



UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE
UFR de SCIENCES CAEN

Commande des systèmes continus

Master Pro 2A

Automatique Electronique Informatique Industrielle

Gérard Scorletti

Maître de conférences à l'Université de Caen

GREYC AUTO

6 bd du Maréchal Juin, F14050 Caen cedex

Tel : 02 31 45 27 12

e-mail : gerard.scorletti@unicaen.fr

©Gérard Scorletti, France, 2005

Page web : http://www.greyc.ensicaen.fr/~scorlett/Gerard_S/DESS_comfreq.html

20 février 2007

L'objectif de ce document est de présenter une introduction aux méthodes de réglage de lois de commande par l'utilisation des outils classiques de l'automatique fréquentielle. Malgré leur âge vénérable, elles sont encore largement utilisées dans l'industrie y compris dans des domaines de haute technologie. Par exemple, l'algorithme qui gère l'arrêt des rames de métros sur la nouvelle ligne automatique numéro 14 à Paris a été obtenu par leur mise en œuvre. Leur inconvénient est de demander une certaine expertise de la part du designer et de ne pas permettre de traiter aisément la commande de systèmes avec plusieurs actionneurs et plusieurs sorties à asservir.

Remerciements Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont permis d'améliorer substantiellement la qualité scientifique et formelle par leurs critiques et leurs suggestions. Je remercie en particulier Philippe Dorléans, Vincent Fromion et Eric Magarotto pour leur aide précieuse.

Table des matières

1	Le cahier des charges dans le domaine fréquentiel	5
1.1	Introduction	5
1.2	Etude dans le domaine fréquentiel	8
1.3	Stabilité	11
1.4	Spécification de Performance 1 : suivi de trajectoires de référence (consignes)	12
1.4.1	Etude du régime permanent pour les différentes classes de signaux	12
1.4.2	Etude du régime transitoire	14
1.5	Spécification de Performance 2 : rejet/atténuation de signaux de perturbation	19
1.6	Spécification de Performance 3 : atténuation des bruits de mesure.	22
1.7	Spécification de Performance 4 : commande modérée	22
1.8	Exemple de l'analyse de l'asservissement d'un moteur à courant continu	22
1.9	Exercices	23
1.9.1	Réponses fréquentielles et temporelles d'un système en boucle fermée	23
1.9.2	De la dépendance des spécifications d'un cahier des charges	26
1.10	Quelles performances peut-on spécifier ?	29
1.11	En résumé	33
2	Stabilité et robustesse du système bouclé	35
2.1	Critère de Nyquist	36
2.2	Marges de stabilité classiques	37
3	Synthèse de correcteurs	43
3.1	Spécification de la performance sur la boucle ouverte	44
3.1.1	Stabilité	44
3.1.2	Performance 1 : suivi de référence	44
3.1.3	Performance 2 : rejet de perturbations d'entrée en échelon	48
3.1.4	Limitation de la commande	48
3.1.5	Influence des bruits	49
3.1.6	Marges de stabilité	49
3.1.7	En résumé	50
3.2	Structures de correcteurs élémentaires	51
3.2.1	Proportionnel : $C(p) = k^c$	52
3.2.2	Proportionnel Intégral	56
3.2.3	Avance de phase	60
3.2.4	Filtre cloche	64
3.2.5	Filtre passe bas	68
3.2.6	Une remarque en guise de conclusion	68
3.3	Correcteur à deux degrés de liberté (de l'intérêt de la rétroaction)	70

4	Commande par modèle interne	73
4.1	Commande par modèle interne	73
4.1.1	Justification de la structure de commande par modèle interne	73
4.1.2	Lien de la structure de commande par modèle interne avec la structure de commande à un degré de liberté	74
4.1.3	Propriétés de la structure par modèle interne	75
4.1.4	Mise au point d'un correcteur par modèle interne sur un exemple simple	75
4.2	Commande par modèle interne pour les procédés instables	81
5	Annexe	87
5.1	Transformée de Laplace de signaux élémentaires (Eric Magarotto©)	87
5.2	Systèmes du premier ordre et du second ordre	88
5.3	Tracé asymptotique de diagrammes de Bode	91
5.3.1	Exemple	95
5.3.2	Exercices	95
5.3.3	Solution des exercices	98
5.4	Synthèse de correcteurs numériques par les méthodes de synthèse continues	98
5.5	Différentielle logarithmique	103
5.6	Notion de pôles dominants	103

Chapitre 1

Le cahier des charges dans le domaine fréquentiel

1.1 Introduction

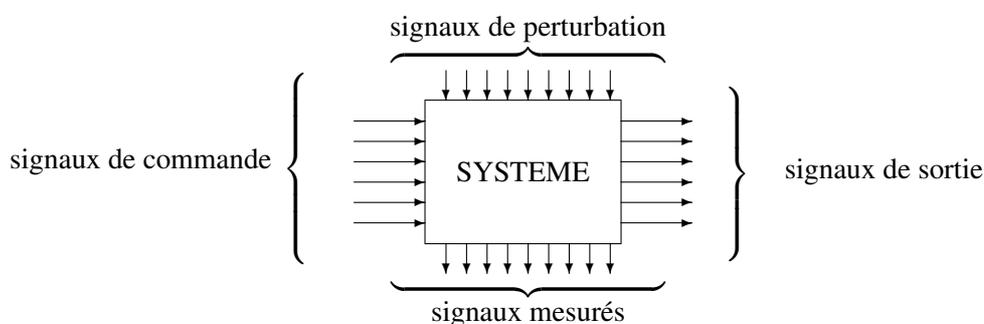


FIG. 1.1 – Système à commander

Le but Les signaux à commander doivent être proches de signaux désirés (ou signaux de référence ou de consigne) bien que le système soit soumis à des signaux de perturbations non contrôlables et assez souvent non mesurés. Ce sont les objectifs de performance. Pour cela, on doit appliquer des signaux de commande (en général, ils doivent appartenir à un certain ensemble) à l'entrée du système par l'intermédiaire d'actionneurs, calculés à partir des signaux mesurés par les capteurs et des signaux de référence. Les signaux mesurés peuvent être entachés de bruits de mesure. L'objectif est donc de mettre au point l'algorithme qui permette de construire le signal de commande à partir du signal mesuré (loi de commande). Cette loi de commande va être réalisée par un correcteur. Dans la suite du document, seul le terme de correcteur sera utilisé.

Le **cahier des charges** doit contenir la définition de l'ensemble des signaux désirés. Le choix des actionneurs/capteurs dépend de cela. Le choix des actionneurs définit un ensemble de signaux admissibles (tenant compte par exemple de la saturation des actionneurs). Rien ne garantit a priori qu'avec le choix initial des objectifs de performance, des actionneurs et des capteurs un correcteur existe.

La démarche

1. Pour commander un système, il est nécessaire de connaître son comportement c'est-à-dire le lien entre les différents signaux d'entrée (commande, perturbations, bruits) et les différents signaux de sortie (sortie à commander, mesure). Cette connaissance prend la forme d'un modèle mathématique

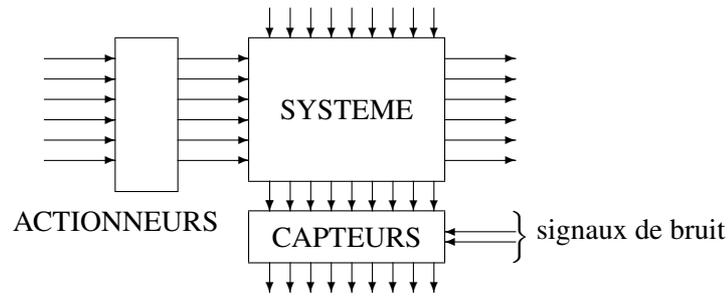


FIG. 1.2 – Système à commander

quantitatif, acquis par identification et/ou modélisation physique. Il doit s’accompagner d’informations sur les classes de signaux susceptibles d’être appliqués en entrée (perturbations, bruits).

2. Il faut ensuite écrire le cahier des charges permettant de définir l’ensemble des signaux de sortie désirés, l’erreur que l’on peut tolérer entre les signaux réels de sortie et les signaux désirés, l’ensemble des signaux de commande qui est admissible, l’ensemble des signaux de perturbation, etc...
3. La dernière étape est la recherche de l’algorithme (loi) de commande qui satisfasse le cahier des charges pour le modèle mathématique représentant le système (synthèse). Il ne faut alors pas oublier que le but est que le cahier des charges soit vérifié sur le système bouclé réel et pas simplement sur le modèle manipulé. Assurer la **robustesse** du correcteur consiste à essayer d’avoir le plus de garanties a priori sur le bon fonctionnement du correcteur lorsqu’il est mis en œuvre sur le système réel.

Un schéma très général de correcteur est présenté figure 1.3. Le système à commander G est soumis à des signaux de perturbation mesurés v_1 ou non-mesurés v_2 . On cherche à faire suivre par la sortie z le signal de référence y^* . Pour cela, le signal y est mesuré par un capteur avec un bruit w . Le correcteur C admet donc comme entrée le signal de référence r , le signal de mesure bruité $y + w$ et la perturbation mesurée v_1 .

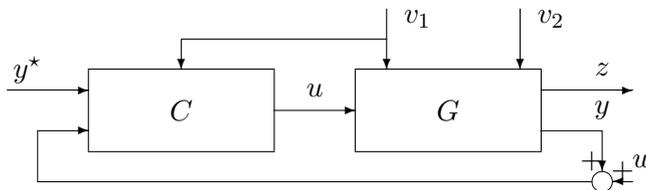


FIG. 1.3 – Système en boucle fermée général

Afin d’illustrer le réglage de lois de commande dans le domaine fréquentiel, nous allons considérer le schéma classique en boucle fermée représenté figure 1.4, qui est beaucoup plus simple.

Remarque Dans de nombreux cas, le problème de commande consiste à développer un correcteur discret qui sera programmé sur un ordinateur numérique afin de commander un procédé continu via un convertisseur analogique/numérique (pour les mesures) et un bloqueur + convertisseur numérique/analogique (pour les commandes à appliquer) (voir figure 1.5). Il est à noter que les méthodes efficaces d’Automatique se concentrent généralement sur deux problèmes :

1. synthèse d’un correcteur discret pour un procédé discret (approche “tout discret”) ;
2. synthèse d’un correcteur continu pour un procédé continu (approche “tout continu”).

Ces deux approches ne traitent donc pas du “vrai” problème qui est (dans un nombre important de cas) la commande d’un système continu par un correcteur numérique. Cela est dû au fait que le “vrai” problème est actuellement un problème ouvert.

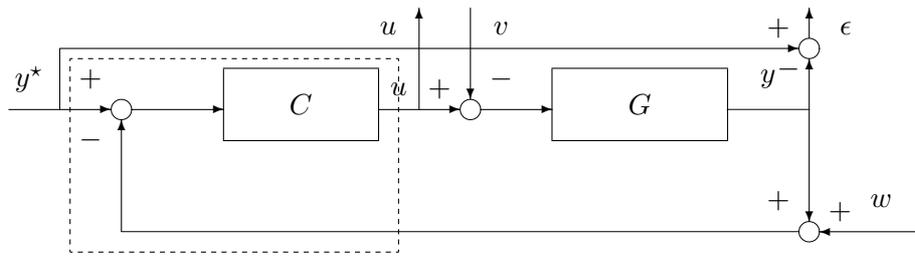


FIG. 1.4 – Système en boucle fermée illustratif

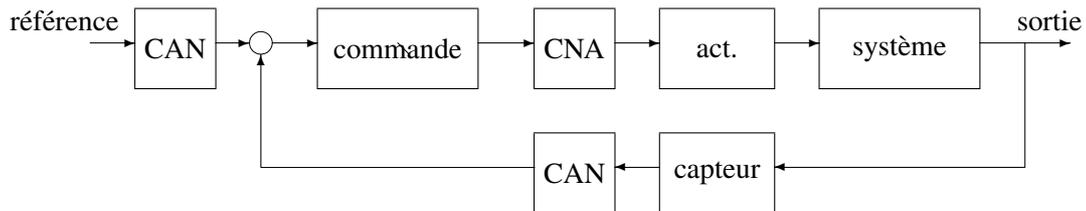


FIG. 1.5 – Problème de l’asservissement d’un système continu par un correcteur numérique

Le cours va se focaliser sur la commande des systèmes décrits pour un modèle linéaire invariant **continu** par des correcteurs linéaires invariants continus, dans le prolongement du cours sur les asservissements de licence L3. Une autre approche possible serait la mise au point d’un correcteur discret pour le système à commander décrit par un modèle discret. Les deux approches ont leurs avantages et leurs inconvénients. L’option du “tout continu” est néanmoins ici préférée à l’option du “tout discret” pour les deux raisons suivantes.

1. La grande majorité des systèmes physiques à commander sont par nature continus : les paramètres de leurs modèles continus ont donc un sens physique. La discrétisation mène à un modèle dont les paramètres ont perdu ce sens physique. Il est normal de préférer le modèle dont les paramètres ont un sens physique, notamment dans un contexte industriel. Un système sera d’autant plus efficacement commandé que l’on réussit à comprendre son comportement physique.
2. La seconde raison est que les méthodes présentées dans ce document utilisent de façon intensive l’approche fréquentielle. Pour les spécifications fréquentielles, il est plus aisé de travailler sur les modèles continus. Cependant, il est possible de synthétiser un correcteur discret à partir d’un modèle discret en utilisant les méthodes de synthèse continues. Pour cela, on utilisera une transformation qui lie modèle en temps continu et modèle en temps discret (ce point est développé en Annexe, section 5.4, page 98).

Dans le schéma représenté figure 1.4, il s’agit de faire suivre dans la mesure du possible par la sortie du système $y(t)$ un signal de référence $y^*(t)$ appartenant à un ensemble bien défini. L’erreur de suivi de trajectoires est désignée par $\epsilon(t) = y^*(t) - y(t)$. La façon dont la sortie du système suit la trajectoire de référence $y^*(t)$ peut être exprimée par le fait que $\epsilon(t)$ doit appartenir à un ensemble bien déterminé.

Cette spécification doit être réalisée malgré la présence de perturbations $v(t)$ qui agissent sur le système (par exemple en entrée de celui-ci) et des bruits $w(t)$ sur la mesure de la sortie $y(t)$. Même si les perturbations et/ou les bruits ne sont pas mesurés, on sait par contre a priori que ces signaux appartiennent à des ensembles déterminés.

De plus, la commande $u(t)$ appliquée doit être raisonnable par rapport à l’application considérée (elle ne doit pas solliciter de façon trop importante les actionneurs). Ici encore, cela revient à dire que l’on a défini pour $u(t)$ un ensemble admissible : le correcteur doit assurer que $u(t)$ appartient bien à cet ensemble.

Cela constitue les objectifs de **performance**. Ils se traduisent tous par le fait que pour des signaux d’entrée $y^*(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ appartenant à des ensembles bien définis, un correcteur est recherché tel que les signaux de sortie $y(t)$ et $u(t)$ appartiennent à des ensembles correspondant aux spécifications du cahier des

charges.

Une propriété nécessaire (mais en général loin d'être suffisante) est la **stabilité** du système en boucle fermée : pour des signaux d'entrée $y^*(t)$, $w(t)$ et $v(t)$ d'amplitude finie, les signaux du système ($\epsilon(t)$, $u(t)$) sont aussi d'amplitude finie.

La formalisation mathématique du cahier des charges passe par la définition de l'ensemble des signaux d'entrée possibles et de l'ensemble des signaux de sortie désirés pour le système bouclé.

1.2 Etude dans le domaine fréquentiel

D'après la discussion précédente, le cahier des charges peut contenir quatre classes de spécifications :

Suivi de trajectoires de référence (consignes) il s'agit d'étudier l'influence du signal de référence $y^*(t)$ sur le signal d'erreur $\epsilon(t)$;

Rejet/atténuation de signaux de perturbation il s'agit d'étudier l'influence du signal de perturbation $v(t)$ sur le signal d'erreur $\epsilon(t)$;

Atténuation des bruits de mesure il s'agit d'étudier l'influence des signaux de bruit $w(t)$ sur le signal de commande $u(t)$ et sur le signal de sortie $y(t)$ (en général, le système à commander G est un système passe-bas, ce qui fait qu'il est plus impératif d'étudier l'influence du bruit $w(t)$ sur $u(t)$ que sur $y(t)$) ;

Commande modérée il s'agit d'étudier l'influence des signaux de référence $y^*(t)$ et du signal de perturbation $v(t)$ sur le signal de commande $u(t)$;

Une autre spécification qui est absolument nécessaire de prendre en compte est que la stabilité du système bouclé doit être assurée.

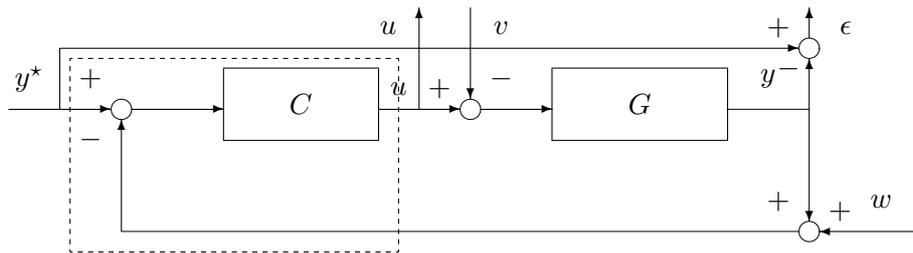


FIG. 1.6 – Système en boucle fermée illustratif

Si on considère le schéma classique d'un système G bouclé par un correcteur C (voir la figure 4.3), on y voit naturellement apparaître les signaux d'entrée apparaissant dans le cahier des charges :

- la consigne $y^*(t)$;
- la perturbation en entrée du système $v(t)$;
- le bruit de mesure $w(t)$

ainsi que les signaux de sortie :

- l'erreur de suivi de référence $\epsilon(t) = y^*(t) - y(t)$;
- la commande $u(t)$ délivrée par le correcteur C .

Or, en notant $T_{x \rightarrow y}$ la fonction de transfert du signal d'entrée x vers le signal de sortie y , on a les relations suivantes entre les sorties et les entrées du système¹ :

$$\begin{aligned} \epsilon(p) &= T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)Y^*(p) + T_{v \rightarrow \epsilon}(p)V(p) + T_{w \rightarrow \epsilon}(p)w(p) \\ U(p) &= T_{y^* \rightarrow u}(p)Y^*(p) + T_{v \rightarrow u}(p)V(p) + T_{w \rightarrow u}(p)w(p) \end{aligned} \quad (1.1)$$

¹Par convention, la transformée de Laplace d'un signal est notée par une lettre majuscule : parfois, par simplicité, cette convention ne sera pas toujours appliquée dans ce document.

où :

1. $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) = \frac{1}{1 + G(p)C(p)}$ est souvent notée $S(p)$ et appelée fonction de sensibilité² ;
2. $T_{y^* \rightarrow y}(p) = \frac{G(p)C(p)}{1 + G(p)C(p)}$ est souvent notée $T(p)$ et appelée fonction de transmission (car elle relie l'entrée de consigne r à la sortie y). Elle est aussi nommée fonction de sensibilité complémentaire car on a la relation

$$S(p) + T(p) = \frac{1}{1 + G(p)C(p)} + \frac{G(p)C(p)}{1 + G(p)C(p)} = 1.$$

3. $T_{v \rightarrow \epsilon}(p) = G(p)S(p)$;
4. $T_{y^* \rightarrow u}(p) = C(p)S(p)$;
5. $T_{w \rightarrow u}(p) = -C(p)S(p)$;
6. $T_{w \rightarrow \epsilon}(p) = T(p)$;

Il est possible (et conseillé) d'étudier chacune des spécifications indépendamment les unes des autres. Ceci est pleinement justifié par le *Théorème de Superposition* qui est valable ici car les systèmes que nous étudions sont tous linéaires stationnaires. Ce théorème permet d'affirmer que l'influence de plusieurs signaux d'entrée non nuls sur les signaux de sortie est égale à la somme des influences de chacun des signaux d'entrée pris individuellement. Par exemple, prenons

$$\epsilon(p) = S(p)Y^*(p) + G(p)S(p)V(p) + T(p)W(p).$$

1. Le terme $S(p)Y^*(p)$ représente l'erreur de suivi de référence dans le cas sans perturbation ($V(p) = 0$) et sans bruit ($W(p) = 0$) ;
2. $G(p)S(p)V(p)$ représente l'erreur de régulation à 0 ($Y^*(p) = 0$) dans le cas sans bruit ($W(p) = 0$) ;
3. $T(p)W(p)$ représente l'effet du bruit sur la sortie dans le cas d'une régulation à 0 ($Y^*(p) = 0$) et sans perturbation ($V(p) = 0$).

Chaque spécification peut donc être étudiée en examinant les fonctions de transfert reliant les signaux d'entrée et de sortie concernés :

Spécifications	fonctions de transfert associées	notations usuelles
suivi de trajectoires de référence	$T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$	$S(p)$
rejet/atténuation de perturbation	$T_{v \rightarrow \epsilon}(p)$	$G(p)S(p)$
atténuation des bruits sur commande	$T_{w \rightarrow u}(p)$	$-C(p)S(p)$
atténuation des bruits sur sortie	$T_{w \rightarrow \epsilon}(p)$	$T(p)$
commande modérée	$T_{y^* \rightarrow u}(p)$, $T_{v \rightarrow u}(p)$ et $T_{w \rightarrow u}(p)$	$C(p)S(p)$ et $T(p)$

Sur l'utilisation du domaine fréquentiel Avant d'étudier cette spécification, il est intéressant de discuter de l'un des intérêts de travailler dans le domaine fréquentiel plutôt que dans le domaine temporel. Par exemple, pour un ensemble de signaux de référence $y^*(t)$, on désire que la sortie correspondante $y(t)$, ou de façon équivalente, l'erreur de suivi de référence $\epsilon(t)$, ait certaines caractéristiques. Les signaux $y^*(t)$ et $\epsilon(t)$ étant respectivement l'entrée et la sortie d'un système dynamique (le système en boucle fermée), le signal $\epsilon(t)$ est obtenu par le produit de convolution de la réponse impulsionnelle de ce système dynamique avec l'entrée $y^*(t)$:

$$\epsilon(t) = \int_0^t T_{y^* \rightarrow \epsilon}(t - \tau)y^*(\tau)d\tau.$$

²Ce nom n'est pas du tout lié à l'intérêt de cette fonction pour l'étude du suivi de trajectoire. Il vient de son intérêt dans l'étude de la robustesse. Cela sera développé dans la suite du document, notamment page 72.

La relation entre ces deux signaux dans le domaine temporel est donc très complexe et difficilement exploitable. Par contre, si on prend la transformée de Fourier des signaux, on a une relation beaucoup plus simple : $\epsilon(j\omega) = T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)Y^*(j\omega)$. Ici, la formalisation du cahier des charges consiste, pour un ensemble de signaux de référence $y^*(t)$ donné, à trouver qu'elles doivent être les contraintes que doit satisfaire $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)$ pour obtenir un ensemble de signaux de sortie $\epsilon(t)$ désirés. Il s'agit donc de traduire des caractéristiques temporelles en caractéristiques fréquentielles.

Pour un signal $y^*(t)$, on peut le relier à sa transformée de Fourier $Y^*(j\omega)$ par :

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y^*(j\omega)|e^{j(\omega t + \arg(Y^*(j\omega)))} d\omega.$$

Un signal peut donc être vu comme la somme (infinie) pondérée de signaux sinusoïdaux : pour chaque pulsation ω , $|Y^*(j\omega)|$ apparaît comme le "poids" du signal sinusoïdal de pulsation ω dans le signal $y^*(t)$. Qualitativement, on peut distinguer les signaux sinusoïdaux "lents", c'est-à-dire de pulsation ω faible, et les signaux sinusoïdaux "rapides", c'est-à-dire de pulsation ω grandes. Suivant les valeurs du poids $|Y^*(j\omega)|$, le régime transitoire de $y^*(t)$ sera plus ou moins "rapide" (voir figure 1.7). Le signal de sortie $\epsilon(t)$ peut

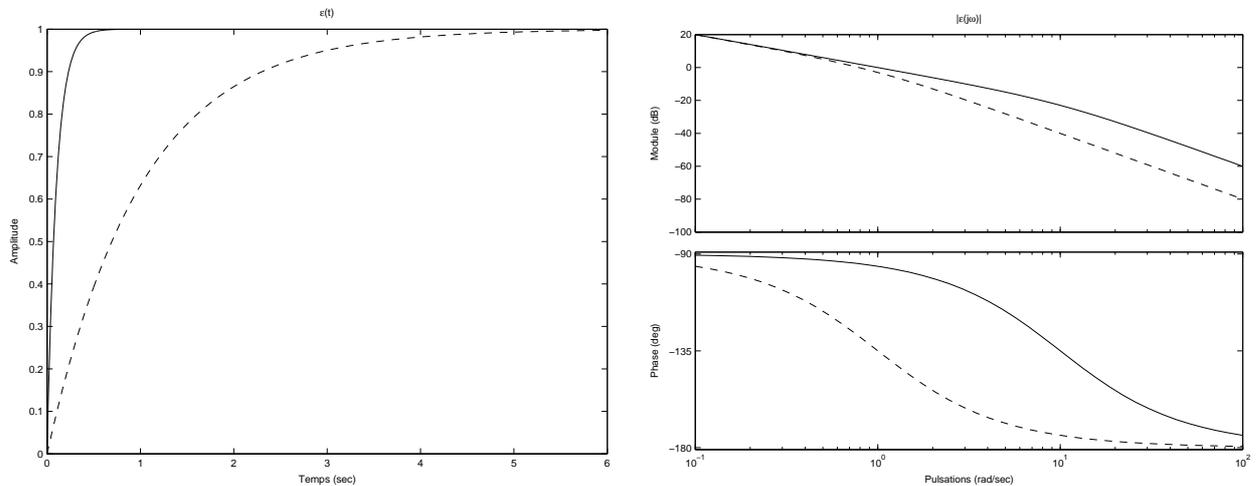


FIG. 1.7 – Signal $y^*(t)$ et sa transformée de Fourier $Y^*(j\omega)$

aussi s'exprimer comme :

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\epsilon(j\omega)|e^{j(\omega t + \arg(\epsilon(j\omega)))} d\omega.$$

Sachant que $\epsilon(j\omega) = T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)Y^*(j\omega)$, il est intéressant de connaître la réponse fréquentielle $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)$ afin d'essayer de prévoir ce que sera le signal de sortie $\epsilon(t)$ pour un signal d'entrée $y^*(t)$. La réponse fréquentielle d'une fonction de transfert est souvent représentée graphiquement sous forme de :

Diagramme de Bode représentation du module de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)$ exprimé en dB et noté $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)|_{dB} = 20 \log |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)|$ en fonction du logarithme de la pulsation $\log(\omega)$ et représentation de la phase de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)$, notée $\arg(T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega))$, en fonction du logarithme de la pulsation $\log(\omega)$. Voir la section 5.3 page 91 de l'annexe pour un rappel sur le tracé des bodes asymptotique ;

Diagramme de Nyquist représentation dans le plan complexe (partie réelle en abscisse et partie imaginaire en ordonnée) du nombre complexe $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)$ pour ω variant de $-\infty$ à $+\infty$;

Diagramme de (Black) Nichols représentation du nombre complexe $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)$ pour ω variant de 0 à $+\infty$ dans un plan où l'axe des abscisses correspond à la phase ($\arg(T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega))$) exprimée en degrés et l'axe des ordonnées correspond au module ($|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)|$) exprimée en décibels.

La figure 1.8 représente ces différents diagrammes obtenus sous Matlab par les commandes `bode`, `nyquist` et `nichols` pour un système du second ordre. Notez que seul le diagramme de Bode fait apparaître explicitement la pulsation³ ω .

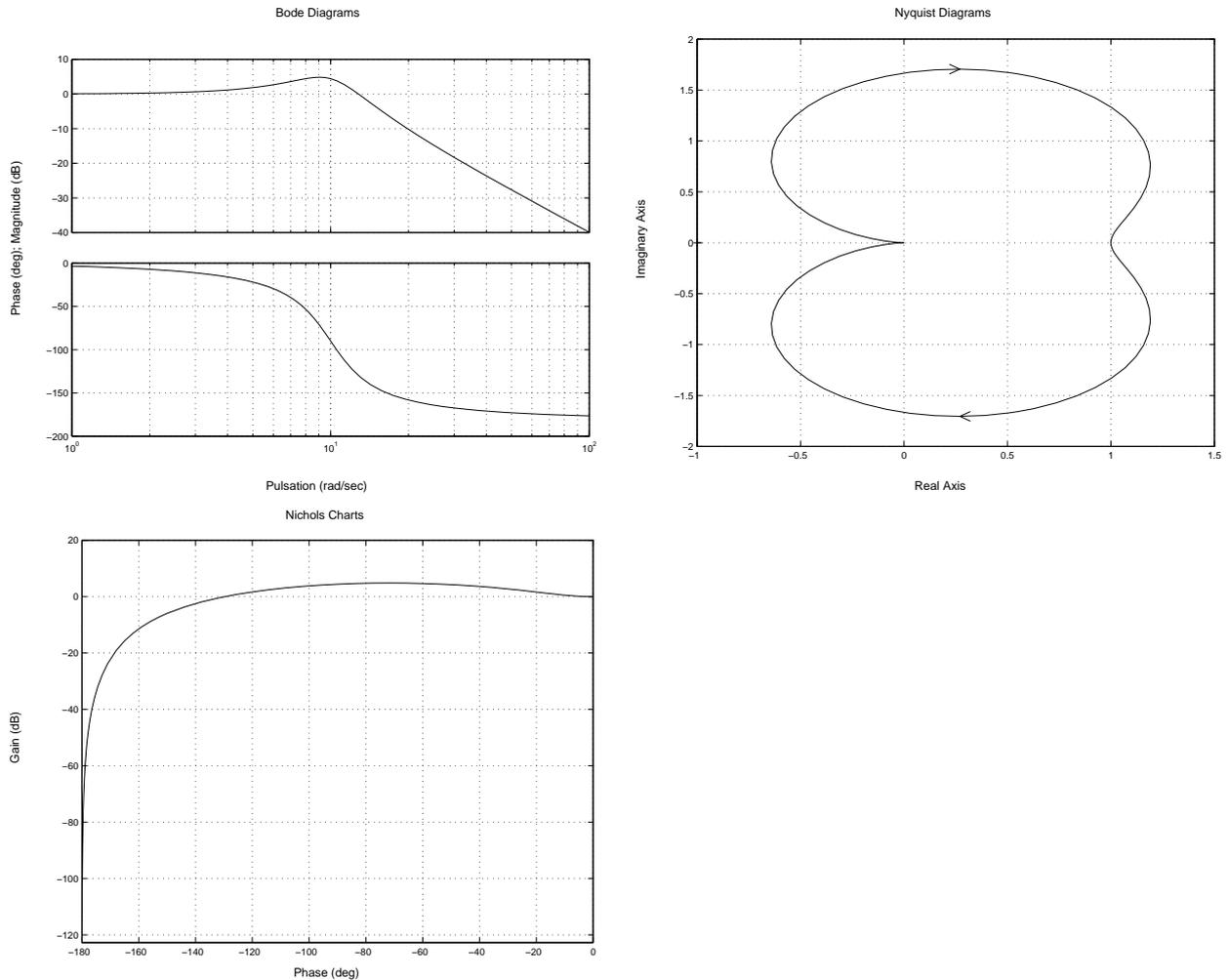


FIG. 1.8 – Diagramme de Bode, Nyquist et Nichols de $\frac{1}{(j\omega)^2 + 0,6\frac{j\omega}{10} + 1}$

Nous allons maintenant examiner chaque spécification en commençant par la stabilité.

1.3 Stabilité

Une notion très importante est celle de *stabilité interne*. Une boucle fermée est dite *stable de façon interne* si toutes les fonctions de transfert du système en boucle fermée produisent des sorties bornées ($\epsilon(t)$ et $u(t)$ sur la figure 4.3) à partir d'entrées d'amplitude bornée ($y^*(t)$, $b(t)$ et $w(t)$). Ainsi, d'après ce qui a été vu précédemment, pour qu'il y ait stabilité interne, il faut que les fonctions de transfert $S(p)$, $T(p)$, $G(p)S(p)$ et $C(p)S(p)$ soient simultanément stables (pôles à partie réelle strictement négative). Il est d'autre part possible de démontrer qu'il y a stabilité interne si et seulement si la fonction de transfert S est stable et s'il n'y a pas de compensations pôles-zéros instables entre le système G et le correcteur C .

³En Anglais, le terme "frequency" désigne à la fois la fréquence (unité Hertz) et la pulsation (unité radians par seconde). Seule l'indication explicite de l'unité permet de les différencier.

Exercice Soit un procédé “dérivateur”, c’est-à-dire avec au moins un zéro en 0 :

$$G(p) = pF(p)$$

avec $F(0) \neq \infty$. Montrer que dans le cas où le système est commandé par un correcteur proportionnel intégral, le système bouclé ne peut pas être asymptotiquement stable.

1.4 Spécification de Performance 1 : suivi de trajectoires de référence (consignes)

Le suivi est d’autant mieux assuré que l’erreur $\epsilon(t) = y^*(t) - y(t)$ est proche de zéro pour les signaux de référence qui nous intéressent. Le signal d’erreur $\epsilon(t)$ va être caractérisé d’une part par son *régime permanent* et d’autre part, par son *régime transitoire*. Pour cela, on va considérer plusieurs classes de signaux d’entrée :

1. échelons ;
2. rampes, paraboles, etc. ;
3. sinusoides ;
4. signaux définis par le module de leur transformée de Fourier.

1.4.1 Etude du régime permanent pour les différentes classes de signaux

Etude du suivi de signaux en forme d’échelons Pour l’étude de la réponse à des entrées en forme d’échelons d’amplitude A (de transformée de Laplace⁴ $Y^*(p) = \frac{A}{p}$), on fait appel au théorème de la valeur finale.

Théorème 1.4.1 (Théorème de la valeur finale) *Si tous les pôles de $p\epsilon(p)$ sont dans le demi plan de gauche (axe imaginaire exclu) alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p).$$

Par son application, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pT_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) \frac{A}{p} = AT_{y^* \rightarrow \epsilon}(0).$$

Si l’objectif est d’assurer que l’erreur de suivi de trajectoires $\epsilon(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l’infini, on doit donc avoir $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(0)| = 0$, c’est-à-dire que $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ contient au moins un zéro en zéro.

Si $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(0)| \neq 0 = \epsilon_{stat}$ alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \epsilon_{stat}.$$

ϵ_{stat} est appelé erreur statique.

Etude du suivi de signaux en forme de rampes, etc. Pour des entrées en forme de rampes de pente a , on a $Y^*(p) = \frac{a}{p^2}$. Supposons que $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ contienne au moins un zéro en zéro : d’après ce qui précède, cela revient à dire que le système en boucle fermée est capable de suivre des signaux de référence en forme d’échelons. Dans ce cas-là, nous sommes dans le cas de l’application du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pT_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) \frac{a}{p^2} = a \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)}{p}.$$

⁴Sur les transformées de Laplace des signaux élémentaires, voir annexe, page 87.

Cette limite est égale à zéro dans le cas où $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ contient au moins deux zéros en zéro. Si $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ ne contient qu'un seul zéro alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \epsilon_{trainage}$$

avec $\epsilon_{trainage} = a \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)}{p}$. $\epsilon_{trainage}$ est appelé erreur de trainage.

Pour les signaux dont la transformée de Laplace s'écrit $Y^*(p) = \frac{a}{p^k}$, avec $k \geq 3$ (pour $k = 3$, on a un signal en forme de parabole), le système en boucle fermée sera capable de suivre ces signaux s'il est déjà capable de suivre les signaux d'ordre $k - 1$. En faisant le même raisonnement que précédemment, l'erreur de suivi tendra vers 0 si $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ contient au moins k zéros en zéro.

Etude du suivi de signaux en forme de sinusoides Dans le cas d'un signal de référence sinusoidal $y^*(t)$ d'amplitude A et de pulsation propre ω_0 ($y^*(t) = A \sin(\omega_0 t)$), on a :

$$Y^*(p) = A \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}.$$

Nous ne sommes plus dans les conditions d'application du théorème de la valeur finale car a priori la fonction $p\epsilon(p)$ a deux pôles sur l'axe imaginaire en $\pm j\omega_0$. Cependant, on sait que la réponse (dite harmonique) d'un système dynamique stable à un signal sinusoidal tend vers le régime permanent suivant : $\epsilon(t) = A |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)))$. Par suite, pour assurer un suivi de référence parfait de ce signal ($\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = 0$), il est nécessaire d'avoir $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)| = 0$, ce qui revient à dire que les nombres complexes conjugués $\pm j\omega_0$ sont zéros de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$. Sinon on peut essayer de rechercher une erreur faible d'amplitude maximale ϵ_{sin} en imposant $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)| \leq \epsilon_{sin}$.

Supposons que l'on cherche à assurer le suivi de signaux de référence sinusoidaux dont les pulsations propres appartiennent à l'intervalle $[\omega_0^{min}, \omega_0^{max}]$. Si on voulait assurer un suivi parfait de tous ces signaux, il serait nécessaire que la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ possède des zéros en $\pm j\omega_0$, pour toute valeur de ω_0 appartenant à l'intervalle $[\omega_0^{min}, \omega_0^{max}]$, soit un nombre infini de zéros. Ce n'est pas possible car nous ne considérons que les fonctions de transfert admettant un nombre fini de zéros et de pôles. Dans ce cas-là, il est donc impossible d'obtenir un suivi parfait de signaux de référence. Par contre, en essayant d'imposer $\forall \omega \in [\omega_0^{min}, \omega_0^{max}] |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)| \leq \epsilon_{sin}$, il est possible d'obtenir une erreur faible d'amplitude bornée par ϵ_{sin} .

