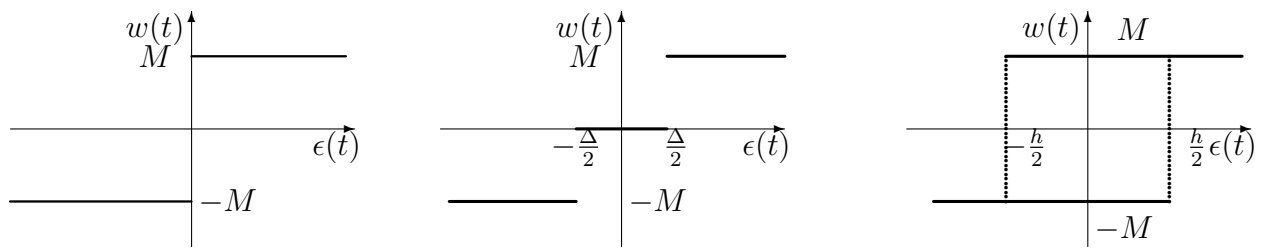


FIG. 1.6 – Relais parfait (gauche), avec zone morte (centre) et avec hystérésis (droite)

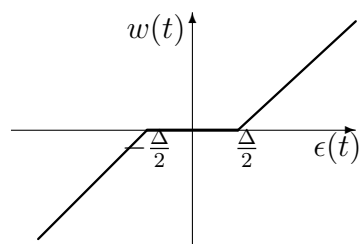


FIG. 1.7 – Zone morte

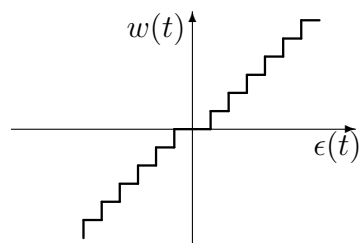


FIG. 1.8 – Quantification

# Chapitre 2

## Introduction à l'analyse par la méthode du premier harmonique

### 2.1 Analyse du régime libre des systèmes à non linéarité séparable

#### 2.1.1 Principe de la méthode du premier harmonique

**Hypothèse 1**  $\Phi$  est une fonction impaire, c'est-à-dire symétrique par rapport à 0 :  $\Phi(-\epsilon) = -\Phi(\epsilon)$ .

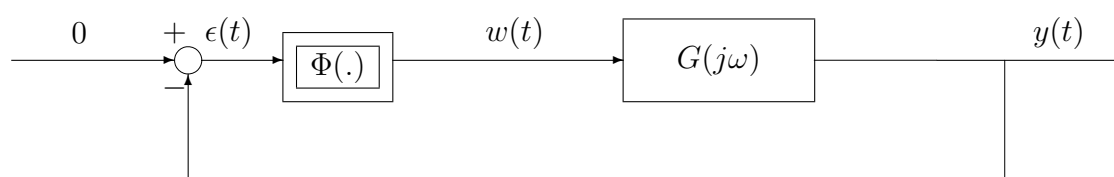


FIG. 2.1 – Système avec non linéarité séparable en régime libre

**Problème** Déterminer si le système représenté figure 2.1 présente en régime libre des oscillations (un cycle limite) et si oui, en estimer ses caractéristiques (pulsation propre, amplitude).

**Question** Quelle va être l'évolution du signal  $\epsilon(t)$  du système représenté figure 2.1 en régime libre, quand  $t$  tend vers l'infini, pour une condition initiale non nulle :

1. stabilité asymptotique de  $\epsilon(t)$  (quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\epsilon(t) \rightarrow 0$ ) ?
2. oscillations (cycle limite) ?
3. instabilité (quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\epsilon(t) \rightarrow \infty$ ) ?

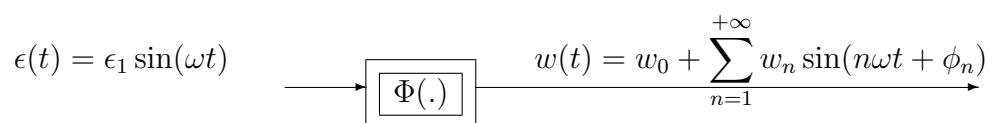


FIG. 2.2 – Non linéarité

**Principe de la méthode** Pour une entrée  $\epsilon(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t)$ , la sortie  $w(t) = \Phi(\epsilon(t))$  est un signal périodique, de pulsation propre  $\omega$ . Il est donc décomposable en série de Fourier (voir figure 2.2) : c'est-à-dire qu'il existe  $w_0, w_1, \dots$  et  $\phi_1, \phi_2, \dots$  tels que :

$$w(t) = w_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

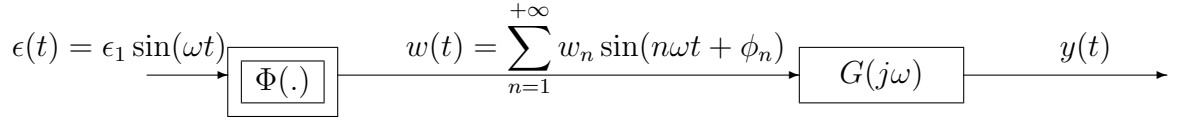


FIG. 2.3 – Non linéarité

Comme la fonction  $\Phi$  est impaire, on a  $w_0 = 0$ . Si on envoie  $w(t)$  à l'entrée de la fonction de transfert  $G(p)$ , sa sortie sera :

$$y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n |G(jn\omega)| \sin(n\omega t + \phi_n + \arg(G(jn\omega)))$$

**Hypothèse 2**  $\forall n \geq 2, |G(jn\omega)| \ll |G(j\omega)|$ , soit  $|G(jn\omega)| \approx 0$  (méthode du premier harmonique).

Par suite,  $y(t)$  peut être approché par un signal sinusoïdal :

$$y(t) \approx w_1 |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi_1 + \arg(G(j\omega)))$$

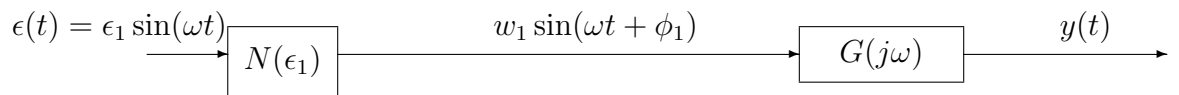


FIG. 2.4 – Non linéarité

On aurait obtenu (approximativement) le même signal de sortie  $y(t)$  si en entrée de  $G$  on avait envoyé le signal  $w_1 \sin(\omega t + \phi_1)$ . Par suite, si on introduit le gain complexe  $N(\epsilon_1)$  défini par :

$$|N(\epsilon_1)| = \frac{w_1(\epsilon_1)}{\epsilon_1}, \quad \arg(N(\epsilon_1)) = \phi_1 \quad \text{soit} \quad N(\epsilon_1) = \frac{w_1(\epsilon_1)}{\epsilon_1} e^{j\phi_1}$$

**Remarque**  $N(\epsilon_1)$  dépend de  $\epsilon_1$  car  $w_1$  et  $\phi_1$  sont fonctions de  $\epsilon_1$ . Il peut être calculé à partir de l'expression de  $\Phi$ . Par exemple, pour  $\Phi$  un relais parfait (voir figure 1.6, gauche), on aura<sup>1</sup> :

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M}{\pi\epsilon_1}$$

$N(\epsilon_1)$  peut être complexe (si  $\phi_1$  n'est pas un multiple de  $\pi$  radians). Par exemple, pour  $\Phi$  une hystérésis (voir figure 1.6, droite), on aura :

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M}{\pi\epsilon_1} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\epsilon_1}\right)^2} - j \frac{h}{2\epsilon_1} \right)$$

<sup>1</sup>Cette expression de  $N(\epsilon_1)$  sera établie dans la section 2.1.3, page 24.

C'est pour cela que  $N(\epsilon_1)$  est appelé *gain complexe équivalent*. Est-ce que le gain  $N(\epsilon_1)$  peut être réalisé physiquement ?

**Remarque** Dans le cas de non linéarités générales, le gain complexe équivalent  $N$  peut dépendre de  $\epsilon_1$  et de  $\omega$ . Le principe de la méthode du premier harmonique n'est pas modifié. Par contre, sa mise en œuvre est plus lourde. Ce point ne sera pas abordé dans ce cours.

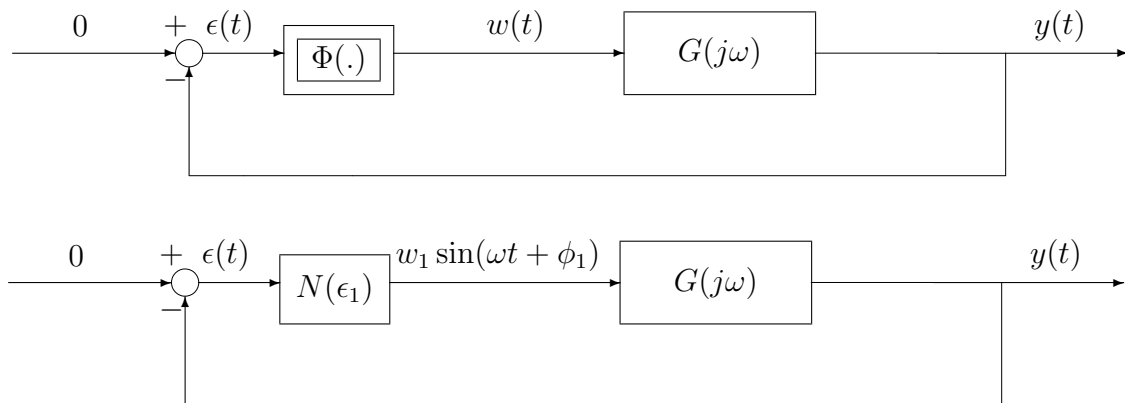


FIG. 2.5 – Système avec non linéarité séparable en régime libre

De la discussion précédente, on en déduit que les deux schéma-blocs représentés figure 2.5 auront mêmes signaux  $\epsilon(t)$  en entrée de la non linéarité (qui est le signal dont on veut étudier le comportement). Par contre, les signaux en entrée de  $G$  seront différents. La méthode du premier harmonique consiste à étudier l'évolution du signal  $\epsilon(t)$  du second schéma-bloc ce qui permet ainsi de connaître l'évolution du signal  $\epsilon(t)$  du premier schéma-bloc. L'intérêt est que l'étude du second schéma-bloc est plus simple que l'étude du premier. Pour la mise en œuvre, deux questions se posent alors :

1. Comment calculer  $N(\epsilon_1)$  à partir de la non linéarité  $\Phi$  ? L'objectif est ici de déterminer le second schéma-bloc.
2. Comment analyser le comportement du second schéma-bloc ?

Afin de bien comprendre l'intérêt du second schéma-bloc, la sous section suivante 2.1.2 aborde l'analyse du comportement de ce schéma. La détermination du gain complexe équivalent ne sera abordée que dans un deuxième temps (sous section 2.1.3).

## 2.1.2 Analyse du comportement du schéma-bloc équivalent

Pour simplifier les discussions, on supposera dans la suite que :

**Hypothèse** La fonction de transfert  $G(p)$  est stable.

Le second schéma-bloc représenté figure 2.5 présente de fortes similarités avec le schéma bloc représenté figure 2.6. D'après le critère de Nyquist, le schéma bloc représenté figure 2.6 est

- stable si le diagramme de Nyquist de  $KG(j\omega)$  ne recouvre pas le point  $(-1, 0)$  et ne l'entoure pas ;
- oscillant si le diagramme de Nyquist de  $KG(j\omega)$  recouvre le point  $(-1, 0)$  ;

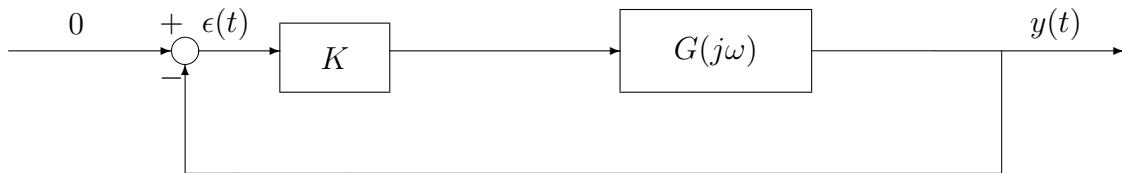


FIG. 2.6 – Système rebouclé sur un gain constant

- instable si le diagramme de Nyquist de  $KG(j\omega)$  n'entoure pas le point  $(-1, 0)$ .

De façon équivalente, le schéma bloc représenté figure 2.6 est

- stable si le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  ne recouvre pas le point  $(-\frac{1}{K}, 0)$  et ne l'entoure pas ;
- oscillant si le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  recouvre le point  $(-\frac{1}{K}, 0)$  ;
- instable si le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  entoure le point  $(-\frac{1}{K}, 0)$ .

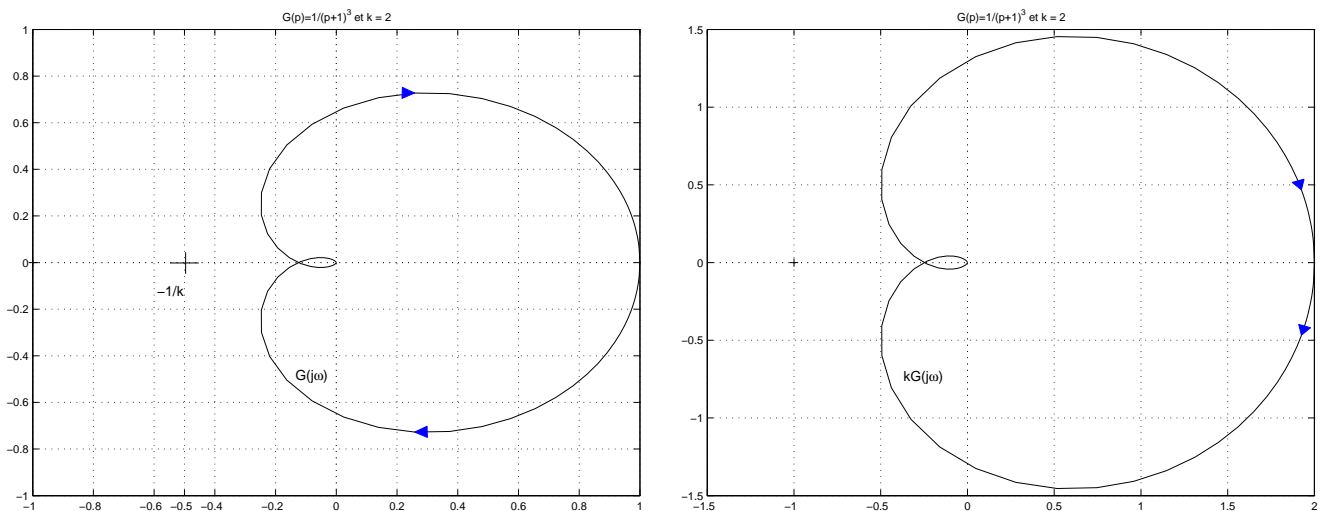
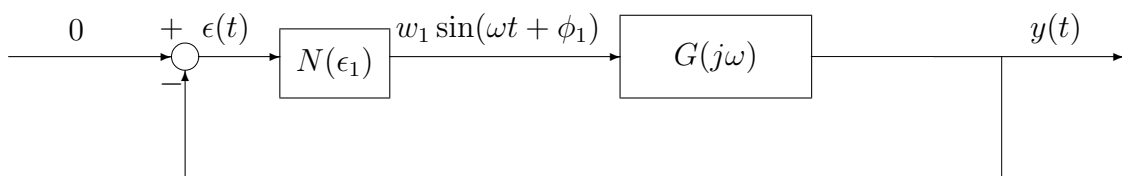
FIG. 2.7 – Diagrammes de Nyquist de  $G(p) = 1/(p + 1)^3$  et  $KG(p)$ 

FIG. 2.8 – Système rebouclé sur gain complexe équivalent

En remplaçant  $K$  par  $N(\epsilon_1)$ , le schéma bloc représenté figure 2.6 se transforme en le schéma-bloc représenté figure 2.8. L'idée est donc d'analyser le comportement de ce schéma bloc en appliquant le critère de Nyquist. La différence majeure est que le gain  $K$  est remplacé par un gain  $N(\epsilon_1)$  dont la valeur est fonction de l'amplitude du signal  $\epsilon(t)$  et qui peut prendre des valeurs complexes ! La mise en œuvre de cette idée va être faite à travers un exemple.