Etude du suivi de signaux définis par le module de leur transformée de Fourier Pour un signal $y^*(t)$, on peut le relier à sa transformée de Fourier $Y^*(j\omega)$ par :

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y^*(j\omega)| e^{j(\omega t + \arg(Y^*(j\omega)))} d\omega.$$

Un signal peut donc être vu comme la somme (infinie) pondérée de signaux périodiques : pour chaque pulsation ω , $|Y^*(j\omega)|$ apparaît comme le "poids" du signal périodique de pulsation ω dans le signal $y^*(t)$. Le signal de sortie $\epsilon(t)$ peut aussi s'exprimer comme :

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\epsilon(j\omega)| e^{j(\omega t + \arg(\epsilon(j\omega)))} d\omega.$$

Comme $|\epsilon(j\omega)| = |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega) Y^*(j\omega)| = |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)| |Y^*(j\omega)|$, il est possible de choisir $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)|$ de façon à obtenir un certain $|\epsilon(j\omega)|$ connaissant $|Y^*(j\omega)|$.

1.4.2 Etude du régime transitoire

Le suivi est d'autant mieux assuré que l'erreur $\epsilon(t) = y^*(t) - y(t)$ est proche de zéro pour les signaux de référence qui nous intéressent. Le "proche de zéro" est relatif à la "taille" du signal d'entrée. D'après la discussion précédente, on peut par exemple définir un signal $\epsilon(t)$ faible comme appartenant à un ensemble défini par :

$$\mathcal{E} = \{\epsilon(j\omega) \text{ tel que } |\epsilon(j\omega)| \leq \epsilon_{sup}A\} \quad (1.2)$$

avec ϵ_{sup} un scalaire positif faible et où A caractérise la "taille" du signal d'entrée (par exemple, l'amplitude de l'échelon). Il s'agit ici de normaliser l'erreur ϵ avec une grandeur caractéristique du signal d'entrée y^* .

Par exemple, dans le cas où le signal de référence est un signal en forme d'échelon, ($Y^*(p) = \frac{A}{p}$) :

$$\begin{aligned} \forall \omega, |\epsilon(j\omega)| \leq \epsilon_{sup}A &\iff \forall \omega, |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega) \frac{A}{j\omega}| \leq \epsilon_{sup}A \\ &\iff \forall \omega, |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)| \leq \epsilon_{sup}|j\omega| \end{aligned} \quad (1.3)$$

On peut donc exprimer que l'on recherche un signal d'erreur $\epsilon(t)$ appartenant à un certain ensemble pour un signal de référence donné $y^*(t)$ par une contrainte sur le module de la fonction $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)$. En fait, si on considère n'importe quel signal $\bar{y}^*(t)$ tel que $|\bar{Y}^*(j\omega)| \leq \frac{A}{|j\omega|}$ alors

$$\forall \omega, |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega) \frac{A}{j\omega}| \leq \epsilon_{sup}A \implies \forall \omega, |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega) \bar{r}(j\omega)| \leq \epsilon_{sup}A$$

Par suite, le signal $\bar{\epsilon}(t)$ tel que $\bar{\epsilon}(j\omega) = T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega) \bar{Y}^*(j\omega)$ satisfait $|\bar{\epsilon}(j\omega)| \leq \epsilon_{sup}A$: pour ces signaux-là, on a donc aussi la propriété désirée pour le signal d'erreur $\bar{\epsilon}(t)$.

Remarque Cela suggère donc de généraliser la démarche précédente. Dans les méthodes fréquentielles, la caractérisation d'un ensemble de signaux $b(t)$ se fait via leur spectre fréquentiel. Pour cela, on introduit une fonction de la pulsation ω , $W_b(\omega)$, qui est positive. On peut alors définir un ensemble de signaux comme

$$\{B(j\omega) \text{ tel que } |B(j\omega)| \leq W_b(\omega)\} \quad (1.4)$$

ou encore comme

$$\left\{ B(j\omega) \text{ tel que } |B(j\omega)| \leq \frac{1}{W_b(\omega)} \right\}. \quad (1.5)$$

Par commodité, la première définition est utilisée pour définir les ensembles de signaux d'entrée (en l'occurrence, ici, $y^*(t)$) et la seconde pour définir les ensembles de signaux de sortie du système bouclé (en l'occurrence, ici, $\epsilon(t)$).

Dans notre cas précis, on a le signal d'entrée $y^*(j\omega)$ qui peut être défini par l'introduction d'une fonction de ω , W_r , telle que, pour les signaux de référence y^* qui nous intéressent, nous avons :

$$\mathcal{R} = \{Y^*(j\omega) \text{ tel que } |Y^*(j\omega)| \leq W_r(\omega)\} \quad (1.6)$$

avec $W_r(\omega) = \frac{A}{|j\omega|}$. Pour le signal d'erreur ϵ , on désire qu'il appartienne à un ensemble défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \epsilon(j\omega) \text{ tel que } |\epsilon(j\omega)| \leq \frac{1}{W_\epsilon(\omega)} \right\}$$

avec $W_\epsilon(\omega) = \frac{1}{\epsilon_{sup}A}$.

Par suite, la sortie vérifiera la spécification désirée si, pour tout signal de référence $y^* \in \mathcal{R}$, on a $\epsilon(j\omega) = T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)Y^*(j\omega) \in \mathcal{E}$, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} \forall y^*(j\omega) \in \mathcal{R}, \forall \omega, |\epsilon(j\omega)| \leq \frac{1}{W_\epsilon(\omega)} &\iff \forall Y^*(j\omega) \in \mathcal{R}, \forall \omega, |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)Y^*(j\omega)| \leq \frac{1}{W_\epsilon(\omega)} \\ &\iff \forall \omega, |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)W_r(j\omega)| \leq \frac{1}{W_\epsilon(\omega)} \\ &\iff \forall \omega, |T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)| \leq \frac{1}{W_r(\omega)W_\epsilon(\omega)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Le tracé de la fonction

$$\Omega(\omega) = \frac{1}{W_r(\omega)W_\epsilon(\omega)}$$

en fonction de la pulsation ω est appelé *gabarit fréquentiel*. L'inégalité précédente s'interprète donc comme une contrainte sur la forme du module de la réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$. Pour que la spécification de suivi de trajectoire soit satisfaite (c'est-à-dire que $y^* \in \mathcal{R} \Rightarrow \epsilon \in \mathcal{E}$), le correcteur C doit être tel que le module de la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$ soit inférieur au gabarit défini par $\Omega(\omega)$. Dans le cas d'un suivi de référence en échelon, $\Omega(\omega) = \epsilon_{sup}\omega$.

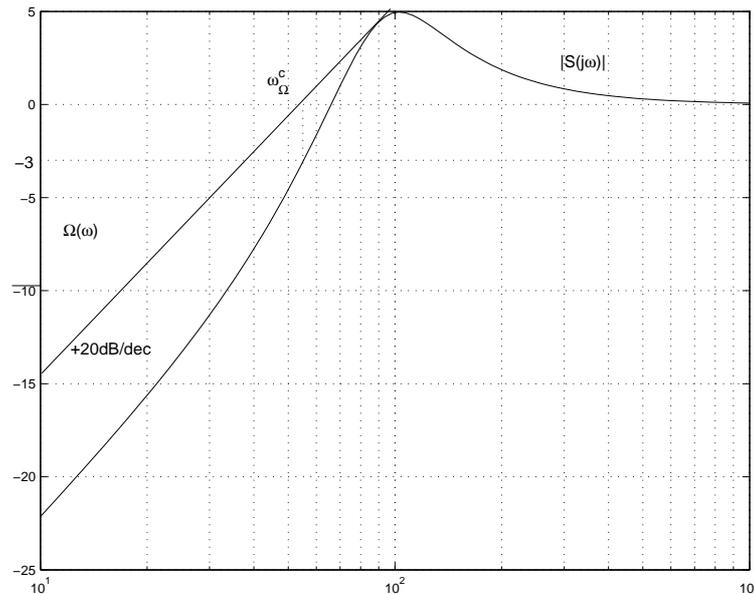


FIG. 1.9 – Tracé du module de la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$

La forme de la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$ présentée sur la figure 1.9 est relativement typique. La pulsation ω_Ω^c telle que $\Omega(\omega_\Omega^c) = 1$ est importante car $\omega_\Omega^c = \frac{1}{\epsilon_{sup}}$. Au plus elle est importante, au plus on peut garantir que $|\epsilon(j\omega)|$ est faible pour toute pulsation ω .

Le régime transitoire de la réponse temporelle $y(t)$ d'un système à une consigne $y^*(t)$ en échelon est (entre autres) caractérisé par un ou plusieurs indicateurs de rapidité et d'amortissement (voir la figure 1.10) :

le temps de montée t_m : temps nécessaire pour que la sortie $y(t)$ passe de 10 % à 90 % de la valeur finale ;

le temps du premier maximum t_{max} : dans le cas où la réponse a un dépassement non nul, temps pour lequel se produit le premier dépassement ;

le temps d'établissement t_e : temps à partir duquel la sortie $y(t)$ reste inférieure à $\pm 5\%$ de la valeur finale ;

le dépassement en % $D_1\%$: la valeur maximale de la sortie $y(t)$ divisée par la valeur finale de $y(t)$ et exprimée en %.

La rapidité peut être définie par le **temps de réponse** qui, en fonction du problème considéré, peut être définie par l'un des trois temps précédemment introduits (temps de montée, temps du premier maximum ou temps d'établissement). Dans la suite, par convention et sauf mention contraire, le temps de réponse sera défini par le temps de montée.

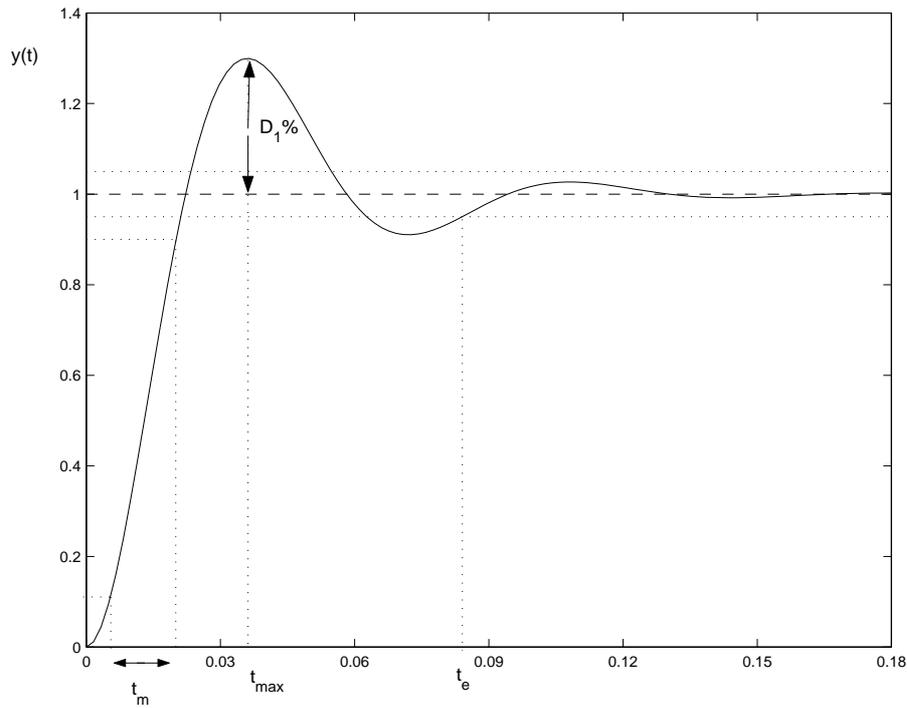


FIG. 1.10 – Caractéristique du régime transitoire de la réponse à un échelon

Le régime permanent est lui caractérisé par l'erreur statique (relative), c'est-à-dire la différence entre la valeur de l'échelon de référence $y^*(t)$ et la valeur finale du signal de sortie $y(t)$ ramenée sur la valeur finale de l'échelon $y^*(t)$.

La réponse temporelle figure 1.10 correspond au diagramme de Bode de la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$ tracée figure 1.9. Quels liens peut-on établir entre ces deux tracés ?

Deux caractéristiques importantes du tracé du module de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)$ sont la pulsation de coupure ω_S^c et la bande passante ω_S de la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$. Elles sont définies comme les pulsations pour lesquelles respectivement⁵ le module de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$ coupe 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (soit -3 dB).

Pour comprendre leur intérêt, examinons l'exemple suivant.

Exemple : commande d'un moteur à courant continu par un gain proportionnel On considère l'asservissement de position d'un moteur à courant continu décrit par le modèle suivant :

$$G_{model\epsilon}(p) = \frac{k}{p(\tau_1 p + 1)}. \quad (1.8)$$

avec $k = 41,25$ et $\tau_1 = \frac{1}{66,9}$. Le correcteur recherchée est un gain proportionnel $C(p) = k^c$ à déterminer.

Avec ce correcteur, le système bouclé présente-il une réponse à un échelon avec une erreur statique nulle ? Pour cela, on calcule la fonction $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) = S(p)$:

$$T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) = \frac{p(\tau_1 p + 1)}{\tau_1 p^2 + p + k k^c}.$$

Cette fonction de transfert contient un zéro à la pulsation nulle : l'erreur statique sera donc nulle, pour toute valeur⁶ de k^c .

⁵On suppose qu'il n'y en a qu'une mais ce n'est qu'une hypothèse permettant de simplifier l'explication.

⁶On vérifie d'autre part que cette fonction de transfert est stable pour $k^c > 0$.

On décide de considérer différentes valeurs de k^c : $k^c \in \{1, 1,78, 3,16, 5,62, 10\}$. Pour chaque valeur, sont représentés figure 1.11 les modules des réponses fréquentielles de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) = S(p)$, de $T_{y^* \rightarrow y}(p) = T(p)$ et les réponses (temporelles) associées à un échelon. Noter la présence d'un zéro en 0 dans la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ se traduit par un tracé de $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)|$ présentant une pente de $+20\text{dB/décade}$ en basses pulsations⁷. On observe que pour des valeurs de k^c croissantes, la bande passante

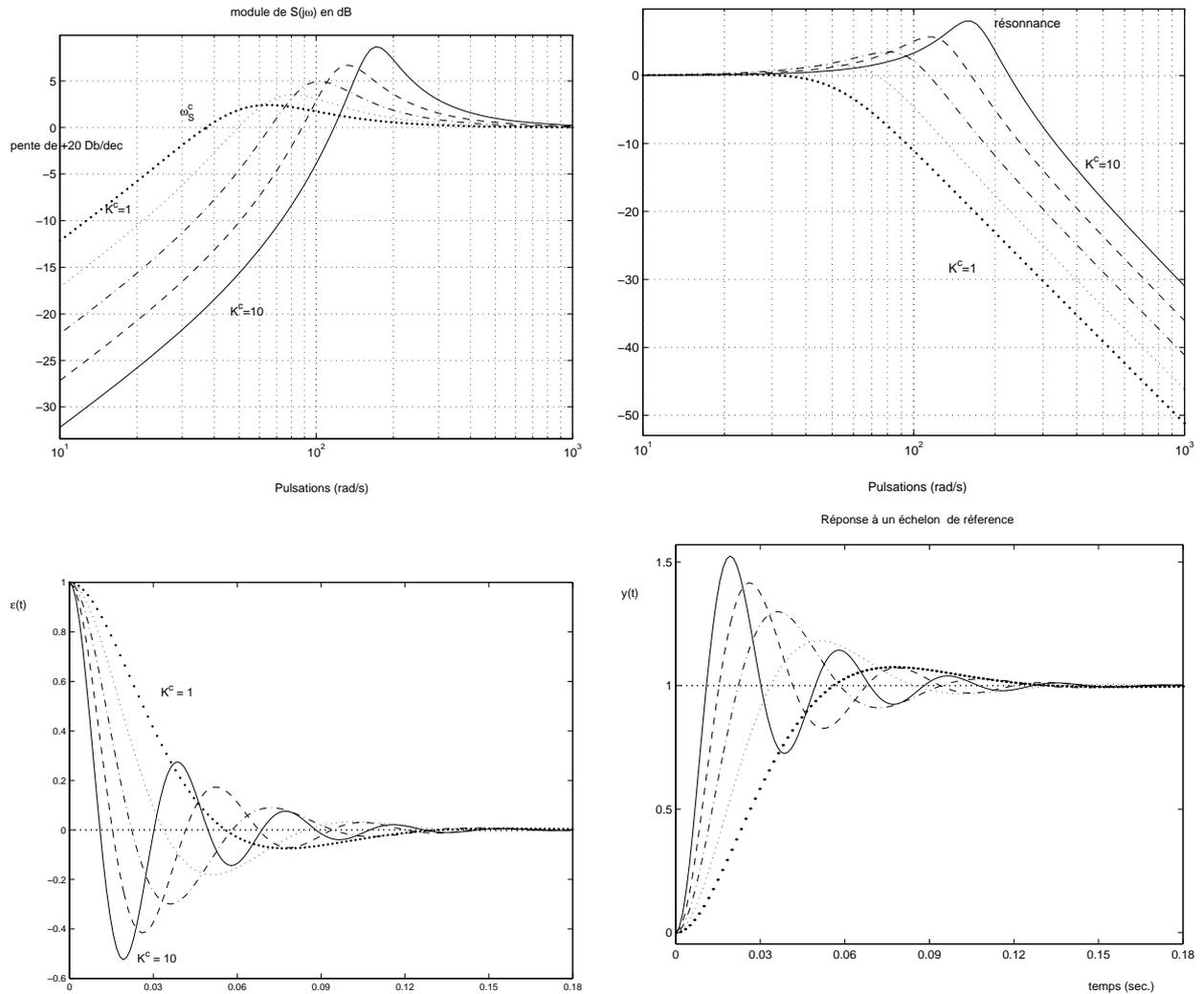


FIG. 1.11 – Réponses fréquentielles et temporelles de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ et de $T_{y^* \rightarrow y}(p)$

ω_S augmente. Simultanément, le temps de réponse à un échelon de $T_{y^* \rightarrow y} = T$ diminue. En fait, ω_S^c et ω_S sont généralement d'assez bons indicateurs de la rapidité du système. Une règle de cuisine est que ω_S^c et ω_S

⁷Si nécessaire (et si cela n'a pas déjà été fait) revoir les règles du tracé de Bode asymptotique en annexe, page 91.

sont inversement proportionnels au temps de montée⁸ t_m . Ceci est une règle *empirique* utile pour la mise au point de correcteurs mais ce n'est pas une relation mathématique et rigoureuse⁹. Noter aussi le lien entre la valeur du pic de résonance de $|T_{y^* \rightarrow y}(j\omega)| = |T(j\omega)|$ et du dépassement de la réponse à un échelon correspondante : au plus $|T_{y^* \rightarrow y}(j\omega)|$ présente un pic de résonance important, au plus le dépassement est important.

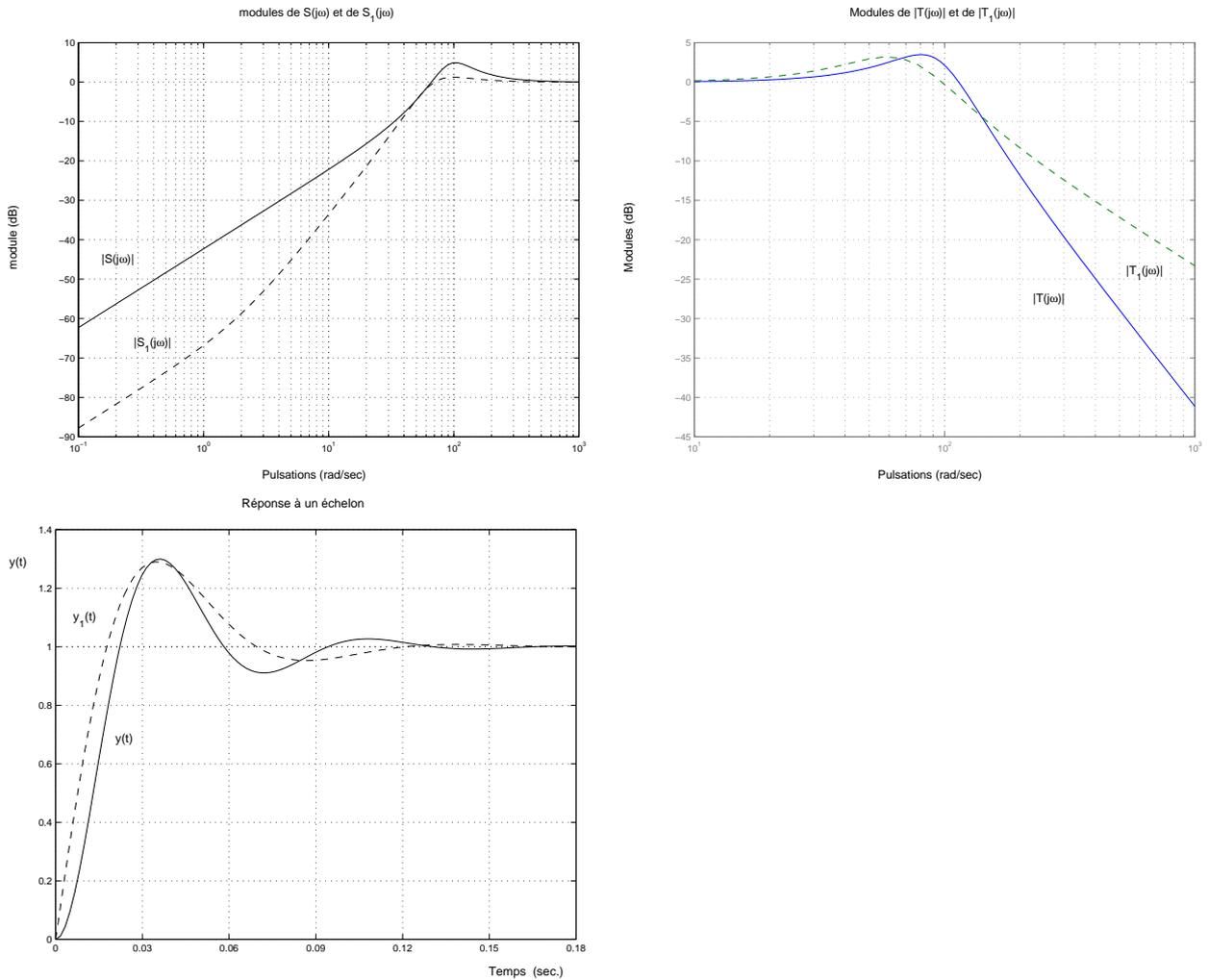


FIG. 1.12 – Réponses fréquentielles et temporelles de $S(p)$ et de $S_1(p)$

Remarque Le caractère “recette de cuisine” du lien entre la rapidité et la pulsation ω_S^c doit être nuancé. En effet, comme on peut le voir sur la figure 1.9, $\omega_S^c \geq \omega_\Omega^c \approx \frac{1}{\epsilon_{sup}}$. Une borne ϵ_{sup} faible sur l’erreur

⁸Dans le cas d’une fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow y}$ du second ordre :

$$T_{y^* \rightarrow y}(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

on a le temps du premier maximum t_{max} qui est relié à ω_S^c par la relation :

$$t_{max}\omega_S^c = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Pour un second ordre bien amorti (un coefficient d’amortissement de l’ordre de 0,7), on a alors l’ordre de grandeur suivant : $t_m\omega_S^c \sim 3$.

⁹Sauf dans des cas très particuliers.

$|\epsilon(j\omega)|$ se traduit donc par une pulsation ω_s^c importante.

Pour bien comprendre le caractère qualitatif de ce qui précède, on a représenté sur la figure 1.12 les réponses fréquentielles et temporelles de deux fonctions $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) = S(p)$ et $T_{y^* \rightarrow \epsilon}^1(p) = S_1(p)$ qui ont même bande passante ω_s mais dont l'une ($S_1(p)$) est plus rapide que l'autre ($S(p)$). Cela s'explique par le fait qu'en basse pulsation ($\omega < \omega_s$), on a $|S_1(j\omega)| < |S(j\omega)|$. Il ne faut donc pas réduire l'interprétation du tracé de $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)|$ à la simple détermination de ω_s ou de ω_s^c : une rapidité importante correspond à des gains très faibles en basses pulsations pour $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$.

Enfin, il faut noter que pour les pulsations faibles, $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)| \ll 1$. Par suite, comme $T_{y^* \rightarrow \epsilon} + T_{y^* \rightarrow y} = 1$, on a $|T_{y^* \rightarrow y}(j\omega)| \sim 1$. Comme $T_{y^* \rightarrow y}$ est la fonction de transfert reliant le signal de consigne y^* et la sortie y , cela va permettre un bon suivi de signaux de référence présentant un contenu spectral important en basse fréquence. Pour cela, on s'est assuré que la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$ qui relie le signal de référence y^* à l'erreur de suivi de trajectoires ϵ ait un module faible quand le module de la transformée de Fourier du signal de référence est important.

Exercice On désire vérifier qu'un système en boucle fermée semblable à celui de la figure 4.3, page 75, suit des signaux de référence en forme d'échelon et en forme de sinusoïde pour toute pulsation propre ω_0 appartenant à l'intervalle $[2, 4]$ rad/s. Donner l'allure du module de $S(j\omega)$ correspondante. Justifier.

Suivi de référence en forme de rampe Le raisonnement précédent peut être appliqué au cas d'un signal de référence en forme de rampe en prenant cette fois-ci $W_r(\omega) = \frac{A}{\omega^2}$ (voir la figure 1.13), ce qui donne un gabarit $\Omega(\omega) = \epsilon_{sup}\omega^2$. Le module de la fonction de sensibilité $S(j\omega)$ présente alors une pente de $+40dB/dec$ en basses pulsations (voir sous figures à droite). Une atténuation plus forte du module en basses pulsations (cas correspondant aux sous figures du bas) correspond à un régime transitoire présentant un temps de réponse plus faible.

Exemple d'un suivi de référence en forme de sinus Le raisonnement précédent peut être appliqué au cas d'un signal de référence en forme de sinusoïde à la pulsation ω_0 en prenant cette fois-ci $W_r(\omega) = \frac{A\omega_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$, ce qui donne un gabarit défini par $\Omega(\omega) = \frac{\epsilon_{sup}|\omega_0^2 - \omega^2|}{\omega_0}$ (voir la figure 1.14). On peut noter que $|T(j\omega_0)| = 1$.

1.5 Spécification de Performance 2 : rejet/atténuation de signaux de perturbation

Après avoir étudié le suivi de signaux de référence $y^*(t)$, on considère le problème du rejet de la perturbation $v(t)$. On suppose que le signal de référence est 0 (dans ce cas-là, on parle de problème de *régulation*) et on souhaite rejeter l'effet de la perturbation sur la sortie $y(t)$ (ou de façon équivalente sur l'erreur de suivi de trajectoire $\epsilon(t)$).

Pour cela, on utilise la même approche que précédemment. La seule différence est qu'au lieu de considérer $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$, la fonction de transfert qui relie le signal de référence $y^*(t)$ à l'erreur de suivi de trajectoires $\epsilon(t)$, on considère la fonction de transfert $T_{v \rightarrow \epsilon} = GS$ qui relie le signal de perturbation $v(t)$ à l'erreur de suivi de trajectoires $\epsilon(t)$. En faisant (strictement) le même raisonnement que précédemment, on arrive à la conclusion que la perturbation sera atténuée si

$$|T_{v \rightarrow \epsilon}(j\omega)| \leq \frac{1}{W_\epsilon(\omega)W_v(\omega)} \quad (1.9)$$

où la fonction W_v définit l'ensemble \mathcal{B} des signaux de perturbations de la façon suivante :

$$\mathcal{B} = \{V(j\omega) \text{ tel que } |V(j\omega)| \leq W_v(\omega)\} \quad (1.10)$$

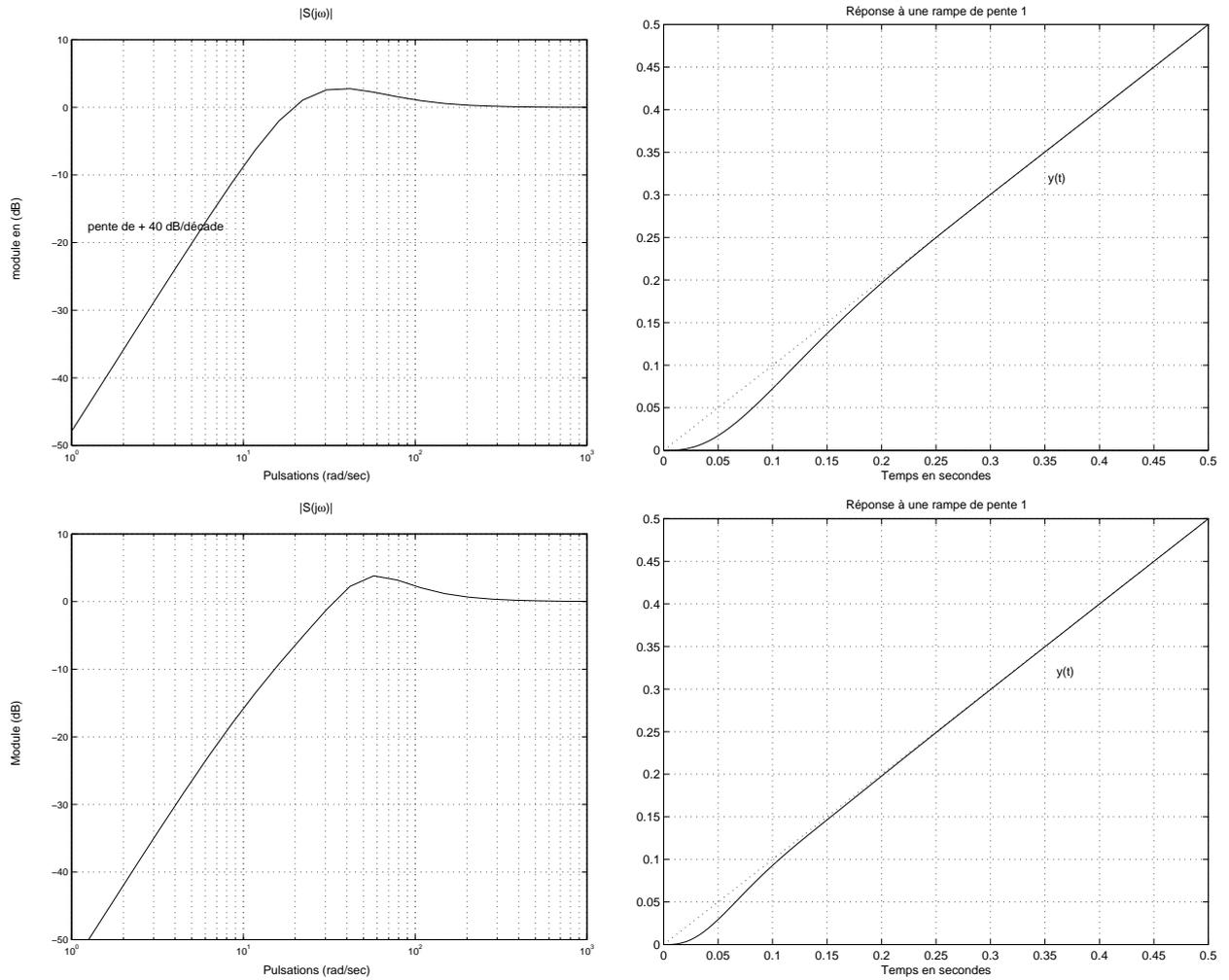


FIG. 1.13 – Suivi d'un signal en forme de rampe pour le moteur commandé par $C(p) = 6 \frac{p/10 + 1}{p}$ (haut) et par $C(p) = 12 \frac{p/10 + 1}{p}$ (bas)

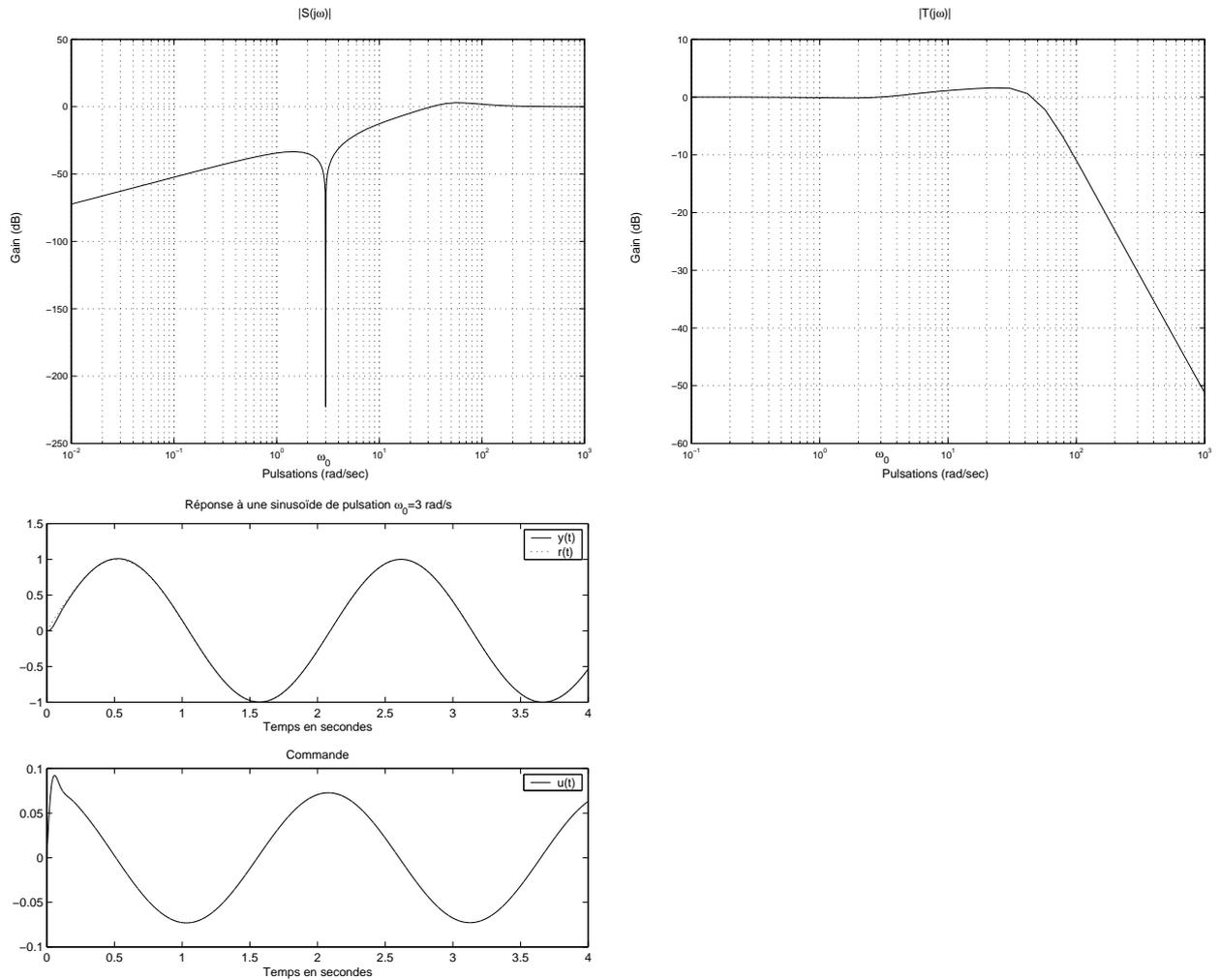


FIG. 1.14 – Suivi d’une référence sinusoïdale de pulsation ω_0 pour le moteur commandé par $C(p) = \frac{(p + 3)^2}{p^2 + 9}$

et où la fonction W_c définit l'erreur de suivi de trajectoire. De la même façon que précédemment, on peut faire le raisonnement qualitatif suivant. Sur les gammes de pulsations où le module de la transformée de Fourier du signal $v(t)$ est important, pour assurer une bonne atténuation (voire un rejet) des perturbations, le module de la fonction de transfert GS doit y être faible.

1.6 Spécification de Performance 3 : atténuation des bruits de mesure.

Le bruit de mesure w est un signal dont le module de la transformée de Fourier est important dans les hautes pulsations. Comme précédemment, on peut définir un ensemble de signaux de bruits \mathcal{W} par l'introduction d'une fonction W_w telle que :

$$\mathcal{W} = \{W(j\omega) \text{ tel que } |W(j\omega)| \leq W_w(\omega)\} \quad (1.11)$$

où W_w est une fonction de transfert passe-haut. Pour assurer l'atténuation de l'effet des bruits sur la commande et sur la sortie du système, il faut donc que $T_{w \rightarrow u}$, la fonction de transfert qui relie le bruit de mesure w à la commande u et $T_{w \rightarrow y}$, la fonction de transfert qui relie le bruit de mesure w à la sortie du système y soient faibles en module pour la gamme des hautes pulsations. La forme générale des fonctions de transfert $T_{w \rightarrow u}$ et $T_{w \rightarrow y}$ est donc celle de fonctions de transfert passe-bas¹⁰.

1.7 Spécification de Performance 4 : commande modérée

Un autre point important mentionné précédemment est que la commande ne doit pas être trop forte. Pour définir cela, on peut introduire une fonction W_u telle que les signaux de commande u désirables appartiennent à l'ensemble \mathcal{U} avec

$$\mathcal{U} = \{U(j\omega) \text{ tel que } |U(j\omega)| \leq \frac{1}{W_u(\omega)}\} \quad (1.12)$$

Or,

$$U(p) = T_{y^* \rightarrow u}(p)Y^*(p) + T_{w \rightarrow u}(p)W(p) + T_{v \rightarrow u}(p)V(p) \quad (1.13)$$

Par suite, par exemple, pour éviter une influence trop grande du bruit de mesure $w(t)$ sur la commande, les gains de la fonction de transfert $T_{w \rightarrow u} = CS$ doivent être limités dans les hautes pulsations, donc la fonction de transfert CS doit avoir la forme d'un transfert passe-bas. Cela peut se formaliser mathématiquement par le fait que :

$$|T_{w \rightarrow u}(j\omega)| \leq \frac{1}{W_u(\omega)W_w(\omega)}. \quad (1.14)$$

De plus, par rapport aux signaux de référence, les commandes ne doivent pas être trop fortes, c'est-à-dire que :

$$|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)| \leq \frac{1}{W_u(\omega)W_r(\omega)}. \quad (1.15)$$

Ces aspects seront développés dans la sous section 3.1.4.