**Exemple 1** Soit

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$$

avec comme non linéarité un relais parfait, c'est-à-dire :

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M}{\pi\epsilon_1}.$$

Le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  peut être obtenu à partir, par exemple, de l'étude de  $|G(j\omega)|$  et de  $\arg(G(j\omega))$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Ici, on a :

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{(\omega^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \arg(G(j\omega)) = -3 \arctan(\omega)$$

Le diagramme de Nyquist est représenté figure 2.9. Sur le plan complexe, on a aussi représenté

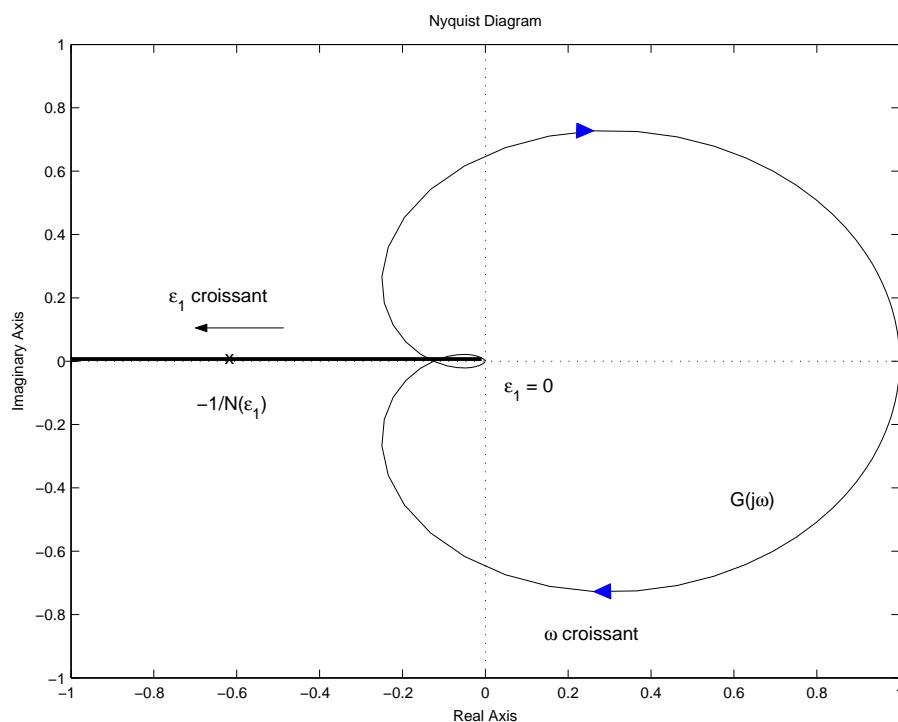


FIG. 2.9 – Diagrammes de Nyquist de  $G(p) = 1/(p+1)^3$  et tracé de  $\frac{-1}{N(\epsilon_1)}$  pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$

le tracé de  $C(\epsilon_1) = \frac{-1}{N(\epsilon_1)}$  pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$ . Il est orienté par les  $\epsilon_1$  croissants. Pour une valeur de  $\epsilon_1$ , le point associé à  $C(\epsilon_1)$  dans le plan complexe est appelé *point critique*. Pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$ , le tracé des points critiques est appelé *lieu critique*. Le lieu est orienté pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$ .

Comment déterminer à partir de la figure 2.9 si le système bouclé se met à osciller ? Si oui, comment déterminer leurs caractéristiques (période, amplitude) ?

Par analogie avec le système bouclé représenté figure 2.6, le signal  $\epsilon(t)$  du système bouclé représenté figure 2.8 se met à osciller avec une amplitude  $\epsilon_0$  et une pulsation propre  $\omega_0$  si le tracé

de  $G(j\omega)$  intersecte le lieu critique pour  $\omega = \omega_0$  et pour  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ . Le point d'intersection est donc donné par  $G(j\omega_0)$  ou  $C(\epsilon_0)$ . Les caractéristiques de l'oscillation  $\omega_0$  et  $\epsilon_0$  sont donc solutions du système d'équations :

$$G(j\omega_0) = \frac{-1}{N(\epsilon_0)} \quad \text{soit} \quad 1 + N(\epsilon_0)G(j\omega_0) = 0 \quad (2.1)$$

Que se passe-t-il si du fait d'une perturbation, l'amplitude  $\epsilon_1 \neq \epsilon_0$  ? Deux cas sont possibles :

**cas**  $\epsilon_1 > \epsilon_0$  Le point critique  $-1/N(\epsilon_1)$  n'est plus recouvert par le tracé de  $G(j\omega)$ . Il n'est pas non plus entouré par ce tracé. Le système bouclé représenté figure 2.8 est alors stable. Par suite, l'amplitude  $\epsilon_1$  du signal  $\epsilon(t)$  va se mettre à décroître. Le point critique  $-1/N(\epsilon_1)$  se déplace donc vers la droite, jusqu'au point d'intersection, c'est-à-dire jusqu'à ce que  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ . Le système se remet donc à osciller à la pulsation  $\omega_0$ , avec une amplitude  $\epsilon_0$ .

**cas**  $\epsilon_1 < \epsilon_0$  Le point critique  $-1/N(\epsilon_1)$  est maintenant entouré par le tracé de  $G(j\omega)$  : le système bouclé représenté figure 2.8 est alors instable. Par suite, l'amplitude  $\epsilon_1$  du signal  $\epsilon(t)$  va se mettre à croître jusqu'à ce que  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ . Le système se remet donc à osciller à la pulsation  $\omega_0$ , avec une amplitude  $\epsilon_0$ .

On parle d'oscillations *stables*<sup>2</sup> si après une perturbation sur l'amplitude, on retourne à l'oscillation de départ.

Pour déterminer la pulsation  $\omega_0$  et l'amplitude  $\epsilon_0$ , il est nécessaire de résoudre le système d'équations (2.1). Il ne faut pas oublier que comme  $G(j\omega_0)$  et (parfois)  $N(\epsilon_0)$  sont complexes, (2.1) correspond à un système de deux équations réelles à deux inconnues (la pulsation  $\omega_0$  et l'amplitude  $\epsilon_0$ ). Le système d'équations peut être résolu par calcul ou graphiquement (point d'intersection des deux courbes). Dans cet exemple particulier,  $\omega_0 = \omega_{180}$ , c'est-à-dire la pulsation par laquelle  $\arg(G(j\omega_{180})) = -180^\circ$ . D'après l'expression de  $\arg(G(j\omega))$ ,

$$\omega_{180} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \text{ rad/s.}$$

En remplaçant  $N(\epsilon_0)$  par son expression dans l'équation (2.1), on obtient alors :

$$-\frac{\pi\epsilon_0}{4M} = G(j\omega_{180}).$$

Comme  $G(j\omega_{180}) = -\frac{1}{8}$ , on obtient :

$$\epsilon_0 = \frac{M}{2\pi}.$$

Pour  $M = 10$ , on a  $\epsilon_0 = 1,59$ . De plus la période est de 3,6 secondes. En simulant le système bouclé de départ, c'est-à-dire le schéma-bloc représenté au haut de la figure 2.5, on retrouve bien ce résultat (voir la figure 2.10).

**Remarque** On peut vérifier si l'hypothèse 2 (hypothèse du premier harmonique) est vérifiée. Tout d'abord,  $|G(j\omega)|$  est une fonction décroissante de la pulsation  $\omega$ . De plus,  $|G(j2\omega_0)| = 0,0213$  et  $|G(j3\omega_0)| = 0,0067$ , ce qui est "assez" faible par rapport à  $|G(j\omega_0)| = 0,125$ .

<sup>2</sup>Ne pas confondre avec la stabilité du système.



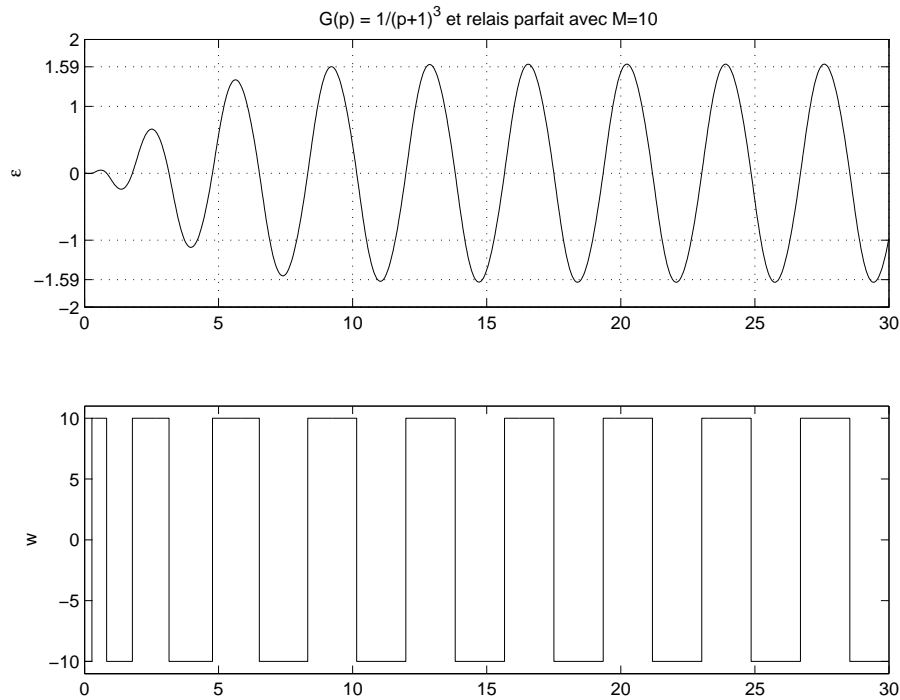


FIG. 2.10 – Simulation du système non linéaire de départ

**Cas général** De l'exemple précédent, est-il possible de déduire une méthode *générale* permettant d'étudier le comportement du système en boucle fermée ? La réponse est oui. Les étapes sont les suivantes :

1. Tracé du diagramme de Nyquist de la fonction de transfert  $G(p)$  ;
2. Détermination de l'expression de  $N(\epsilon_1)$  en fonction de  $\epsilon_1$  ;
3. Tracé du lieu critique, c'est-à-dire tracé de  $C(\epsilon_1) = \frac{-1}{N(\epsilon_1)}$  pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$  dans le même plan complexe ;
4. Détermination du (ou des points) d'intersection entre les deux tracés, ce qui revient à déterminer  $\omega_0$  et  $\epsilon_0$  tels que :

$$1 + N(\epsilon_0)G(j\omega_0) = 0.$$

Cette détermination peut être graphique ou par le calcul.

5. Chaque point d'intersection correspond à une oscillation stable ou instable, caractérisée par  $\omega_0$  et  $\epsilon_0$ . La stabilité de l'oscillation<sup>3</sup> peut être évaluée par le critère de Loeb (qui découle d'un raisonnement similaire à celui fait dans l'exemple).
6. Vérification sous Simulink du comportement temporel prédit.

**Critère de Loeb** L'oscillation est stable si l'intersection entre les deux tracés est telle qu'en parcourant le tracé de  $G(j\omega)$  par  $\omega$  allant de 0 à  $+\infty$ , on laisse à sa gauche le lieu critique, c'est-à-dire le tracé de  $C(\epsilon_1) = \frac{-1}{N(\epsilon_1)}$  orienté par  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$ .

**Cas d'oscillations instables** Elles vont être introduites via deux exemples.

<sup>3</sup>Ne pas confondre avec la stabilité du système.

**Exemple 2** On considère l'exemple précédent dans lequel la non linéarité est maintenant définie par la courbe caractéristique représentée figure 2.11. Dans le cas où  $K = 1$ , par simulation tem-

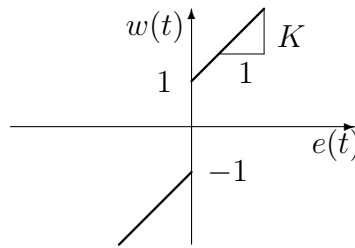


FIG. 2.11 – Non linéarité

porielle du système en boucle fermée, on constate que le signal  $\epsilon(t)$  tend vers un signal périodique. Dans le cas où  $K = 10$ , il diverge (voir figure 2.12).

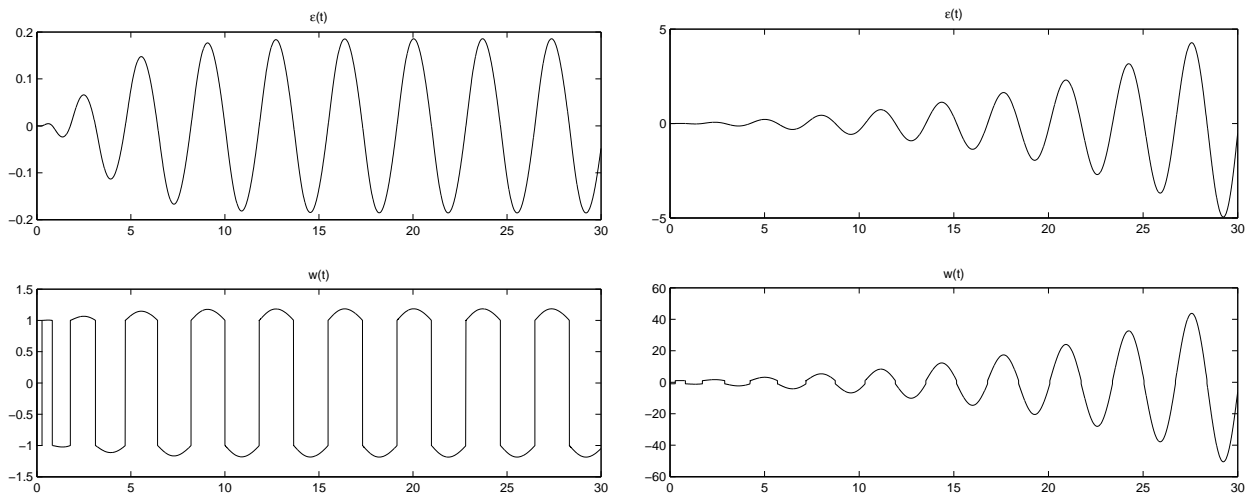


FIG. 2.12 – Simulation du système non linéaire avec  $K = 1$  (gauche) et  $K = 10$  (droite)

Peut-on prévoir en fonction de  $K$  quel sera le comportement du système bouclé ? Pour la non linéarité représentée figure 2.11, le gain complexe équivalent est donné par :

$$N(\epsilon_1) = K + \frac{4}{\pi\epsilon_1}$$

soit

$$C(\epsilon_1) = \frac{-\pi\epsilon_1}{4 + K\pi\epsilon_1}.$$

Le tracé du lieu critique correspondant ainsi que le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  sont représentés figure 2.13.