1.8 Exemple de l'analyse de l'asservissement d'un moteur à courant continu

On considère l'asservissement de position sur un moteur à courant continu (voir figure 1.15). Celui-ci consiste à agir sur l'entrée d'un amplificateur alimentant un moteur à courant continu afin d'asservir la position d'une poulie entraînée par le moteur via un réducteur. La position désirée est appelée "signal de

¹⁰On peut d'ores et déjà noter que les fonctions de transfert $T_{w \rightarrow u}$ et $T_{w \rightarrow y}$ ne sont pas indépendantes : $T_{w \rightarrow y}(p) = G(p)T_{w \rightarrow u}(p)$. Il faut donc faire attention à la cohérence des contraintes qui sont imposées sur les différentes fonctions de transfert.

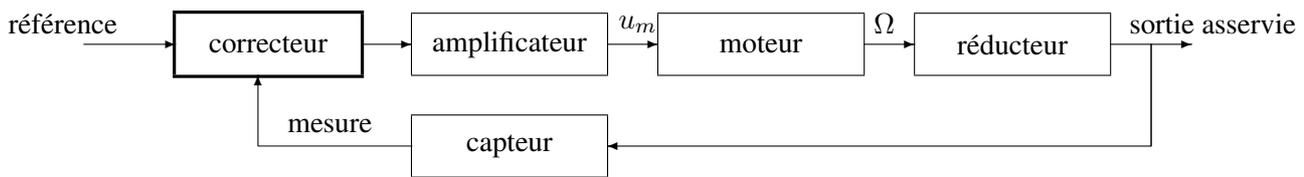


FIG. 1.15 – Asservissement en position d’un moteur à courant continu

référence”. Pour cela, la position réelle de la poulie est mesurée et utilisée pour la commande. Le transfert $G(p)$ est donné par :

$$G(p) = \frac{235}{p\left(\frac{p}{66,9} + 1\right)}.$$

Le correcteur utilisé est donné par :

$$C(p) = \frac{4,20 \times 10^6}{p} \frac{(p+20)(p+69,76)}{p^2 + 454p + 1,1 \times 10^5} \frac{1}{p + 1015}.$$

Les quatre fonctions de transfert en boucle fermée S , GS , CS et T sont représentées figure 1.16. Que peut-on interpréter ?

Pour étudier le suivi de trajectoire de référence, il est nécessaire d’examiner le tracé du module de la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$, soit S . Le module de la fonction de sensibilité $S(j\omega)$ présente une pente de $+40 \text{ dB/dec}$ pour les pulsations faibles. Cela veut dire qu’elle possède sans doute deux zéros en 0. Par suite, le système en boucle fermée est capable de suivre des signaux de référence en forme d’échelon (erreur statique nulle) et en forme de rampe (erreur de trainage nulle). Le module $|S(j\omega)|$ coupe l’axe 0 dB à la pulsation de $\simeq 54 \text{ rad/s}$. Par suite, le temps de réponse sera de l’ordre de $t_r \simeq \frac{3}{54} \simeq 50 \text{ ms}$. On constate effectivement ce comportement temporel en simulation (voir la figure 1.17).

Le rejet de perturbation en entrée du moteur peut être étudié par l’examen du tracé du module de la fonction de transfert qui lie la perturbation $v(t)$ à l’erreur de suivi de trajectoire $\epsilon(t)$, $T_{v \rightarrow \epsilon} = GS$. En basses pulsations, il présente une pente de $+20 \text{ dB/dec}$. Par suite, il contient sans doute un zéro en 0. En conséquent, le système en boucle fermée est capable de rejeter des perturbations en forme d’échelon. L’examen de la courbe sur la gamme de pulsations pour laquelle le module est important donne une idée de l’amplitude de l’effet de la perturbation sur la sortie (amplification supérieure à 2) ainsi que du temps de rejection (de l’ordre de $0,2 \text{ s}$) (voir figure 1.18).

L’examen des modules des fonctions de transfert CS et T permet de constater que ce sont des fonctions de transfert passe-bas, ce qui permet d’assurer l’atténuation de l’effet des bruits sur la commande (la fonction de transfert CS relie le bruit $w(t)$ à la commande $u(t)$) et sur la sortie du système (la fonction de transfert T relie le bruit $w(t)$ à la sortie $y(t)$). De plus, la résonance que présente le module de la fonction de transfert T permet d’estimer le dépassement de la sortie du système pour un signal de référence en forme d’échelon.

1.9 Exercices

1.9.1 Réponses fréquentielles et temporelles d’un système en boucle fermée

On considère un moteur à courant continu asservi en position par un correcteur à un degré de liberté. Trois correcteurs, correspondant à trois cahiers des charges différents, ont été mis au point. Sur les figures 1.19, 1.20 et 1.21, on a tracé les modules de quatre fonctions de transfert : $T_{y^* \rightarrow \epsilon} = S$ où S représente la fonction de sensibilité (en haut, à gauche), $T_{v \rightarrow \epsilon} = GS$ (en haut, à droite), $T_{y^* \rightarrow u} = CS$ (en bas, à gauche)

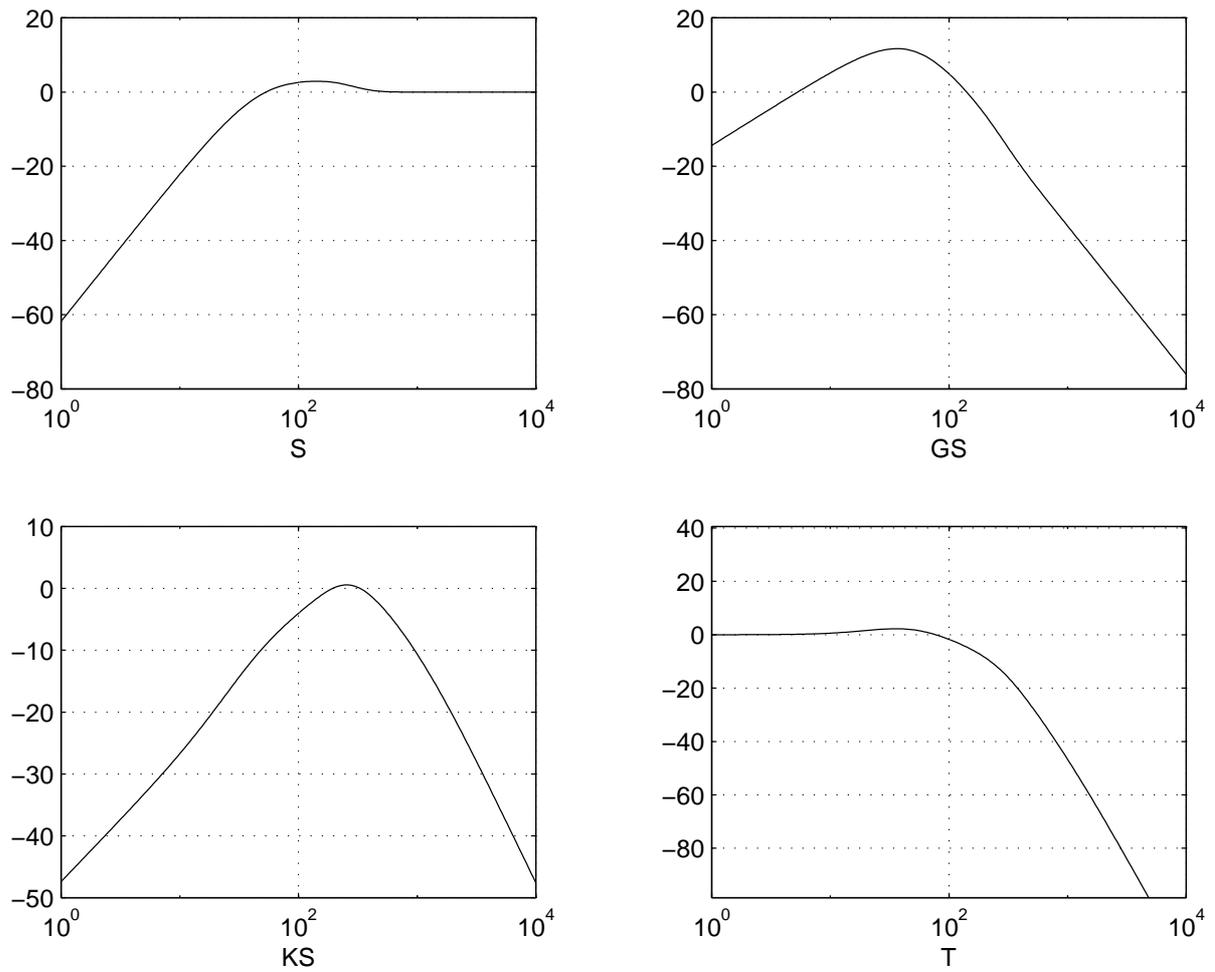


FIG. 1.16 – Exemple de fonctions de transfert en boucle fermée

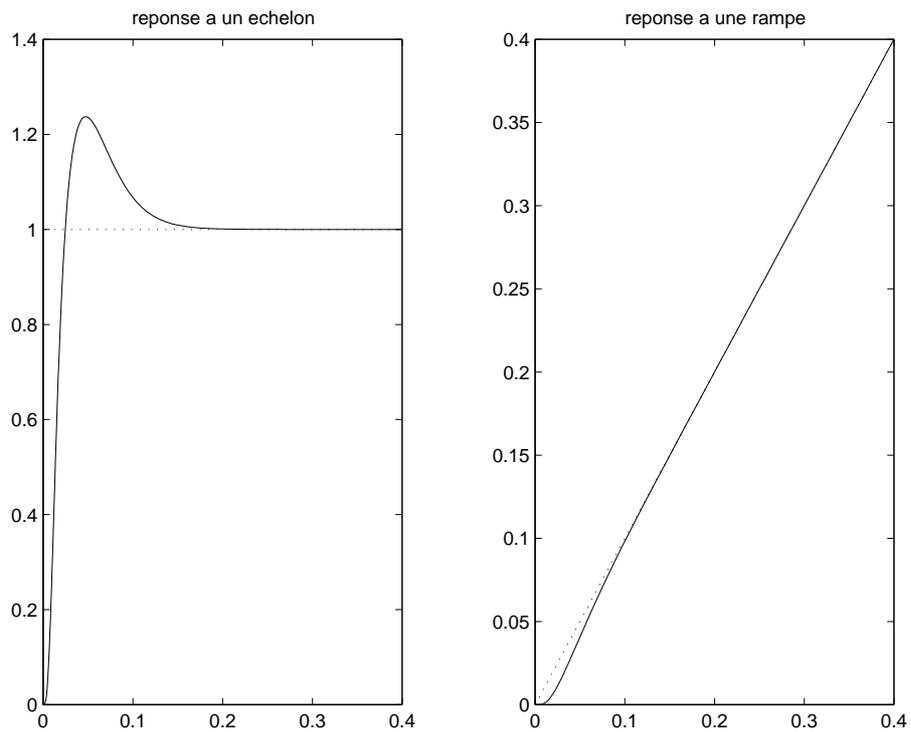


FIG. 1.17 – Suivi de trajectoires de référence

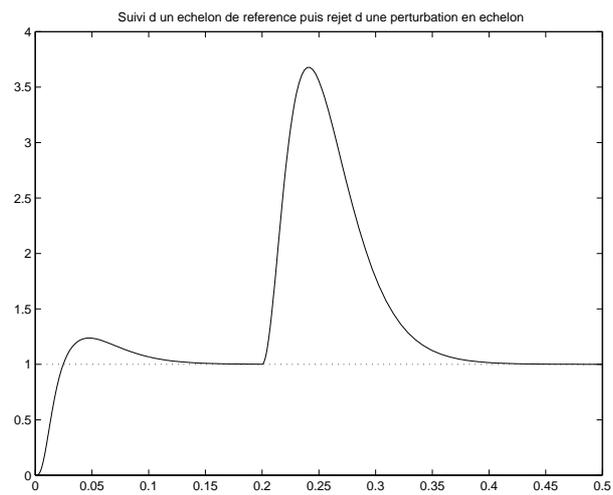


FIG. 1.18 – Rejet d'une perturbation en échelon de 1

et $T_{v \rightarrow u} = T$ où T représente la fonction de sensibilité complémentaire (en bas, à droite). D'autre part, pour les trois correcteurs, les réponses temporelles des systèmes en boucle fermée à un échelon de référence et à un échelon de perturbation ont été simulées : voir les figure 1.22, 1.23 et 1.24.

Malheureusement, on ne sait plus quelles réponses fréquentielles correspondent à quelles réponses temporelles (par exemple, les réponses fréquentielles de la figure 1.19 ne correspondent pas forcément aux réponses temporelles de la figure 1.22).

Pour chaque figure représentant les réponses fréquentielles d'un système en boucle fermée déterminer la figure représentant les réponses temporelles correspondantes. Chaque choix devra être *impérativement* justifié avec au moins trois arguments : au moins 1 basé sur le tracé de $|S(j\omega)|$, au moins 1 basé sur le tracé de $|C(j\omega)S(j\omega)|$ et au moins 1 basé sur le tracé de $|G(j\omega)S(j\omega)|$.

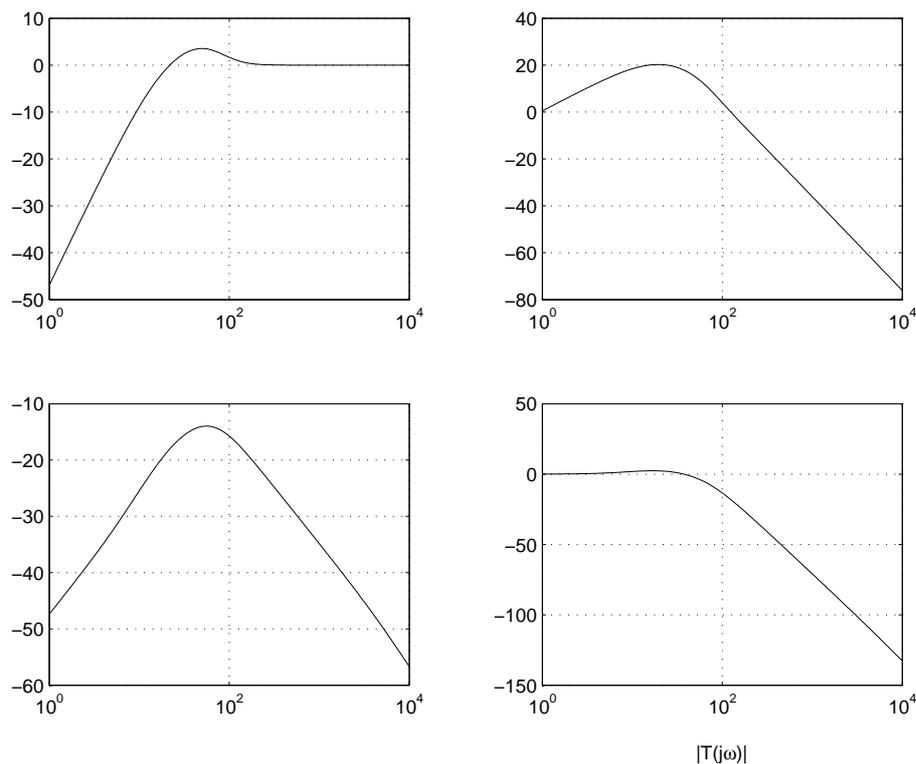


FIG. 1.19 – Tracés fréquentiels numéro 1

1.9.2 De la dépendance des spécifications d'un cahier des charges

On considère la commande d'un système $G(p)$ par un correcteur à un degré de liberté $C(p)$ (voir la figure 1.25).

1. Le correcteur $C(p)$ a été mis au point afin d'assurer le suivi de référence en forme de sinusoides de pulsation propre ω_0 . Permet-il forcément d'assurer le rejet asymptotique de perturbations en forme de sinusoides de pulsation propre ω_0 , en sortie du système ? Justifier en deux mots votre réponse.
2. Le correcteur $C(p)$ a été mis au point afin d'assurer le suivi de références en forme d'échelon sans erreur statique. Permet-il forcément d'assurer le rejet asymptotique de perturbations en forme d'échelon en entrée du système ? Justifier en deux mots votre réponse.

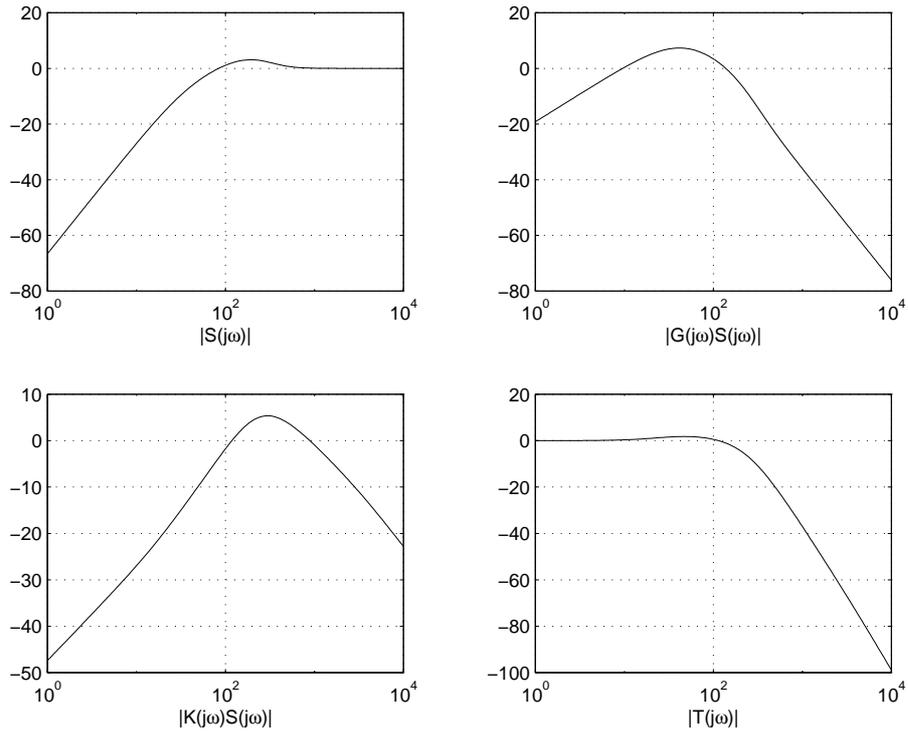


FIG. 1.20 – Tracés fréquentiels numéro 2

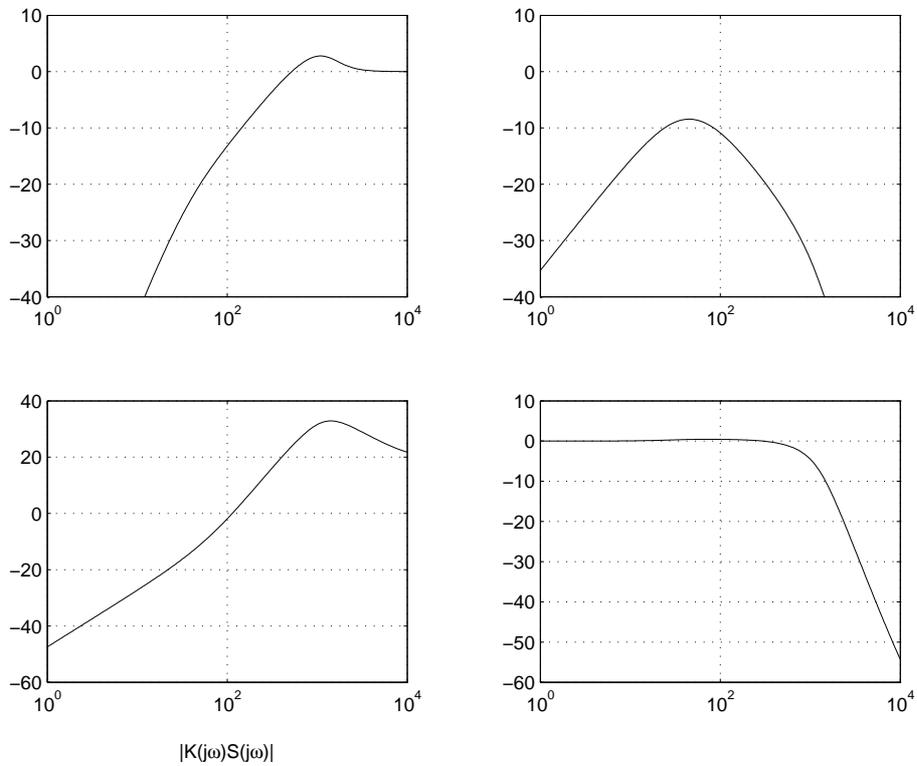


FIG. 1.21 – Tracés fréquentiels numéro 3

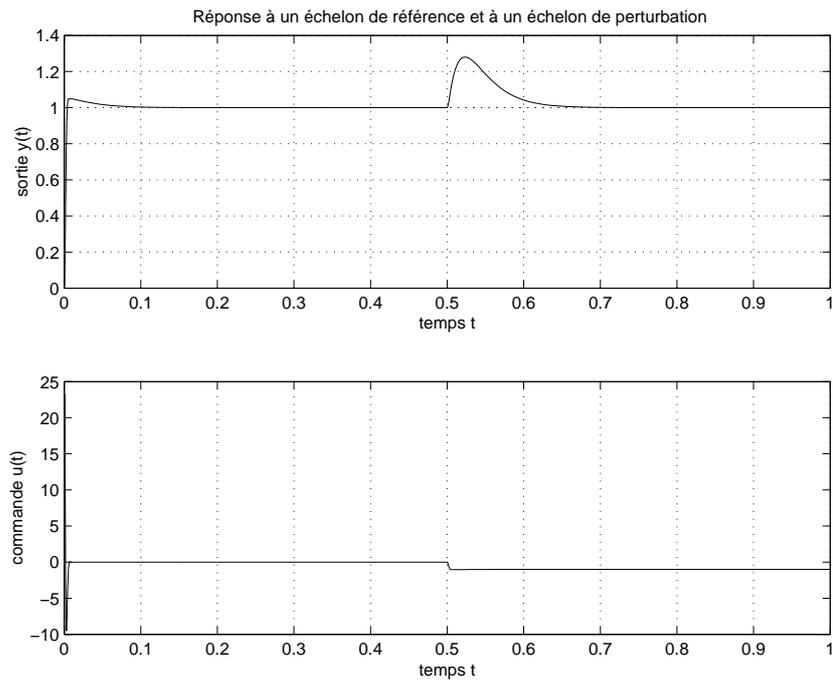


FIG. 1.22 – Réponses temporelles numéro 1

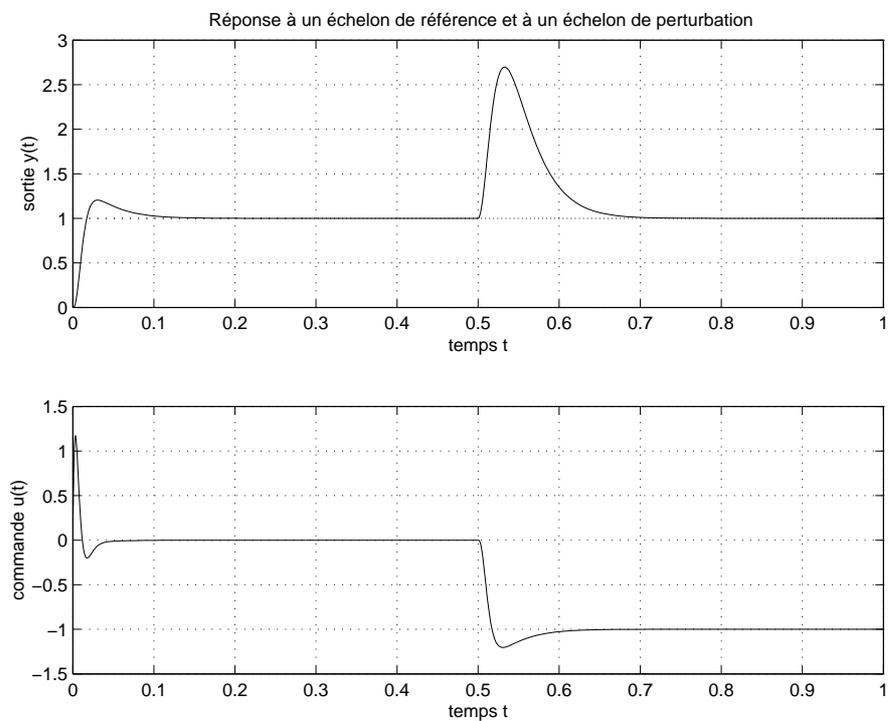


FIG. 1.23 – Réponses temporelles numéro 2

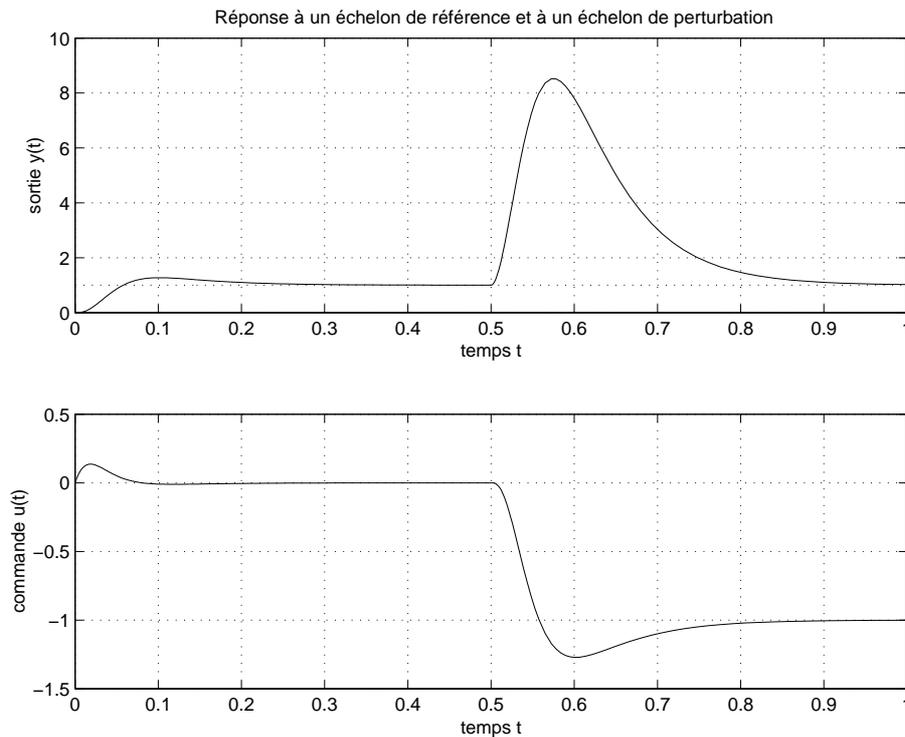


FIG. 1.24 – Réponses temporelles numéro 3

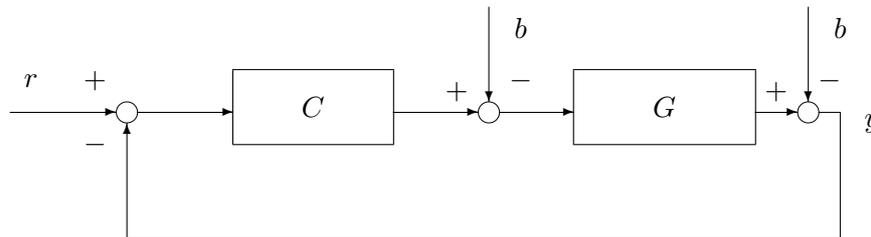


FIG. 1.25 – système bouclé avec un correcteur à un degré de liberté

1.10 Quelles performances peut-on spécifier ?

Vérifier le cahier des charges revient donc à tester, si pour les fonctions définissant les signaux de référence (W_r), de perturbation (W_b) et de bruit (W_w) et les fonctions de transfert définissant les signaux d'erreur de suivi de trajectoires (W_ϵ) et de commande (W_u), les conditions suivantes sont satisfaites :

1. **Suivi de trajectoires de référence** $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega)| \leq \frac{1}{W_\epsilon(\omega)W_r(\omega)}$;
2. **Rejet de perturbations** $|T_{v \rightarrow \epsilon}(j\omega)| \leq \frac{1}{W_\epsilon(\omega)W_b(\omega)}$;
3. **Atténuation des bruits** $|T_{w \rightarrow u}(j\omega)| \leq \frac{1}{W_u(\omega)W_w(\omega)}$;
4. **Commandes modérées** $|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)| \leq \frac{1}{W_u(\omega)W_r(\omega)}$;
5. etc..

ce qui revient de façon équivalente à vérifier que le module des différentes fonctions de transfert en boucle fermée satisfont un gabarit dépendant des signaux d'entrée et de sortie considérés. Dans le cas où l'on

recherche un correcteur C tel que le système en boucle fermée vérifie les contraintes ci-dessus (c'est-à-dire le cahier des charges), rien ne garantit qu'elle existe. Avant la mise au point du correcteur, il est donc important de se demander si les spécifications du cahier des charges sont réalistes pour le système considéré, c'est-à-dire, essayer de s'assurer *a priori* qu'il existe un correcteur qui satisfasse le cahier des charges.

Tout d'abord, il existe des relations entre les différentes fonctions de transfert en boucle fermée, ce qui implique que les différentes spécifications du cahier des charges ne sont pas indépendantes les unes des autres. Il sera donc nécessaire de faire des compromis entre les différentes spécifications. Ces relations (ou contraintes) sont de plusieurs natures.

Contraintes algébriques entre les différentes fonctions de transfert Les différentes fonctions de transfert en boucle fermée sont reliées par des relations algébriques. Par exemple, en notant en gras les fonctions de transfert en boucle fermée, on a les relations¹¹ : $\mathbf{T}_{y^* \rightarrow \epsilon} + \mathbf{T}_{y^* \rightarrow y} = 1$, $\mathbf{T}_{v \rightarrow \epsilon} = G\mathbf{T}_{y^* \rightarrow \epsilon}$ (la fonction de transfert $T_{v \rightarrow \epsilon}$ est le produit de la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$ par la fonction de transfert G qui est donnée a priori car c'est le modèle du système à commander : par suite on ne peut pas, à travers le choix de C modeler $\mathbf{T}_{y^* \rightarrow \epsilon}$ et $\mathbf{T}_{v \rightarrow \epsilon}$ de façon indépendante), $\mathbf{T}_{y^* \rightarrow y} = G\mathbf{T}_{y^* \rightarrow u}$, etc..

Contraintes sur la forme du module des fonctions de transfert en boucle fermée Sur ce sujet, les résultats sont assez nombreux mais malheureusement assez techniques et spécifiques. On va donc juste en présenter quelques uns afin d'en donner un aperçu. La fonction de sensibilité S a été la plus étudiée. La **formule de l'aire** stipule que si la différence de degrés entre le numérateur de la fonction de transfert en boucle ouverte GC et son numérateur est d'au moins¹² 2 alors

$$\int_0^{+\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^k \operatorname{Re}(p_i)$$

où p_i sont les pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte GC . Par suite, pour un système stable en boucle ouverte, l'aire délimitée par la fonction $\ln |S(j\omega)|$ sera nulle. Sur la figure 1.26, le module de la fonction de sensibilité est tracé avec une échelle *linéaire* en abscisse, ce qui permet de mieux apprécier l'égalité des aires + (aire de la surface au dessus de l'axe 0 dB délimité par le tracé de $\ln |S(j\omega)|$) et - (aire de la surface au dessous de l'axe 0 dB délimité par le tracé de $\ln |S(j\omega)|$). Ce phénomène apparaît de façon flagrante figure 1.11 où sont représentés en haut à gauche les diagrammes de Bode de plusieurs fonctions de sensibilité S . On constate que lorsque l'aire en dessous l'axe 0 dB augmente, l'aire au dessus augmente aussi. Attention, comme l'axe des abscisses est en échelle logarithmique, on n'a pas sur cette représentation égalité des aires.

Si, de plus, une contrainte est rajoutée sur la bande passante¹³ :

$$\forall \omega \geq \omega_c \geq \omega_1, \quad |T(j\omega)| \leq \beta \left| \frac{\omega_c}{\omega} \right|^{1+k}$$

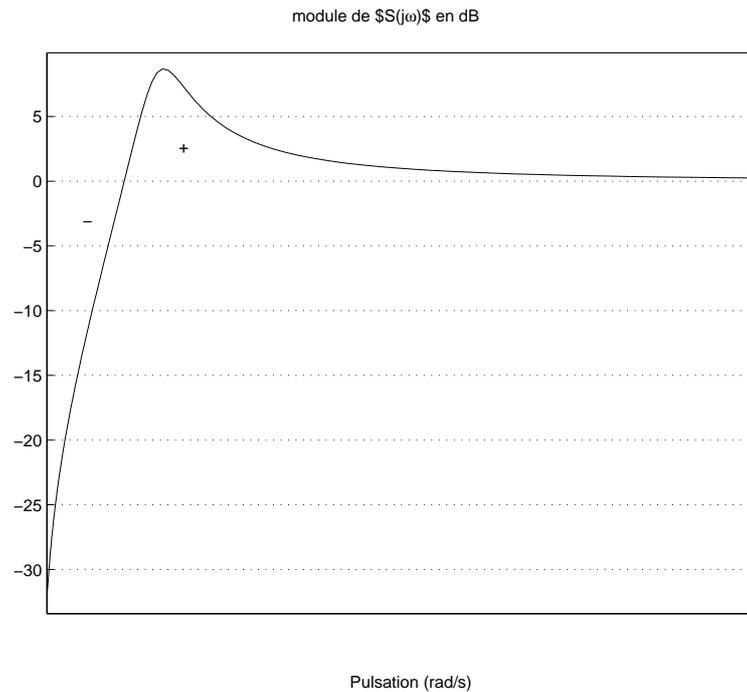
avec $\beta < \frac{1}{2}$, $k > 0$ et $\forall \omega \leq \omega_1$, $|S(j\omega)| \leq \alpha < 1$ alors le module de la fonction de sensibilité présente un pic au dessus de 0 dB pour $\omega \in [\omega_1, \omega_c]$. Par suite, le module de la fonction de sensibilité ne peut pas être dans ce cas-là inférieur à 0 dB .

Contraintes liées aux zéros instables La présence d'un zéro instable z_u dans la boucle ouverte GC limite la performance, notamment le temps de réponse pour le suivi de trajectoire en forme d'échelon par le système en boucle fermée. Ce point sera développé dans la partie synthèse de correcteur du document.

¹¹ Ces formules ne sont valables que dans le cas considéré ici, c'est-à-dire un correcteur à un degré de liberté.

¹² Cette hypothèse est faible puisqu'en général le système à commander et son correcteur sont passe bas (degré relatif au moins de 1 pour chaque).

¹³ On oblige en fait le module de la fonction de sensibilité complémentaire T à décroître avec une pente minimale en hautes pulsations.

FIG. 1.26 – tracé de $|S(j\omega)|$ en fonction de ω

Liens entre la boucle ouverte et les fonctions de transfert en boucle fermée Les liens entre la fonction de transfert en boucle ouverte GC et les fonctions de transfert en boucle fermée ont été mis en avant très tôt en Automatique fréquentielle classique. En effet, la fonction de transfert en boucle ouverte dépend de façon linéaire de C alors que les fonctions de transfert en boucle fermée sont des fonctions non-linéaires de C . Dans la perspective de régler “à la main” un correcteur C , il est intéressant d’essayer de traduire les spécifications du cahier des charges comme des contraintes sur la fonction de transfert en boucle ouverte même si elles ne s’expriment pas naturellement comme cela. Dans de nombreux cas, afin de remplir le cahier des charges, pour les basses pulsations, on a $|G(j\omega)C(j\omega)| \gg 1$ et pour les hautes pulsations, on a $|G(j\omega)C(j\omega)| \ll 1$. Hautes et basses pulsations sont définies par rapport à la pulsation de coupure ω_c ¹⁴, c’est-à-dire la pulsation pour laquelle $|G(j\omega_c)C(j\omega_c)| = 1$. Les basses (resp. hautes) pulsations correspondent alors à $\omega \ll \omega_c$ (resp. $\omega \gg \omega_c$).

Par exemple dans le cas de la fonction S , puisqu’en basses pulsations $|G(j\omega)C(j\omega)| \gg 1$, on a :

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G(j\omega)C(j\omega)|} \sim \frac{1}{|G(j\omega)C(j\omega)|} \ll 1.$$

De même en hautes pulsations, puisque $|G(j\omega)C(j\omega)| \ll 1$, on a :

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G(j\omega)C(j\omega)|} \sim 1.$$

En conclusion, le réglage de le correcteur C permet de “modeler” la fonction S en basses pulsations mais pas en hautes pulsations.

En procédant de même pour les autres fonctions de transfert en boucle fermée, on obtient le tableau 1.1 (voir aussi la figure 1.27). Ce tableau est très intéressant car il met en évidence qu’en basses pulsations, T et CS sont indépendants de le correcteur C et qu’en hautes pulsations, ce sont S et GS qui le sont. Dans le choix des gabarits, cela devra être explicitement pris en compte.

¹⁴Pour simplifier sa définition, on suppose qu’elle est unique.