Il y a deux cas possibles, en fonction des valeurs de  $K$ .

1. Le tracé du lieu critique intersecte le tracé de  $G(j\omega)$ . Cela correspond à

$$\frac{-1}{K} \leq G(j\omega_{180}) \quad \text{soit} \quad K \leq 8$$

Ce point d'intersection est le même que dans l'exemple précédent : la même analyse peut être faite et le critère de Loeb peut être appliqué de la même façon.

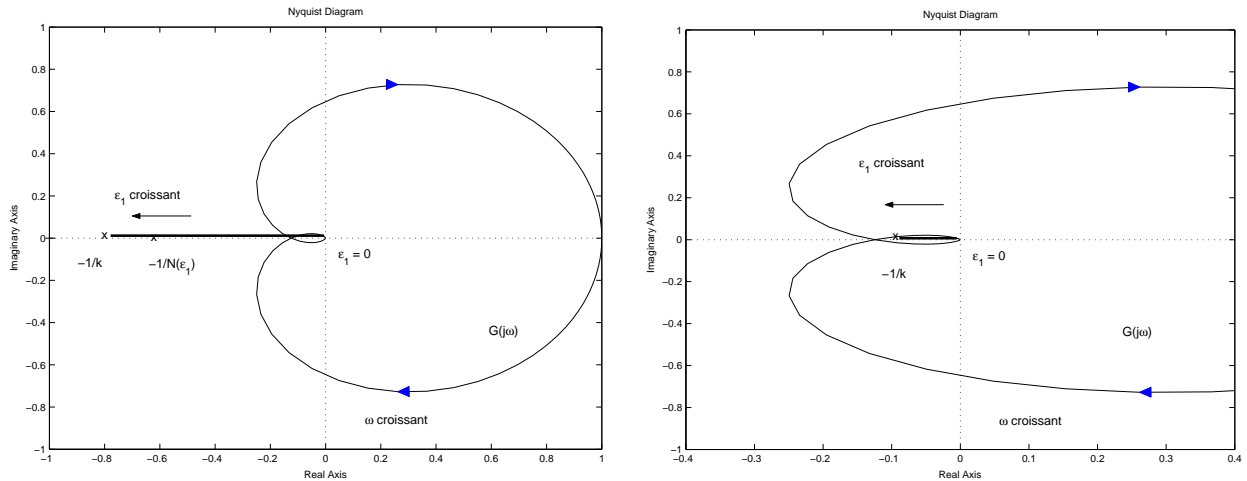


FIG. 2.13 – Diagramme de Nyquist de  $G(p) = 1/(p+1)^3$  et lieu critique  $C(\epsilon_1) = -\frac{\pi\epsilon_1}{K\pi\epsilon_1 + 4}$

2. Le tracé du lieu critique n'intersecte pas le tracé de  $G(j\omega)$ . Le lieu critique est complètement entouré par le tracé de  $G(j\omega)$ . Cela correspond à  $K > 8$ . Dans ce cas là, pour chaque valeur de  $\epsilon_1$ , le système bouclé représenté figure 2.8 est instable : par suite,  $\epsilon_1$  tend vers l'infini.

**Exemple 3** On considère l'exemple 1 avec maintenant :

$$G(p) = \frac{(p+10)^2}{(p+1)^3}.$$

Le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  intersecte le lieu critique en deux points (voir la figure 2.14). Le premier point d'intersection correspond à la pulsation  $\omega_0 = 2.59$  rad/s et le second point à la pulsation  $\omega_0 = 7.13$  rad/s. D'après le critère de Loeb, le premier point d'intersection correspond à une oscillation stable et le second à une oscillation instable.

De la figure 2.14, il est possible d'obtenir plus d'informations. Pour une condition initiale du système bouclé proche de zéro ( $\epsilon_1$  faible), le lieu critique correspondant n'est pas entouré par le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  : par suite,  $\epsilon(t)$  tend vers 0, voir la figure 2.15, droite. Notez que pour autant  $w(t)$  ne tend pas vers 0 : le relais parfait se met à commuter infiniment rapidement entre les valeurs  $-M$  et  $+M$  à partir de 0,22 secondes.

Pour des valeurs plus importantes de la condition initiale, le point critique correspondant va être entouré ou pas :  $\epsilon_1$  va augmenter (ou diminuer) jusqu'à la valeur  $\epsilon_0$  correspondant au premier point d'intersection (période d'oscillation de 2,42 secondes), voir la figure 2.15, gauche.

**Exercice : étude de l'effet d'une saturation sur la commande proportionnelle d'un système**

On considère le système :

$$G(p) = 4 \frac{(p+10)^2}{(p+1)^3}$$

commandé par un gain proportionnel  $K = 1$  (voir figure 2.6). Le système en boucle fermée est stable (voir comme illustration la réponse à une condition initiale non nulle figure 2.16).

Le diagramme de Bode et de Nyquist de  $G(p)$  sont représentés figure 2.17.

On désire déterminer le comportement du système bouclé en présence de saturation sur la commande. La saturation considérée est représentée figure 1.3. Pour cela, le gain complexe équivalent

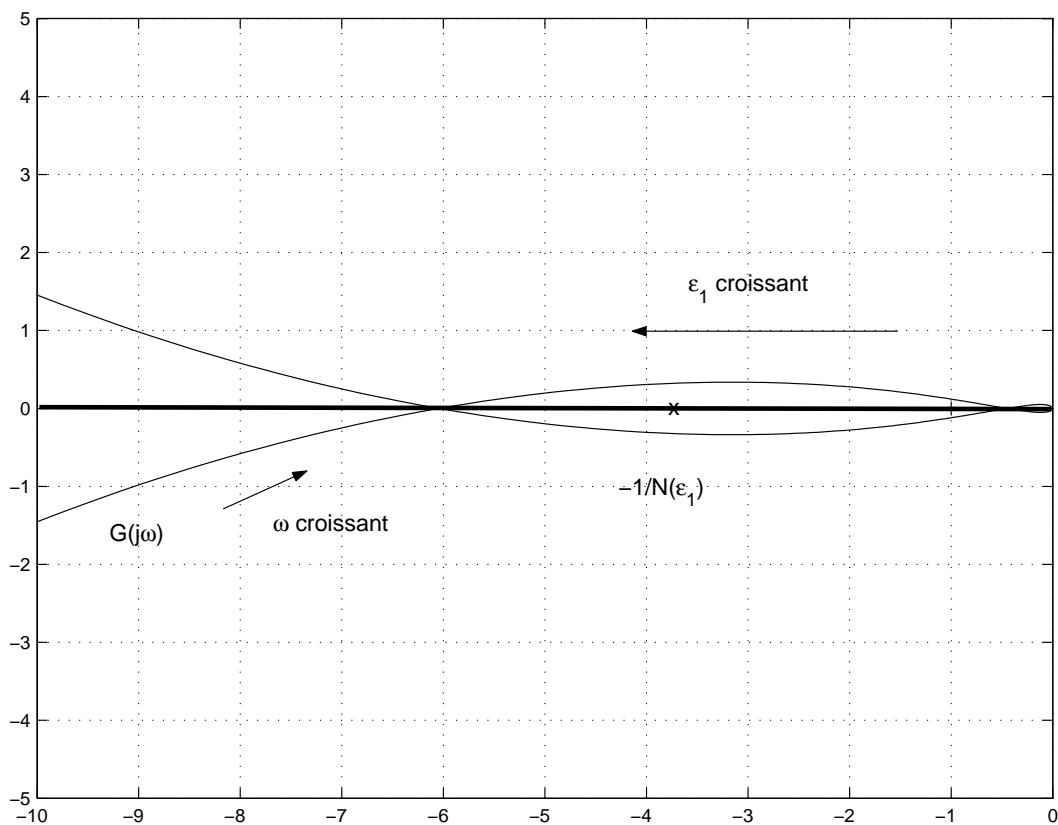


FIG. 2.14 – Diagramme de Nyquist de  $G(p) = \frac{(p + 10)^2}{(p + 1)^3}$  et lieu critique pour un relais parfait

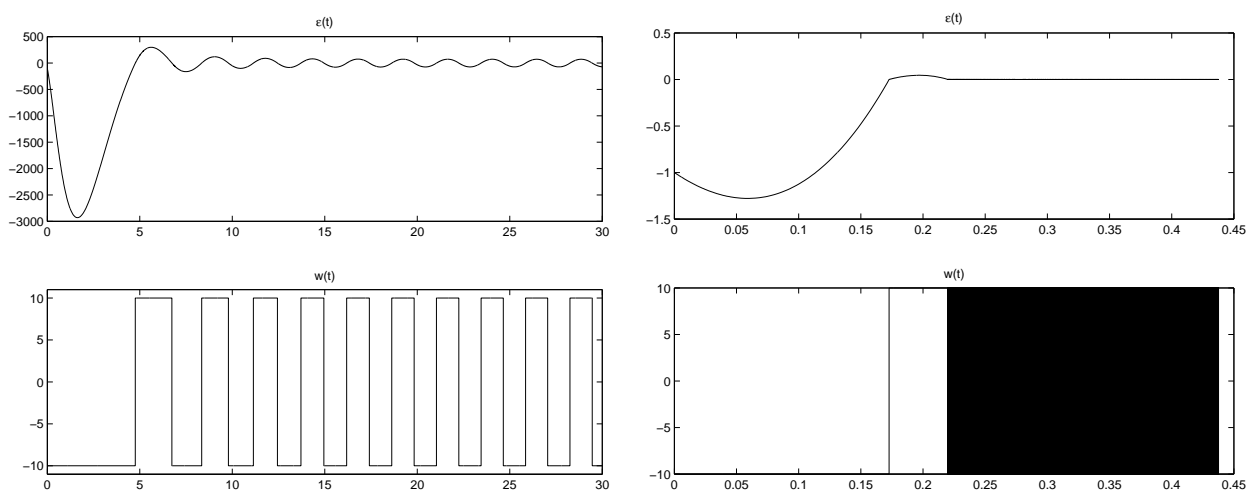


FIG. 2.15 – simulation temporelle pour deux conditions initiales différentes

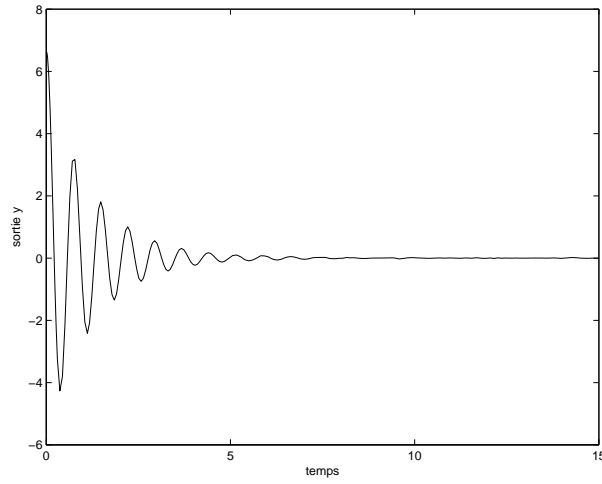


FIG. 2.16 – Réponse à une condition initiale du système bouclé

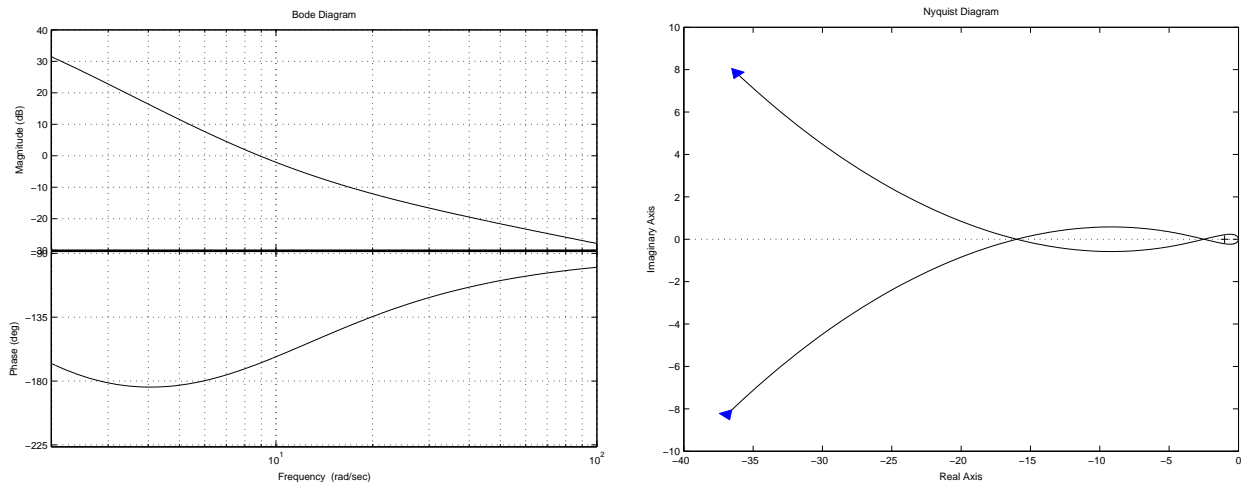


FIG. 2.17 – Diagramme de Bode et de Nyquist de  $G(p) = 4 \frac{(p + 10)^2}{(p + 1)^3}$

de cette saturation est donnée par

$$N(\epsilon_1) = \frac{2K}{\pi} \left( \arcsin \left( \frac{1}{\epsilon_1} \right) + \frac{1}{\epsilon_1} \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_1^2}} \right)$$

pour  $\epsilon_1 \geq 1$ .

1. Montrer que le lieu critique pour cette non linéarité décrit l'axe réel de  $-1$  à  $-\infty$  pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à l'infini.
2. En étudiant le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  et le lieu critique, déterminer les oscillations possibles ? Sont-elles stables ?
3. Calculer la période des oscillations stables. Est-elle cohérente avec la simulation de la boucle fermée représentée figure 2.18 avec une saturation au niveau de la commande donnée par la figure 1.3 ?