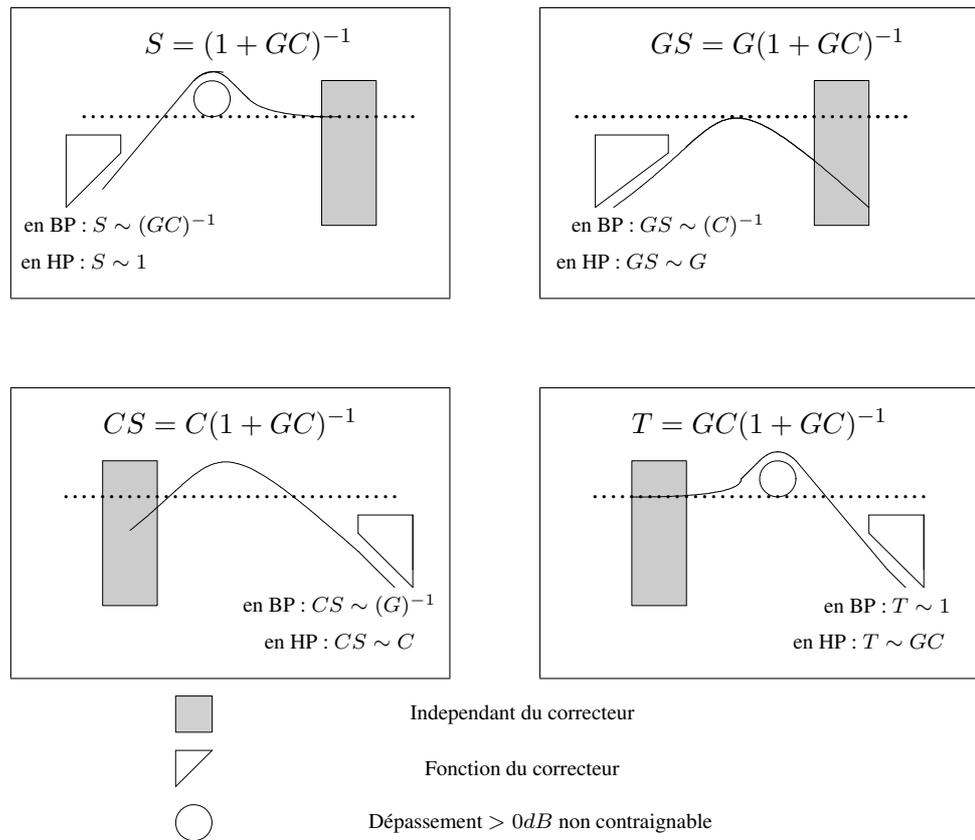


FIG. 1.27 – Liens entre fonctions BO et fonctions BF (Laure Rossignol©)

Fonction	Basses pulsations	Hautes pulsations
$ G(j\omega)C(j\omega) $	$\gg 1$	$\ll 1$
$ S(j\omega) $	$\sim \frac{1}{ G(j\omega)C(j\omega) }$	~ 1
$ G(j\omega)S(j\omega) $	$\sim \frac{1}{ C(j\omega) }$	$\sim G(j\omega) $
$ C(j\omega)S(j\omega) $	$\sim \frac{1}{ G(j\omega) }$	$\sim C(j\omega) $
$ T(j\omega) $	~ 1	$\sim G(j\omega)C(j\omega) $

TAB. 1.1 – Liens entre fonctions BO et fonctions BF quand $|G(j\omega)C(j\omega)| \gg 1$ pour les basses pulsations et $|G(j\omega)C(j\omega)| \ll 1$ pour les hautes pulsations

1.11 En résumé

Les spécifications temporelles du cahier des charges ont été transformées en spécifications fréquentielles qui se traduisent naturellement par des contraintes sur les modules des différentes fonctions de transfert en boucle fermée. Il faut noter qu'à titre illustratif, on a considéré des fonctions de transfert particulières, en considérant par exemple une perturbation en entrée du système et pas de perturbation en sortie. Néanmoins, l'approche présentée s'applique sans difficultés particulières dans des cas de figure différents.

Le plus important reste de comprendre le fil directeur de l'approche :

1. Définir les entrées importantes pour le problème considéré ; elles peuvent être de 3 types : signaux de référence, signaux de perturbation et signaux de bruit ;
2. Définir les sorties importantes par rapport au cahier des charges : en général, l'erreur de suivi de trajectoires et/ou la commande en entrée du système ;
3. Décrire l'ensemble des signaux d'entrée et de sortie correspondant aux spécifications du cahier des charges considéré ; cette description est effectuée par le choix des différentes fonctions W_x définissant les ensembles de signaux d'entrée et de sortie ;
4. En déduire des "gabarits" sur le module des fonctions de transfert du système en boucle fermée.

Pour un certain nombre de spécifications, il est possible de traduire les contraintes portant sur les fonctions de transfert en boucle fermée en contraintes portant sur les fonction de transfert en boucle ouverte.

Chapitre 2

Stabilité et robustesse du système bouclé

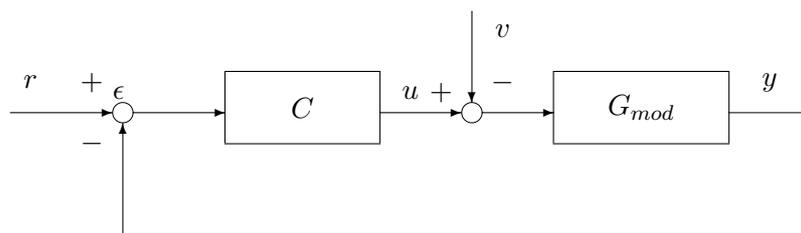


FIG. 2.1 – Modèle G_{mod} en boucle fermée avec le correcteur C

Le correcteur C a été déterminé à partir d'un modèle G_{mod} du système physique réel G_{reel} . La boucle fermée correspondante, représentée figure 2.1 est donc stable et vérifie un certain nombre de spécifications de performance. La question est de savoir si, lorsque le correcteur asservira le système réel G_{reel} , le système en boucle fermée (voir figure 2.2) sera stable et si les spécifications de performance seront aussi assurées.

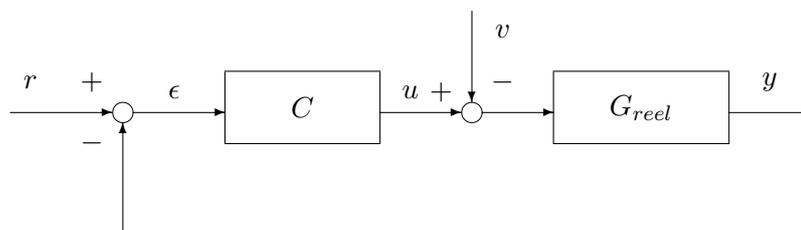


FIG. 2.2 – Système réel G_{reel} en boucle fermée avec le correcteur C

L'étude de la robustesse du correcteur C consiste à essayer d'obtenir le maximum de garanties pour que cela soit effectivement le cas. Pour cela, on considère une famille de fonctions de transfert dont le modèle nominal G_{mod} en constitue le "centre". On suppose que l'on est capable de choisir cet ensemble de telle façon qu'il contienne le système réel G_{reel} . Par suite, si la stabilité et la performance du système bouclé sont démontrées pour tous les éléments G de cette famille, alors elles le seront forcément pour le système réel. Dans le cas où le correcteur assure la stabilité pour tous les éléments de la famille, on parle de *robustesse en stabilité*; dans le cas où le correcteur assure en plus les spécifications de performance, on parle de *robustesse en performance*. Dans ce chapitre, on va rappeler les marges de stabilité qui sont habituellement définies en Automatique fréquentielle classique.

2.1 Critère de Nyquist

L'étude de la robustesse en stabilité est principalement basée sur l'utilisation du *critère de Nyquist*. Il permet de ramener l'étude de la stabilité d'un système en boucle fermée à l'étude de certaines caractéristiques de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte.

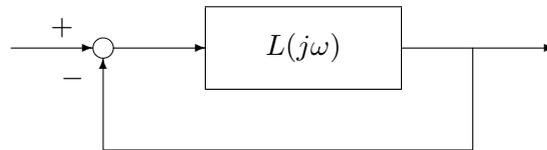


FIG. 2.3 – Bouclage d'une fonction de transfert $L_{mod}(j\omega)$

Critère de Nyquist (cas monovariable) Dans le cas où la fonction de transfert $L(j\omega)$ ne possède pas de pôles imaginaires purs, le système bouclé SISO¹ représenté figure 2.3 est stable si et seulement si le tracé de la fonction de transfert $L(j\omega)$ dans le plan complexe quand ω va de $-\infty$ à $+\infty$ ne passe pas par le point $(-1, 0)$ et l'encercle (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $L(j\omega)$.

Remarque Dans le cas où le transfert possède des pôles imaginaires purs, le critère précédent s'applique après une modification technique qui ne sera pas développée ici. Pour plus de détails, voir les livres de base sur l'automatique fréquentielle classique (par exemple [?]).

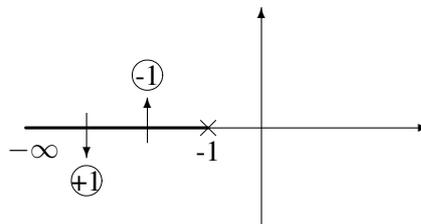


FIG. 2.4 – Comptage du nombre d'encerclement

Remarque Dans la mise en œuvre du critère de Nyquist, la difficulté pratique principale est de compter correctement le nombre d'encerclement du point $(-1, 0)$. Une astuce est de le déterminer en comptant le nombre de points d'intersection du tracé de $L(j\omega)$ avec la demi-droite $[-\infty, -1]$ de l'axe des abscisses. Le nombre d'encerclements du point $(-1, 0)$ est obtenu en retranchant au nombre de fois où le tracé de $L(j\omega)$ coupe cette demi-droite en étant orienté vers le bas le nombre de fois où le tracé de $L(j\omega)$ coupe cette demi-droite en étant orienté vers le haut.

Cas particulier et important : $L(p)$ est stable (critère du revert) Dans le cas où la fonction de transfert $L(p)$ est stable, le critère se simplifie fortement. On parle alors du critère du revert. Il suffit de vérifier que le tracé de $L(j\omega)$, quand ω croît, laisse le point $(-1, 0)$ sur sa gauche pour assurer la stabilité du système bouclé. Si, en plus, l'argument de la fonction de transfert $L(j\omega)$ est égale à -180° que pour une seule pulsation ω_{180° , la stabilité du système bouclé est assurée par le fait que $|L(j\omega_{180^\circ})| < 1$.

Contrairement à ce que suggère l'énoncé du critère de Nyquist, son principal intérêt applicatif n'est pas, en général, de vérifier à partir de la boucle ouverte si le système en boucle fermée correspondant est stable

¹Single Input, Single Output : à une entrée et une sortie.

ou non. On peut en effet aisément déterminer si le système en boucle fermée est stable en calculant ses pôles. L'intérêt du critère de Nyquist est *autre* et double. Dans le contexte de la recherche d'un correcteur C qui stabilise un système G , le critère de Nyquist appliqué à $L = CG$ permet de choisir graphiquement C de façon à assurer la stabilité du système bouclé. L'autre grande application est d'étudier pour un système bouclé stable ses marges de stabilité. Nous allons ici l'appliquer dans cette optique. Ce qui est remarquable, c'est que le critère de Nyquist est l'outil central de l'étude de la robustesse que ce soit en Automatique fréquentielle classique ou avancée.

2.2 Marges de stabilité classiques

La première erreur entre le modèle G_{mod} et le système réel G_{reel} qui est classiquement considérée est une erreur portant sur le gain statique de la fonction de transfert $G_{reel}(p)$. On a supposé que :

$$G_{mod}(p) = K_{mod}H(p)$$

où $H(p)$ est une fonction de transfert de gain statique égal à un et, en réalité, le système s'exprime comme :

$$G_{reel}(p) = K_{reel}H(p).$$

Supposons qu'en réalité $K_{reel} \geq K_{mod}$. Le système est commandé par le correcteur $C(p) = 1$. La fonction

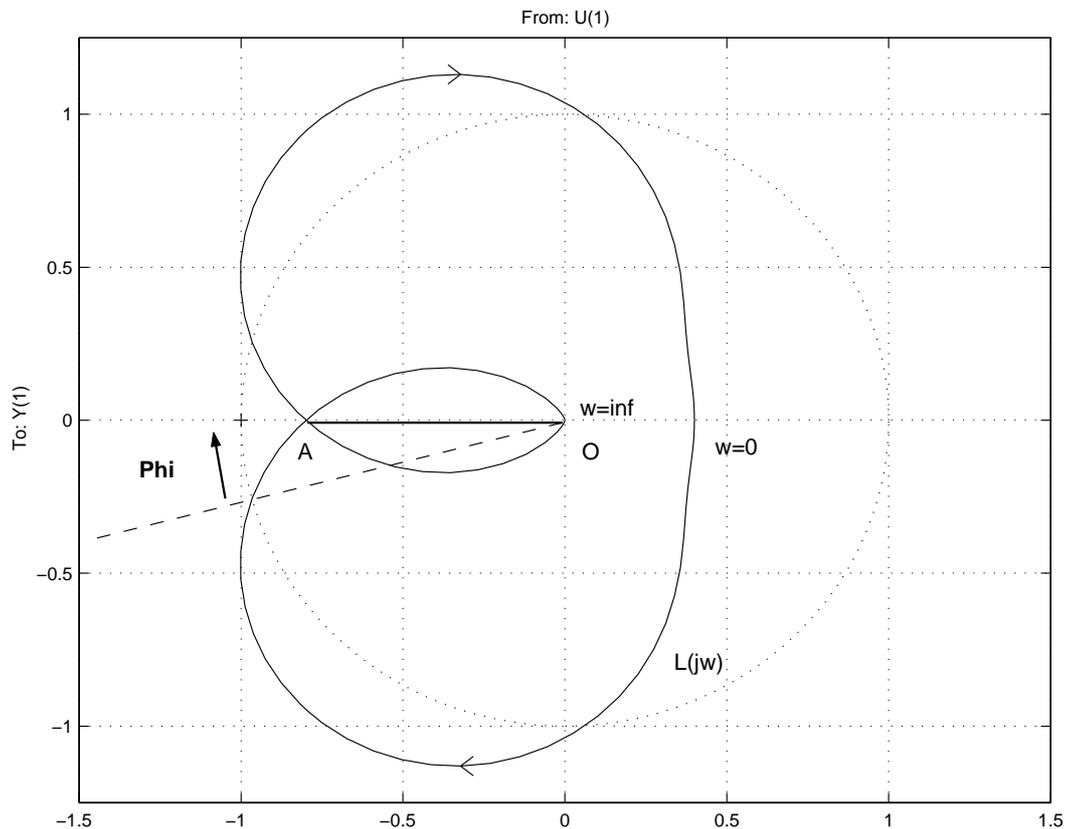


FIG. 2.5 – Tracé du Nyquist de la fonction de transfert $L(p) = \frac{0,4}{4p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$

de transfert en boucle ouverte est alors donnée par $L(p) = G(p)$. A titre illustratif, un tracé de Nyquist est représenté sur la figure 2.6 dans le cas où :

$$L(p) = \frac{0,4}{4p^3 + 3p^2 + 2p + 1}.$$

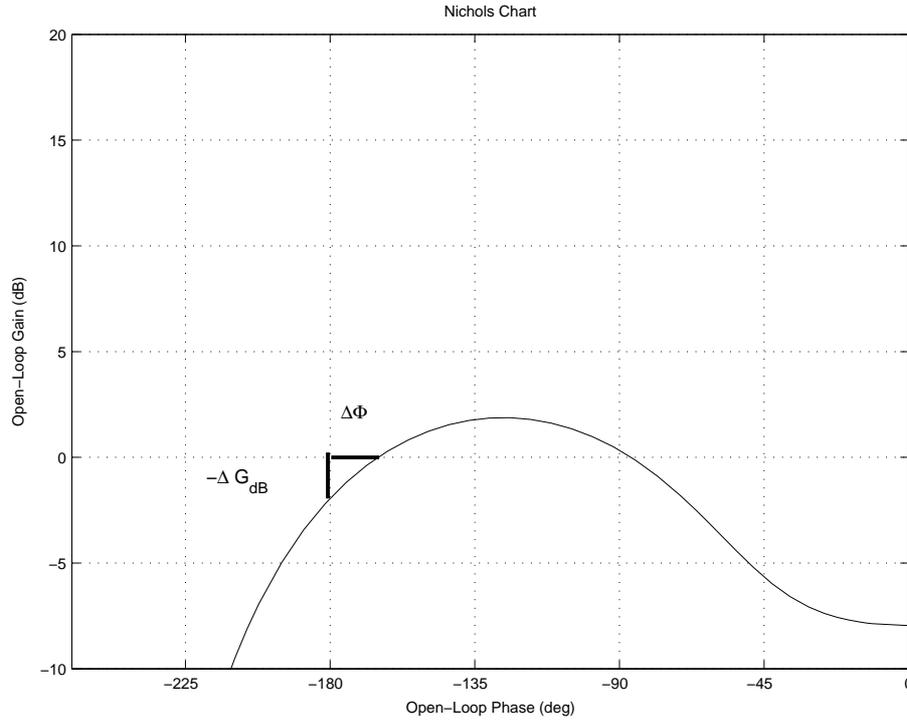


FIG. 2.6 – Tracé du Nichols de la fonction de transfert $L(p) = \frac{0,4}{4p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$

La question est de savoir pour quelles valeurs de K_{reel} le système bouclé représenté figure 2.3 va se mettre à osciller, voire devenir instable. La fonction de transfert $L(p)$ est stable ; par suite, d'après le critère de Nyquist, son tracé de Nyquist (représenté figure 2.6) ne doit pas recouvrir ni encercler le point $(-1, 0)$. Si le tracé recouvre le point $(-1, 0)$, sans l'encercler, le système bouclé est un oscillateur de pulsation propre ω_{180} (valeur de la pulsation pour laquelle $L(j\omega_{180}) = -1$). Si le tracé entoure le point $(-1, 0)$ alors le système en boucle fermée est instable.

Que se passe-t-il quand le gain K est modifié ? Rappelons que pour une pulsation ω , la distance entre le point représentant le nombre complexe $L(j\omega)$ et le point 0 est donnée par le module $|L(j\omega)|$. Par suite, quand le gain K varie de K_{mod} à K_{reel} , le tracé de $L(j\omega)$ est transformé par une homothétie² de centre 0 et de rapport $\frac{K_{reel}}{K_{mod}}$. Pour quelle valeur de K_{reel} , le tracé peut recouvrir le point $(-1, 0)$? D'après la figure 2.6, le point du tracé qui peut recouvrir le point $(-1, 0)$ après transformation par l'homothétie est le point³ A. Pour cela, si on pose

$$\Delta G = \frac{1}{\text{distance}(O, A)} \quad (2.1)$$

il suffit que $K_{reel} = K_{mod}\Delta G$. ΔG est appelée la *marge de gain* (supérieure)⁴.

La relation (2.1) permet de déterminer graphiquement la marge de gain. Il est possible de la déterminer directement à partir de la fonction de transfert $L(p)$. Si la pulsation ω_{180} est telle que $\arg(L(j\omega_{180})) =$

²Une homothétie de centre 0 et de rapport α est une application linéaire qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \alpha\overrightarrow{OM}$.

³A est le point d'intersection du tracé de $L_{mod}(j\omega)$ avec le segment entre les points O et $(-1, 0)$ exclus.

⁴De la même façon, on peut définir la marge de gain inférieure : si $K_{reel} \leq K_{mod}$, à partir de quelle valeur de K_{reel} le système bouclé devient instable : cette marge peut être définie si le tracé de la boucle ouverte $L(j\omega)$ coupe l'axe des abscisses entre $-\infty$ et -1 , ce qui n'est pas le cas dans l'exemple considéré. Dans le cas où l'on peut définir une marge de gain inférieure, on parle de stabilité conditionnelle.

-180° et telle que $|L(j\omega_{180})| < 1$ alors

$$\Delta G = \frac{1}{|L(j\omega_{180})|}. \quad (2.2)$$

Dans un premier temps, on calcule donc la pulsation ω_{180} puis, à partir de la relation (2.2), la marge de gain est déterminée.

On a ainsi démontré la stabilité du système en boucle fermée pour tout système $G(p)$ tel que :

$$G(p) \in \{G(p) \mid \exists K \in [K_{mod}, K_{mod}\Delta G], G(p) = KH(p)\}.$$

Parallèlement à l'erreur sur le gain, il est généralement considérée une erreur sur la phase du système, c'est-à-dire que l'on considère qu'il existe une différence entre la phase du modèle et la phase du système réel, c'est-à-dire un scalaire θ tel que :

$$\forall \omega, \quad \arg(G_{mod}(j\omega)) - \arg(G_{reel}(j\omega)) = \theta$$

soit

$$\forall \omega, \quad G_{reel}(j\omega) = e^{-j\theta} G_{mod}(j\omega).$$

On recherche la plus petite valeur de l'erreur θ sur la phase qui peut provoquer l'oscillation du système en boucle fermée. Une erreur sur la phase de θ , indépendante de la pulsation ω , entre G_{mod} et G_{reel} veut dire que l'on peut passer du tracé de $L_{mod}(j\omega)$ au tracé de $L_{reel}(j\omega)$ par une rotation de centre 0 et d'angle θ . D'après la figure 2.6, le tracé de $L_{mod}(j\omega)$ sera ramené sur le point $(-1, 0)$ si $\theta = \Phi$. Cette quantité, notée $\Delta\Phi$, est alors appelée *marge de phase*. Mathématiquement, si la pulsation ω_c est telle que $|L(j\omega_c)| = 1$ et qu'elle est unique⁵ alors

$$\Delta\Phi = \arg(L(j\omega_c)) + 180^\circ \quad (2.3)$$

Pour calculer la marge de phase, on calcule donc la pulsation ω_c puis, à partir de la relation (2.3), la marge de gain est déterminée.

Autant l'erreur sur le gain pouvait s'interpréter physiquement, autant il est difficile de le faire dans le cas de l'erreur sur la phase puisqu'il n'existe pas de fonction de transfert rationnelle à coefficients réels dont le gain est égal à 1 et dont la phase vaut une valeur constante et arbitraire (sauf choix particuliers pour cette constante). Par contre, la marge de phase permet de définir la *marge de retard*. La marge de retard est donnée par la plus petite valeur ΔR de la constante de retard τ telle que le système rebouclé sur $e^{-\tau p}L(p)$ soit oscillant. Tout système rebouclé sur $e^{-\tau p}L(p)$, avec $\tau < \Delta R$ sera alors stable. La marge de retard peut donc se définir (et se calculer) comme :

$$\Delta R = \frac{\Delta\Phi}{\omega_c}.$$

Un autre type d'interprétation peut être donné pour les marges de stabilité. On suppose que le système est relativement bien connu même s'il y a des erreurs : par suite, si on peut superposer le tracé de la boucle ouverte $L_{mod}(j\omega)$ obtenue à partir du modèle du système sur le tracé de la boucle ouverte $L_{reel}(j\omega)$ du système réel, les deux tracés, bien que différents, seront relativement proches. Le passage du tracé de la boucle ouverte $L_{mod}(j\omega)$ au tracé de la boucle ouverte $L_{reel}(j\omega)$ peut être vu comme une (légère) déformation du tracé de $L_{mod}(j\omega)$. Dans le cas de la marge de gain, on a supposé que cette déformation était une homothétie ; dans le cas de la marge de phase, cette déformation était une rotation.

Si le tracé de $L_{mod}(j\omega)$ est suffisamment éloigné du point $(-1, 0)$, il y a peu de chance que le tracé de $L_{reel}(j\omega)$ le recouvre ou l'encercle. Les marges de stabilité peuvent ainsi être vues comme des "distances" entre le tracé de $L_{mod}(j\omega)$ et le point $(-1, 0)$. Par exemple, pour la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$L(p) = \frac{0,07(p+7,5)(p+2)}{p(p^2+0,4p+4)}$$

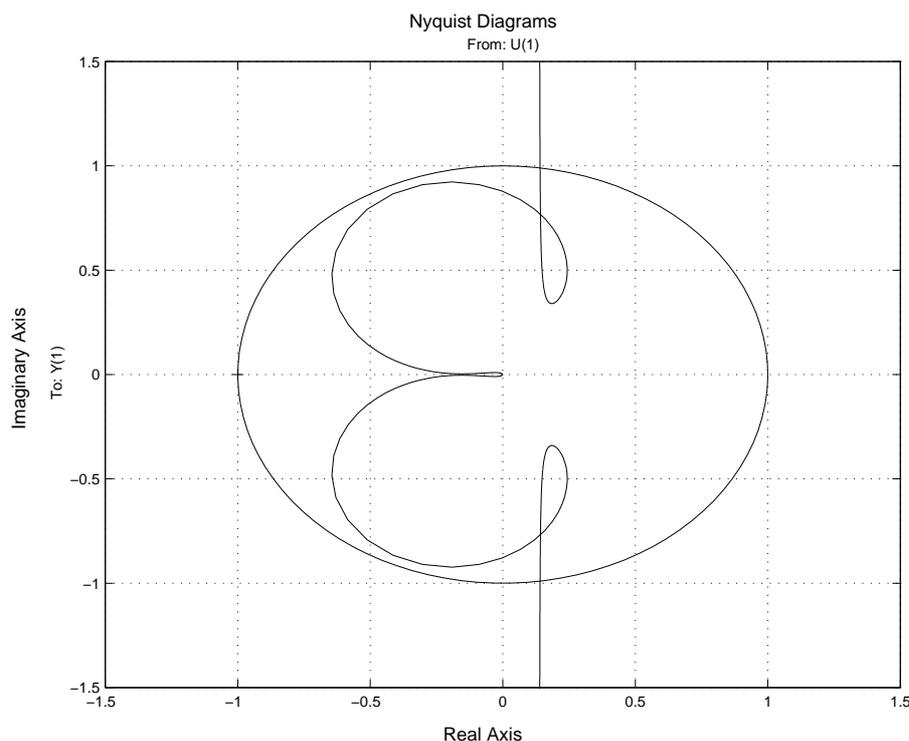


FIG. 2.7 – Tracé du Nyquist de $L(p) = \frac{0,07(p+7,5)(p+2)}{p(p^2+0,4p+4)}$

on a le tracé représenté sur la figure 2.7. D’après le tracé, la marge de gain est infinie et la marge de phase est supérieure à 90° . Ces marges semblent fabuleuses : néanmoins, si le second coefficient du dénominateur 0,4 est remplacé par 0,152, le système bouclé sera un oscillateur pur (voir la figure 2.8). Les marges de gain et de phase ne sont donc pas adéquates pour mesurer l’influence du coefficient de la fonction de transfert considéré.

Il serait donc plus adéquat de mesurer directement la plus petite distance⁶ entre le point $(-1, 0)$ et le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$. C’est ce que l’on appelle la *marge de module*, notée ΔM . Elle peut se déterminer graphiquement à partir de la figure 2.6 à l’aide d’un compas dont la pointe serait piquée sur le point $(-1, 0)$: l’écartement du compas serait augmenté jusqu’à tracer un cercle tangent au tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$.

On peut aussi la déterminer directement à partir de la fonction de transfert $L(p)$. Pour une pulsation ω , la distance entre le point $(-1, 0)$ et le point défini par $L(j\omega)$ est donnée par $|1 + L(j\omega)|$. Par suite,

$$\Delta M = \inf_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \frac{1}{\sup_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|}} = \frac{1}{\sup_{\omega} |S(j\omega)|}$$

où S est la fonction de sensibilité.

En conclusion, la marge de gain correspond à une incertitude sur le gain du système, indépendamment de la pulsation ω , donc à un type très spécifique d’incertitude. La marge de phase s’interprète difficilement, si ce n’est par la définition de la marge de retard (soit un autre type d’incertitude très spécifique). Enfin, si la marge de module mesure correctement la distance entre le point $(-1, 0)$ et le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte, elle n’a pas *a priori* d’interprétation en terme d’incertitude, d’erreur entre le modèle et le système réel

⁵S’ils existent plusieurs pulsations ω_c^i telles que $|L(j\omega_c^i)| = 1$ alors $\Delta\Phi = \inf_i \{\arg(L(j\omega_c^i)) + 180^\circ\}$

⁶La distance entre un point M et une courbe \mathcal{C} est la *distance*(M, \mathcal{C}) minimale quand N décrit la courbe \mathcal{C} .

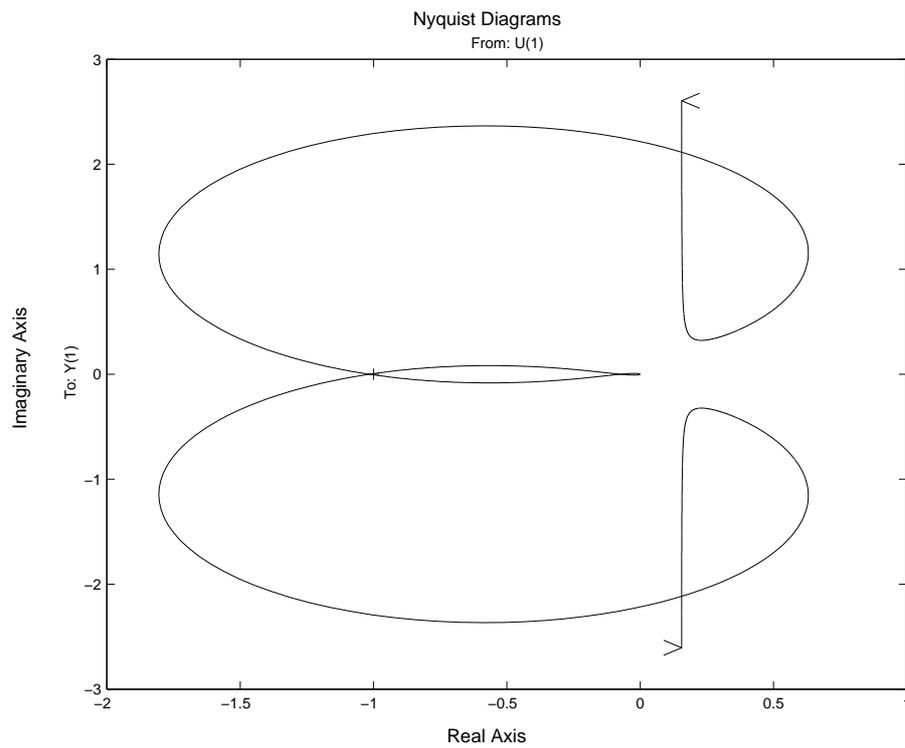


FIG. 2.8 – Tracé du Nyquist de $L(p) = \frac{0,07(p+7,5)(p+2)}{p(p^2+0,152p+4)}$

Chapitre 3

Synthèse de correcteurs

Comme cela a été vu dans le chapitre 1, les spécifications du cahier des charges se formalisent naturellement par des contraintes portant sur des fonctions de transfert du système en boucle fermée. La stabilité est assurée par le fait que toutes les fonctions de transfert en boucle fermée sont stables. Pour assurer la performance, il est nécessaire de contraindre le module de la réponse fréquentielle de fonctions de transfert en boucle fermée. Par exemple, dans le cas d'une spécification de suivi de trajectoires, on considère les fonctions de transfert $T_{y^* \rightarrow y}(p) = T(p)$ et $T_{y^* \rightarrow e}(p) = S(p)$.

Notre objectif est ici de rechercher un correcteur $C(p)$ qui satisfasse le cahier des charges. Comme ces fonctions dépendent non linéairement du correcteur $C(p)$ que l'on cherche à mettre au point :

$$S(p) = \frac{1}{1+G(p)C(p)} \quad \text{et} \quad T(p) = \frac{G(p)C(p)}{1+G(p)C(p)}$$

une recherche "manuelle" de $C(p)$ de façon à satisfaire ces contraintes peut être très complexe, même dans le cas d'une structure simple pour le correcteur $C(p)$.

Exemple On reprend l'exemple d'un moteur à courant continu commandé par un gain proportionnel (voir page 22). On désire régler le gain k^c de façon à garantir un certain suivi de trajectoire. Dans cet exemple là, on a vu que la fonction de transfert $S(p)$ s'écrivait :

$$S(p) = \frac{p(\tau_1 p + 1)}{\tau_1 p^2 + p + k k^c}$$

D'où,

$$|S(j\omega)| = \frac{\omega \sqrt{\tau_1^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{(k k^c - \tau_1 \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

Par suite, modifier $|S(j\omega)|$ en agissant sur k^c n'est pas direct, même dans le cas très simple d'un correcteur proportionnel.

L'idée fondamentale des méthodes de synthèse de correcteurs en automatique fréquentielle classique consiste à transformer ces contraintes portant sur des fonctions de transfert du système en boucle fermée en contraintes portant sur la fonction de transfert du système en boucle ouverte $L(p) = G(p)C(p)$, en utilisant les liens qui existent entre les fonctions de transfert en boucle fermée et la fonction de transfert en boucle ouverte.

Exemple (suite) Reprenons l'exemple ci-dessus. Dans ce cas-là, nous avons

$$|L(j\omega)| = k^c \frac{k}{\omega \sqrt{\tau_1^2 \omega^2 + 1}}$$

La dépendance de $|L(j\omega)|$ en fonction de k^c est linéaire. Il est donc facile de choisir k^c pour modifier $|L(j\omega)|$ dans un certain sens.

Ces contraintes sur la fonction de transfert en boucle ouverte sont traduites sur une ou plusieurs représentations graphiques (diagrammes de Bode, de Nyquist et/ou de Black Nichols). C'est l'utilisation de ces représentations graphiques qui rend ces méthodes extrêmement attractives.

La première étape est donc de rechercher les contraintes que doit satisfaire la fonction de transfert en boucle ouverte $L(p) = G(p)C(p)$ pour que le cahier des charges soit rempli. La seconde est de trouver effectivement $C(p)$ qui permet à la boucle ouverte $L(p)$ de satisfaire ces contraintes.

3.1 Spécification de la performance sur la boucle ouverte

La question est de savoir ce que le correcteur $C(p)$ doit vérifier afin de remplir le cahier des charges.

3.1.1 Stabilité

Comme cela a été vu dans le chapitre 2, l'application du critère de Nyquist permet de relier la stabilité du système en boucle fermée au tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte (voir la section 2.1). Il est donc nécessaire de trouver un correcteur $C(p)$ telle que la fonction de transfert en boucle ouverte $L(p)$ satisfasse le critère de Nyquist.

Par exemple, dans le cas où la fonction de transfert $L(p)$ est stable et où l'argument de la fonction de transfert $L(j\omega)$ est égale à -180° pour une seule pulsation ω_{180° , la stabilité du système bouclé est assurée par le fait que $|L(j\omega_{180^\circ})| < 1$. Il faut donc alors choisir $C(p)$ tel que :

$$|C(j\omega_{180^\circ})| < \frac{1}{|G(j\omega_{180^\circ})|}.$$

3.1.2 Performance 1 : suivi de référence

L'approche est d'abord détaillée dans le cas de signaux de référence en forme d'échelon avant de considérer d'autres classes de signaux.

Régime permanent Le régime permanent de la réponse à un échelon est caractérisé par l'erreur statique. D'après le chapitre 1, l'erreur statique est nulle si $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p)$ possède au moins un zéro en zéro. Or, dans notre cas :

$$T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) = S(p) = \frac{1}{1 + G(p)C(p)}.$$

En écrivant $C(p)$ et $G(p)$ comme le rapport de deux polynômes :

$$C(p) = \frac{\text{num}_C(p)}{\text{den}_C(p)} \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{\text{num}_G(p)}{\text{den}_G(p)}$$

on a

$$T_{y^* \rightarrow \epsilon}(p) = \frac{\text{den}_G(p)\text{den}_C(p)}{\text{den}_G(p)\text{den}_C(p) + \text{num}_G(p)\text{num}_C(p)}.$$

Il faut donc que soit le dénominateur de $C(p)$ soit le dénominateur de $G(p)$ s'annule en zéro, c'est-à-dire que $C(p)$ ou $G(p)$ contienne au moins un intégrateur.

Exemple de la commande du moteur à courant continu Dans ce cas-là, le système à commander $G(p)$ contient déjà un intégrateur : il n'est donc pas nécessaire que $C(p)$ en contienne un pour assurer le suivi de référence en forme d'échelon.

Régime transitoire Il est caractérisé par la rapidité (temps de réponse) et le dépassement. Notons que pour assurer une erreur statique nulle, la fonction de transfert $L(p)$ contient au moins un intégrateur. Par suite, en basses pulsations, on a nécessairement

$$|L(j\omega)| \sim \frac{\beta}{|\omega|^{n_I}} \gg 1$$

où β est une constante et n_I le nombre d'intégrateurs de $L(p)$. D'après le tableau 1.1, cela assure que

$$|S(j\omega)| \sim \frac{1}{|L(j\omega)|} \sim \frac{|\omega|^{n_I}}{\beta}.$$

Le tracé de $|S(j\omega)|$ présente ainsi une pente de $+20 \times n_I$ dB/décade en basses pulsations.

• La rapidité de la réponse est donnée par les pulsations ω_S ou ω_S^c (pulsations pour lesquelles $|S(j\omega_S)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|S(j\omega_S^c)| = 1$). Ces pulsations sont du même ordre de grandeur que la pulsation de coupure ω_c qui est définie par $|L(j\omega_c)| = 1^1$, tout en étant en général différentes. Cela peut se voir graphiquement dans le plan complexe représenté sur la figure 3.1. En effet, notons que

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|L(j\omega) - (-1)|},$$

c'est-à-dire que $|S(j\omega)|$ est l'inverse de la distance entre le point $(-1, 0)$ et le point $L(j\omega)$. Par suite, pour la pulsation ω_S^c , le point $L(j\omega_S^c)$ est à une distance 1 du point $(-1, 0)$. D'autre part, par définition, $L(j\omega_c)$ est à une distance de 1 du point 0. Par suite, d'après la figure 3.1, les pulsations ω_c et ω_S^c sont proches mais en général différentes. On aura égalité dans le cas d'une marge de phase de 45° .

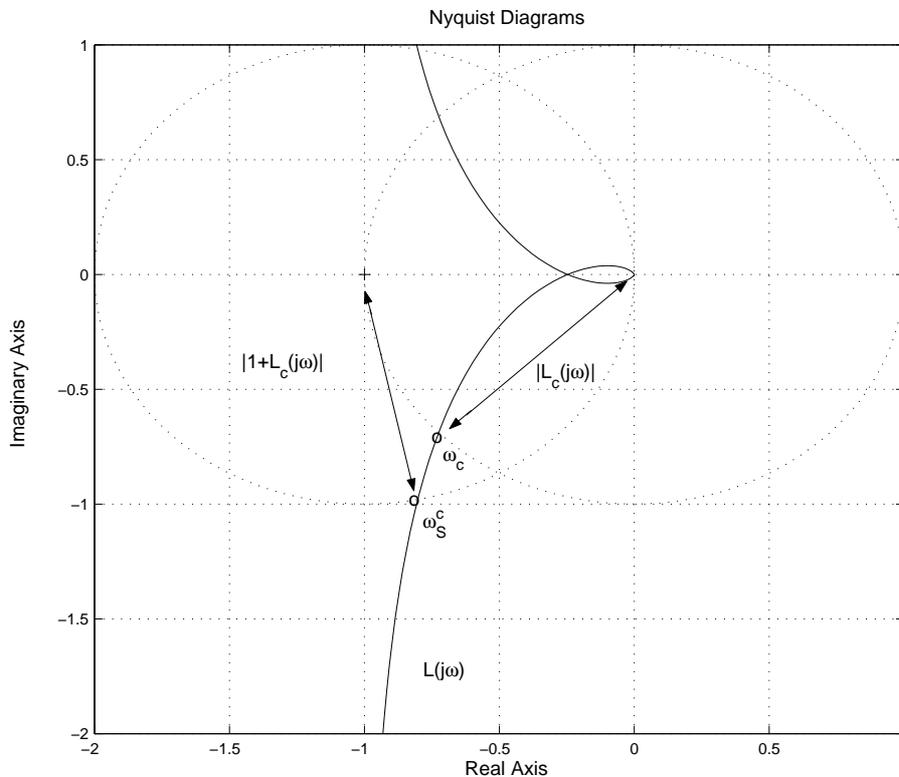


FIG. 3.1 – Nyquist de $L(j\omega)$

¹Par simplicité, on la suppose unique.

Dans le chapitre 1, nous avons vu que le temps de réponse variait de façon inverse avec la pulsation ω_c^S . On peut faire la même observation pour la pulsation ω_c . De façon générale, cela implique que le réglage du temps de réponse du système en boucle fermée se fait en modifiant la pulsation de coupure ω_c de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$. Plus la pulsation ω_c est élevée, plus le temps de réponse est faible.

La pulsation ω_c est donc imposée par le cahier des charges afin d'obtenir une certaine rapidité pour le système bouclé. Pour s'assurer que ω_c est effectivement la pulsation de coupure, le correcteur $C(p)$ doit être choisi tel que :

$$|C(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} \quad \text{et} \quad \forall \omega \in [0, \omega_c], \quad |C(j\omega)| \geq \frac{1}{|G(j\omega)|}.$$

- Le *dépassement* de la réponse à un échelon peut être obtenu en examinant la résonance (valeur maximale du module) de la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow y}$ qui vaut T dans notre cas. Comment déterminer sa valeur à partir du tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte ?

Pour cela, il faut utiliser l'abaque de Black dans le plan de Nichols. L'intérêt de cet abaque est de permettre d'obtenir le module et la phase de

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}$$

en fonction du tracé de $L(j\omega)$. Pour cela, des courbes iso gain et iso phase pour $T(j\omega)$ sont représentées dans le diagramme de Nichols (voir la figure 3.2). Pour une pulsation ω , l'intersection du tracé de $L(j\omega)$ avec une courbe iso gain donne la valeur du module de $T(j\omega)$. Par exemple, sur la figure 3.2, pour la pulsation ω , à partir du point 'o', étiqueté par $L(j\omega)$, la boucle ouverte $L(j\omega)$ correspond $|T(j\omega)| = 0,25dB$. Pour limiter le dépassement, il est nécessaire de limiter la valeur maximale de $|T(j\omega)|$. A l'aide

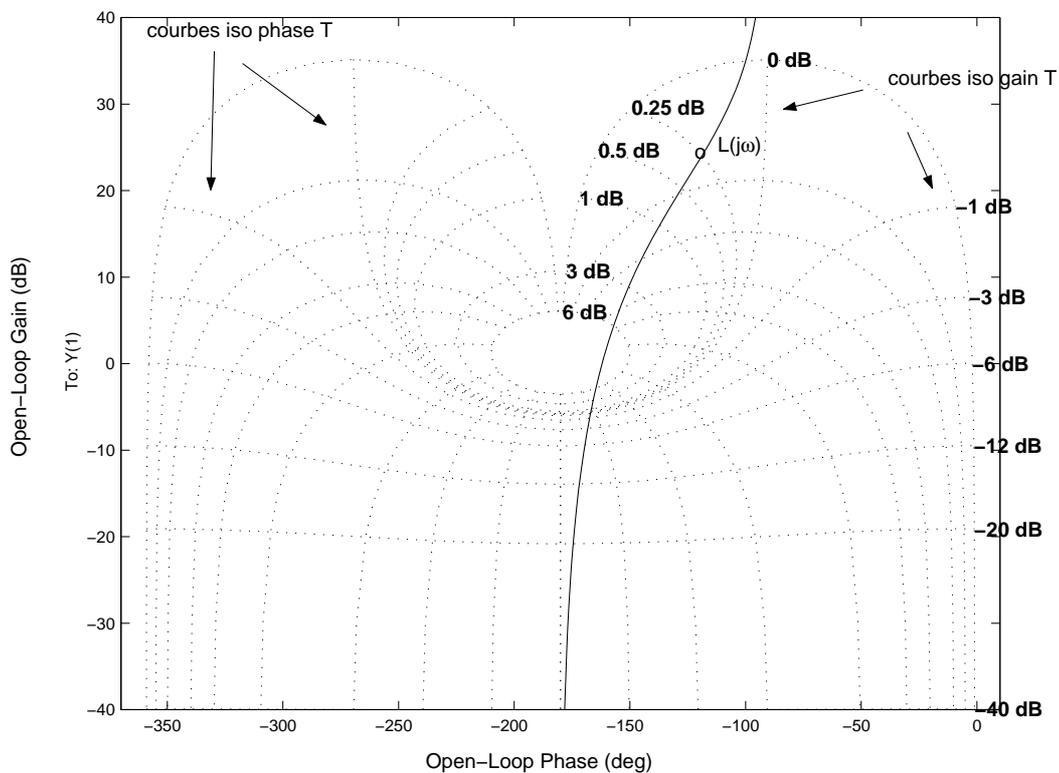


FIG. 3.2 – Black Nichols de $L(j\omega)$

du diagramme de Nichols, il est possible de régler $C(j\omega)$ pour arriver à ce résultat.

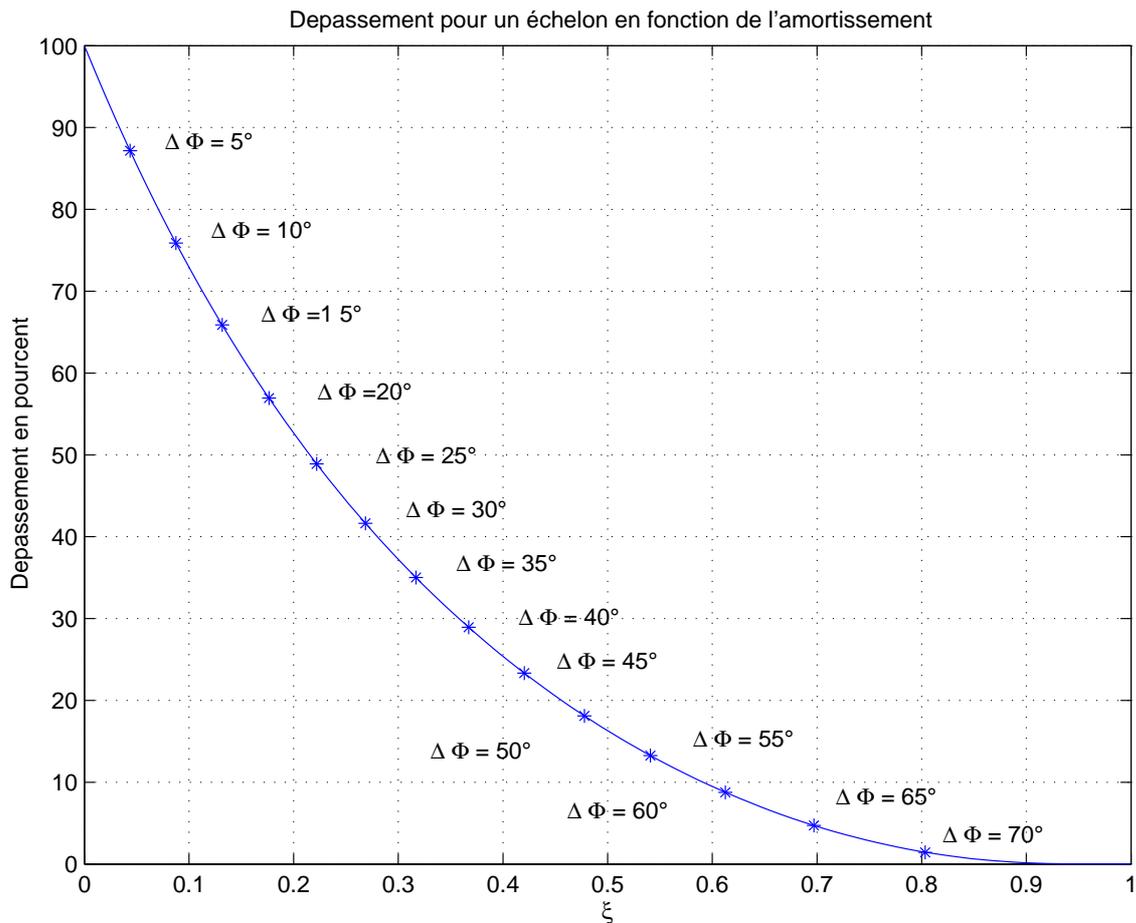


FIG. 3.3 – Relation entre la marge de phase de la boucle ouverte et le dépassement de la réponse à un échelon de la boucle fermée

Dans le cas très particulier où le système $L(j\omega)$ est une fonction de transfert du second ordre (ce qui est le cas de la fonction représentée sur la figure 3.2), du type :

$$L(p) = \frac{k}{p(\tau p + 1)}$$

la valeur maximale de $|T(j\omega)|$ est obtenue pour la pulsation ω_c (pulsation pour laquelle $|L(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$). Dans ce cas là, spécifier un certain dépassement pour la réponse temporelle, soit une certaine valeur pour la résonance de T (valeur maximale du gain $|T(j\omega)|$) revient à fixer la phase de $L(j\omega_c)$, c'est-à-dire à fixer la marge de phase $\Delta\Phi$. Par exemple, pour avoir la valeur maximale de $|T(j\omega)|$ de l'ordre de 3 dB, on doit avoir $\arg(L(j\omega)) = -138^\circ$. Dans ce cas-là, le correcteur $C(p)$ doit être choisi tel que $\arg(C(j\omega_c)) = -\arg(G(j\omega_c)) - 138^\circ$.

Dans le cas très particulier où le système $L(j\omega)$ est une fonction de transfert du second ordre, il est ainsi possible de relier directement la marge de phase au dépassement en % (voir la figure 3.3).

Remarque Il est possible d'utiliser l'abaque de Black pour déterminer le module et la phase de $S(j\omega)$ à partir du tracé de l'inverse de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$. Cela vient du fait que :

$$S(j\omega) = \frac{L(j\omega)^{-1}}{1 + L(j\omega)^{-1}}$$

Vis-à-vis de $S(j\omega)$, $L(j\omega)^{-1}$ joue le même rôle que $L(j\omega)$ vis-à-vis de $T(j\omega)$.

3.1.3 Performance 2 : rejet de perturbations d'entrée en échelon

La démarche est la même que dans le cas du suivi de référence, sauf qu'au lieu de considérer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{y^* \rightarrow \epsilon} = S$, on considère la fonction de transfert $T_{v \rightarrow \epsilon} = GS$.

Régime permanent Quand le temps t tend vers l'infini, l'erreur tend vers 0 (erreur asymptotique nulle) si $T_{v \rightarrow \epsilon}(p)$ possède au moins un zéro en zéro. Or, dans notre cas :

$$T_{v \rightarrow \epsilon}(p) = G(p)S(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)C(p)}$$

soit

$$T_{v \rightarrow \epsilon}(p) = \frac{\text{num}_G(p)\text{den}_C(p)}{\text{den}_G(p)\text{den}_C(p) + \text{num}_G(p)\text{num}_C(p)}.$$

Pour annuler l'erreur asymptotique, il faut donc que soit le dénominateur de $C(p)$ ou soit le numérateur de $G(p)$ s'annule en zéro, c'est-à-dire que soit $C(p)$ contienne un intégrateur ou soit $G(p)$ contienne un dérivateur.

Exemple de la commande du moteur à courant continu Dans cet exemple, le système à commander $G(p)$ n'est pas dérivateur : il est donc nécessaire que $C(p)$ contienne un intégrateur pour assurer le rejet asymptotique d'une perturbation en forme d'échelon.

Régime transitoire Nous nous plaçons dans le cas où le système à commander $G(p)$ n'est pas dérivateur et où le correcteur $C(p)$ contient un intégrateur : on aura en basses pulsations $|L(j\omega)| \gg 1$. D'après le tableau 1.1,

$$|G(j\omega)S(j\omega)| \sim \frac{1}{|C(j\omega)|} \sim \bar{\beta}|\omega| \quad (3.1)$$

où $\bar{\beta}$ est une constante. La dernière équivalence vient du fait que $C(p)$ contient un intégrateur. Par suite, le tracé de $|G(j\omega)S(j\omega)|$ présente une pente de + 20 dB/décade en basses pulsations.

Comme dans le cas du suivi de référence, la *rapidité du rejet* est donnée par l'étendu de la gamme de pulsations sur laquelle $|G(j\omega)S(j\omega)| < 1$. D'après l'équivalence (3.1), elle correspond, *en première approximation*, à la gamme de pulsations pour laquelle $|C(j\omega)| > 1$. Le rejet est d'autant plus rapide que cette gamme de pulsations est importante. On peut par exemple la caractériser par la pulsation ω_c^C telle que $|C(j\omega_c^C)| = 1$, avec pour $\omega \in [0, \omega_c^C[$, $|C(j\omega)| > 1$ et pour $\omega \geq \omega_c^C$, $|C(j\omega)| \leq 1$.

3.1.4 Limitation de la commande

Remarque préliminaire Dans le cas de suivi de référence en échelon et/ou de rejet de perturbation en échelon, on déduit de la discussion précédente qu'en basses fréquences, on a $|L(j\omega)| \gg 1$.

Limitation de la puissance de la commande pour le suivi de référence On désire limiter la puissance de commande nécessaire au suivi de référence. En notant $\mathcal{S}_u(j\omega)$ la densité spectrale de puissance du signal² u , on a la puissance du signal u qui est donnée par :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_u(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)|^2 \mathcal{S}_{y^*}(j\omega) d\omega \end{aligned}$$

² $\mathcal{S}_u(j\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation moyennée de $u(t)$:

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)u(t - \tau) dt.$$

Par suite, pour limiter la puissance de commande, il est nécessaire que pour toute pulsation ω , les gains $|T_{r \rightarrow u}(j\omega)|$ soient faibles. Dans notre cas, $T_{y^* \rightarrow u} = CS$

Est ce possible en basses pulsations ? Comme en basses fréquences $|L(j\omega)| \gg 1$, d'après le tableau 1.1, on a :

$$|C(j\omega)S(j\omega)| \sim \frac{1}{|G(j\omega)|}.$$

Dans cette gamme de pulsations, la fonction de transfert est indépendante du correcteur $C(p)$: il n'est donc pas possible d'agir sur celui-ci pour limiter les gains $|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)|$.

Peut-on le faire en hautes pulsations ? Très caricaturalement, on peut choisir $C(p)$ de façon à avoir soit $|L(j\omega)| \gg 1$, soit $|L(j\omega)| \ll 1$. La première possibilité correspond au cas ci-dessus où la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow u}$ est indépendante de C . D'après le tableau 1.1, le second cas mène à

$$|C(j\omega)S(j\omega)| \sim |C(j\omega)|.$$

Par suite, limiter les gains $|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)|$ en hautes pulsations revient à choisir $C(p)$ de gains faibles en hautes pulsations. Puisque $L(j\omega) = G(j\omega)C(j\omega)$, cela est cohérent avec le fait d'avoir $|L(j\omega)| \ll 1$.

En conclusion, pour limiter la puissance de commande du suivi de référence, il est nécessaire de limiter les gains du correcteur en hautes pulsations, c'est-à-dire pour des pulsations supérieures à la pulsation de coupure ω_c . Cela entraîne qu'en hautes pulsations $|L(j\omega)| \ll 1$.

Limitation de la commande pour le rejet de perturbations Le même raisonnement peut être fait, en remplaçant la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow u}$ par la fonction de transfert $T_{v \rightarrow u} = T$. Il est laissé au lecteur. La conclusion est similaire à la conclusion précédente : pour limiter la commande du rejet de perturbation, il est nécessaire de limiter les gains du correcteur en hautes pulsations.

3.1.5 Influence des bruits

Influence des bruits sur la commande En se plaçant dans un contexte déterministe, les bruits sont des signaux hautes pulsations c'est-à-dire que si on considère la densité spectrale de puissance du bruit $\mathcal{S}_w(j\omega)$, son influence est importante pour une pulsation ω haute et faible pour une pulsation ω faible. Comme $\mathcal{S}_u(j\omega) = |T_{w \rightarrow u}(j\omega)|^2 \mathcal{S}_w(j\omega)$, l'influence des bruits est limitée si $|T_{w \rightarrow u}(j\omega)|$ est faible de façon prioritaire en hautes pulsations. Or $T_{w \rightarrow u} = CS$. Nous avons précédemment vu qu'en basses pulsations cette fonction de transfert était indépendante du correcteur C . Par contre, en hautes pulsations, $|C(j\omega)S(j\omega)| \sim |C(j\omega)|$. La limitation de l'influence du bruit est donc assurée si les gains du correcteur C sont faibles en hautes pulsations.

Influence des bruits sur la sortie Le même raisonnement peut être fait ici. Notons cependant qu'en hautes pulsations, on a :

$$|T_{w \rightarrow y}(j\omega)| \sim |G(j\omega)||C(j\omega)|.$$

Or, un procédé physique est généralement passe-bas ($|G(j\omega)|$ faible en très hautes pulsations). Il en résulte que même si le correcteur a des gains importants en haute pulsation $|C(j\omega)| \gg 1$ (ce qui n'est pas souhaitable si on veut limiter la puissance de commande), les bruits n'influencent pas notablement la sortie du système si $|C(j\omega)||G(j\omega)| \ll 1$. Par contre, comme cela a été vu précédemment, si en haute pulsation $|C(j\omega)| \gg 1$, leur action se fera ressentir sur la commande.

3.1.6 Marges de stabilité

Il n'y a pas de formule magique qui permette de donner ce que doit être la valeur des marges (par exemple marge de gain ΔG), valable aussi bien dans le cas où l'on commande le niveau d'eau d'un réservoir de W.C. que dans le cas où l'on commande le déplacement de la fusée Ariane. Des valeurs typiques pour la

marge de gain sont de l'ordre de 6 dB au moins mais on peut trouver des applications pour lesquelles une valeur plus faible est convenable. Les marges de stabilité peuvent être importantes sur deux aspects :

1. dans tous les cas, la robustesse, ce qui correspond à leur définition ;
2. dans un certain nombre de cas, le comportement temporel du système, comme cela sera illustré dans ce qui suit.

Marge de gain On suppose fixée une borne inférieure ΔG_{inf} sur la marge de gain. Comment choisir le correcteur $C(p)$ de façon à assurer que $\Delta G \geq \Delta G_{inf}$?

Si la pulsation ω_{180} est telle que $\arg(L(j\omega_{180})) = -180^\circ$ et telle que $|L(j\omega_{180})| < 1$ alors d'après la définition de la marge de gain,

$$\Delta G = \frac{1}{|G(j\omega_{180})||C(j\omega_{180})|}.$$

(Notons que ω_{180} dépend du réglage de C .) Par suite C va être réglé tel que :

$$|C(j\omega_{180})| \leq \frac{1}{\Delta G_{inf}|G(j\omega_{180})|}.$$

Marge de phase La marge de phase est définie à partir de la pulsation de coupure ω_c :

$$\Delta\Phi = \arg(L(j\omega_c)) + 180^\circ. \quad (3.2)$$

Notons que la pulsation de coupure est fixée de façon à assurer une certaine rapidité (temps de réponse), ce qui revient à fixer $|C(j\omega_c)|$.

Pour assurer que la marge de phase est supérieure à $\Delta\Phi_{inf}$, on doit, d'après la relation (3.2), avoir

$$\arg(C(j\omega_c)) \leq \Delta\Phi_{inf} - \arg(G(j\omega_c)) - 180^\circ.$$

Marge de retard Dans le cas où il y a une seule pulsation de coupure ω_c , la marge de retard ΔR est égale à $\frac{\Delta\Phi}{\omega_c}$. Par suite, ayant fixée la pulsation de coupure ω_c , il est simple de choisir une marge de phase compatible avec la marge de retard.

3.1.7 En résumé

Le réglage du correcteur permettant le suivi de référence et le rejet de perturbations en forme d'échelon doit respecter les contraintes suivantes :

1. $C(p)$ doit contenir un intégrateur pour assurer qu'en régime permanent
 - (a) l'effet de la perturbation sur la sortie est nul (si le système G n'est pas dérivateur)³
 - (b) l'erreur statique pour un échelon de référence est nulle (si le système G n'est pas intégrateur)
2. En régime transitoire, pour obtenir la rapidité du :
 - (a) suivi de référence : il est nécessaire d'assurer une pulsation de coupure ω_c :

$$|C(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} \quad \text{et} \quad \forall \omega \in [0, \omega_c], \quad |C(j\omega)| \geq \frac{1}{|G(j\omega)|}.$$

- (b) rejet de perturbation : il est nécessaire d'assurer une pulsation de coupure ω_c^C :

$$|C(j\omega_c^C)| = 1 \quad \text{et} \quad \forall \omega \in [0, \omega_c^C], \quad |C(j\omega)| \geq 1.$$

³Dans le cas d'un système G dérivateur, on ne peut pas utiliser un correcteur C intégrateur : pourquoi ?

3. En régime transitoire, pour limiter le *dépassement* du suivi de référence en échelon, C doit être choisie de façon à limiter la résonance de T ; pour cela, il est nécessaire d'utiliser le tracé de $G(j\omega)C(j\omega)$ dans le diagramme de Nichols associé à l'abaque de Black.
4. Pour assurer la *stabilité*, $G(j\omega)C(j\omega)$ doit vérifier le critère de Nyquist : pour cela, il est commode de représenter le tracé de $G(j\omega)C(j\omega)$ dans le diagramme de Nyquist. Dans le cas où la fonction de transfert est stable en boucle ouverte, il suffit de s'assurer que :

$$|C(j\omega_{180^\circ})| < \frac{1}{|G(j\omega_{180^\circ})|}.$$

Notez que ω_{180° dépend du choix du correcteur $C(j\omega)$.

5. Pour assurer les *marges de stabilité* :

- (a) marge de gain : $|C(j\omega_{180})| \leq \frac{1}{\Delta G_{inf} |G(j\omega_{180})|}$

- (b) marge de phase (et de retard) : $\arg(C(j\omega_c)) \leq \Delta\Phi_{inf} - \arg(G(j\omega_c)) - 180^\circ$.

sans oublier la marge de module.

6. Pour *limiter la commande* et *diminuer l'influence des bruits*, les gains de C devront être faibles en hautes pulsations.

Discussion Plusieurs contraintes sur C peuvent être conflictuelles. Par exemple, vouloir augmenter la rapidité du système bouclé (diminuer le temps de réponse à un échelon de référence et/ou le temps de rejet d'une perturbation) revient à augmenter les pulsations ω_c et ω_c^C . Si ces pulsations sont trop importantes, elles peuvent correspondre à des pulsations pour lesquelles le niveau du bruit w est important ce qui entraîne l'apparition d'un effet des bruits sur la commande important. Le choix de ω_c et ω_c^C est donc conditionné par la présence des bruits. On peut faire aussi la même remarque quant à la puissance de la commande : pour augmenter la rapidité du système bouclé, il va être nécessaire de dépenser une puissance de commande plus importante. On voit apparaître ici un compromis du type rapport qualité/prix : rapidité/puissance de commande.

Remarque Si on examine l'allure du gain de la fonction de transfert $L(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω , on constate que les gains sont grands en basses pulsations et faibles en hautes pulsations.

Les contraintes que doit satisfaire le correcteur C étant déterminées, il reste à le trouver ! Le problème étant assez complexe, il est nécessaire de le rechercher en procédant par étapes. Dans un premier temps, il faut choisir la *structure* du correcteur (correcteur proportionnel, proportionnel intégral avec ou sans avance de phase, etc..) et dans un second temps, régler les différents paramètres du correcteur (valeur à donner au gain proportionnel dans le cas d'un correcteur proportionnel, etc..).

Cette démarche demande un certain doigté et va être illustrée sur un exemple. Cet exemple va aussi nous permettre de passer en revue les différentes structures de correcteurs.

3.2 Structures de correcteurs élémentaires

Rappelons que les correcteurs considérés sont des correcteurs à un degré de liberté, c'est-à-dire de la forme (voir le schéma 3.4) :

$$u(p) = C(p)(r(p) - y(p)) = C(p)\epsilon(p).$$

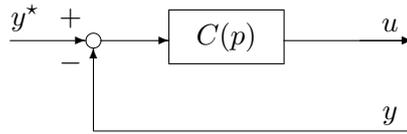


FIG. 3.4 – Correcteur à un degré de liberté

3.2.1 Proportionnel : $C(p) = k^c$

Le signal de commande $u(t)$ est simplement proportionnel à l’erreur de suivi de trajectoire $\epsilon(t)$. Le paramètre à régler est le gain k^c .

La fonction de transfert en boucle ouverte s’écrit alors $L(p) = k^c G(p)$. Comment agit k^c sur les représentations graphiques de $L(j\omega)$ (voir la figure 3.5) ?

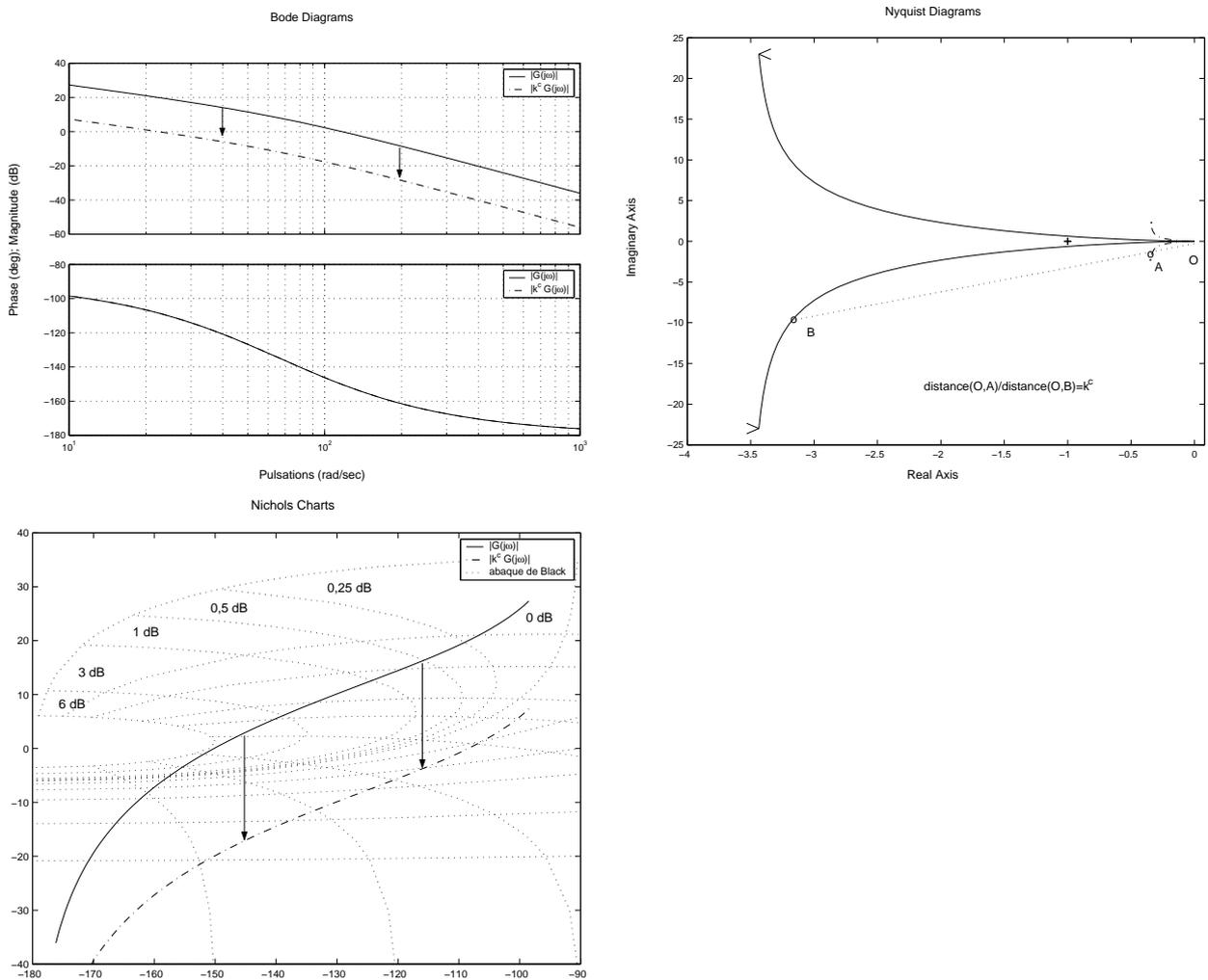


FIG. 3.5 – Réponses fréquentielles de $L(j\omega) = k^c G(j\omega)$ et de $G(j\omega)$

Dans le diagramme de bode, le tracé de $|L(j\omega)|_{dB}$ en fonction de la pulsation ω se déduit du tracé de $|G(j\omega)|_{dB}$ par une translation de $20 \log_{10}(k^c)$. De plus, $\arg(L(j\omega)) = \arg(G(j\omega))$.

Dans le diagramme de Nyquist, le tracé de $L(j\omega)$ se déduit du tracé de $G(j\omega)$ par une homothétie⁴ de

⁴Une homothétie de centre 0 et de rapport α est une application linéaire qui à tout point M associe le point M' tel que

centre 0 et de rapport k^c .

Dans le diagramme de Nichols, le tracé de $L(j\omega)$ se déduit du tracé de $G(j\omega)$ par une translation suivant l'axe des ordonnées de $20 \log_{10}(k^c)$.

Exemple du moteur à courant continu On considère l'asservissement de position d'un moteur à courant continu décrit par le modèle suivant :

$$G(p) = \frac{k}{p(\tau p + 1)}. \quad (3.3)$$

avec $k = 235$ et $\tau = \frac{1}{66,9}$.

Le cahier des charges associé est :

1. Les signaux de référence sont des échelons. La position réelle de la poulie doit tendre vers la valeur de l'échelon, sans erreur statique.
2. L'évolution de la position réelle de la poulie peut, en réponse à un signal de référence, présenter un dépassement. Celui-ci doit rester inférieur à 20% de la valeur finale de l'échelon (voir figure 1.10).
3. Le temps de réponse doit être le plus faible possible. Le temps de réponse est mesuré par le temps du premier maximum (voir figure 1.10).
4. Le correcteur doit aussi fonctionner sur le système réel, pas simplement sur le modèle ! Pour cela, on demande une marge de phase d'au moins 45 degrés.

Peut-on remplir le cahier des charges ?

La spécification 1 (*erreur statique nulle*) sera remplie car le système $G(p)$ contient un intégrateur.

Pour assurer la stabilité⁵, il suffit de choisir k^c tel que $k^c < \frac{1}{|G(j\omega_{180})|}$. De plus, pour assurer une *marge de gain* d'au moins ΔG_{inf} , il est nécessaire de choisir k^c tel que

$$k^c < \frac{1}{\Delta G_{inf} |G(j\omega_{180})|}.$$

Application numérique : on calcule d'abord la pulsation ω_{180} . La fonction de transfert $G(p)$ ayant deux pôles stables (et aucun zéro), $\arg(G(j\omega))$ tends asymptotiquement vers -180° pour ω qui tend vers ∞ . Par suite, $\omega_{180} = +\infty$. Or $|G(j\infty)| = 0$. Par suite, la borne supérieure sur k^c est $+\infty$. En conclusion, pour toute valeur (positive) de k^c , le système bouclé sera stable. De plus, la marge de gain sera infinie.

Examinons maintenant le *temps de réponse* à un échelon. Il est fixé par le choix de la pulsation ω_c . Par définition, ω_c est pulsation de coupure si $|L(j\omega_c)| = 1$ et $\forall \omega \in [0, \omega_c], |L(j\omega)| \geq 1$ soit

$$|C(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} \quad \text{et} \quad \forall \omega \in [0, \omega_c], \quad |C(j\omega)| \geq \frac{1}{|G(j\omega)|}.$$

On doit donc prendre $k^c = \frac{1}{|G(j\omega_c)|}$ pour satisfaire la première condition. Est ce que la seconde est satisfaite ? Il faut noter que $|G(j\omega)|$ est une fonction décroissante de la pulsation ω . Par suite,

$$\forall \omega \in [0, \omega_c], \quad |G(j\omega)| \geq |G(j\omega_c)|.$$

Donc

$$\forall \omega \in [0, \omega_c], \quad k^c \geq \frac{1}{|G(j\omega)|}.$$

En conclusion, pour augmenter la rapidité, c'est-à-dire augmenter la pulsation de coupure ω_c , il suffit d'augmenter k^c .

$\overline{OM} = \alpha \overline{OM}$.

⁵spécification implicite du cahier des charges.

Cependant, lorsque l'on augmente k^c , le tracé de la boucle ouverte $L(j\omega) = k^c G(j\omega)$ dans le plan de Nichols est translaté vers le haut. Pour assurer un *dépassement* raisonnable, il faut que le tracé de $L(j\omega)$ ne coupe pas des courbes iso gain T de trop grande valeur, ce qui exclut de choisir k^c trop grand. Le tracé de la boucle ouverte $L(j\omega)$ pour $k^c = 1$ sur le diagramme de Nichols est indiqué sur la figure 3.6. Pour $k^c = 1$, le tracé tangente la courbe iso gain T 6 dB. La réponse temporelle à un échelon de référence montre un

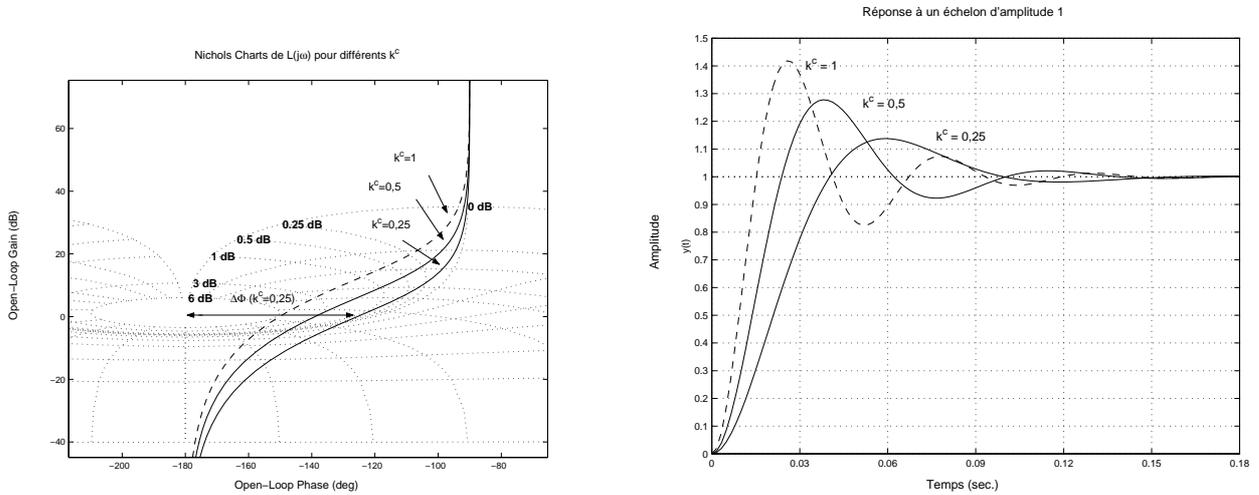


FIG. 3.6 – Réponse fréquentielle de $L(j\omega)$ et temporelle de T

dépassement trop important.

On décide donc de diminuer la valeur de k^c de façon à tangenter la courbe iso gain T 3 dB. On obtient $k^c = 0,5$. D'après la courbe temporelle, le dépassement reste encore important. On décide donc de diminuer la valeur de k^c de façon à tangenter la courbe iso gain T 1 dB. On obtient $k^c = 0,25$.

Le dépassement devient alors inférieur à 20%. La pulsation de coupure est de $47,8 \text{ rad/s}$. En augmentant légèrement le gain k^c , il est possible de diminuer un peu le temps de réponse tout en gardant un dépassement inférieur à 20%.

A l'aide de Matlab, on obtient un résultat satisfaisant pour $k^c = 0,34$, ce qui correspond à une résonance de T de $1,8 \text{ dB}$. Le dépassement est de 20% et le temps du premier maximum t_{max} est de $0,05 \text{ s}$ (voir la figure 3.6). La pulsation de coupure de la boucle ouverte correspondante est $\omega_c = 60 \text{ rad/s}$. Notons que $\omega_c t_{max} \sim 3$, ce qui est caractéristique d'une fonction de transfert en boucle ouverte du second ordre.

Remarque Comme nous sommes dans le cas particulier où $L(j\omega)$ est une fonction de transfert du second ordre, la pulsation de coupure peut se déduire du temps de réponse désiré par la relation $\omega_c t_{max} \sim 3$. La spécification de dépassement peut être transformée en contrainte sur la marge de phase à l'aide de la figure 3.3.