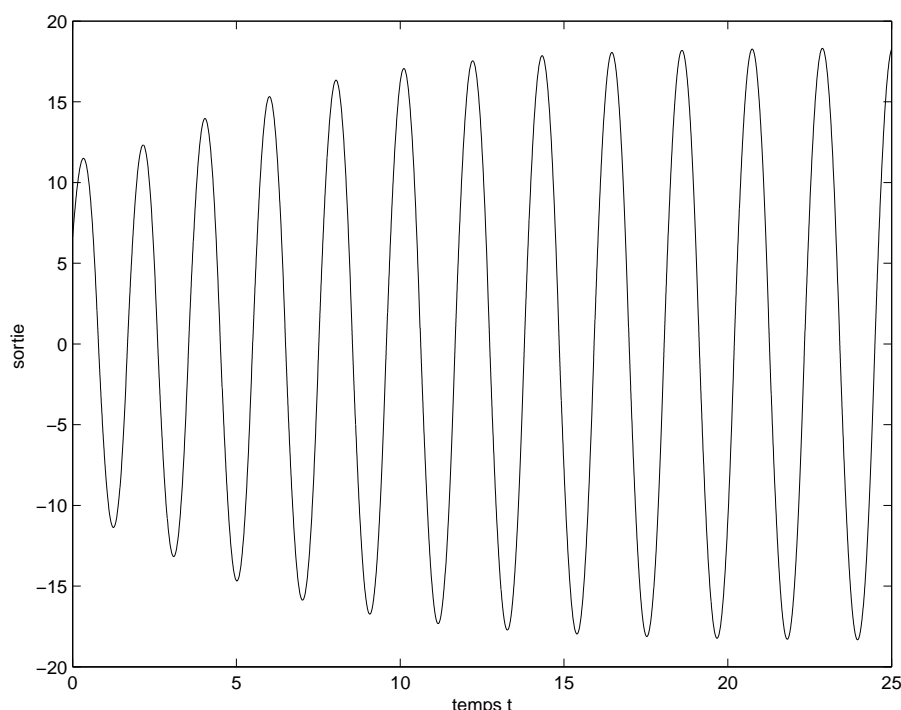


FIG. 2.18 – Réponse à une condition initiale du système bouclé avec saturation

**Remarque** La méthode du premier harmonique est une méthode *approchée*, c'est-à-dire que le résultat obtenu peut être correct ou pas. Exemple : soit

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)} \left( \frac{10p+1}{ap+1} \right)^2$$

et pour non linéarité un relais parfait. Par suite, le lieu critique décrit l'axe réel de 0 à  $-\infty$ . Pour  $a = 56$  et  $a = 57$ , on aura deux points d'intersection entre le tracé de  $G(j\omega)$  et le lieu critique (voir figure 2.19). D'après le critère de Loeb, un seul des deux correspond à une oscillation stable. Par simulation, on constate que pour  $a = 56$ , il n'y a pas d'oscillation stable alors que pour  $a = 57$ , celle-ci apparaît (voir figure 2.20). Il est possible de confirmer le résultat de cette simulation par un calcul théorique "exact".

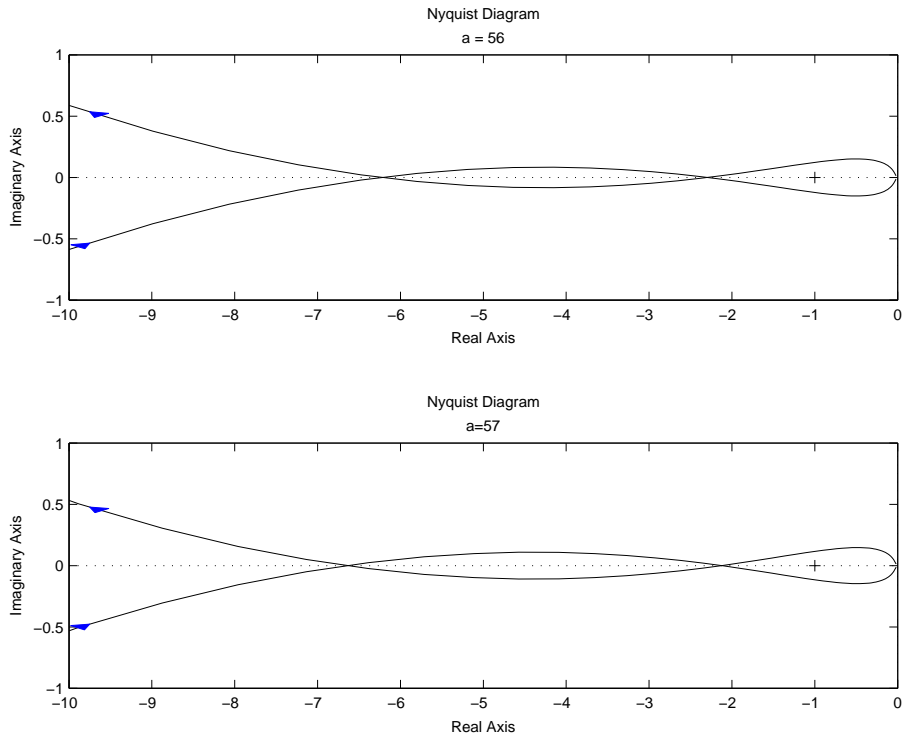


FIG. 2.19 – Diagramme de Bode et de Nyquist de  $G(p) = \frac{1}{p(p+1)} \left( \frac{10p+1}{ap+1} \right)^2$  avec  $a = 56$  et  $a = 57$

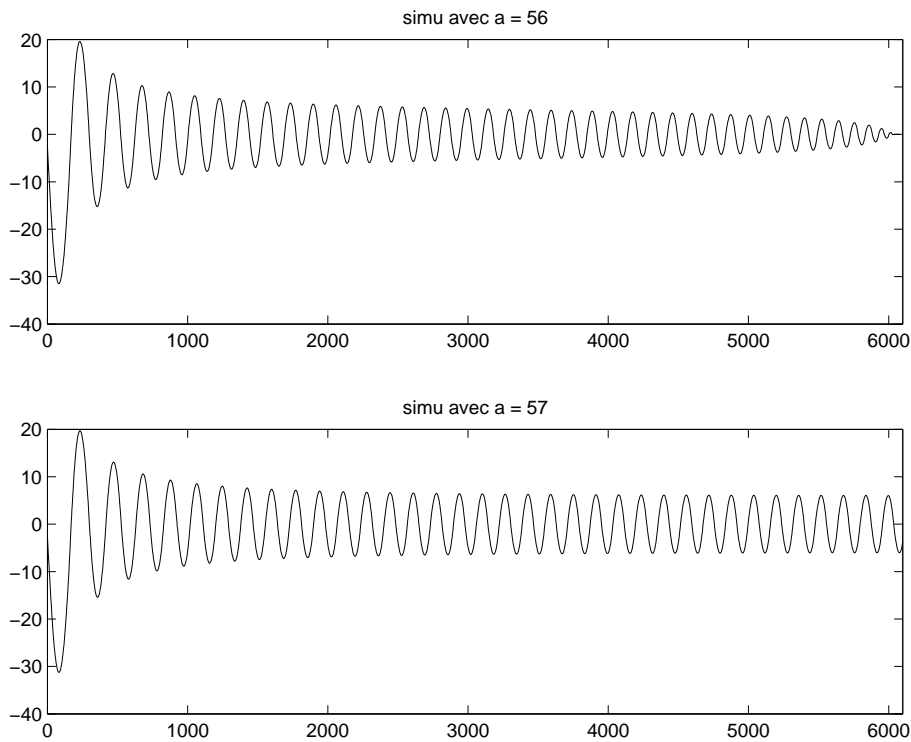


FIG. 2.20 – Simulation du système bouclé avec  $a = 56$  et  $a = 57$

### 2.1.3 Détermination du gain complexe équivalent $N(\epsilon_1)$

Le gain complexe équivalent est calculé à partir du premier terme de la décomposition en série de Fourier de  $w(t)$  où  $w(t)$  est la sortie de la non linéarité par l'entrée  $\epsilon(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t)$ . Le calcul se fait en deux étapes : il va être illustré par l'exemple du relais parfait.

**Etape 1** Détermination de la sortie  $w(t)$  de la non linéarité  $\Phi$  pour l'entrée

$$\forall t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}], \quad \epsilon(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t).$$

Dans le cas d'une non linéarité définie par sa courbe caractéristique, la sortie peut être déterminée graphiquement via la figure 2.21 Pour le relais parfait, on obtient :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] & w(t) = M \\ \forall t \in [\frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}] & w(t) = -M \end{cases}$$

**Etape 2** Calcul du gain complexe équivalent à partir du premier terme de la décomposition en série de Fourier :

$$N(\epsilon_1) = \frac{w_1}{\epsilon_1} e^{j\phi_1}$$

où

$$w_1 \sin(\omega t + \phi_1) = \underbrace{w_1 \cos(\phi_1)}_{a_1} \sin(\omega t) + \underbrace{w_1 \sin(\phi_1)}_{b_1} \cos(\omega t)$$

avec<sup>4</sup>

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \sin(\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \cos(\omega t) dt$$

où  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , soit :

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T w(t) \sin(\omega t) dt$$

En faisant le changement de variable :  $u = \omega t$ , on obtient

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w\left(\frac{u}{\omega}\right) \sin(u) du$$

De même :  $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w\left(\frac{u}{\omega}\right) \cos(u) du$ . Par suite :

$$\begin{aligned} w_1 e^{j\phi_1} = a_1 + j b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w\left(\frac{u}{\omega}\right) (\sin(u) + j \cos(u)) du \\ &= \frac{j}{\pi} \int_0^{2\pi} w\left(\frac{u}{\omega}\right) (\cos(u) - j \sin(u)) du \\ &= \frac{j}{\pi} \int_0^{2\pi} w\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{-ju} du \end{aligned}$$

D'où :

$$N(\epsilon_1) = \frac{j}{\pi \epsilon_1} \int_0^{2\pi} w\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{-ju} d(u)$$

<sup>4</sup> $\sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b)$ .



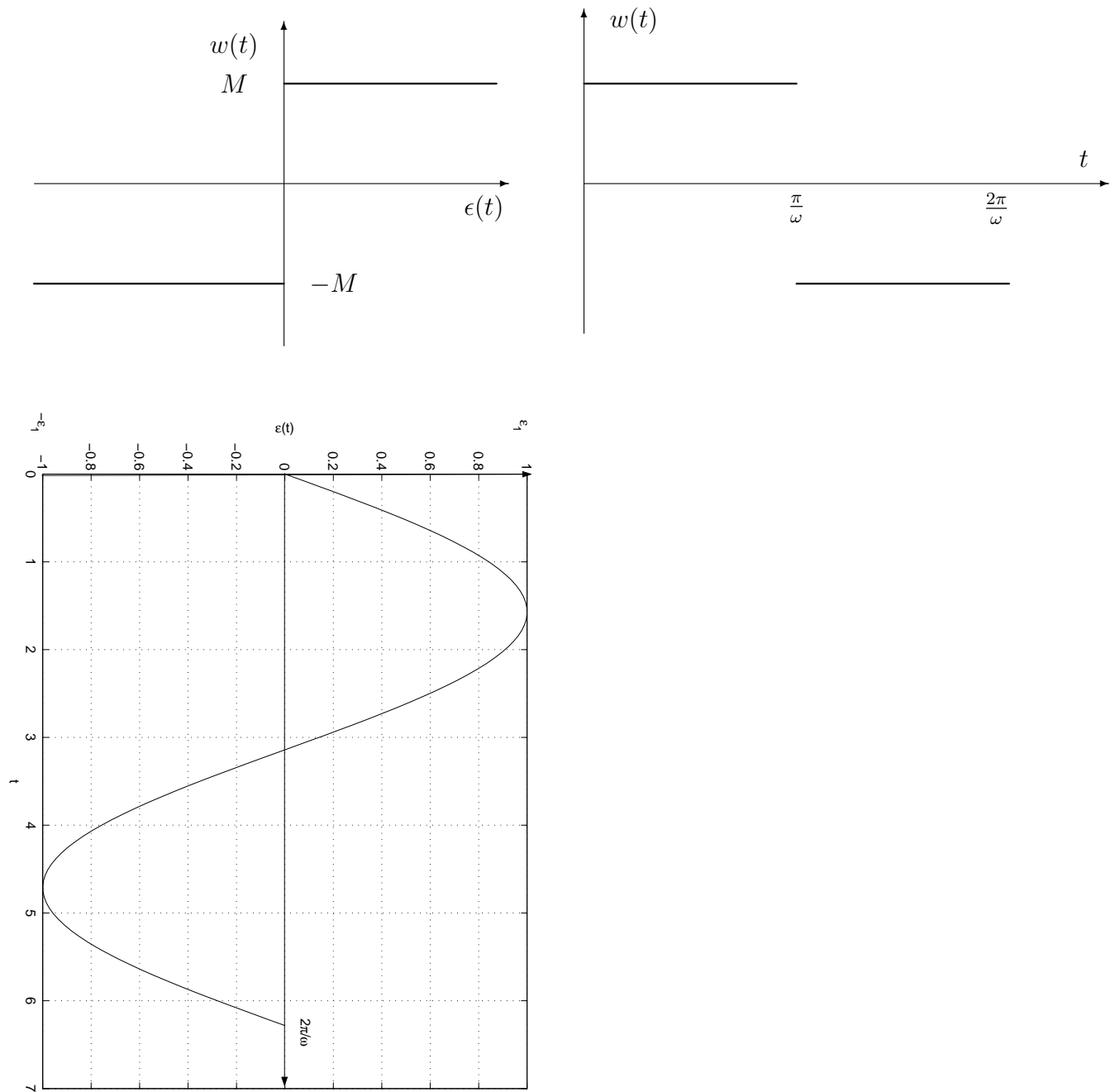


FIG. 2.21 – Système bouclé avec relais

**Propriété** si  $\Phi$  est impaire alors

$$N(\epsilon_1) = \frac{2j}{\pi\epsilon_1} \int_0^\pi w\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{-ju} d(u)$$

Mise en œuvre sur le relais parfait : il est symétrique par rapport à 0

$$\begin{aligned} N(\epsilon_1) &= \frac{2j}{\pi\epsilon_1} \int_0^\pi w\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{-ju} d(u) \\ &= \frac{2j}{\pi\epsilon_1} \int_0^\pi M e^{-ju} d(u) \\ &= \frac{2jM}{\pi\epsilon_1} \left[ \frac{e^{-ju}}{-j} \right]_0^\pi \\ &= \frac{4M}{\pi\epsilon_1} \end{aligned}$$

Le lieu critique est donné par :

$$C(\epsilon_1) = -\frac{\pi\epsilon_1}{4M}$$

Quand  $\epsilon_1$  va de 0 à l'infini,  $C(\epsilon_1)$  se déplace sur l'axe réel du point 0 vers  $-\infty$ .