Quelle *marge de phase* va-t-on obtenir avec ce choix de k^c ? Par définition de la marge de phase $\Delta\Phi$,

$$\arg(L(j\omega_c)) = \Delta\Phi - 180^\circ.$$

Puisque $\arg(L(j\omega_c)) = \arg(G(j\omega_c))$, on aura : $\Delta\Phi = 180^\circ + \arg(G(j\omega_c))$. Dans notre cas, le choix de la pulsation de coupure ω_c fixe donc à la fois le temps de réponse à un échelon et la marge de phase. Pour avoir une marge de phase supérieure à $\Delta\Phi_{inf}$, on doit prendre ω_c telle que

$$180^\circ + \arg(G(j\omega_c)) \geq \Delta\Phi_{inf}.$$

La fonction $\arg(G(j\omega))$ étant décroissance avec la pulsation ω , cette relation donne donc une borne supérieure sur la pulsation ω_c qu'il est possible d'obtenir. Pour la valeur de $k^c = 0,34$ pour laquelle le dépassement

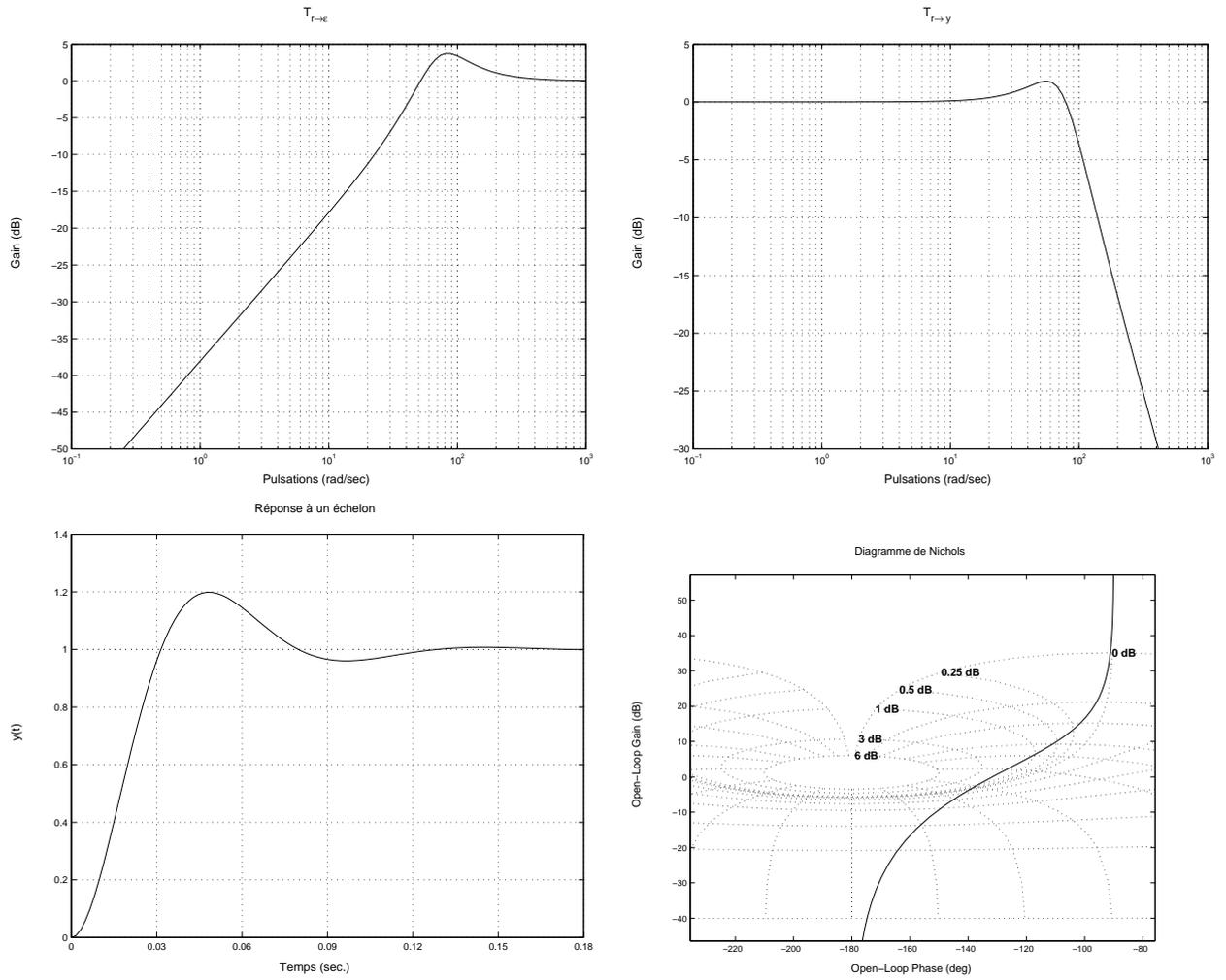


FIG. 3.7 – Réponses fréquentielles de $S(j\omega)$, $T(j\omega)$, $L(j\omega)$ et temporelle de T

était satisfaisant, on peut lire directement sur le diagramme de Nichols la valeur de la marge de phase : $\Delta\Phi = 48^\circ$. Cette valeur est largement satisfaisante.

Le problème d'une commande proportionnelle est qu'elle ne permet pas de filtrer les hautes pulsations (puisque ce n'est pas un transfert passe bas), donc de limiter l'influence des bruits.

En conclusion, pour ce problème particulier, le réglage de k^c fait apparaître la recherche d'un compromis entre :

1. la rapidité du suivi d'échelon, d'autant plus importante que k^c est grand ;
2. la marge de phase et le dépassement du suivi d'échelon, d'autant meilleurs que k^c est petit.

3.2.2 Proportionnel Intégral

Exemple du moteur à courant continu (suite) On rajoute au cahier des charges le rejet de perturbations en forme d'échelon. La rapidité du suivi d'échelons est donnée par le temps du premier maximum : $t_{max} = 75 \text{ ms}$.

D'après la discussion de la section 3.1, le correcteur doit nécessairement contenir un intégrateur. La structure la plus simple qui contienne cela est :

$$C(p) = \frac{k^c}{p}.$$

Comment régler ce correcteur pour assurer la stabilité du système en boucle fermée ? Pour cela, examinons la phase de $L(j\omega) = G(j\omega)C(j\omega)$: $\arg(L(j\omega)) = -90^\circ + \arg(G(j\omega))$. Ce déphasage de -90° est introduit par l'intégrateur de $C(p)$. Comme la phase de $G(j\omega)$ varie entre -90° et -180° , celle de $L(j\omega)$ varie entre -180° et -270° : le tracé de $L(j\omega)$ recouvrira ou entourera le point $(-1, 0)$ (voir figure 3.8). La boucle fermée sera donc instable.

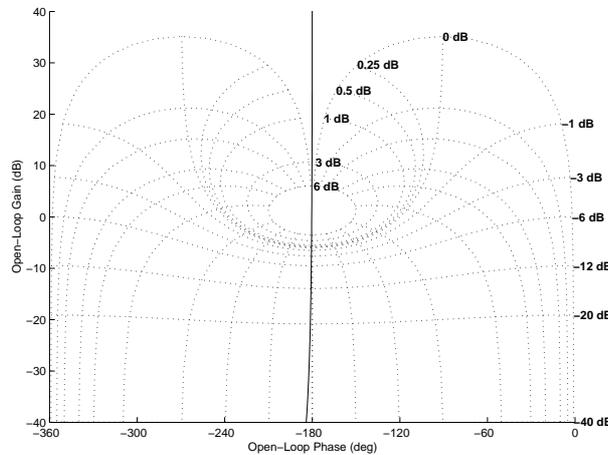


FIG. 3.8 – Diagramme de Nichols de $\frac{k^c}{j\omega}G(j\omega)$ avec $k^c = 0,01$

Pour éviter le point $(-1, 0)$, il est nécessaire de choisir $C(p)$ telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$ augmente au voisinage de la pulsation de coupure ω_c . Pour cela, on introduit dans le correcteur $C(p)$ un zéro stable ($a > 0$) :

$$C(p) = k^c \frac{p + a}{p}.$$

On obtient un correcteur Proportionnel Intégral (P.I.) où il est nécessaire de régler deux paramètres a et k^c . L'introduction du zéro en $-a$ permet d'augmenter la phase de $C(j\omega)$ aux alentours de la pulsation $\omega = a$

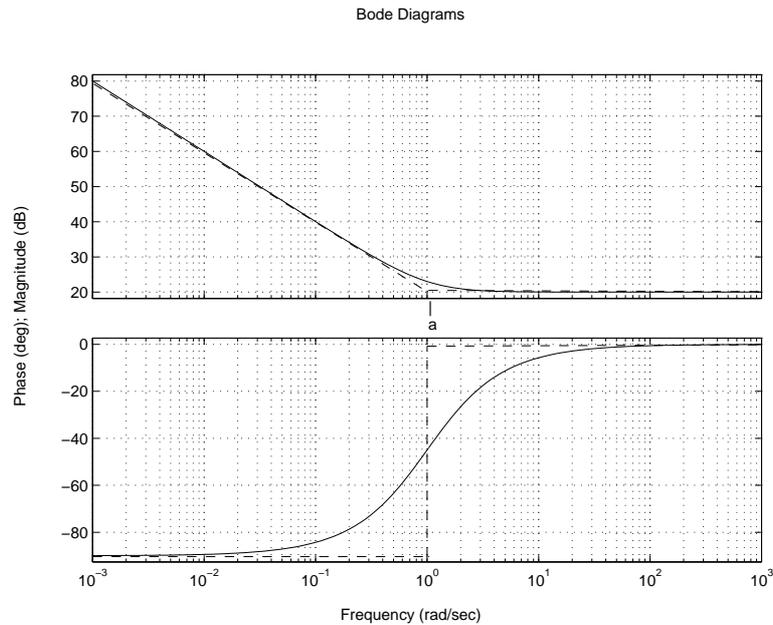


FIG. 3.9 – Diagramme de Bode d’un correcteur PI avec $k^c = 10$ et $a = 1$

(voir figure 3.9). Cet effet d’avance de la phase permet de diminuer voire de compenser le déphasage de -90° pour les hautes pulsations. Il va être mis à profit pour que le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega) = G(j\omega)C(j\omega)$ évite le point $(-1, 0)$. Au plus le paramètre a est choisi petit au plus l’effet d’avance de phase sur le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte est important (voir la figure 3.10) permettant de contourner le point $(-1, 0)$ permettant d’obtenir des marges de stabilité plus importantes et de limiter la résonance du gain de T .

Le paramètre k^c va être réglé afin de fixer la bande passante ω_c permettant d’obtenir un certain temps de réponse pour le suivi d’un échelon.

Quelle va être l’influence de a sur le rejet de perturbation, pour une valeur donnée de k^c ? Rappelons que :

$$|T_{v \rightarrow \epsilon}(j\omega)| = |G(j\omega)S(j\omega)| \sim \frac{1}{|C(j\omega)|} \quad (\text{en basses pulsations})$$

Le rejet de perturbation sera d’autant plus rapide que $|C(j\omega)|$ est important sur une large gamme de pulsations ω . Or, pour k^c fixé, au plus a est important, au plus $|C(j\omega)|$ est important sur une gamme de pulsations plus large (voir la figure 3.11). Les réponses temporelles confirment ce résultat (voir figure 3.12). De façon qualitative, quand a devient petit (tend vers 0), le correcteur PI “dégénère” en un correcteur proportionnel (inapte à rejeter des perturbations échelon en entrée).

En résumé, le réglage du paramètre a résulte de la recherche d’un compromis entre :

1. la rapidité du rejet de perturbation en échelon, d’autant plus importante que a est grand ;
2. la marge de phase et le dépassement du suivi d’échelon, d’autant meilleurs que a est petit.

Mise en œuvre pour la commande du moteur Dans le cas d’un correcteur proportionnel, le système en boucle ouverte $L(p)$ était d’ordre 2, ce qui a permis à travers le choix de la marge de phase de régler le dépassement et, bien sûr, d’obtenir une certaine marge de stabilité. La pulsation de coupure a permis de régler le temps de réponse.

Dans le cas d’un correcteur Proportionnel Intégral, le système en boucle ouverte $L(p)$ est d’ordre 3. Par suite, le dépassement ne peut pas être réglé à travers le seul choix de la marge de phase. Il est nécessaire

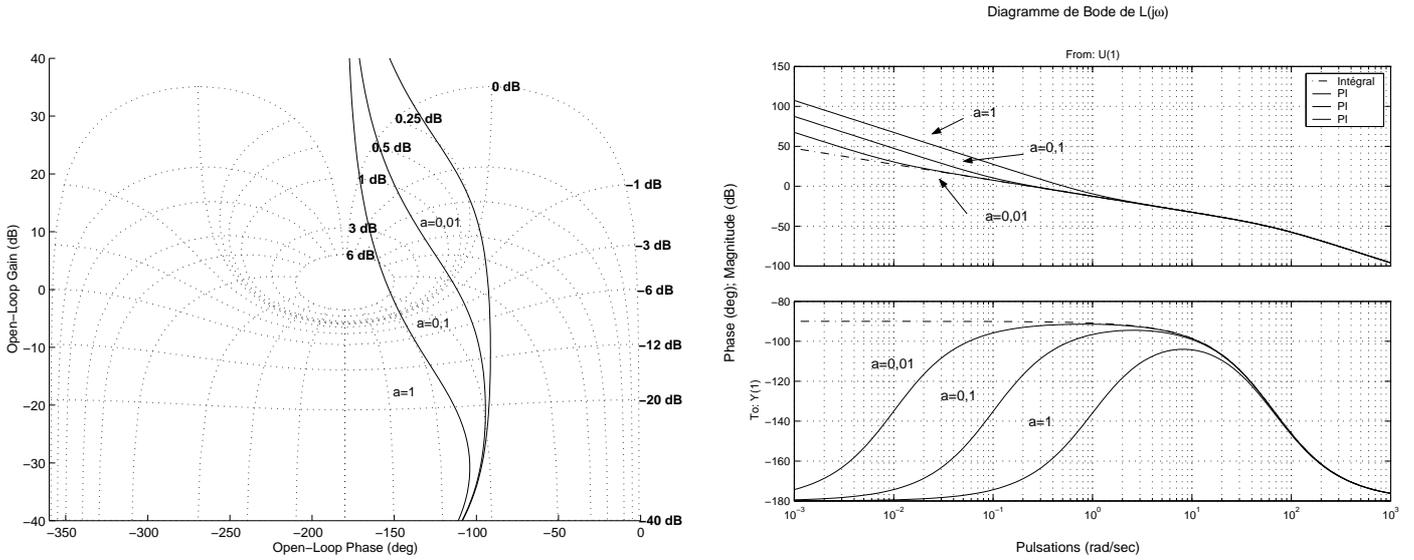


FIG. 3.10 – Diagramme de Nichols et de Bode de la boucle ouverte avec PI $k^c = 10^{-2}$ et différentes valeurs de a

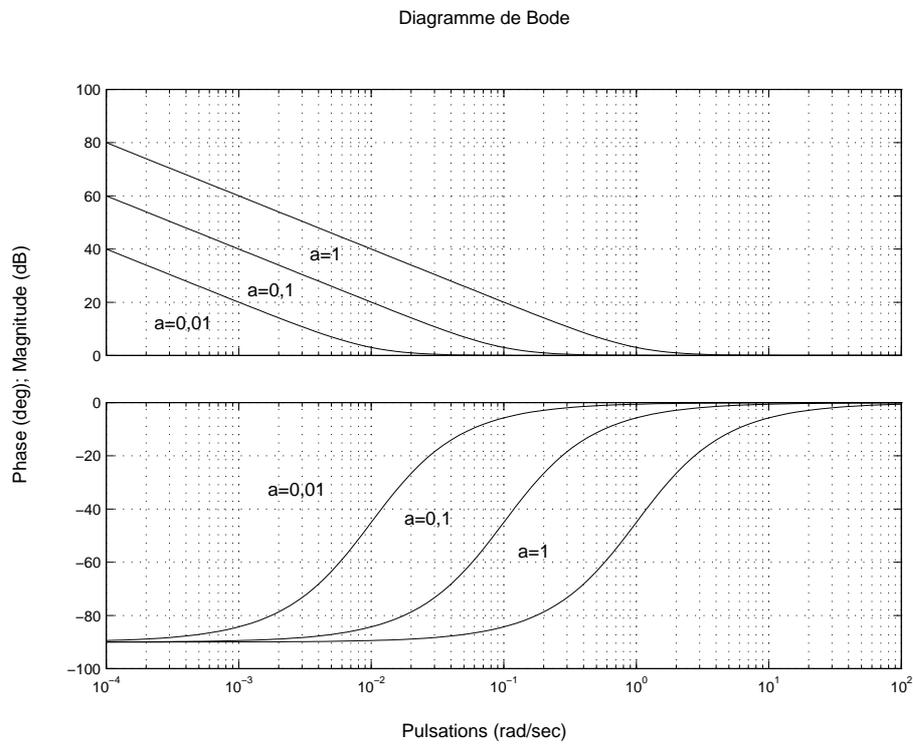


FIG. 3.11 – Diagramme de Bode d'un correcteur PI avec $k^c = 10$ et $a = 0,01$, $a = 0,1$ et $a = 1$

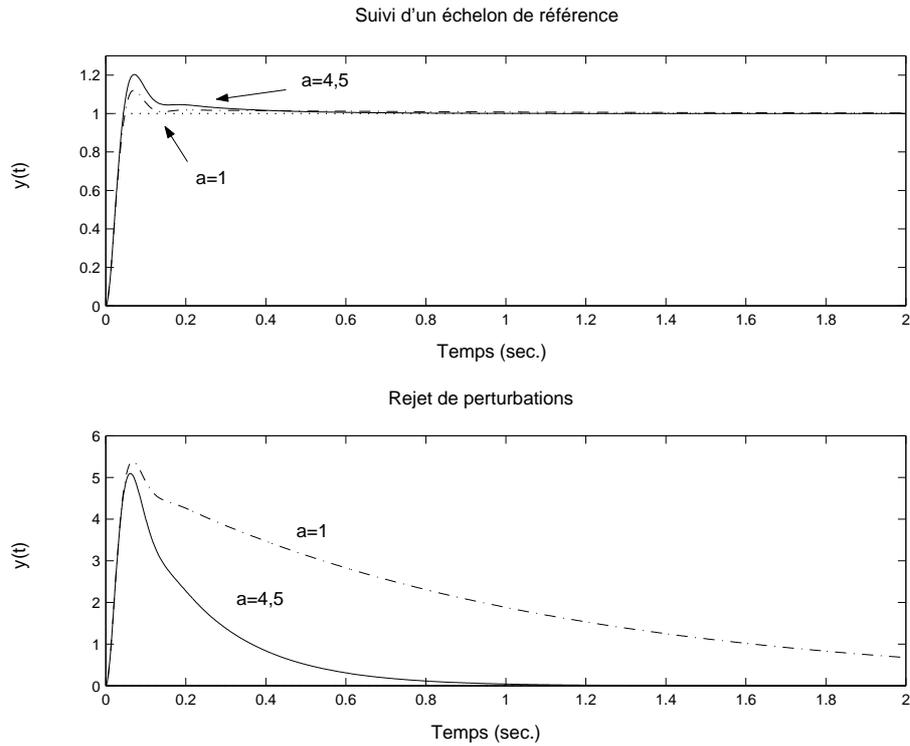


FIG. 3.12 – Réponses temporelles du système bouclé, correcteur P.I. $k^c = 0, 2$ et $a = 1$ et $a = 4, 5$

d'examiner le tracé de $L(j\omega)$ sur le diagramme de Nichols : en fonction des courbes iso gain T intersectées et/ou tangentées, le dépassement sera plus ou moins important. Les paramètres k^c et a vont être réglés de façon itérative

1. choix initial de a et de k^c
2. examen des tracés fréquentiels de la boucle ouverte (Bode et Nichols), des réponses temporelles et fréquentielles des fonctions de transfert en boucle fermée
3. si le cahier des charges n'est pas rempli, reréglage de a et/ou k^c et retour à l'étape 2

Pour trouver un choix initial de a et de k^c pas trop stupide, on peut faire comme si le système en boucle ouverte était du second ordre en fixant la marge de phase $\Delta\Phi$ et la pulsation de coupure ω_c pour remplir les spécifications temporelles. On prend donc $\omega_c = \frac{3}{0,075} = 40 \text{ rad/s}$ et $\Delta\Phi = 48^\circ$. Par définition de la marge de phase :

$$\arg(C(j\omega_c)) = -180^\circ - \arg(G(j\omega_c)) + \Delta\Phi$$

Notons que k^c n'intervient pas dans cette équation. Or

$$\arg(C(j\omega_c)) = -90^\circ + \arctan\left(\frac{\omega_c}{a}\right) \quad \text{et} \quad \arg(G(j\omega_c)) = -90^\circ - \arctan(\tau\omega_c)$$

D'où $\arctan\left(\frac{\omega_c}{a}\right) = \Delta\Phi + \arctan(\tau\omega_c)$, soit

$$a = \frac{\omega_c}{\tan(\arctan(\tau\omega_c) + \Delta\Phi)} = 8,59.$$

D'autre part, ω_c est une pulsation de coupure si $|G(j\omega_c)C(j\omega_c)| = 1$, ce qui donne :

$$k^c = \frac{\omega_c^2 \sqrt{\tau^2 \omega_c^2 + 1}}{k \sqrt{\omega_c^2 + a^2}} = 0,19.$$

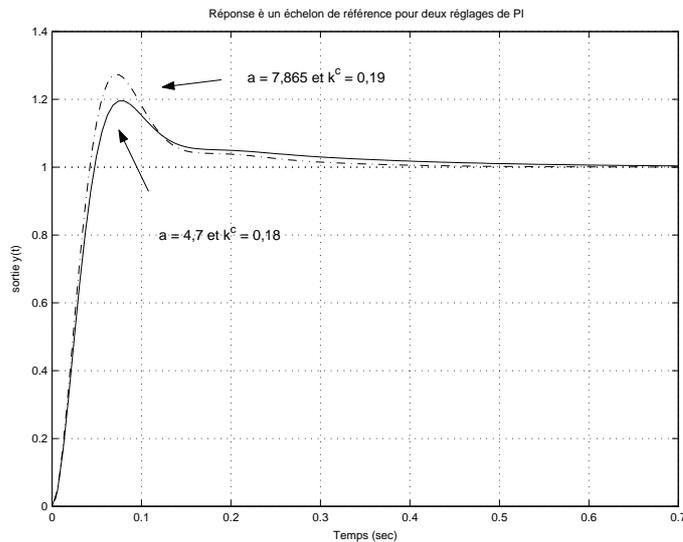


FIG. 3.13 – Réponse temporelle avec la commande PI initiale et après reréglage

Malheureusement, avec ce réglage de PI, le dépassement est trop important (voir la figure 3.13).

On décide donc de rerégler le PI à l'aide de `Matlab`. On aboutit itérativement sur le choix de paramètre $k^c = 0,18$ et $a = 4,7$ (voir la figure 3.14 pour comparer le correcteur PI initial et la correcteur PI final). D'après la figure 3.15, les spécifications de rapidité et de dépassement du cahier des charges sont respectées.

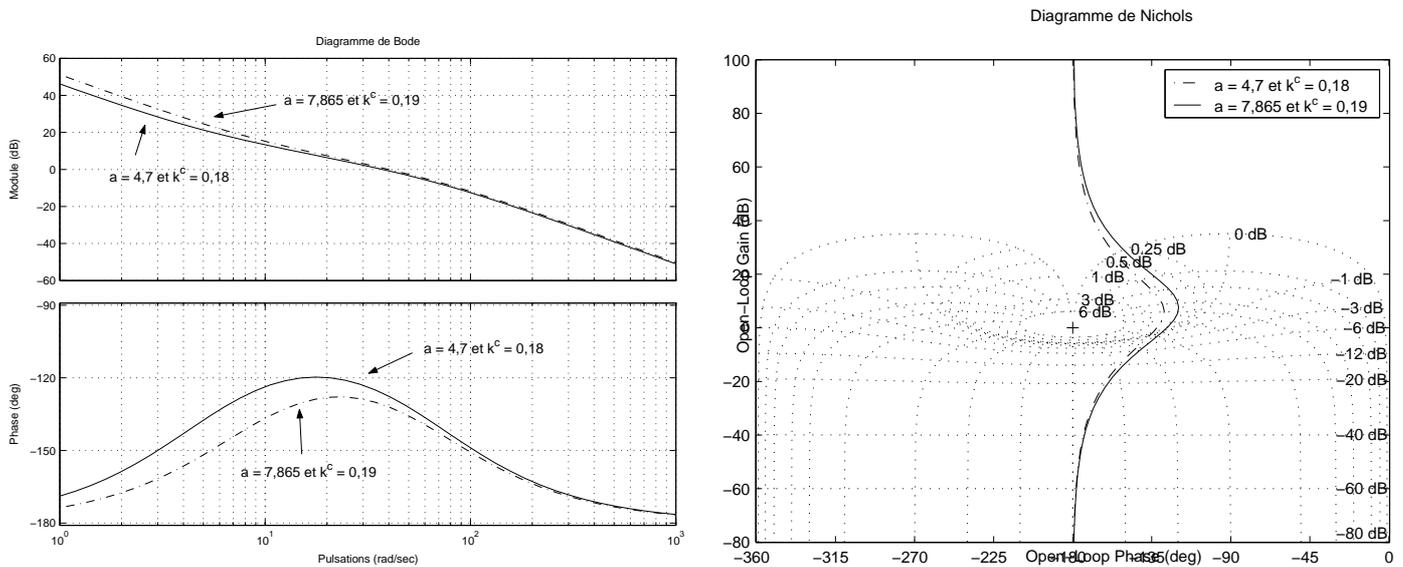


FIG. 3.14 – Diagramme de Nichols et de Bode de la boucle ouverte avec la commande PI initiale et après reréglage

Les marges de stabilité sont correctes (marge de phase de 54° et de gain supérieure à 40 dB).

3.2.3 Avance de phase

Exemple du moteur à courant continu (suite) On cherche un correcteur permettant d'augmenter la rapidité du suivi d'échelons ($t_{max} = 30\text{ms}$) tout en permettant le rejet de perturbations en forme d'échelon.

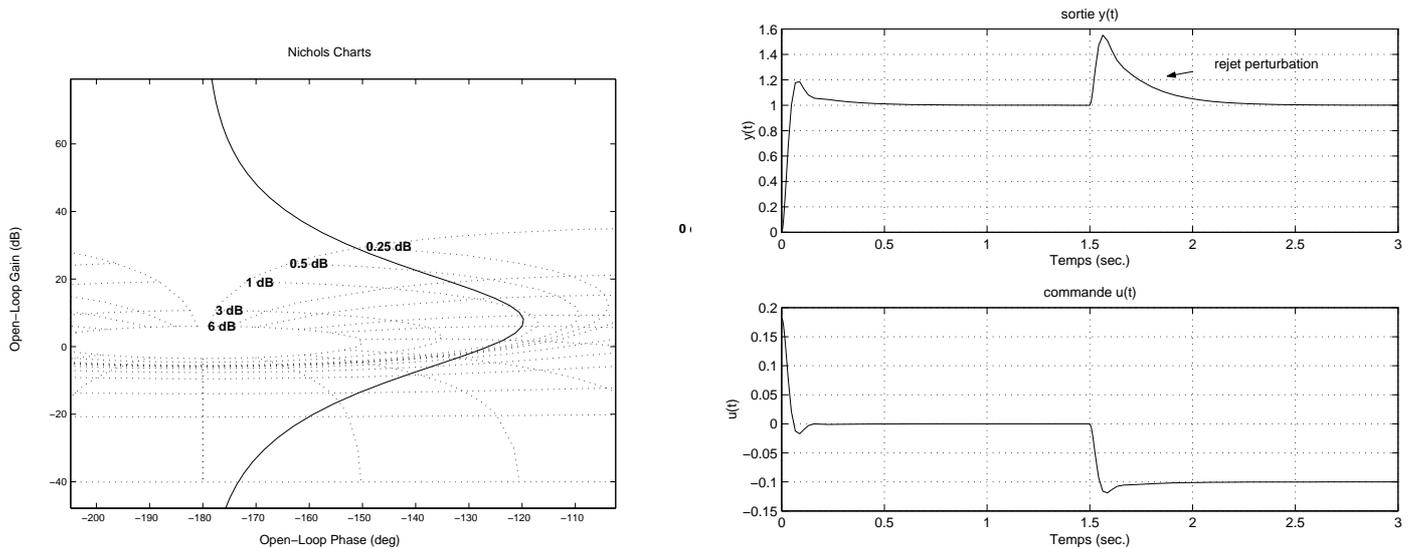


FIG. 3.15 – Diagramme de Nichols de la boucle ouverte et réponse temporelle de la boucle fermée avec la commande PI finale

Une telle performance était-elle possible avec les structures de commande précédemment considérées ? Grossièrement, un temps de réponse de 30 ms correspond à une pulsation de coupure ω_c de l'ordre de $\frac{3}{0,03} = 100 \text{ rad/s}$. Peut-on régler un correcteur proportionnel (intégral) assurant une telle bande passante tout en assurant la stabilité du système en boucle fermée ainsi que les marges de stabilité ?

Dans le cas d'un correcteur proportionnel, pour assurer une pulsation de coupure ω_c de 100 rad/s, il faut choisir :

$$k^c = \frac{1}{|G(j\omega_c)|}$$

soit $k^c = 0,77$. La marge de phase correspondante est donnée par $180^\circ + \arg(G(j\omega_c))$ soit $33,8^\circ$, ce qui est trop faible. Le dépassement à un échelon de référence est alors supérieur à 20%.

Peut-on obtenir mieux avec un correcteur proportionnel intégral ? La phase d'un correcteur Proportionnelle est nulle ; celle d'un correcteur Proportionnel Intégral est strictement comprise entre -90° et 0° . Par suite, le remplacement d'un correcteur P par un correcteur PI va diminuer la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$ et donc mener à une marge de phase plus faible.

En conclusion, les structures P ou PI ne permettent pas de remplir le nouveau cahier des charges car elles ne permettent pas d'obtenir (au moins) une marge de phase correcte.

Comme base de départ, on va conserver la structure PI car le correcteur doit nécessairement posséder un intégrateur pour assurer le rejet de référence en forme d'échelon. A cette base, on va adjoindre une (ou plusieurs) avance(s) de phase, c'est-à-dire une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1} \tag{3.4}$$

avec $\tau_1 \gg \tau_2$, ce qui donne pour le correcteur la structure suivante :

$$C(p) = k \frac{p + a}{p} \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1}$$

Un exemple d'avance de phase $H(p)$ est représenté figure 3.16 sous forme d'un diagramme de Bode. Une fonction transfert avance de phase introduit deux effets :

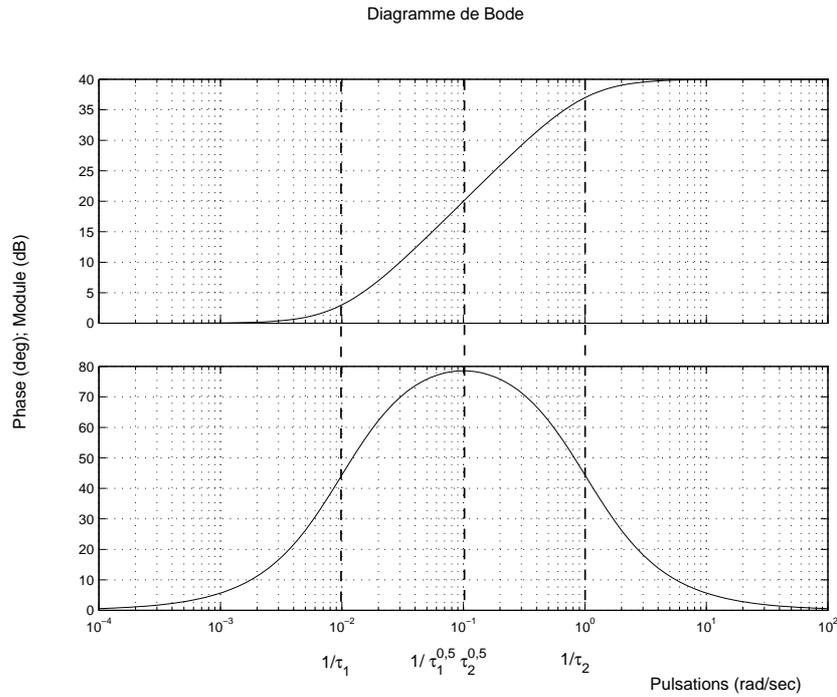


FIG. 3.16 – Diagramme de Bode d’une avance de phase, $\tau_1 = 100$ et $\tau_2 = 1$

1. une augmentation du gain $|H(j\omega)|$ à partir de la pulsation $\frac{1}{\tau_1}$;
2. une augmentation de la phase qui intervient grosso modo entre les pulsations $\frac{1}{\tau_1}$ et $\frac{1}{\tau_2}$. La pulsation à laquelle l’augmentation de la phase est maximale est donnée par

$$\omega_{aug} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}. \quad (3.5)$$

A cette pulsation, la phase Φ_m de l’avance de phase est telle que

$$\sin(\Phi_m) = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1}{\frac{\tau_1}{\tau_2} + 1}. \quad (3.6)$$

Une simple étude de fonction permet de constater que Φ_m est une fonction croissante du rapport $\frac{\tau_1}{\tau_2}$. Elle est comprise entre 0° et $+90^\circ$ exclus.

A partir des relations (3.5) et (3.6), il est aisé d’exprimer τ_1 et τ_2 en fonction de la pulsation ω_{aug} et la valeur de l’avance de phase maximale $+\Phi_m$, ce qui est d’un grand intérêt pratique :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_{aug}} \sqrt{\frac{1 + \sin(\Phi_m)}{1 - \sin(\Phi_m)}} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_{aug}} \sqrt{\frac{1 - \sin(\Phi_m)}{1 + \sin(\Phi_m)}}$$

Remarque Les relations (3.5) et (3.6) se déterminent à partir des calculs suivants.

$$\begin{aligned} \arg(H(j\omega)) &= \arg(\tau_1 j\omega + 1) - \arg(\tau_2 j\omega + 1) \\ &= \arctan(\tau_1 \omega) - \arctan(\tau_2 \omega) \end{aligned}$$

La pulsation à laquelle la phase atteint maximum est calculée en dérivant l’expression de la phase de H par rapport à la pulsation ω :

$$(\arg(H(j\omega)))' = (\tau_2 - \tau_1) \frac{\tau_1 \tau_2 \omega^2 - 1}{(1 + (\tau_1 \omega)^2)(1 + (\tau_2 \omega)^2)}$$

Par suite, en annulant la dérivée, on obtient la pulsation $\frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sin(\Phi_m) &= \sin(\arctan(\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}})) \cos(\arctan(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}})) - \cos(\arctan(\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}})) \sin(\arctan(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}})) \\ &= \frac{\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}}} \frac{\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}}} \\ &= \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \end{aligned}$$

De l'utilisation d'une avance de phase Un filtre à avance de phase est principalement utilisé pour son effet "avance de phase" sur une gamme de pulsations données. Par exemple, dans le cas de la commande du moteur à courant continu, l'introduction dans la boucle ouverte d'une avance de phase peut permettre d'améliorer la marge de phase $\Delta\Phi$ en augmentant la phase de la boucle ouverte à la pulsation ω_c . Pour cela, on peut par exemple, régler l'avance de phase de façon à ce que l'augmentation maximale Φ_m de la phase intervienne à la pulsation $\omega_{aug} = \omega_c$. Ceci n'est pas une règle mais une possibilité : on peut être amené à modifier les paramètres de l'avance de phase de façon à prendre en compte d'autres spécifications (dépassement en % dans le cas de système en boucle ouverte d'ordre supérieur à 2, marge de gain, etc..) en se basant sur les tracés fréquentiels de Bode, de Nichols, etc...

Mise en œuvre pour la commande du moteur Comme dans le cas du réglage du correcteur PI, on va essayer de déterminer un premier jeu de paramètres (k^c , a , τ_1 , τ_2) en considérant que la fonction de transfert en boucle ouverte $L(p)$ est d'ordre 2. Celui-ci sera alors itérativement amélioré de façon à remplir le cahier des charges.

Pour les paramètres a , on reprend celui qui a été déterminé dans le cas du réglage d'un correcteur PI ($a = 4, 7$). L'avance de phase est d'abord réglée de façon à obtenir une certaine marge de phase. Dans le cas du correcteur PI, la marge de phase de 54° avait permis d'assurer une bonne robustesse en contribuant à l'obtention d'un dépassement raisonnable. On choisit de régler l'avance de phase maximale à la pulsation ω_c ($\omega_{aug} = \omega_c$). Φ_m va être calculé de façon à obtenir la marge $\Delta\Phi$ désirée.

$$\arg(G(j\omega)) + \arg(C(j\omega)) = -180^\circ + \Delta\Phi \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \arg(C(j\omega_c)) &= \arg\left(k^c \frac{j\omega_c + a}{j\omega_c}\right) + \Phi_m = -90^\circ + \arctan\left(\frac{\omega_c}{a}\right) + \Phi_m \\ \arg(G(j\omega_c)) &= -90^\circ - \arctan(\tau\omega_c). \end{aligned}$$

L'équation (3.7) mène alors à :

$$\Phi_m = \Delta\Phi - \arctan\left(\frac{\omega_c}{a}\right) + \arctan(\tau\omega_c).$$

Pour $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$, $\Delta\Phi = 54^\circ$ et $a = 4, 7$, on obtient $\Phi_m = 22,9^\circ$, ce qui donne $\tau_1 = 0,0151$ et $\tau_2 = 0,0066$. Le gain k^c est alors obtenu tel que $|G(j\omega_c)C(j\omega_c)| = 1$, ce qui donne :

$$k^c = \frac{\omega_c^2 \sqrt{\tau^2 \omega_c^2 + 1} \sqrt{\tau_2^2 \omega_c^2 + 1}}{k \sqrt{\omega_c^2 + a^2} \sqrt{\tau_1^2 \omega_c^2 + 1}} = 0,5.$$

Itérativement, sous Matlab, le correcteur Proportionnel Intégral avec Avance de Phase est reréglé :

$$C(p) = 0,471 \frac{(p + 10,25)}{p} \frac{\frac{1}{66}p + 1}{\frac{1}{188,5}p + 1}$$

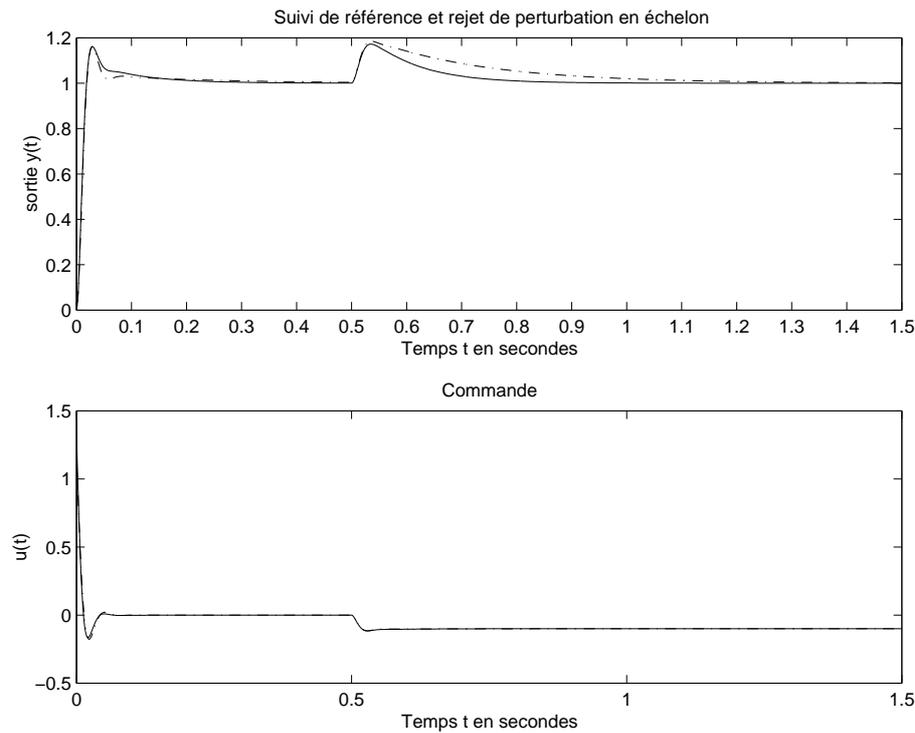


FIG. 3.17 – Réponse temporelle à un échelon de référence et de perturbation

Voir les figures 3.18, 3.17 et 3.19 pour examiner les réponses temporelles et fréquentielles avec le correcteur initial et le correcteur final obtenu après reréglage. Après reréglage, les marges de stabilité obtenues sont $\Delta\Phi = 54,2^\circ$ et $\Delta G = +\infty$ (voir figure 3.18). La rapidité et le dépassement pour un échelon de référence respectent le cahier des charges : $t_{max} = 29,6ms$, $\%D_1 = 16\%$ (voir la figure 3.17). Ces valeurs sont cohérentes avec les tracés fréquentiels des gains de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega) = S(j\omega)$ et de $T_{y^* \rightarrow y}(j\omega) = T(j\omega)$. On peut noter que le rejet de perturbation est plus rapide avec le correcteur final qu'avec le correcteur initial. Cela peut se voir temporellement (voir la figure 3.17), sur le module de la fonction de transfert $T_{v \rightarrow \epsilon}(j\omega) = G(j\omega)S(j\omega)$ (en basses pulsations, les gains sont plus faibles pour le second correcteur que pour le premier) et directement sur les gains de $C(j\omega)$ (voir la figure 3.19, en bas à droite : les gains du second correcteur sont en basses pulsations plus faibles que ceux du premier correcteur).

3.2.4 Filtre cloche

Exemple du moteur à courant continu (suite) On cherche maintenant un correcteur permettant le suivi de trajectoires sinusoïdales de pulsation ω_0 avec une erreur relative d'amplitude inférieure à 5×10^{-6} dans le cas où $\omega_0 = 3rad/s$ et inférieure à 5×10^{-3} pour $\omega_0 \in [2, 7, 3, 33]$. D'autre part, on désire toujours assurer le suivi de trajectoires en forme d'échelon ainsi que le rejet de perturbations d'entrée en forme d'échelon sans imposer un régime transitoire précis (rapidité, dépassement).

D'après la section 1.4 du chapitre 1, on doit donc avoir

1. pour $\omega_0 = 3rad/s$, $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)| \leq 5 \times 10^{-6}$
2. pour $\omega_0 \in [2, 7, 3, 33]$, $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)| \leq 5 \times 10^{-3}$

Or, puisque $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0) = \frac{1}{1 + G(j\omega_0)C(j\omega_0)}$, pour avoir $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)| \ll 1$, il faut que $|G(j\omega_0)C(j\omega_0)| \gg 1$, ce qui permet d'obtenir l'équivalent suivant :

$$|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)| \sim \frac{1}{|G(j\omega_0)C(j\omega_0)|}$$

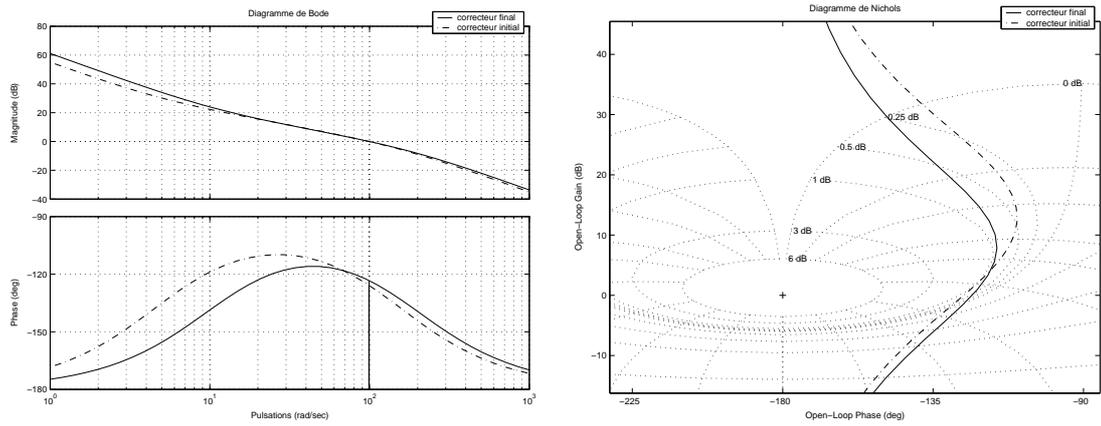


FIG. 3.18 – Fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$ (Bode à gauche et Nichols à droite)

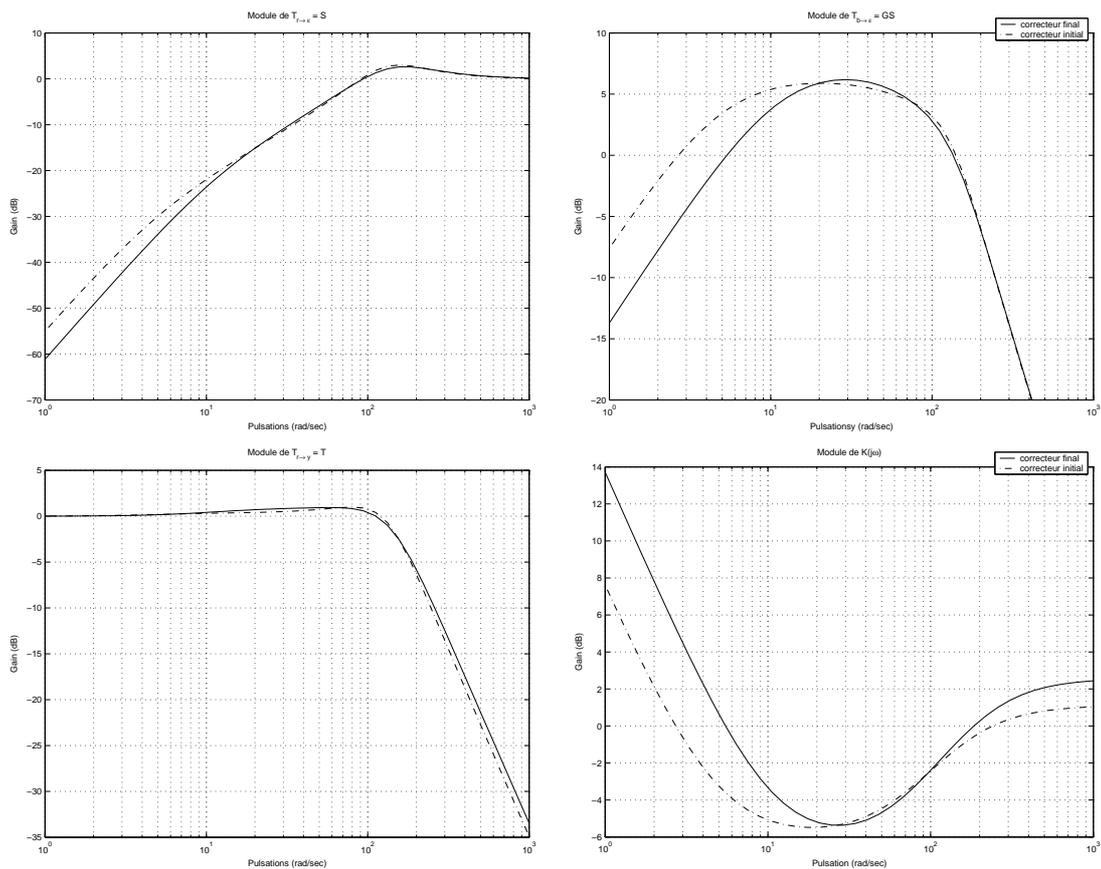


FIG. 3.19 – Module de $T_{y^* \rightarrow \epsilon} = S$ en haut à gauche, de $T_{v \rightarrow \epsilon} = GS$ en haut à droite, de $T_{y^* \rightarrow y} = T$ en bas à gauche et de C en bas à droite

Donc pour assurer (à peu près) que $|T_{y^* \rightarrow \epsilon}(j\omega_0)| \leq \eta$, on peut rechercher $C(p)$ tel que

$$|C(j\omega_0)| \geq \frac{1}{\eta|G(j\omega_0)|}$$

avec $\eta = 5 \times 10^{-6}$ pour $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ et pour $\eta = 5 \times 10^{-3}$ pour $\omega_0 \in [2, 7, 3, 33]$.

1. Comme $|G(j\omega_0)| = 78,25$ pour $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$, on doit avoir $|C(j\omega_0)| \geq 2,56 \times 10^3$
2. comme pour $\omega_0 \in [2, 7, 3, 33]$, $|G(j\omega_0)| \geq 70,4$, on doit avoir $|C(j\omega_0)| \geq 2,84$.

Pour assurer le suivi de références et le rejet de perturbations en échelon, on va choisir comme base le correcteur Proportionnel Intégral déterminé dans la sous section 3.2.2 :

$$C(p) = 0,18 \frac{p+4,5}{p}.$$

Avec ce correcteur, on a :

1. pour $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$, on a $|C(j\omega_0)| = 0,335$
2. pour $\omega_0 \in [2, 7, 3, 33]$, on a $|C(j\omega_0)| \leq 0,3614$.

Par suite, le gain de $C(j\omega)$ n'est pas suffisant pour les pulsations concernées. Pour rajouter du gain à ces pulsations, on va introduire un filtre "cloche" dans le correcteur.

Filtre cloche Etant donné

1. $0 < \epsilon_{max} < \bar{\epsilon} < 1$
2. $0 < \omega_0^{min} < \omega_0^{max}$

un filtre cloche est une fonction de transfert $F(p)$ telle que

1. $|F(j\sqrt{\omega_0^{min}\omega_0^{max}})| = \frac{1}{\epsilon_{max}}$
2. $|F(j0)| = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |F(j\omega)| = 1$
3. $\forall \omega \in [\omega_0^{min}, \omega_0^{max}], \quad |F(j\omega)| \geq \frac{1}{\bar{\epsilon}}$.

Un exemple est présenté figure 3.20. Le filtre cloche permet donc d'obtenir un gain important à une pulsation donnée ω_0 , un gain relativement important pour un intervalle de pulsations centré logarithmiquement sur cette pulsation et enfin un gain proche de 1 en basses pulsations et en hautes pulsations.

Un filtre cloche peut être défini par un filtre d'ordre 2 :

$$\begin{cases} F(p) = \frac{p^2 + \alpha p + \omega_0^{min}\omega_0^{max}}{p^2 + \epsilon_{max}\alpha p + \omega_0^{min}\omega_0^{max}} \\ \alpha = \frac{(\omega_0^{max} - \omega_0^{min})}{\bar{\epsilon}} \sqrt{\frac{1 - \bar{\epsilon}^2}{1 - \epsilon_{max}^2}} \end{cases}$$

Mise en œuvre sur le moteur Pour assurer des gains suffisants aux pulsations importantes on introduit dans le correcteur un filtre cloche, ce qui donne :

$$C(p) = 0,18 \frac{p+4,5}{p} \frac{p^2 + \alpha p + \omega_0^{min}\omega_0^{max}}{p^2 + \epsilon_{max}\alpha p + \omega_0^{min}\omega_0^{max}}.$$

avec $\omega_0^{min} = 2,7$, $\omega_0^{max} = 3,333$, $\epsilon_{max} = 10^{-4}$ et $\bar{\epsilon} = 10^{-1}$. Avec ce correcteur, on a :

1. pour $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$, on a $|C(j\omega_0)| = 3,35 \times 10^5$
2. pour $\omega_0 \in [2, 7, 3, 33]$, on a $|C(j\omega_0)| \geq 3,11$

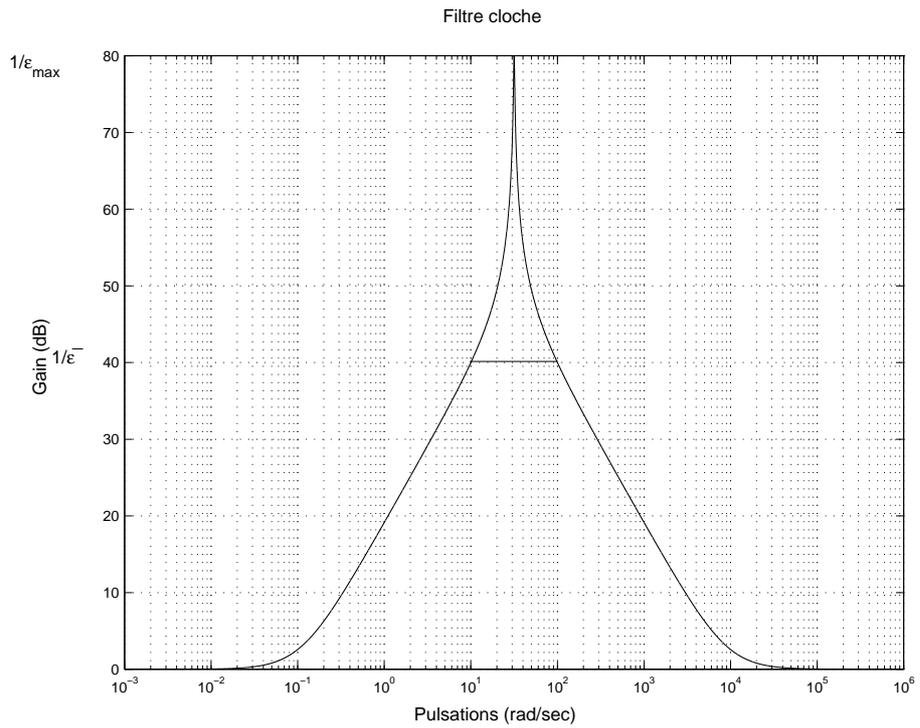


FIG. 3.20 – Filtre cloche $\omega_0^{min} = 10 \text{ rad/s}$, $\omega_0^{max} = 100 \text{ rad/s}$, $\epsilon_{max} = 10^{-4}$ et $\bar{\epsilon} = 10^{-2}$

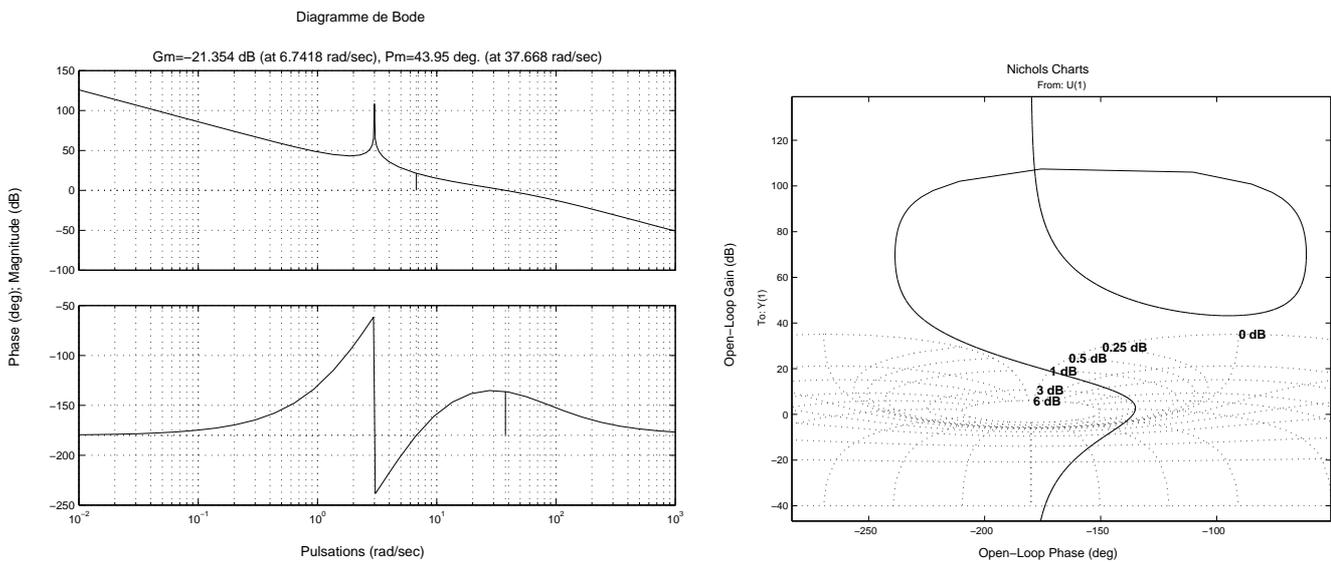


FIG. 3.21 – Réponses fréquentielles de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$

ce qui est largement suffisant pour assurer le suivi de trajectoires de référence sinusoïdales. A partir des réponses fréquentielles de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(j\omega_0)C(j\omega_0)$, on vérifie que ce correcteur assure la stabilité du système en boucle fermée ainsi que des marges de stabilité correctes (voir la figure 3.21). Le système en boucle fermée est satisfaisant que ce soit dans le domaine fréquentiel (voir figure 3.22) ou temporel (voir la figure 3.23). En particulier, on constate bien que les erreurs de suivi de trajectoires pour des sinusoïdes d'amplitude 1, de pulsations $\omega_0 = 3\text{rad/s}$ et $\omega_0 = 2,7\text{rad/s}$ sont celles demandées par le cahier des charges.

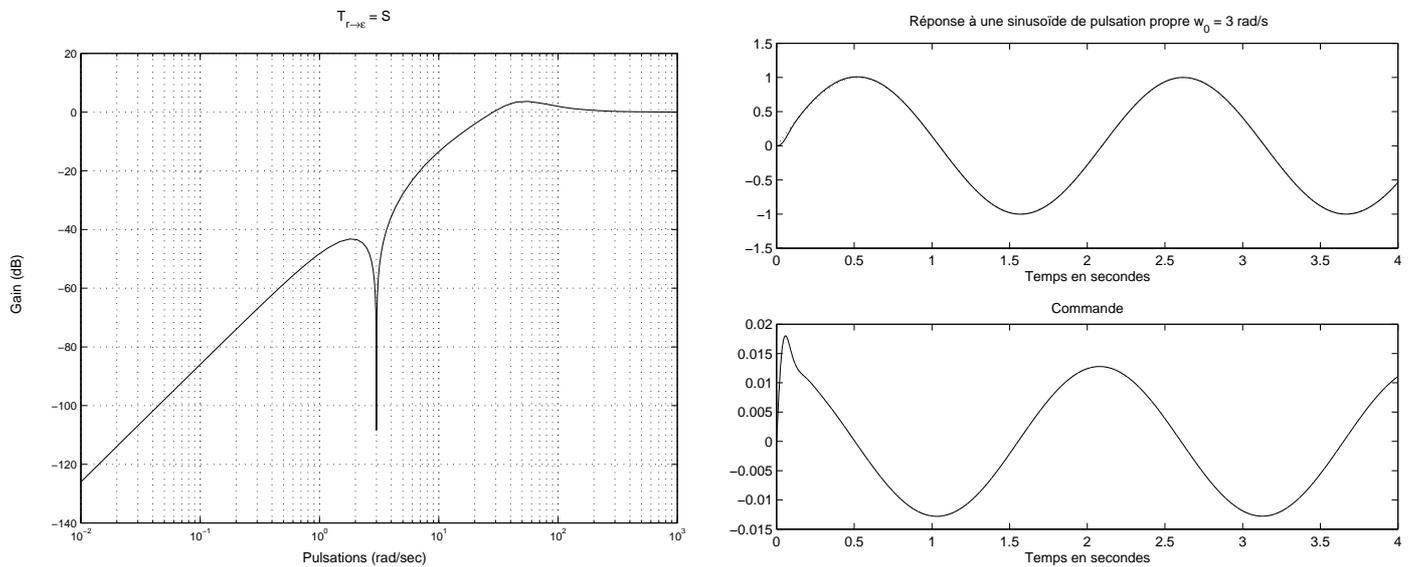


FIG. 3.22 – Réponses fréquentielle et temporelle en boucle fermée

3.2.5 Filtre passe bas

Tous les types de correcteurs $C(p)$ examinés précédemment sont propres sans être strictement propres (les degrés du numérateur et du dénominateur sont égaux). Par suite, en hautes pulsations, $|C(j\omega)|$ est équivalent à un gain constant. Or, pour assurer l'atténuation des bruits et la limitation de la commande, nous avons vu (sous sections 3.1.4 et 3.1.5) que $|C(j\omega)|$ doit être faible en hautes pulsations. En général, on recherche dans cette gamme de pulsations une décroissance de $|C(j\omega)|$ en fonction de ω (on parle de "roll-off") de $-20 \times n_r \text{dB/dec}$ avec $n_r \geq 1$:

$$|C(j\omega)| \sim \frac{\bar{\beta}}{|\omega|^{n_r}}$$

Le correcteur PI + Avance de Phase développé section 3.2.3 est modifié par l'introduction d'un filtre passe bas du premier ordre. Les paramètres du PI et de l'avance de phase sont légèrement modifiés. Les gains du correcteur sont ainsi plus faibles en hautes pulsations : l'amplitude de la commande nécessaire au suivi de trajectoires en échelon est réduite au départ (voir la figure 3.24).

3.2.6 Une remarque en guise de conclusion

Les différentes structures ont été présentées à travers le réglage d'un correcteur pour la commande d'un moteur à courant continu, à titre d'illustration. Les discussions qui ont été faites ne constituent pas une méthodologie à proprement parler. Elles ne doivent pas non plus être considérées comme un recueil de recettes de cuisine. Leur seule ambition était de comprendre la démarche qui peut être adoptée pour traiter un problème de réglage de correcteurs. Lorsqu'un nouveau problème de réglage de lois de commande est abordé, cette démarche doit être reprise.

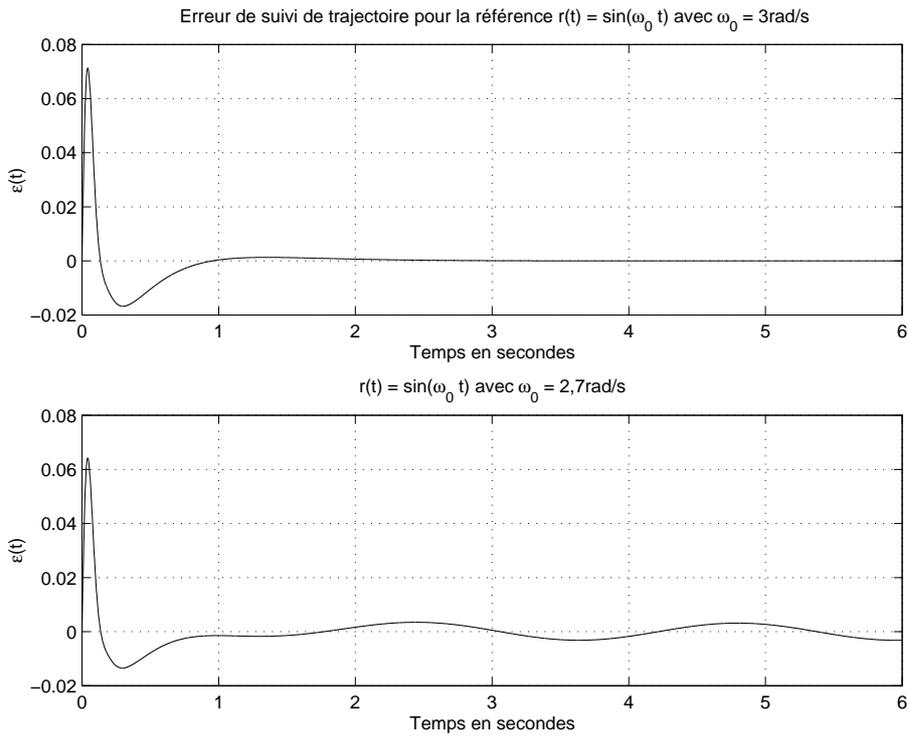


FIG. 3.23 – Evolution de l'erreur de suivi de trajectoires $\epsilon(t)$ dans les cas où $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ et où $\omega_0 = 2,7 \text{ rad/s}$

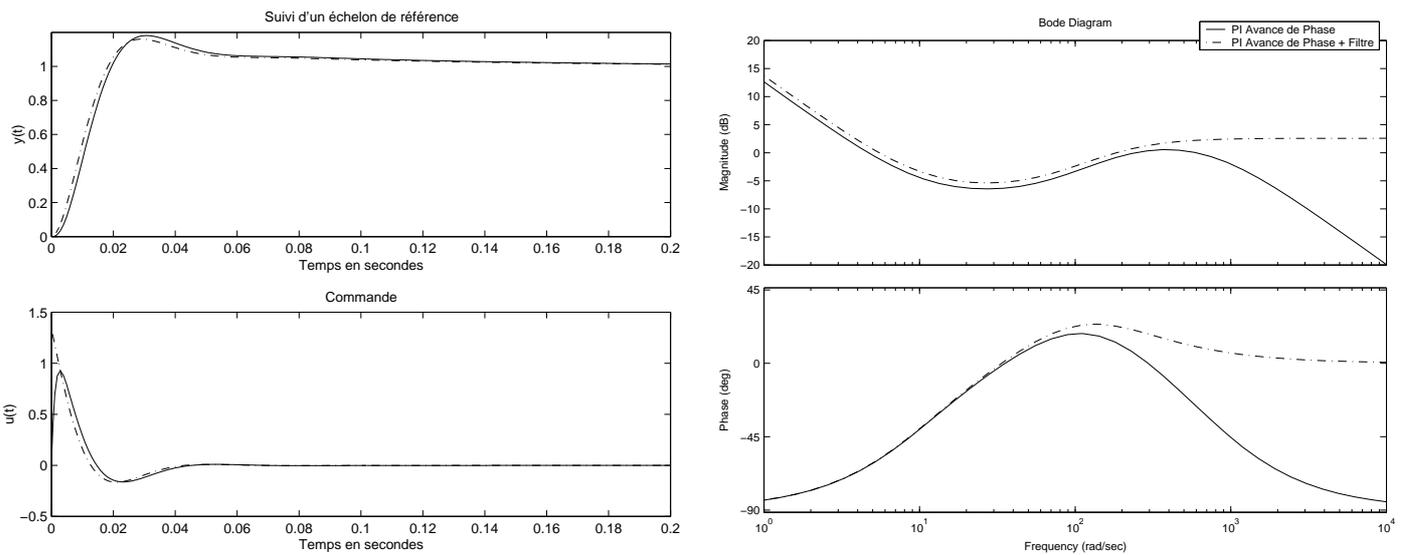


FIG. 3.24 – Correcteur PI Avance de Phase Filtré

Le processus de réglage d'un correcteur peut être alors décrit par la figure 3.25.

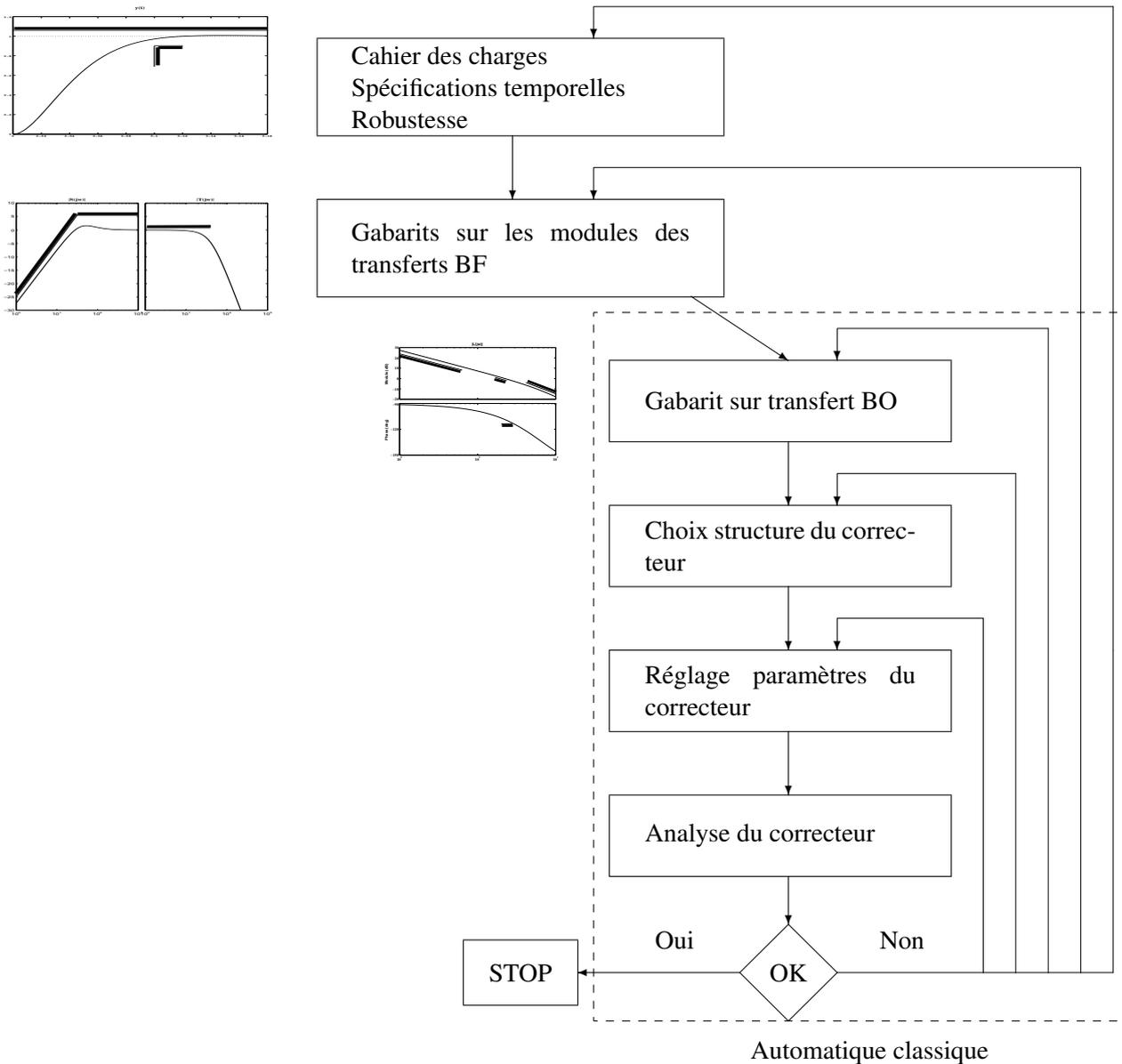


FIG. 3.25 – Processus de réglage en automatique fréquentielle classique

3.3 Correcteur à deux degrés de liberté (de l'intérêt de la rétroaction)

La structure du correcteur considéré jusqu'à maintenant est celle d'un correcteur à un degré de liberté (voir la figure 3.26, à gauche). Néanmoins, il est possible de synthétiser des lois de commande qui sont des correcteurs à deux degrés de liberté (voir la figure 3.26, à droite). L'objectif de cette section est de discuter de l'intérêt de cette structure de correcteur.

Parmi les spécifications du cahier des charges, considérons la spécification 1 (suivi de trajectoire de référence), la spécification 2 (rejet de perturbations non mesurées en entrée du système) et la spécification

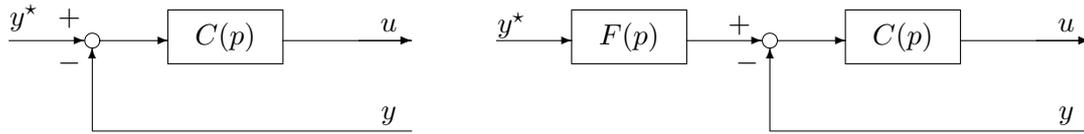


FIG. 3.26 – Correcteur à un degré de liberté (gauche), Correcteur à deux degrés de liberté (droite)

de robustesse. Pour simplifier les développements, le raisonnement est fait sur les systèmes monovariabiles.

Dans un premier temps, supposons qu'on ne cherche à remplir que la spécification 1 : il n'y a pas de signal non mesuré de perturbation à rejeter et le modèle représente parfaitement le système réel ($G_{mod} = G_{reel}$). La recherche du correcteur doit permettre de calculer la commande u à appliquer en entrée du système telle que y soit le plus proche possible du signal de référence y^* . Si le modèle est parfaitement connu, inversible et d'inverse stable, en appliquant $u = Fy^*$ avec $F = G_{mod}^{-1}$, on aura $y = T_{mod}^{forward}y^*$, avec $T_{mod}^{forward} = 1$. On est dans le cas d'un suivi idéal de référence. Dans cette structure de commande, u ne dépend pas de y (pas de boucle de rétroaction (feedback)) : on a une structure de commande par anticipation (feedforward). En conclusion, pour assurer seulement la spécification 1, une structure de commande boucle ouverte est suffisante. Cette spécification seule ne justifie donc pas l'utilisation d'une boucle de rétroaction.

Supposons maintenant que le modèle ne représente pas parfaitement le système réel ($G_{mod} \neq G_{reel}$). Si on utilise alors la structure de commande précédente, on aura en sortie du système $y_{reel} = G_{reel}G_{mod}^{-1}y^* \neq y^*$, soit encore

$$y_{reel} - y_{mod} = (G_{reel} - G_{mod})G_{mod}^{-1}y^*.$$

En exprimant le lien entre G_{reel} et G_{mod} par une incertitude multiplicative ($G_{reel} = (I + \Delta)G_{mod}$), on a $y_{reel} - y_{mod} = \Delta T_{mod}^{forward}y^*$. En conclusion, cette structure ne permet pas d'assurer le suivi de trajectoire en présence d'incertitudes.

Dans le cas d'une commande par rétroaction négative, $u = C(y^* - y)$, ce qui donne, avec le modèle :

$$y_{mod} = \frac{G_{mod}C}{1 + G_{mod}C}y^* = T_{mod}y^*.$$

Si on applique le correcteur sur le système réel, on obtient :

$$y_{reel} = \frac{(1 + \Delta)G_{mod}C}{1 + (1 + \Delta)G_{mod}C}y^* = T_{reel}y^*.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y_{reel} - y_{mod} &= (T_{reel} - T_{mod})y^* \\ &= \left(\frac{(1 + \Delta)G_{mod}C}{1 + (1 + \Delta)G_{mod}C} - \frac{G_{mod}C}{1 + G_{mod}C} \right) y^* \\ &= \frac{\Delta C G_{mod}}{(1 + G_{mod}C)(1 + (1 + \Delta)G_{mod}C)} y^* \\ &= S_{reel} \Delta T_{mod} y^* \end{aligned}$$

avec S_{reel} la fonction de sensibilité :

$$S_{reel} = \frac{1}{1 + (1 + \Delta)G_{mod}C}.$$

Dans le cas d'un correcteur par anticipation, on a donc : $y_{reel} - y_{mod} = \Delta T_{mod}^{forward}y^*$ et dans le cas d'un correcteur par rétroaction :

$$y_{reel} - y_{mod} = S_{reel} \Delta T_{mod} y^*. \quad (3.8)$$

La quantité d'incertitude sur la fonction de transfert entre l'entrée de référence et la sortie est ainsi multipliée par un facteur S_{reel} dans le cas d'un correcteur par rétroaction, pour les pulsations pour lesquelles $|S_{reel}(j\omega)| \leq 1$. Elle est donc réduite dans la bande de fréquence où le module de S est inférieur à 1. En conclusion, pour assurer le suivi de trajectoire en présence d'incertitudes sur le système à commander (robustesse), une structure de commande par rétroaction est nécessaire.

Concentrons nous maintenant sur la spécification de rejet de perturbation non mesurée en entrée du système. Si la sortie du système n'est pas mesurée, on ne dispose d'aucune information sur la perturbation : la fonction de transfert qui lie la perturbation à la sortie du système est G , qui est indépendante du correcteur. Par suite, un correcteur par simple anticipation ne permet pas de la rejeter.