**Exemple d'une hystérésis** Une hystérésis est défini par deux paramètres :  $h$  et  $M$  (voir figure 2.22). On introduit  $\alpha$  tel que :

$$\epsilon_1 \sin(\alpha) = \frac{h}{2}$$

Alors, si  $\epsilon_1 > \frac{h}{2}$  et avec une condition initiale de l'hystérésis de  $-M$

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \frac{\alpha}{\omega}] & w(t) = -M \\ \forall t \in [\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\pi+\alpha}{\omega}] & w(t) = M \\ \forall t \in [\frac{\pi+\alpha}{\omega}, \frac{2\pi+\alpha}{\omega}] & w(t) = -M \end{cases}$$

Le relais avec hystérésis est symétrique par rapport à 0 :

$$\begin{aligned} N(\epsilon_1) &= \frac{2j}{\pi\epsilon_1} \int_0^\pi w\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{-ju} d(u) \\ &= \frac{2j}{\pi\epsilon_1} \left( \int_0^\alpha (-M) e^{-ju} d(u) + \int_\alpha^\pi M e^{-ju} d(u) \right) \\ &= \frac{2jM}{\pi\epsilon_1} \left( - \left[ \frac{e^{-ju}}{-j} \right]_0^\alpha + \left[ \frac{e^{-ju}}{-j} \right]_\alpha^\pi \right) \\ &= \frac{2M}{\pi\epsilon_1} \left( e^{-j\alpha} - \frac{1}{j} + \frac{1}{j} + e^{-j\alpha} \right) \\ &= \frac{4M}{\pi\epsilon_1} (\cos(\alpha) - j \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

Or, comme  $\frac{h}{2} = \epsilon_1 \sin(\alpha)$ , on a :

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\epsilon_1}\right)^2} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{h}{2\epsilon_1}$$

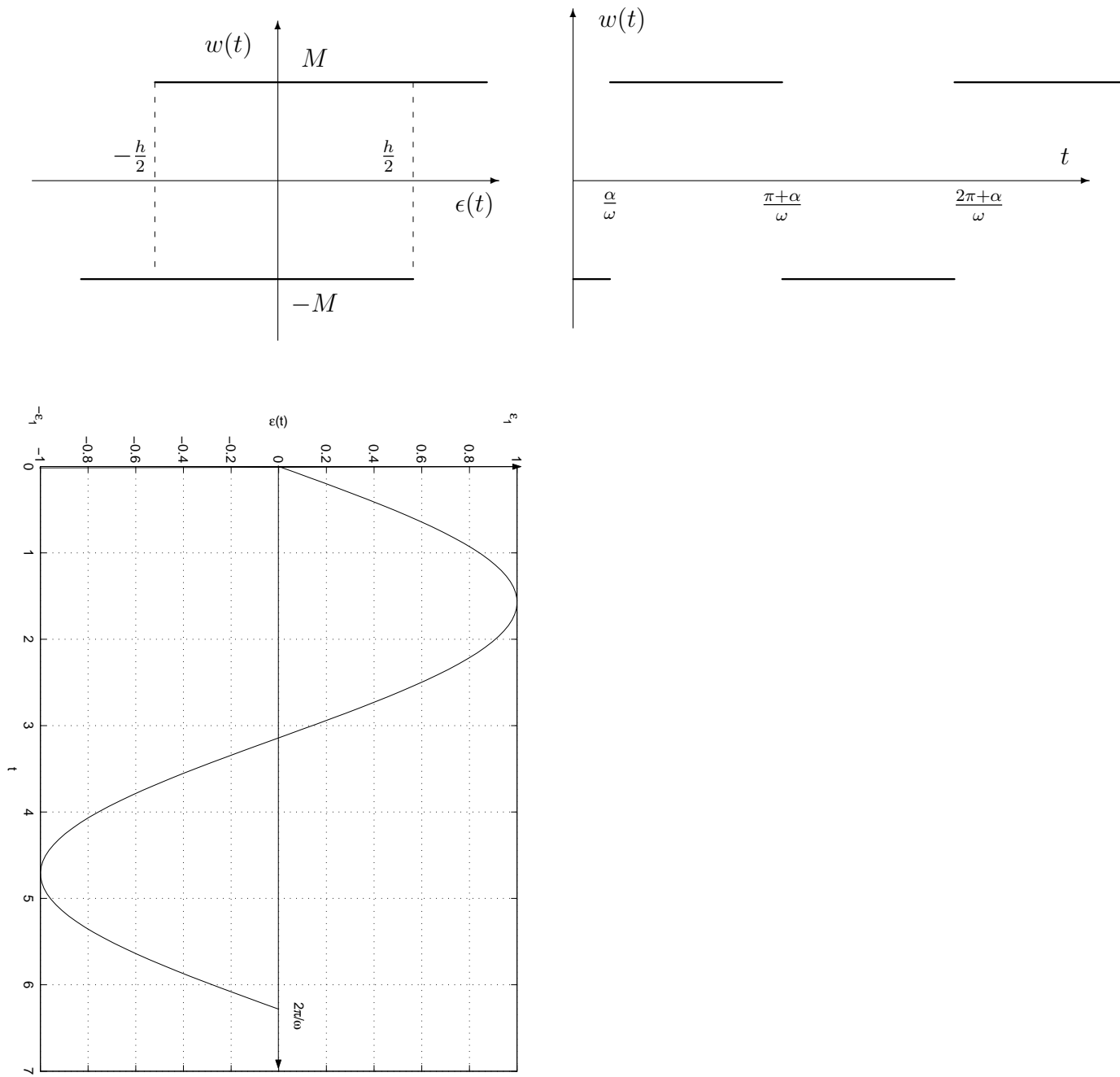


FIG. 2.22 – Système bouclé avec hystérésis

D'où

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M}{\pi\epsilon_1} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\epsilon_1}\right)^2} - j\frac{h}{2\epsilon_1} \right)$$

On en déduit que :

$$C(\epsilon_1) = -\frac{1}{N(\epsilon_1)} = -\frac{\pi}{8M} \left( 2\sqrt{\epsilon_1^2 - \frac{h^2}{4}} + jh \right)$$

Quand  $\epsilon_1$  va de 0 à l'infini,  $C(\epsilon_1)$  se déplace sur une demi droite horizontale d'ordonnée  $-\frac{\pi h}{8M}$ .

## 2.2 Analyse du régime forcé des systèmes à non linéarité séparable

**Objectif** Pour  $e(t) = e_1 \sin(\omega_1 t)$ , étudier le régime permanent de  $\epsilon(t)$  pour le système représenté figure 1.5. Plus précisément, est ce que  $\epsilon(t)$  va tendre vers un signal de pulsation propre  $\omega_1$  et si oui avec quelle amplitude et quel déphasage ?

Avant d'étudier le cas de systèmes à non linéarité séparable, le cas des systèmes linéaires temps invariant est rappelé.

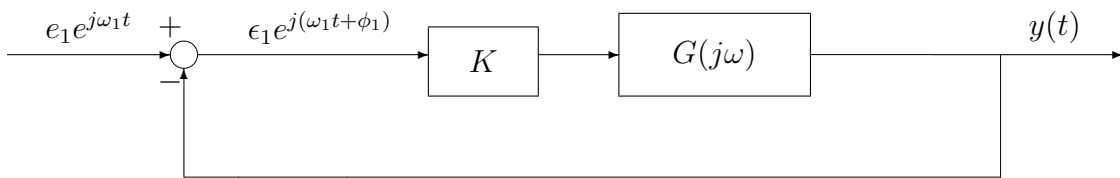


FIG. 2.23 – Système rebouclé sur un gain constant

**Cas des systèmes linéaires temps invariant** On considère le système linéaire temps invariant asymptotiquement stable représenté Figure 2.23 dans lequel les signaux sont supposés sinusoïdaux de pulsation  $\omega_1$ . Les signaux sinusoïdaux sont écrits sous forme complexe. D'après la Figure 2.23 :

$$\epsilon_1 e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} = e_1 e^{j\omega_1 t} - G(j\omega_1) K \epsilon_1 e^{j(\omega_1 t + \phi_1)}$$

soit

$$(1 + G(j\omega_1)K) \epsilon_1 = e_1 e^{-j\phi_1}.$$

Que vaut  $\epsilon_1$  ? En prenant le module, on obtient :

$$\epsilon_1 = \underbrace{\left| \frac{1}{1 + G(j\omega_1)K} \right|}_{|S(j\omega_1)|} e_1$$

Deux cas sont alors possibles.

1.  $|S(j\omega_1)| \neq 0$  : pour tout  $e_1 \neq 0$ , en régime permanent,  $\epsilon(t)$  est un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega_1$  et de déphasage  $\phi_1 = \arg(S(j\omega_1))$  ;
2.  $|S(j\omega_1)| = 0$  : pour tout  $e_1$ , en régime permanent,  $\epsilon(t)$  est le signal nul.

Dans le cas d'un système non linéaire à non linéarité séparable (Figure 2.24), la situation peut être différente comme le montre l'exemple présenté ci-après.

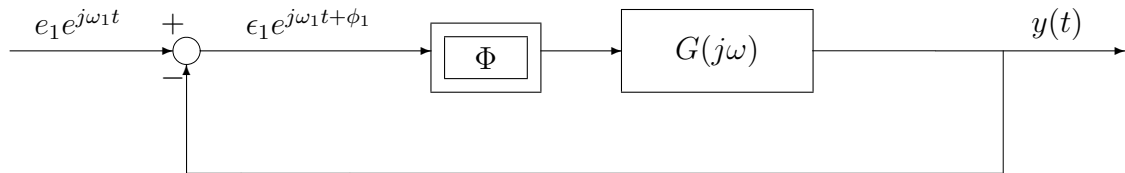


FIG. 2.24 – Système non linéaire à non linéarité séparable

**Hypothèse** En plus de l'hypothèse de la méthode de la première harmonique, on suppose que le système représenté figure 2.24 est stable en régime libre, c'est-à-dire, que pour  $e(t) = 0$ ,  $\epsilon(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini.

**Exemple** On considère :

$$G(p) = 4 \frac{(p + 10)^2}{(p + 1)^3}$$

avec la non linéarité définie par figure 2.11, avec  $K = 1$ . D'après l'exemple traité page 18, le lieu critique associé pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à l'infini décrit l'axe réel du point 0 au point d'abscisse  $-1$ . D'après le diagramme de Bode de  $G(j\omega)$  représenté figure 2.17, le système bouclé ne présente pas d'oscillation en régime libre :  $\epsilon(t)$  tend vers 0 pour  $e(t) = 0$ .

Que se passe-t-il en régime forcé avec  $e(t) = e_1 \sin(\omega_1 t)$  avec, par exemple,  $\omega_1 = 4 * \pi$  rad/s ?

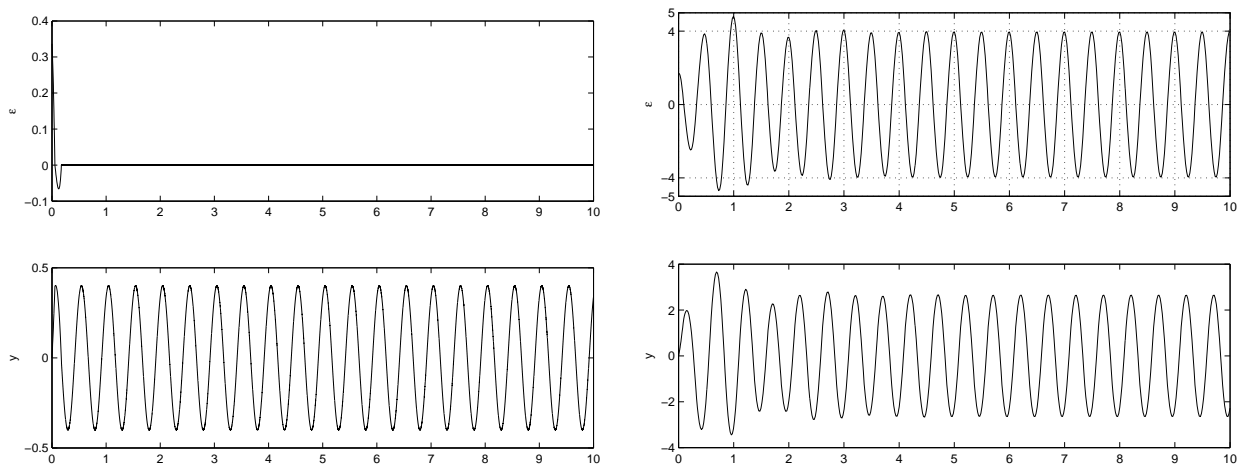


FIG. 2.25 – Réponse du système bouclé à  $e(t) = e_1 \sin(\omega_1 t)$  avec  $\omega_1 = 4 * \pi$ ,  $e_1 = 0.4$  (gauche) et  $e_1 = 2$  (droite)

On simule sous Simulink le système bouclé Figure 2.24 avec  $e_1 = 0.4$  puis avec  $e_1 = 2$  (voir Figure 2.25). On constate qu'en fonction du choix de  $e_1$ , le comportement est totalement différent : dans le premier cas  $\epsilon(t)$  tend vers 0, dans le second cas,  $\epsilon(t)$  est un signal périodique caractérisé par sa période et son amplitude. Contrairement au cas des systèmes linéaires temps invariants, le comportement observé peut dépendre de l'amplitude  $e_1$  du signal d'entrée  $e(t)$ .

Est-il possible de prévoir, a priori, ce comportement et d'en déterminer ses caractéristiques, en fonction de  $e_1$  et de  $\omega_1$  ? La réponse est oui.

Pour cela, la méthode du premier harmonique est appliquée. Elle consiste à supposer que les signaux du système bouclé sont sinusoïdaux à la pulsation  $\omega_1$  et à remplacer dans le schéma du système en boucle fermée la non linéarité  $\Phi$  par son gain complexe équivalent  $N(\epsilon_1)$ . On obtient le schéma Figure 2.26. En procédant comme dans le cas d'un système bouclé linéaire, on obtient :

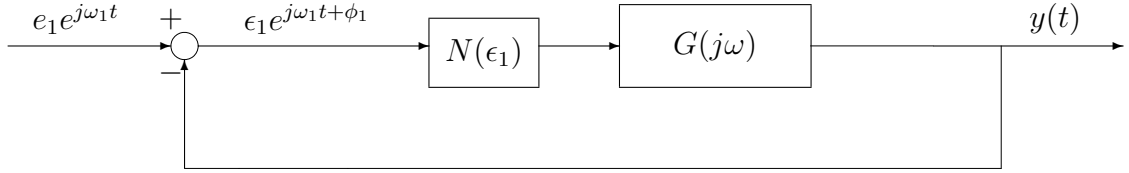


FIG. 2.26 – Système rebouclé sur gain complexe équivalent

$$\underbrace{(1 + G(j\omega_1)N(\epsilon_1))}_{Z(\epsilon_1, \omega_1)} \epsilon_1 = e_1 e^{-j\phi_1}. \quad (2.2)$$

Dans le cas de l'exemple introductif, on a :

$$Z(\epsilon_1, \omega_1) = \left( 1 + 4 \frac{(j\omega + 10)^2}{(j\omega + 10)^3} \left( K + \frac{4}{\pi \epsilon_1} \right) \right) \epsilon_1$$

Le signal  $\epsilon(t)$  sera sinusoïdal à la pulsation  $\omega_1$  si cette équation admet une solution  $(\epsilon_1, \phi_1)$  avec  $\epsilon_1 \neq 0$ . Cette équation est dans le domaine complexe : il lui correspond deux équations réelles obtenues, par exemple, en égalant module et argument du terme de gauche avec module et argument du terme de droite. En prenant les modules, on obtient :

$$|Z(\epsilon_1, \omega_1)| = e_1, \quad (2.3)$$

soit une équation où seule l'inconnue  $\epsilon_1$  apparaît. Par suite, soit on résout directe l'équation (2.2) en  $\epsilon_1$  et en  $\phi_1$ , soit on résout l'équation (2.3) en  $\epsilon_1$ . En fonction des valeurs de  $e_1$  et  $\omega_1$  considérées, ces deux équations n'admettent pas forcément une solution. Pour illustrer ce phénomène, la pulsation  $\omega_1$  va être fixée et l'existence de solutions en fonction de  $e_1$  va être étudiée. Pour cela, on va d'abord étudier la résolution de l'équation (2.2) puis étudier la résolution de l'équation (2.3).

L'équation (2.2) peut être résolue graphiquement. Pour cela, dans le plan complexe, on représente la courbe générée par  $Z(\epsilon_1, \omega_1)$  pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$ . La courbe générée par  $e_1 e^{-j\phi_1}$  pour  $\phi$  allant de 0 à  $2\pi$  est un cercle de centre 0 et de rayon  $e_1$ . Par suite, l'équation (2.2) admet une solution si ces deux courbes ont au moins un point d'intersection, voir Figure 2.27. Dans certaines situations, on peut ne pas avoir d'intersection entre les deux tracés pour certaines valeurs de  $e_1$ , voir Figure 2.28, ce qui traduit l'absence de solution à l'équation (2.2) et donc la non apparition d'oscillations. Sur la figure 2.28, la plus petite valeur  $e_1^s$  de  $e_1$  pour laquelle il y a intersection entre les deux tracés est appelée *seuil de synchronisation*.

De même, l'équation (2.3) peut être résolue graphiquement en traçant  $|Z(\epsilon_1, \omega_1)|$  en fonction de  $\epsilon_1$ .

**Retour à l'exemple** L'étude du comportement est d'abord faite pour  $\omega_1 = 4\pi$  rad/s et en fonction de  $e_1$ . D'après les courbes représentées figure 2.29, à droite :

- pour  $e_1 < 0.5$ , il n'y a pas d'intersection entre les deux tracés pour ces valeurs d' $e_1$ . Par suite,  $\epsilon(t)$  n'oscillera pas.

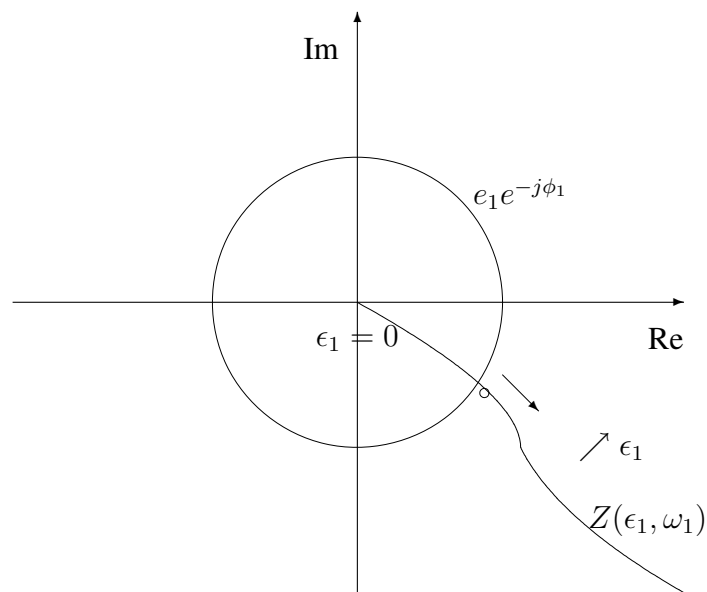


FIG. 2.27 – Tracés de  $Z(\epsilon_1, \omega_1)$  pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$  et de  $e_1 e^{-j\phi_1}$  pour  $\phi$  allant de 0 à  $2\pi$

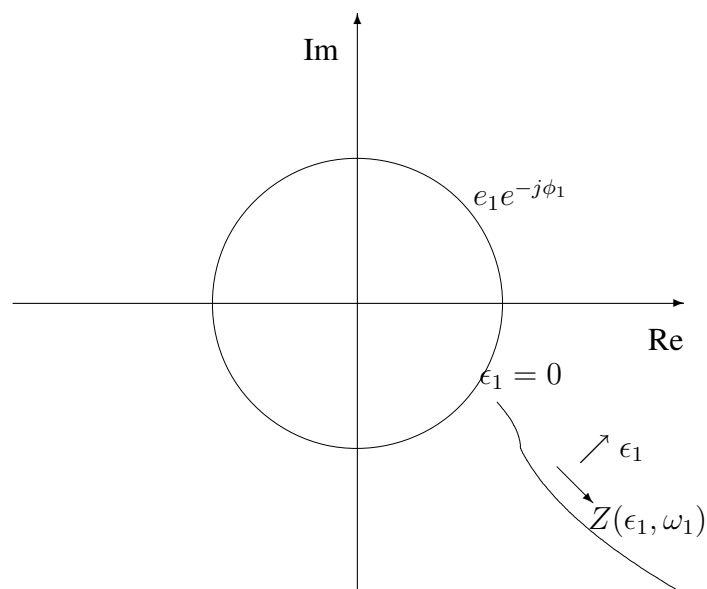


FIG. 2.28 – Tracés de  $Z(\epsilon_1, \omega_1)$  pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$  et de  $e_1 e^{-j\phi_1}$  pour  $\phi$  allant de 0 à  $2\pi$

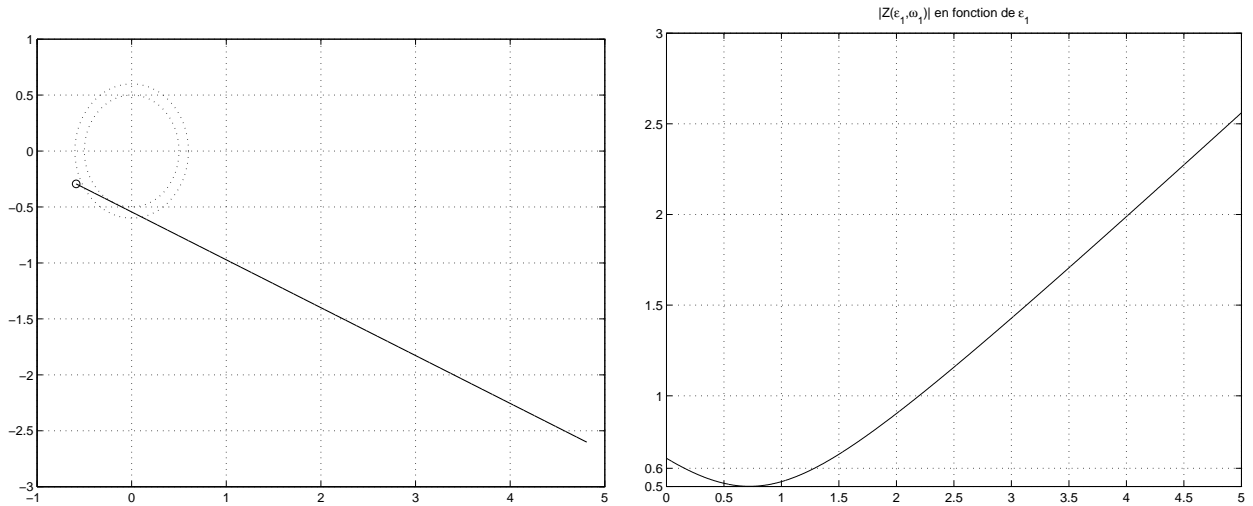


FIG. 2.29 – Tracé de  $Z(\epsilon_1, \omega_1)$  pour  $\epsilon_1$  allant de 0 à  $+\infty$  dans le plan complexe, à droite, et de  $|Z(\epsilon_1, \omega_1)|$  en fonction de  $\epsilon_1$ , à gauche

- pour  $e_1 \geq 0.5$ ,  $\epsilon(t)$  est un signal périodique de pulsation propre  $\omega_1$ . L'amplitude se détermine à partir de la figure 2.29, courbe de droite. Par exemple, pour  $e_1 = 2$ , on a  $\epsilon_1 = 4$ .

Le seuil de synchronisation est donc de 0.5. Cette analyse confirme le résultat des simulations temporelles figure 2.25. De la figure 2.29, courbe de droite, on en déduit que pour certaines valeurs de  $e_1$ , on a deux valeurs possibles pour  $\epsilon_1$ , par exemple, pour  $e_1 = 0.6$ . On peut donc obtenir sur le système pour cette valeur de  $e_1$ , deux valeurs de  $\epsilon_1$  possibles, voir Figure 2.30.

Il est aussi commode de représenter  $\epsilon_1$  en fonction de  $e_1 = |Z(\epsilon_1, \omega_1)|$ , voir Figure 2.31.

**Phénomène de saut via un exemple** On considère le système :

$$G(p) = \frac{909}{(p + 100)(p^2 + 0.1p + 1)}$$

et la saturation comme non linéarité<sup>5</sup> Figure 1.3.

On veut étudier le régime forcé pour un signal sinusoïdal d'entrée de pulsation  $\omega_1 = 2$  rad/s. Pour cette pulsation, on peut tracer  $\epsilon_1$  en fonction de  $e_1$ . Pour cela

- Quand  $\epsilon_1 \in [0, 1]$ , on a  $w(t) = \epsilon(t)$  : la non linéarité se comporte comme un gain de 1. Par suite, on a

$$\begin{aligned} |Z(\epsilon_1, \omega_1)| &= |1 + G(j\omega_1)|\epsilon_1 \\ &\simeq 2\epsilon_1 \end{aligned}$$

La relation  $|Z(\epsilon_1, \omega_1)| = e_1$  donne dans le plan  $(e_1, \epsilon_1)$  une droite de pente 0.5, définie pour  $\epsilon_1 \in [0, 1]$ .

- Quand  $\epsilon_1 \in [1, +\infty[$ , on a saturation : le gain complexe équivalent est alors donné par :

$$N(\epsilon_1) = \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \left( \frac{1}{\epsilon_1} \right) + \frac{1}{\epsilon_1} \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_1^2}} \right)$$

Par suite,

$$|Z(\epsilon_1, \omega_1)| = |1 + G(j\omega_1)N(\epsilon_1)|\epsilon_1$$

<sup>5</sup>Quand la saturation est remplacée par un gain de 1, le système bouclé est stable.



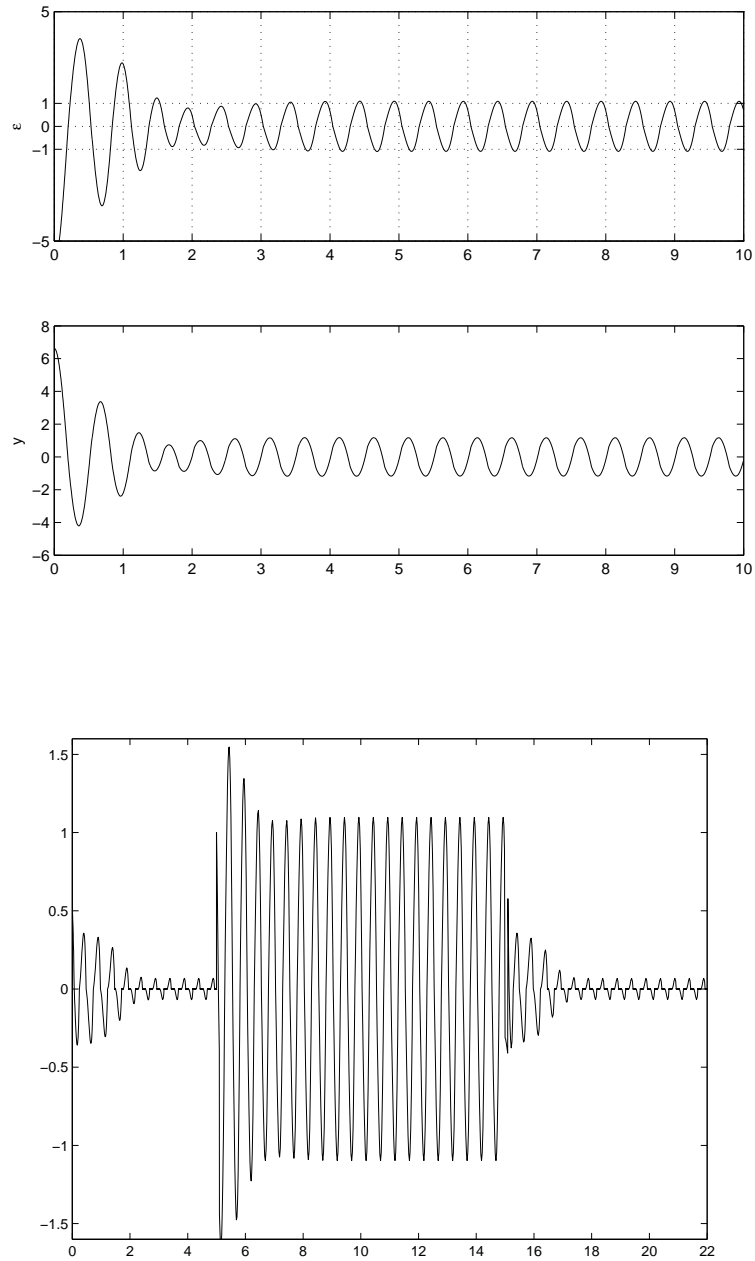


FIG. 2.30 – Réponse du système bouclé à  $e(t) = e_1 \sin(\omega_1 t)$  avec  $\omega_1 = 4 * \pi$ ,  $e_1 = 0.6$

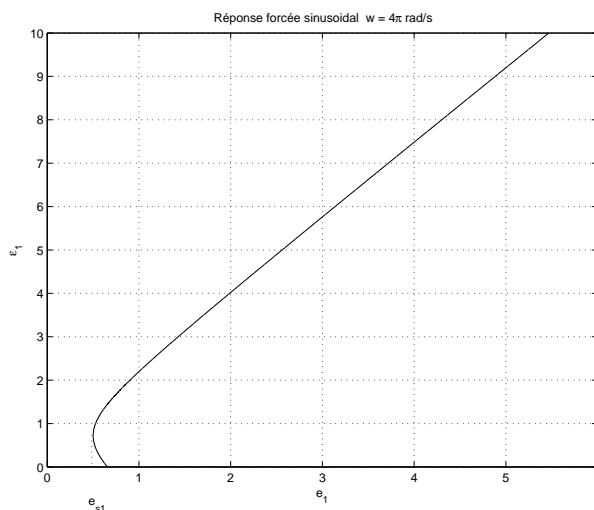


FIG. 2.31 –  $\epsilon_1$  en fonction de  $e_1 = |Z(\epsilon_1, \omega_1)|$

La relation  $|Z(\epsilon_1, \omega_1)| = e_1$  donne dans le plan  $(e_1, \epsilon_1)$  donne la courbe représentée figure 2.32.

La courbe représentée figure 2.32 présente la particularité de permettre trois valeurs possibles de  $\epsilon_1$  pour  $e_1 \in [0.17, 2.14]$ . Interpréter.

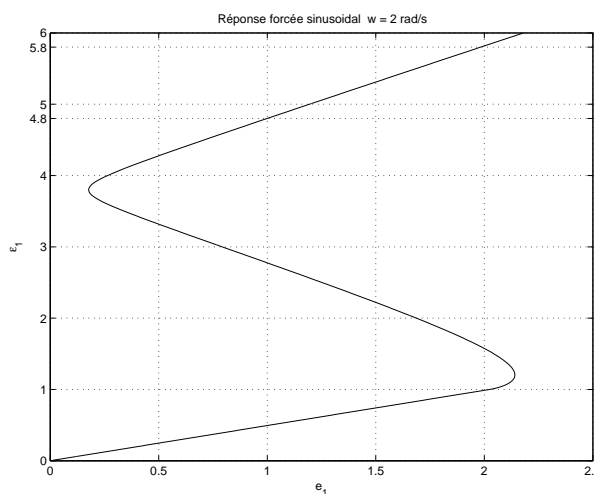


FIG. 2.32 –  $\epsilon_1$  en fonction de  $e_1 = |Z(\epsilon_1, \omega_1)|$

On simule le comportement du système bouclé avec  $e_1$  variant dans le temps (voir figure 2.33). Le comportement temporel est-il cohérent avec l'interprétation de la courbe figure 2.32 ?

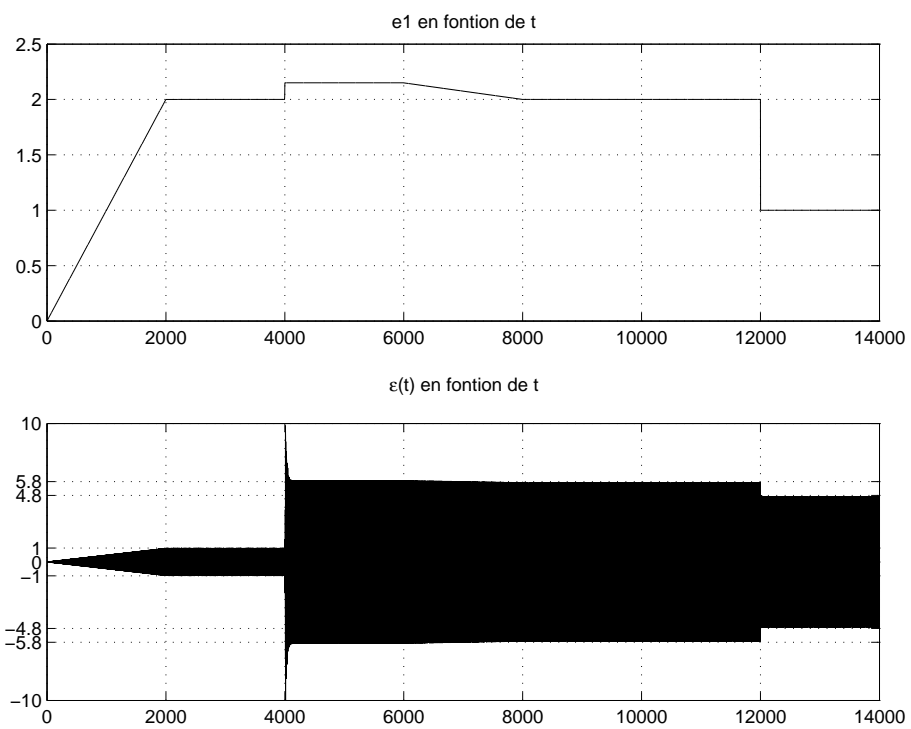


FIG. 2.33 – Comportement temporel



# Chapitre 3

## Annexe

### 3.1 Tracé asymptotique de diagrammes de Bode

Rappeler les règles permettant de tracer un diagramme asymptotique de Bode peut sembler incongru. En effet, la plupart des logiciels de calcul scientifique généraux (comme `Matlab`) permettent de tracer le diagramme de Bode en une fraction de seconde. En fait, l'intérêt de connaître ses règles réside dans la capacité à analyser un diagramme de Bode. Après avoir rappeler les règles de tracé de diagramme de Bode, des exercices sont proposés en fin de section. Ils consistent à partir d'un diagramme de Bode à ébaucher la fonction de transfert correspondante.

Etant donnée une fonction de transfert réelle rationnelle  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j \arg(G(j\omega))}$ , le diagramme de Bode consiste à

1. représenter le module de  $G(j\omega)$  exprimé en dB et noté  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$  en fonction du logarithme de la pulsation  $\log(\omega)$  ;
2. représenter la phase de  $G(j\omega)$ , notée  $\arg(G(j\omega))$ , en fonction du logarithme de la pulsation  $\log(\omega)$  ;

**Propriété 1** Dans le cas où  $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdots G_r(j\omega)$ , on a

1.  $|G(j\omega)|_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} + \cdots + |G_r(j\omega)|_{dB}$  ;
2.  $\arg(G(j\omega)) = \arg(G_1(j\omega)) + \cdots + \arg(G_r(j\omega))$  ;
3.  $|G(j\omega)^{-1}|_{dB} = -|G(j\omega)|_{dB}$  et  $\arg(G(j\omega)^{-1}) = -\arg(G(j\omega))$ .

Les propriétés précédentes peuvent être mises à profit pour faire un tracé approché du diagramme de Bode. Les propriétés 1. et 2. permettent de réduire le tracé du diagramme de Bode du transfert :

$$G(j\omega) = K \times (j\omega)^{\pm k} \times \frac{\prod_l (j\omega\tau_l + 1) \prod_m \left( \left( \frac{j\omega}{\omega_m} \right)^2 + 2\xi_m \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right)}{\prod_p (j\omega\tau_p + 1) \prod_q \left( \left( \frac{j\omega}{\omega_q} \right)^2 + 2\xi_q \frac{j\omega}{\omega_q} + 1 \right)} \quad (3.1)$$

à la combinaison des tracés de diagrammes de Bode de :

1.  $K \times (j\omega)^{\pm k}$

$$2. (j\omega\tau + 1)^{\pm 1}$$

$$3. \left( \left( \frac{j\omega}{\omega_m} \right)^2 + 2\xi_m \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right)^{\pm 1}.$$

La propriété 3. permet de relier le tracé des diagrammes de Bode de  $K \times (j\omega)^k$ ,  $(j\omega\tau + 1)$  et  $\left( \left( \frac{j\omega}{\omega_m} \right)^2 + 2\xi_m \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right)$  à ceux de  $K (j\omega)^{-k}$ ,  $(j\omega\tau + 1)^{-1}$  et  $\left( \left( \frac{j\omega}{\omega_m} \right)^2 + 2\xi_m \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right)^{-1}$ .

Dans ce qui suit, on considère que  $\omega \geq 0$ .

**Diagramme de Bode de  $G(j\omega) = K \times (j\omega)^{-k}$ .** Comme  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) - 20k \log(\omega)$ , le tracé du module  $|G(j\omega)|_{dB}$  est une droite de pente  $-20 \times k$  dB par décades. Comme  $\arg(G(j\omega)) = -90^\circ \times k$ , la phase est indépendante de la pulsation. Voir la figure 3.1 dans le cas d'un intégrateur ( $k = 1$  et  $K = 1$ ).

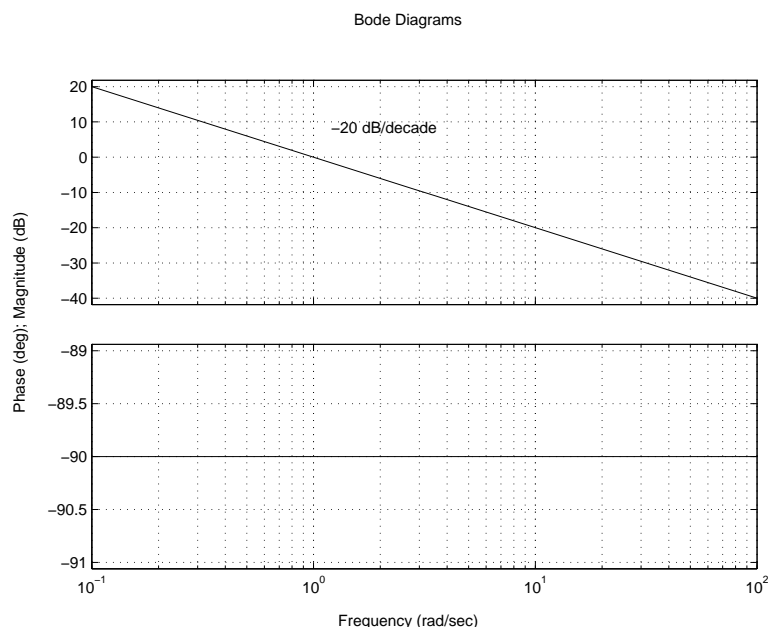


FIG. 3.1 – Diagramme de Bode d'un intégrateur :  $\frac{1}{p}$

**Diagramme de Bode de  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$ .** Pour  $\omega\tau \ll 1$ , on a  $|G(j\omega)|_{dB} \approx 0dB$  et  $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$ . Pour  $\omega\tau \gg 1$ , on a  $|G(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(\omega) - 20 \log(|\tau|)$  et  $\arg(G(j\omega)) \approx +90^\circ$  si  $\tau < 0$  et  $\arg(G(j\omega)) \approx -90^\circ$  si  $\tau > 0$ . Pour  $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$ , le tracé du module  $|G(j\omega)|_{dB}$  est approché par une droite horizontale, à  $0dB$  et celui de la phase par une droite horizontale à  $0^\circ$ . Pour  $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$ , le tracé du module  $|G(j\omega)|_{dB}$  est approché par droite de pente  $-20$  dB/décade et celui de la phase par une droite horizontale à  $90^\circ$  si  $\tau < 0$  et à  $-90^\circ$  si  $\tau > 0$ . Voir la figure 3.2 pour le tracé du transfert  $\frac{0,1}{0,1p+1}$ .

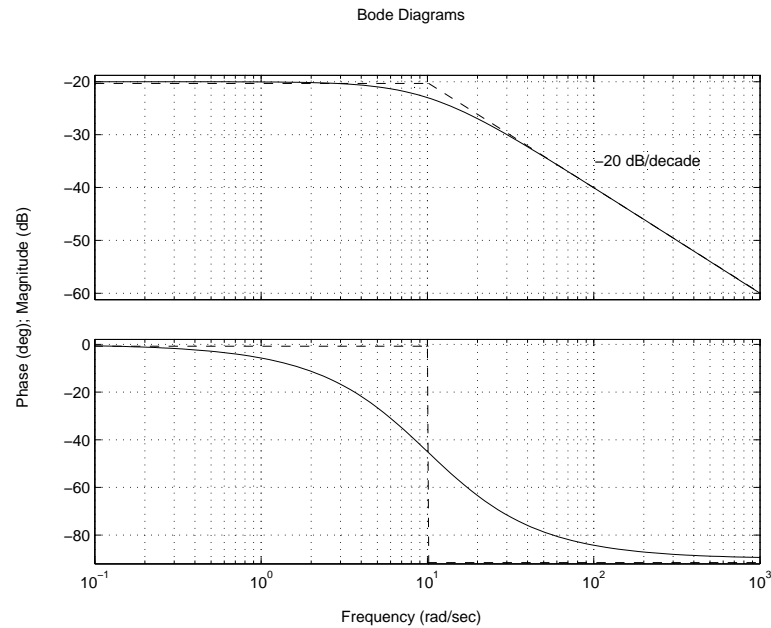


FIG. 3.2 – Diagramme de Bode d’une fonction de transfert du premier ordre :  $\frac{0,1}{0,1p+1}$

**Diagramme de Bode de**  $G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_q} + 2\xi_q \frac{j\omega}{\omega_q} + 1}$  Pour  $\omega \ll \omega_q$ , on a  $|G(j\omega)|_{dB} \approx 0dB$  et  $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$ . Pour  $\omega \gg \omega_q$ , on a  $|G(j\omega)|_{dB} \approx -40 \log(\omega) + \beta$  et  $\arg(G(j\omega)) \approx -180^\circ$  si  $\xi_q > 0$  et  $\arg(G(j\omega)) \approx 180^\circ$  si  $\xi_q < 0$ . Par suite, pour  $\omega \ll \omega_q$ , le tracé du module  $|G(j\omega)|_{dB}$  est approximé par une droite horizontale, à  $0dB$  et celui de la phase par une droite horizontale à  $0^\circ$ . Pour  $\omega \gg \omega_q$ , le tracé du module  $|G(j\omega)|_{dB}$  est approximé par droite de pente  $-40$  dB/décade et celui de la phase par une droite horizontale à  $180^\circ$  si  $\xi_q < 0$  et à  $-180^\circ$  si  $\xi_q > 0$ . Voir la figure 3.3 pour le tracé de transferts du second ordre avec différentes valeurs possibles de l’amortissement  $\xi_q$  pour une même pulsation propre  $\omega_q = 10$ . Pour  $\xi_q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , le tracé du module présente un maximum de  $\frac{1}{2\xi_q \sqrt{1-\xi_q^2}}$  à la pulsation  $\omega_q \sqrt{1-2\xi_q^2}$ .

**Propriété 2 : relation de Bode entre le gain et la phase** Dans le cas d’une fonction de transfert sans pôle et zéro instables, à une variation du gain  $|G(j\omega)|_{dB}$  à une pulsation donnée de  $20 \times N$  correspond une variation de la phase  $\arg(G(j\omega))$  à cette pulsation de  $90^\circ \times N$ .

### Règles sur le tracé approché du diagramme de Bode d’une fonction de transfert

**Etape 1** Mettre la fonction de transfert sous la forme (3.1) ;

**Etape 2** Tracer le module asymptotique en basses pulsations : il est de pente  $20 \times (\pm k)$  dB par décade et passe pour  $\omega = 1$  par le point  $20 \log(K)$ .

**Etape 3** Cette asymptote est tracée jusqu’“à la première cassure, c’est-à-dire la plus petite des valeurs  $\frac{1}{|\tau_i|}$ ,  $\frac{1}{|\tau_p|}$ ,  $\omega_m$  et  $\omega_q$ . La pente de la droite est alors incrémentée de  $\pm 1$  ou de  $\pm 2$  suivant que la cassure corresponde à un terme du premier ordre au numérateur ou au dénominateur

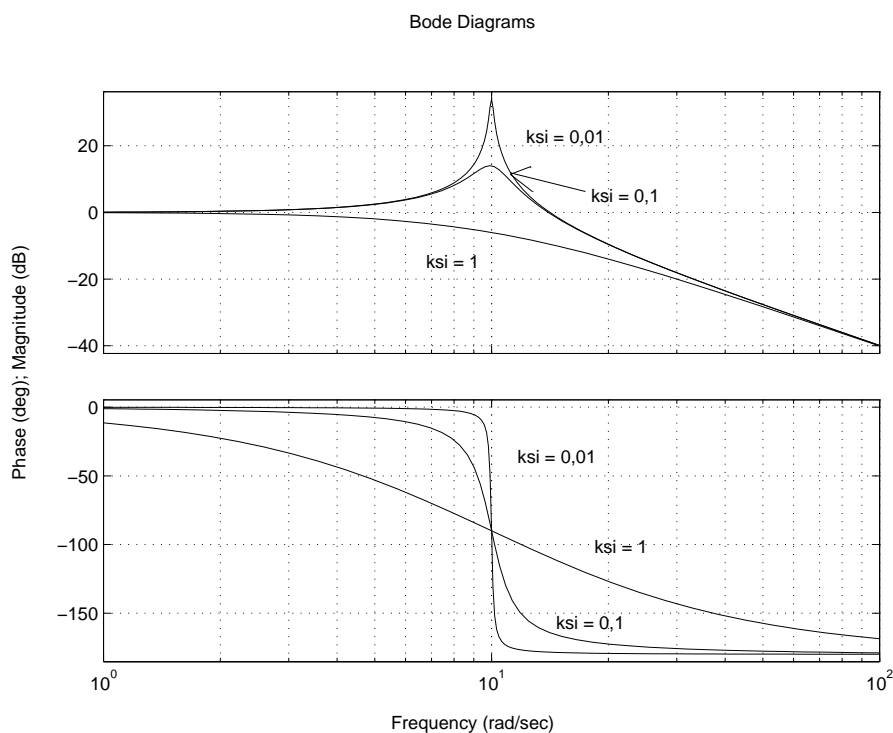


FIG. 3.3 – Diagramme de Bode de fonctions de transfert du second ordre

ou encore à un terme du second ordre au numérateur ou au dénominateur. Effectuer de façon itérative cette opération pour les “cassures” suivantes.

**Etape 4** Tracer la phase asymptotique en basses pulsations : elle est constante et égale à  $90^\circ \times (\pm k)$ .

**Etape 5** Cette asymptote est tracée jusqu’à la première cassure, c’est-à-dire la plus petite des valeurs  $\frac{1}{|\tau_i|}$ ,  $\frac{1}{|\tau_p|}$ ,  $\omega_m$  et  $\omega_q$ . La valeur de la phase est alors incrémentée de  $\pm 90^\circ$  ou de  $\pm 180^\circ$  suivant que la cassure corresponde à un terme du premier ordre au numérateur ou au dénominateur, stable ou instable ou encore à un terme du second ordre au numérateur ou au dénominateur, stable ou instable. Effectuer de façon itérative cette opération pour les “cassures” suivantes.

### 3.1.1 Exemple

On considère la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{40(p + 10)}{(p + 400)(p^2 + 0,8p + 1)}$$

soit

$$G(p) = \frac{\left(\frac{p}{10} + 1\right)}{\left(\frac{p}{400} + 1\right)(p^2 + 0,8p + 1)}$$



Cette fonction a un zéro réel en  $-10$ , un pôle en  $-400$  et deux pôles complexes conjugués de pulsation propre  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$  et d'amortissement  $\xi_1 = 0,4$ . Comme elle n'a pas de pôle ni de zéro en 0, le tracé asymptotique en basse pulsation du module est une droite de pente 0 et d'abscisse le gain statique de la fonction de transfert exprimée en  $dB$  soit  $0 \text{ dB}$ ; le tracé de la phase est une droite de pente 0 et d'abscisse 0 degré.

A partir de la pulsation  $\omega = \omega_1$  (pulsation propre des deux pôles complexes conjugués), la pente du tracé asymptotique en basses pulsations du module est diminuée de  $-40 \text{ dB/dec}$  (on obtient ainsi une pente  $-2$ ). Du fait de la relation de Bode entre la phase et le gain, le tracé asymptotique en basses pulsations de la phase est une droite de pente 0 et d'abscisse  $-180$  degrés. A partir de la pulsation  $10 \text{ rad/s}$  (qui correspond au zéro en  $-10$ ), la pente du tracé asymptotique du module est augmentée de  $+20 \text{ dB/dec}$  (on obtient ainsi une pente  $-1$ ); le tracé de la phase est une droite de pente 0 et d'abscisse  $-90$  degrés. A partir de la pulsation  $400 \text{ rad/s}$  (qui correspond au pôle en  $-400$ ), la pente du tracé asymptotique du module est diminuée de  $+20 \text{ dB/dec}$  (on obtient ainsi une pente  $-2$ ); le tracé de la phase est alors une droite de pente 0 et d'abscisse  $-180$  degrés.

On obtient ainsi le tracé représenté figure 3.4 : en gras, le tracé asymptotique et en traits tirés le tracé du bode obtenu par la fonction `bode` de `Matlab`.

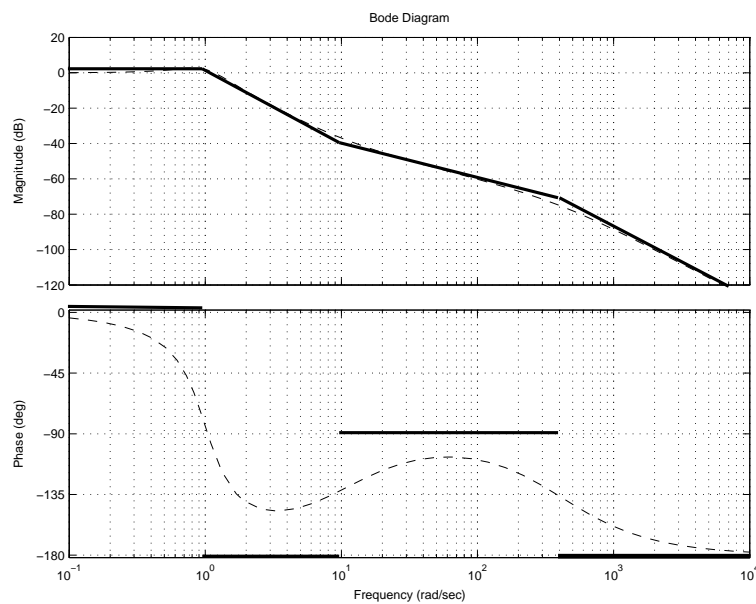


FIG. 3.4 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{40(p+10)}{(p+400)(p^2+0,8p+1)}$

### 3.1.2 Exercices

**Ex. 1** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{p+a}{p(p+b)}$$

avec  $0 < a \ll b$ .

**Ex. 2** Evaluer la fonction de transfert associée au diagramme de Bode représenté figure 3.5.  
*Nota Bene* : dans cette série d'exercices, on demande simplement d'évaluer les transferts représentés sans essayer de les déterminer exactement.

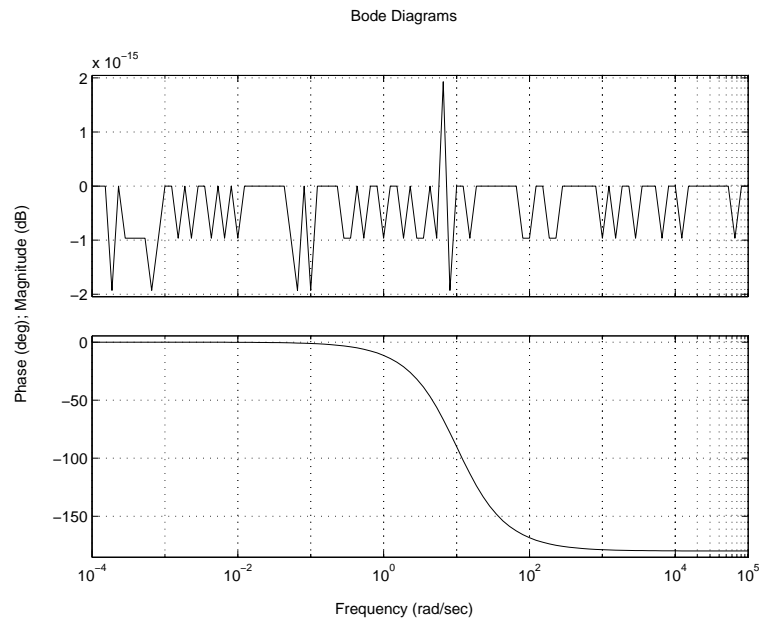


FIG. 3.5 – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert à déterminer

**Ex. 3** Evaluer la fonction de transfert associée au diagramme de Bode représenté figure 3.6.

**Ex. 4** Evaluer la fonction de transfert associée au diagramme de Bode représenté figure 3.7.

**Ex. 5** Evaluer la fonction de transfert associée au diagramme de Bode représenté figure 3.8.

### 3.1.3 Solution des exercices

**Ex. 2**  $\frac{0,1p-1}{0,1p+1}$

**Ex. 3**  $10^{-4} \frac{(-10p+1)(0,01p+1)}{p(-0,01p+1)(-0,001p+1)}$

**Ex. 4**  $10^{-2} \frac{p^2+0,1p+1}{\left(\frac{p}{10}\right)^2+0,01\frac{p}{10}+1}$

**Ex. 5**  $\frac{p^2+0,01p+1}{p^2+0,2p+1}$

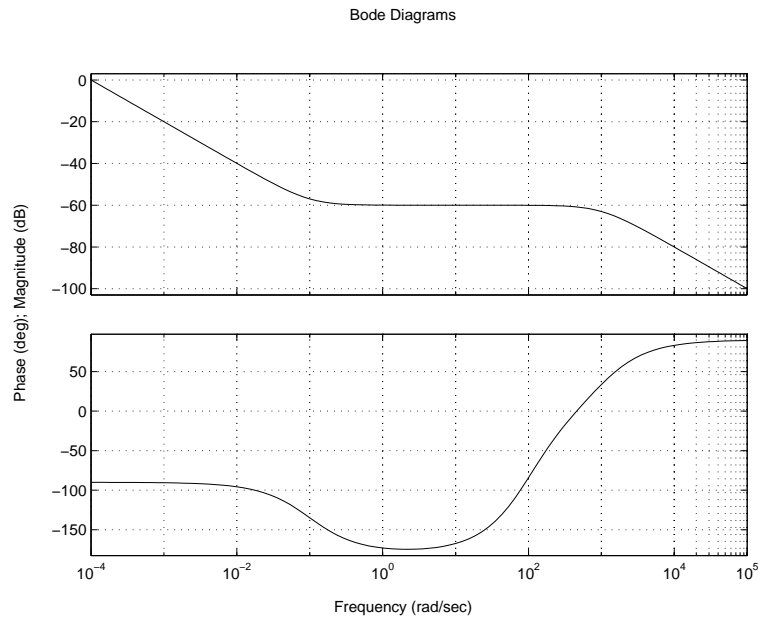


FIG. 3.6 – Diagramme de Bode d’une fonction de transfert à déterminer

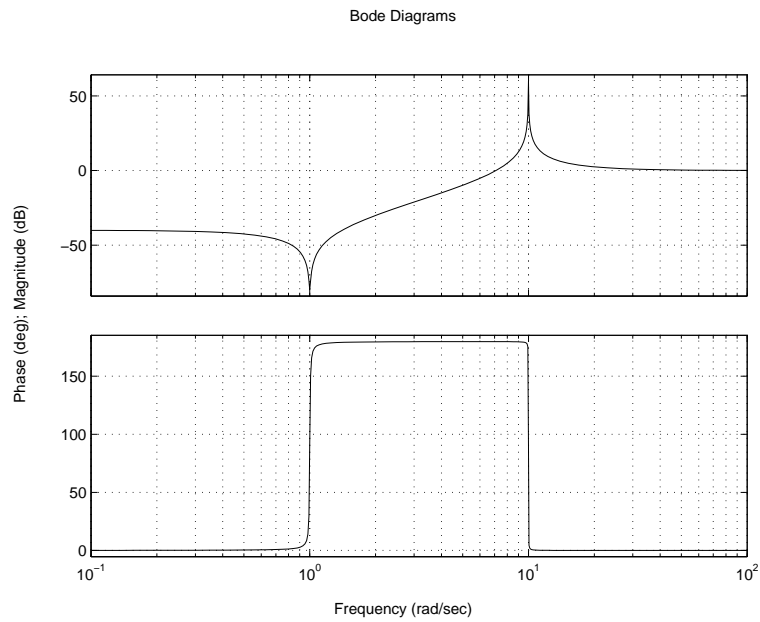


FIG. 3.7 – Diagramme de Bode d’une fonction de transfert à déterminer

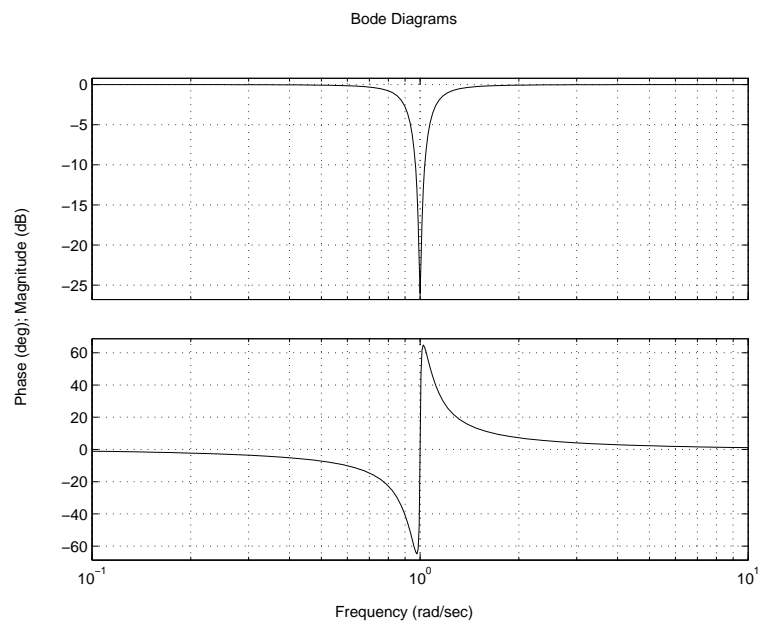


FIG. 3.8 – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert à déterminer