Si on considère un correcteur par rétroaction, la fonction de transfert qui lie la perturbation d'entrée à la sortie du système est $GS = \frac{G}{1+GC}$. Par suite, C doit être synthétisé de façon à rejeter l'effet de la perturbation sur la sortie du système. Si en plus, on désire suivre un signal de référence alors on doit contraindre la fonction de transfert qui lie le signal de référence à la sortie du système soit $T = \frac{GC}{1+GC}$. Enfin, le suivi de trajectoire sera robuste si $S(j\omega) = \frac{1}{1+G(j\omega)C(j\omega)}$ est de module inférieur à 1 d'après la relation (3.8).

Remarque L'origine du terme "fonction de sensibilité S " apparaît ici. Le gros intérêt de la structure de commande par rétroaction c'est de permettre de "désensibiliser" le système bouclé, c'est-à-dire d'assurer le respect du cahier des charges malgré des différences entre le système et son modèle ou encore des variations au niveau des caractéristiques du système commandé G . Dans une certaine mesure, le comportement du système en boucle fermée est invariant, c'est-à-dire n'évolue pas lors de variations au niveau du système commandé G . Le terme "sensibilité" suggère qu'un système bouclé a un comportement invariant par rapport à de faibles variations de certaines des caractéristiques de G . Cette propriété a été introduite dans un contexte particulier par Black dans les années 30 et généralisée par Bode dans les années 40. Elle est basée sur le fait que, dans le cas d'une boucle de rétroaction négative (pour des rappels sur la différentielle logarithmique, voir la section 5.5, page 103) :

$$\frac{dT(p)}{T(p)} = \frac{dG(p)}{G(p)} - C(p) \frac{G(p)}{1+G(p)C(p)} = \frac{1}{1+G(p)C(p)} \frac{dG(p)}{G(p)} = S(p) \frac{dG(p)}{G(p)}.$$

On doit donc choisir C (le degré de liberté) de façon à remplir des spécifications boucle fermée (robustesse et rejet de perturbation) (cela est naturel d'après la discussion précédente) et des spécifications boucle ouverte (suivi de référence) (cela l'est beaucoup moins car, seule présente, cette spécification peut être remplie par un correcteur par anticipation). D'où l'idée de combiner les deux structures de commande avec le correcteur à deux degrés de liberté (F et C) : $u = C(Fy^* - y)$ (voir figure 3.26, à droite). Le "degré de liberté" C est recherché de façon à remplir prioritairement les spécifications de rejet et de robustesse, puis, dans la mesure où cela n'entre pas en conflit avec les deux spécifications précédentes, la spécification de suivi de trajectoire. Enfin, C étant déterminé, F est recherché de façon à remplir au mieux la spécification de suivi de référence. En effet, dans le cas d'un correcteur à deux degrés de liberté, la fonction de transfert entre le signal de référence r et la sortie y du système s'écrit :

$$F \frac{GC}{1+GC}.$$

Chapitre 4

Commande par modèle interne

Lors du processus de réglage décrit dans le chapitre précédent (voir la figure 3.25), des difficultés peuvent apparaître lors du passage d'une étape à l'autre. Comme cela a été vu dans le chapitre précédent, sauf cas particuliers, la traduction des spécifications temporelles (temps de montée, amortissements, etc.) du cahier des charges en contraintes (appelées gabarits) sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée est basée sur des relations qualitatives, des règles approchées, etc.. Il en est de même de la traduction des gabarits sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée en gabarits sur la fonction de transfert en boucle ouverte L ou sur le correcteur C . La conséquence est qu'un correcteur mis au point de façon à respecter les gabarits sur la fonction de transfert en boucle ouverte L ne respecte pas forcément le cahier des charges de départ. De cela découle le caractère itératif de la mise au point du correcteur C .

La méthode présentée dans ce chapitre vise à s'affranchir du passage des gabarits sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée en gabarits sur la fonction de transfert en boucle ouverte L , ce qui revient à éliminer une source de difficultés. Pour cela, le correcteur est directement déterminé afin de respecter les gabarits sur les fonctions de transfert en boucle fermée.

Cette méthode est basée sur une structure particulière de correcteur appelé "correcteur par modèle interne". Dans sa forme élémentaire, présentée dans la section 4.1, elle ne peut s'appliquer que pour la commande de systèmes asymptotiquement stables. Une façon de contourner ce problème sera présentée dans la section 4.2. Enfin, pour être cohérent avec la première partie du cours, la méthode est présentée pour les systèmes continus. Elle peut néanmoins être mise en œuvre mutatis mutandis pour les systèmes échantillonnés.

4.1 Commande par modèle interne

On suppose que le procédé G est asymptotiquement stable. La structure par modèle interne est décrite figure 4.1. Le correcteur par modèle interne est constitué par le modèle du procédé à commander $G(p)$ ainsi que d'une fonction de transfert $Q(p)$ à déterminer de façon à satisfaire le cahier des charges. Avant de discuter de son choix, la motivation d'une structure aussi étrange est présentée.

4.1.1 Justification de la structure de commande par modèle interne

Regardons ce qui se passe avec cette structure de commande dans le cas où le modèle représente parfaitement le système et qu'il n'y a pas de perturbation en entrée (et en sortie) du système. D'après la figure 4.1, on aura alors $y_{mod}(t) = y(t)$ et dans le signal de la boucle de rétroaction $\eta(t) = 0$. Cette structure de commande se comporte donc comme une commande par anticipation. Dans la section 3.3 du chapitre précédent, nous avons vu que ce type de correcteur est parfaitement adapté à la poursuite, en l'absence de perturbations non mesurées et dans le cas où le modèle représente parfaitement le système à commander. Dans le cas où l'une de ces deux hypothèses n'est pas vérifiée (perturbation et/ou modèle "imparfait"), on aura $y_{mod}(t) \neq y(t)$ et dans le signal de la boucle de rétroaction $\eta(t) \neq 0$. Cette structure de commande se comporte donc comme une commande par rétroaction. Nous avons vu dans la section 3.3 que l'usage d'une

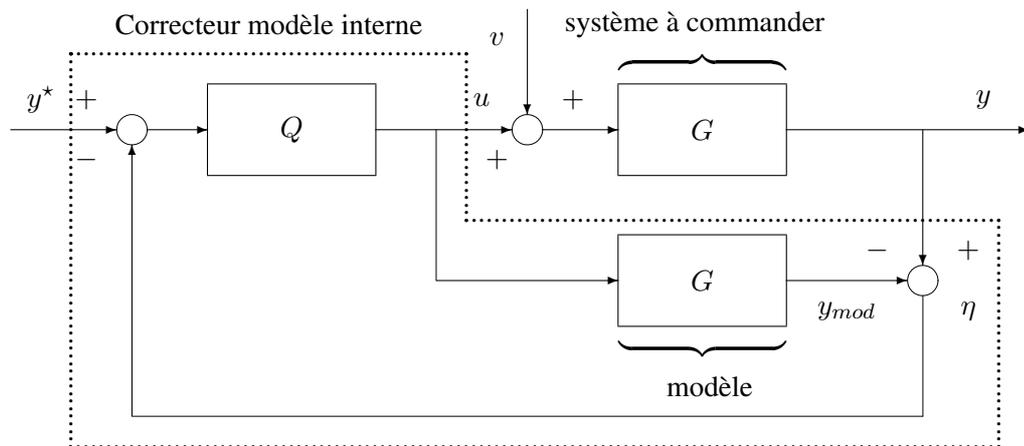


FIG. 4.1 – Structure d'un correcteur par modèle interne

commande par rétroaction ne se justifie que dans ce cas-là. La structure de commande par modèle interne est donc tout à fait pertinente.

4.1.2 Lien de la structure de commande par modèle interne avec la structure de commande à un degré de liberté

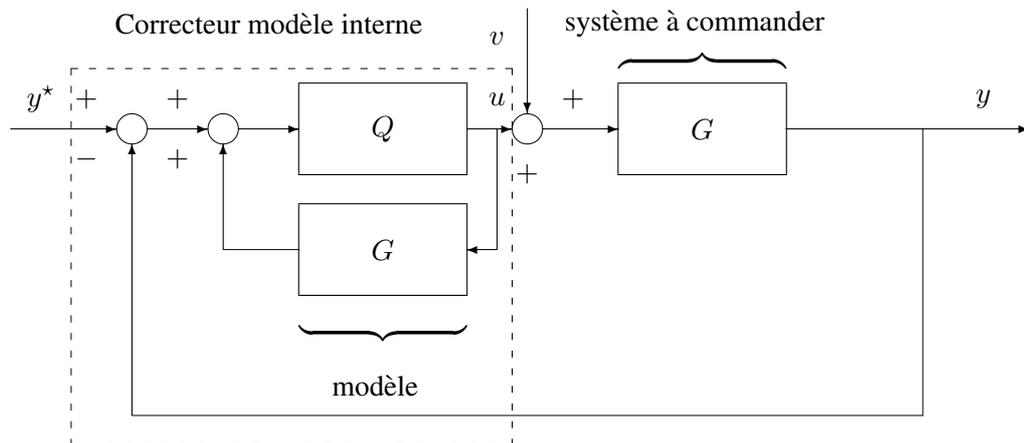


FIG. 4.2 – Structure d'un correcteur par modèle interne

On peut simplement montrer que le système bouclé représenté figure 4.1 est équivalent au système bouclé représenté sur la figure 4.2. On est ainsi ramené au schéma classique d'un correcteur à un degré de liberté, représenté figure 4.3 avec $C = \frac{Q}{1 - GQ}$. Il s'agit donc d'une réécriture du correcteur : sous cette forme-là, la détermination de C est obtenue à travers la détermination de la fonction de transfert Q .

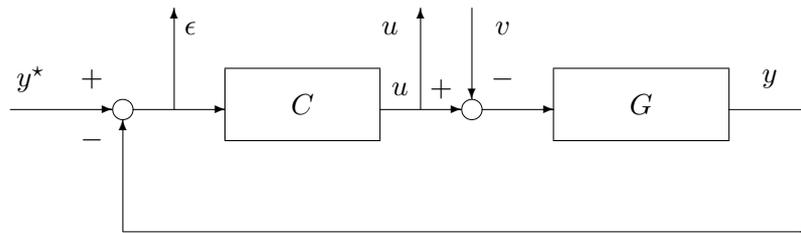


FIG. 4.3 – Système en boucle fermée

4.1.3 Propriétés de la structure par modèle interne

A partir du schéma figure 4.1, on peut calculer les différentes fonctions de transfert en boucle fermée intéressantes :

$$\begin{aligned} T_{y^* \rightarrow \epsilon} &= 1 - GQ & T_{y^* \rightarrow y} &= GQ & T_{y^* \rightarrow u} &= Q \\ T_{v \rightarrow \epsilon} &= G(1 - GQ) & T_{v \rightarrow u} &= GQ \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, $G(p)$ est stable, les différentes fonctions de transfert en boucle fermée seront stables si et seulement si la fonction de transfert $Q(p)$ est choisie stable.

Ce qui est frappant ici est que les fonctions de transfert en boucle fermée sont des fonctions *affines* de la “variable” Q . Rappelons que si on exprime les fonctions de transfert en boucle fermée en fonction de C , la dépendance est non linéaire puisque :

$$\begin{aligned} T_{y^* \rightarrow \epsilon} &= \frac{1}{1+GC} & T_{y^* \rightarrow y} &= \frac{GC}{1+GC} & T_{y^* \rightarrow u} &= \frac{C}{1+GC} \\ T_{v \rightarrow \epsilon} &= \frac{G}{1+GC} & T_{v \rightarrow u} &= \frac{GC}{1+GC} \end{aligned}$$

Il est beaucoup plus simple de comprendre les conséquences sur les fonctions de transfert en boucle fermée d’un changement dans le choix de la fonction de transfert Q que de comprendre les conséquences d’un changement dans le choix de la fonction de transfert C . D’autre part, la stabilité du système bouclé est garantie par le choix d’une fonction de transfert $Q(p)$ stable. Quand on recherche le correcteur $C(p)$, il est nécessaire d’obtenir la fonction de transfert en boucle ouverte qui satisfait le critère de Nyquist, ce qui est beaucoup plus difficile.

Tout cela suggère donc de faire un “changement de variable” en remplaçant la recherche de la fonction de transfert $C(p)$ par celle de $Q(p)$. Ce changement de variable est-il licite ? La réponse est oui. En effet, on peut démontrer qu’il existe une bijection entre l’ensemble des correcteurs C pour lesquels le système en boucle fermée 4.3 est stable et l’ensemble des fonctions de transfert stable. Plus précisément,

- pour tout correcteur C tel que le système bouclé 4.3 est stable, il existe une fonction de transfert stable $Q(p)$ telle que $C = \frac{Q}{1-GQ}$;
- Réciproquement, pour toute fonction de transfert $Q(p)$ stable, le système en boucle fermée représenté figure 4.3 est stable pour $C = \frac{Q}{1-GQ}$.

En conclusion, rechercher un correcteur remplissant un cahier des charges pour le système bouclé peut se réduire à rechercher la fonction de transfert $Q(p)$.

Toutes ces propriétés intéressantes vont être mises à profil dans la sous section suivante pour la mise au point d’un correcteur sur un exemple simple.

4.1.4 Mise au point d’un correcteur par modèle interne sur un exemple simple

On considère un procédé du premier ordre :

$$G(p) = \frac{K}{\tau p + 1}.$$

On désire mettre au point un correcteur assurant

1. Les signaux de référence considérés sont des échelons. Le signal de sortie y doit tendre vers la valeur de l'échelon, sans erreur statique.
2. La réponse de y à l'échelon de référence ne présente pas de dépassement et est caractérisée par un temps de montée de l'ordre de $3\tau_1$ secondes avec $\tau_1 < \tau$.
3. Les perturbations d'entrée en échelon sont rejetées.
4. L'amplitude du signal de commande doit être limitée.

Spécification 1 La poursuite est assurée si

$$T_{y^* \rightarrow \epsilon}(0) = 0 \quad \text{soit} \quad T_{y^* \rightarrow y}(0) = 1.$$

Comme $T_{y^* \rightarrow \epsilon}(0) = 1 - G(0)Q(0)$ et $T_{y^* \rightarrow y}(0) = G(0)Q(0)$, la poursuite sera assurée si $Q(0) = \frac{1}{G(0)}$.

Dans notre exemple, cela revient à choisir $Q(p)$ tel que $Q(0) = \frac{1}{K}$.

Spécification 2 Elle serait réalisée si :

$$T_{y^* \rightarrow y}(p) = \frac{1}{\tau_1 p + 1}.$$

Comme $T_{y^* \rightarrow y}(p) = G(p)Q(p)$ et que $\tau_1 < \tau$, cela revient à vouloir compenser dans la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow y}(p)$ le pôle en $-\frac{1}{\tau}$ pour le remplacer par un pôle en $-\frac{1}{\tau_1}$. Cela est obtenu avec :

$$Q(p) = \frac{1}{K} \frac{\tau p + 1}{\tau_1 p + 1}.$$

Le facteur $\frac{1}{K}$ permet d'assurer que $Q(0) = \frac{1}{K}$.

Spécification 3 Le rejet de perturbation échelon en entrée du procédé sera assuré si $T_{v \rightarrow b}(0) = 0$. Comme $T_{v \rightarrow \epsilon}(0) = G(0)(1 - G(0)Q(0))$, cette propriété est effectivement assurée.

Spécification 4 La limitation de la commande sera assurée si la fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow u}$ (et donc ici le correcteur C) est une fonction de transfert passe-bas. Or $T_{y^* \rightarrow u} = Q$ et

$$Q(p) = \frac{1}{K} \frac{\tau p + 1}{\tau_1 p + 1}.$$

Cette fonction de transfert n'est pas passe bas puisque quand la pulsation ω tend vers l'infini, $|Q(j\omega)| \sim \frac{\tau}{K\tau_1}$. On décide donc de modifier la fonction de transfert $Q(p)$ en introduisant une fonction de transfert passe bas du premier ordre :

$$Q(p) = \frac{1}{K} \frac{\tau p + 1}{\tau_1 p + 1} \frac{1}{\tau_2 p + 1}.$$

On a toujours $Q(0) = \frac{1}{K}$: la spécification 1 est donc toujours assurée. Examinons la spécification 2. On a alors :

$$T_{r \rightarrow y}(p) = \frac{1}{\tau_1 p + 1} \frac{1}{\tau_2 p + 1}.$$

Pour assurer que la réponse indicielle de cette fonction de transfert présente toujours un temps de montée d'environ $3\tau_1$, il est nécessaire de choisir τ_2 tel que $\tau_2 \ll \tau_1$: le pôle en $-\frac{1}{\tau_1}$ est alors dominant par rapport au pôle en $-\frac{1}{\tau_2}$ (voir rappel sur les pôles dominants en annexe page 103). Cependant, au plus τ_2 est choisi grand au moins les gains en hautes pulsations de la fonction de transfert en boucle fermée $T_{y^* \rightarrow u}$ et donc du correcteur C seront importants avec pour corollaire d'augmenter la puissance du signal de commande et

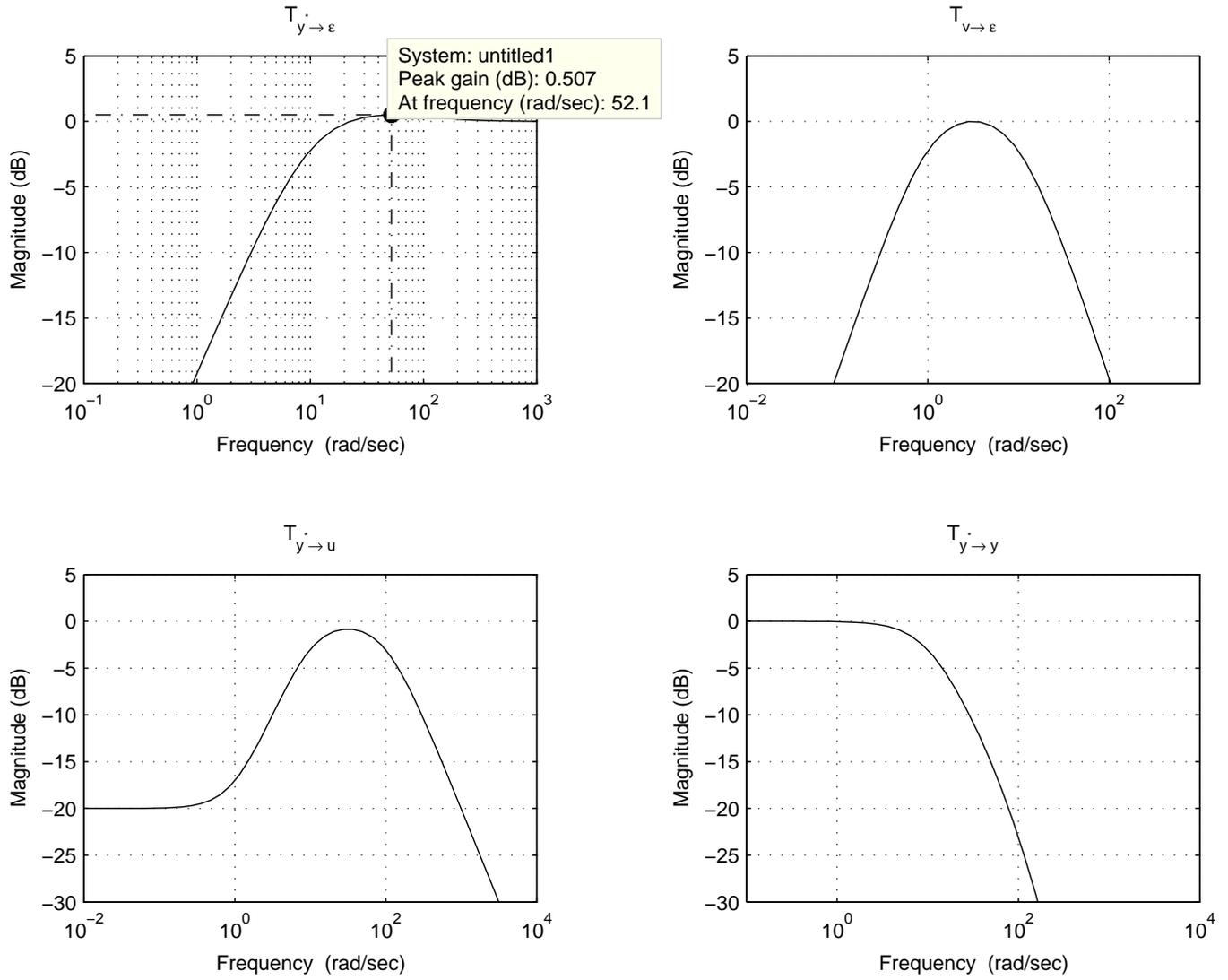


FIG. 4.4 – Fonctions de transfert en boucle fermée sur l'exemple premier ordre

la sensibilité du correcteur au bruit de mesure. Il est donc nécessaire de faire un compromis au niveau du choix de τ_2 .

Sur la figure 4.4 sont représentées les fonctions de transfert en boucle fermée pour $K = 10$, $\tau = 1$ seconde, $\tau_1 = 0.1$ seconde et $\tau_2 = 0.01$ seconde. Sur le tracé du module de $T_{y^* \rightarrow \epsilon}$ en fonction de ω on peut noter :

- une pente de +20 dB/decades en basses pulsations, ce qui est cohérent avec un gain statique nul pour la poursuite ;
- une pulsation de coupure d'environ 20 rad/s, ce qui est cohérent avec le temps de réponse en boucle fermée (environ 0.25 secondes) ;
- un maximum de 0.5 dB/decades, ce qui assure $\Delta M = -0.5$ dB soit $0.94 \gg 0.5$ soit une marge de module excellente.

Sur le tracé du module de $T_{y^* \rightarrow y}$ on peut noter l'absence de pic de résonance, ce qui est cohérent avec un dépassement nul pour la réponse indicielle de $T_{y^* \rightarrow y}$. Le rejet de perturbation est bien assuré (pente de +20 dB/decades sur le tracé du module de $T_{v \rightarrow \epsilon}$. Enfin, $T_{v \rightarrow \epsilon}$ est bien une fonction de transfert passe-bas. Le comportement en poursuite se retrouve sur les simulations temporelles (voir figure 4.5). Le rejet de

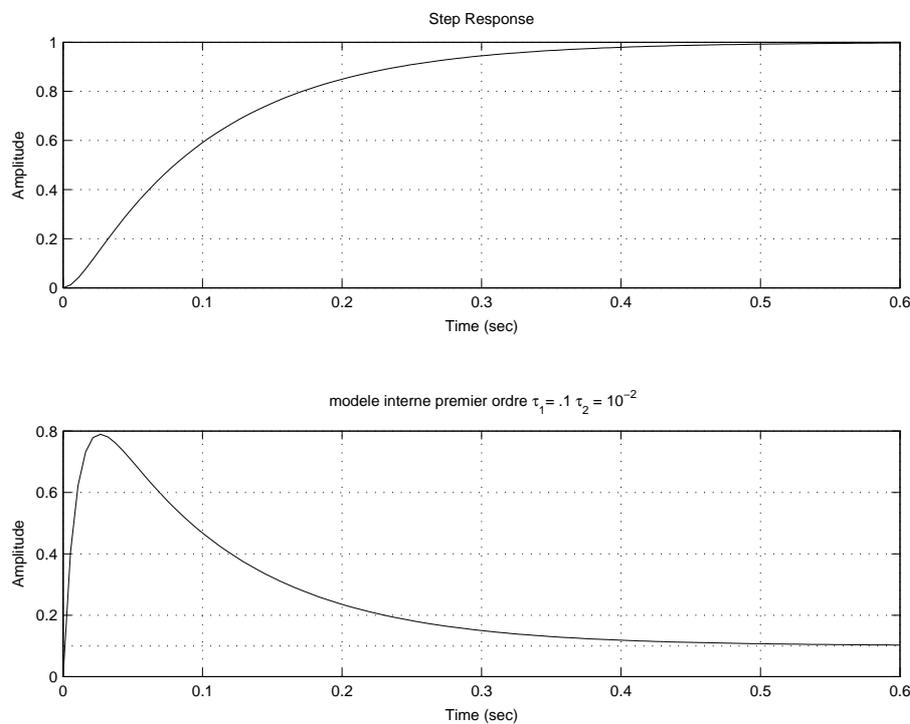


FIG. 4.5 – Réponse temporelle (y haut et u bas) exemple premier ordre

perturbation est assuré, voir figure 4.6. Cependant, le temps de rejet de perturbation est lent (3s), à comparer avec le temps de réponse à un échelon de référence (0.3s). Cela peut s'interpréter à partir de l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée suivante :

$$T_{v \rightarrow y}(p) = \frac{p(\tau_1 \tau_2 p + (\tau_1 + \tau_2))}{(\tau p + 1)(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}$$

Le pôle "lent" en $-\frac{1}{\tau}$ (pôle dominant) de $G(p)$ n'est pas compensé dans la fonction de transfert $T_{v \rightarrow y}$: c'est lui qui donne un temps de réponse de 3s. Ce pôle est donc le pôle dominant de la fonction de transfert $T_{v \rightarrow y}(p)$.

D'autre part, il est intéressant de calculer les marges de stabilité classiques à partir par exemple du diagramme de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(p) = G(p)C(p)$ (voir la figure 4.7). On obtient une marge de phase de 85 degrés et une marge de gain infini, ce qui est excellent.

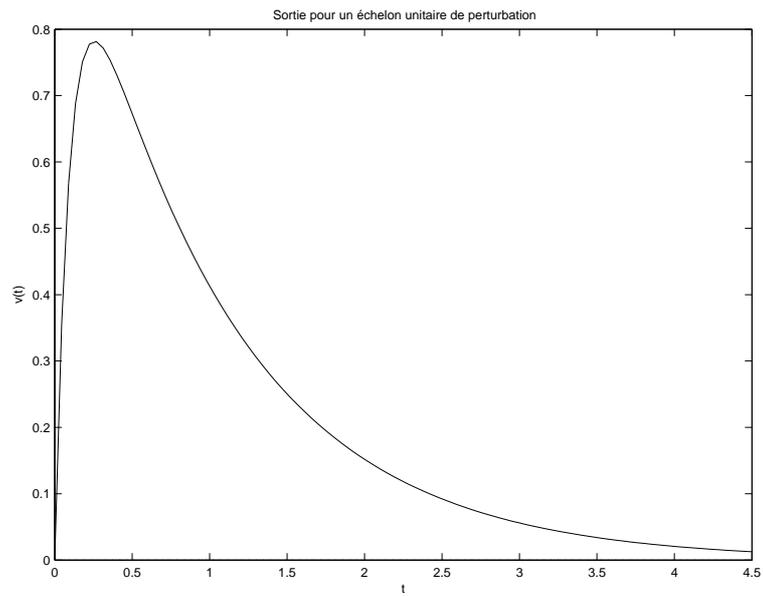


FIG. 4.6 – Réponse temporelle à une perturbation

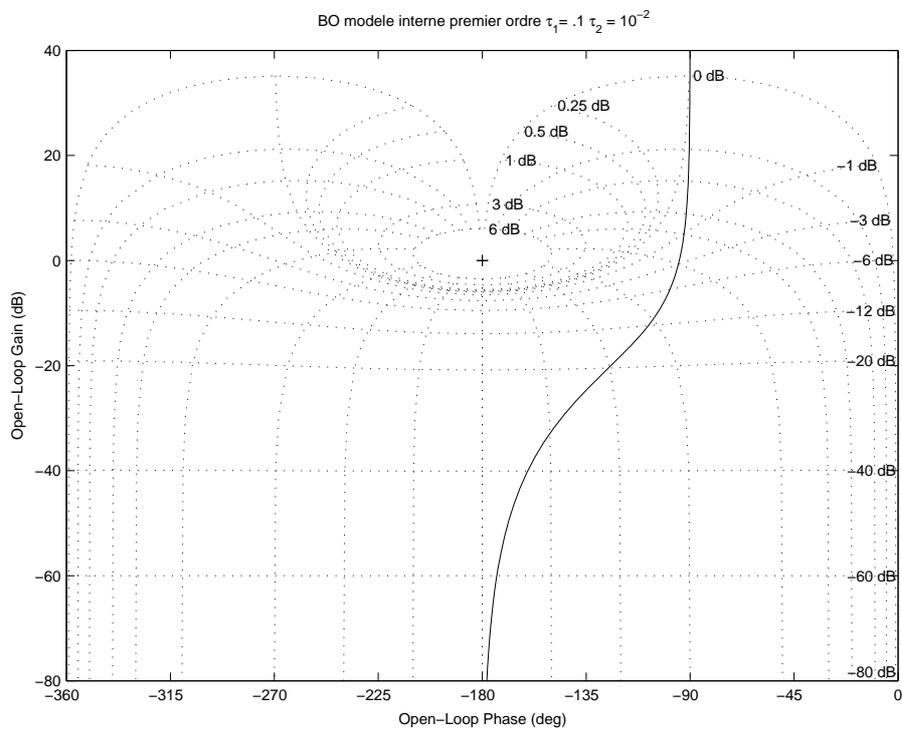


FIG. 4.7 – Boucle ouverte exemple premier ordre

Examinons le correcteur que l'on a obtenu :

$$C(p) = \frac{Q(p)}{1 - G(p)Q(p)} = \frac{\tau}{K(\tau_1 + \tau_2)} \frac{p + 1/\tau}{p} \frac{1}{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}p + 1}$$

(voir le diagramme de Bode représenté figure 4.8). On a donc obtenu un PI filtré par un premier ordre, structure qui aurait été naturellement obtenue en appliquant la méthode présentée dans le chapitre précédent. Ce qui distingue celle-ci de la méthode par modèle interne n'est donc pas le résultat obtenu mais la démarche qui a été empruntée pour y aboutir.

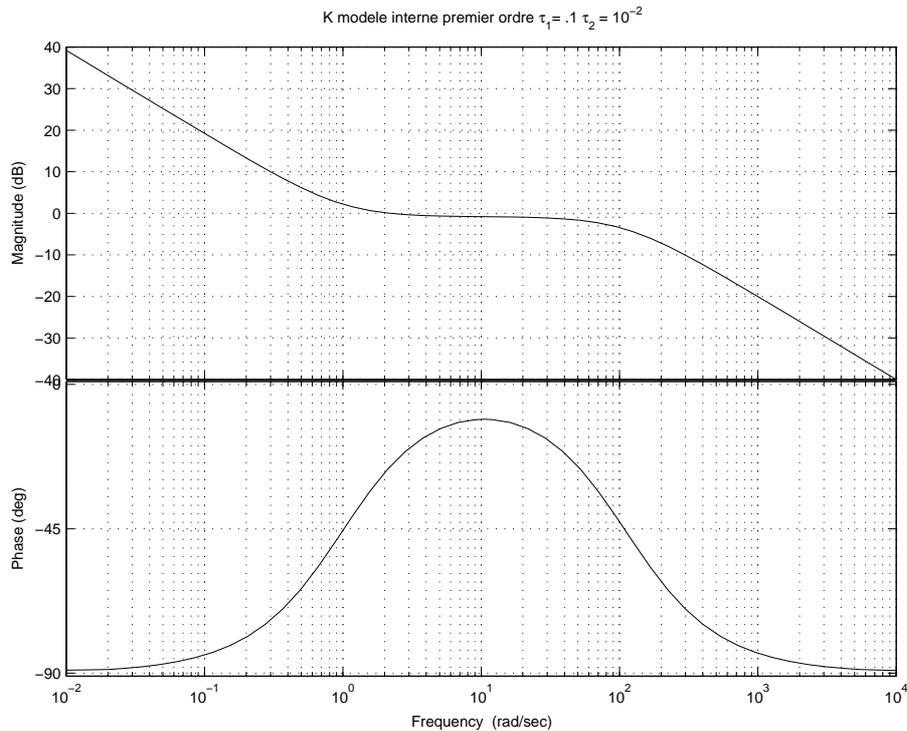


FIG. 4.8 – Correcteur $C(p)$ exemple premier ordre

Bilan

- La stabilité du système en boucle fermée est plus simple à assurer par la méthode du modèle interne que par la méthode présentée chapitre 3 (dans le premier cas, Q doit être choisi stable, dans le second on choisit C de façon à ce que le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte satisfait une condition d'entournement du point -1).
- La dynamique de poursuite peut être simplement rendue plus rapide que pour le procédé non corrigé par compensation de(s) pôle(s) le(s) plus lent(s) de $G(p)$.
- Ce n'est pas forcément vrai pour la dynamique de rejet de perturbation.
- Les marges de stabilité doivent être vérifiées *a posteriori* (après) la mise au point du correcteur.
- Le correcteur finalement obtenu peut être parfois d'ordre important, d'où une plus grande complexité d'implantation.

4.2 Commande par modèle interne pour les procédés instables

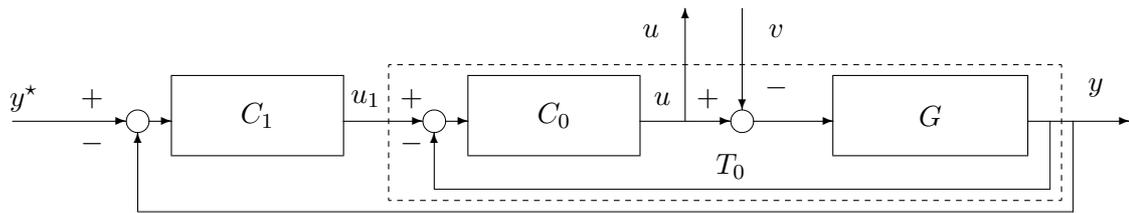


FIG. 4.9 – Système en boucle fermée

Quand le procédé est instable, l'idée est dans une première étape de mettre au point un premier correcteur $C_0(p)$ dont l'objectif est de stabiliser le procédé, en assurant éventuellement la dynamique désirée pour le système en boucle fermée, voir la figure 4.9. Un tel correcteur peut être par exemple obtenu en utilisant les méthodes exposées dans le chapitre précédent. Ce correcteur $C_0(p)$ admet comme "signal de référence" u_1 . Ce signal de référence pour le correcteur $C_0(p)$ est le signal de commande du correcteur $C_1(p)$. Ce correcteur admet pour signal de référence, le signal de référence physique y^* et construit à partir du signal de mesure y le signal de commande u_1 qui est le signal de référence pour le correcteur $C_0(p)$. Le correcteur finalement obtenu est alors représenté figure 4.10. On parle de "correcteur cascade". Le signal de commande de ce correcteur est le signal u .

Ce second correcteur $C_1(p)$ est mis au point par la méthode du modèle interne pour le "procédé" $T_0(p)$ constitué du correcteur $C_0(p)$ rebouclé sur le procédé $G(p)$ et défini par :

$$T_0(p) = \frac{G(p)C_0(p)}{1 + G(p)C_0(p)}.$$

On aura donc :

$$C_1(p) = \frac{Q(p)}{1 - T_0(p)Q(p)}$$

où $Q(p)$ est la fonction de transfert stable à déterminer pour satisfaire le cahier des charges.

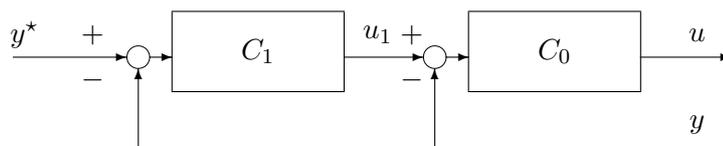


FIG. 4.10 – Correcteur final

On peut démontrer que dans le cas où le correcteur C_0 est stable, il est possible d'écrire tous les correcteurs stabilisant le procédé $G(p)$ sous la forme précédente, présentée figure 4.10, avec un choix particulier de $Q(p)$. Dans ce cas de figure, l'emploi de cette structure de commande n'est donc pas limitatif.

Cette démarche va maintenant être mise en œuvre pour la commande du moteur à courant continu.

Exemple moteur CC Cet exemple est repris avec pour cahier des charges :

- assurer la poursuite d'échelon de référence, sans erreur statique ;
- dépassement de 5% et temps du premier maximum de 30 ms ;
- rejet de perturbation en échelon à l'entrée du moteur ;

En posant $T_0(p) = \frac{G(p)C_0(p)}{1 + G(p)C_0(p)}$ et $S_0(p) = \frac{1}{1 + G(p)C_0(p)}$ et en éliminant $U_1(p)$ entre les équations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \underbrace{Q(p)T_0(p)}_{T_{y^* \rightarrow y}(p)} Y^*(p) + \underbrace{G(p)S_0(p)(1 - Q(p)T_0(p))}_{T_{v \rightarrow y}(p)} V(p) \\ U(p) &= \underbrace{Q(p)C_0(p)S_0(p)}_{T_{y^* \rightarrow u}(p)} Y^*(p) - \underbrace{T_0(p)(Q(p)S_0(p) + 1)}_{T_{v \rightarrow u}(p)} V(p) \end{aligned}$$

Spécification de poursuite On veut assurer que $|T_{y^* \rightarrow y}(0) = 1|$. Pour cela, $Q(0) = \frac{1}{T_0(0)}$ soit $Q(0) = 1$.

Si on choisit $Q(p) = 1$ alors $T_{y^* \rightarrow y}(p)$ est une fonction de transfert du second ordre de pulsation propre $\omega_0 = 62.7$ rad/s et de coefficient d'amortissement $\xi_0 = 0.53$. On a ainsi un dépassement de 15% et

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = 73 \text{ms.}$$

Le cahier des charges nécessite un dépassement de 5% et un temps du premier maximum de 30 ms. D'après la figure 3.3, un dépassement de 5% correspond à un amortissement $\xi_d = 0.7$. De plus, un temps du premier maximum de 30 ms nécessite une pulsation propre de $\omega_d = 146.6$ rad/s. En choisissant

$$Q(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\xi_0 \frac{p}{\omega_0} + 1}{\frac{p^2}{\omega_d^2} + 2\xi_d \frac{p}{\omega_d} + 1}$$

on a bien $Q(0) = 1$ et

$$T_{y^* \rightarrow y}(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_d^2} + 2\xi_d \frac{p}{\omega_d} + 1}.$$

Spécification de rejet de perturbation Comme $T_{v \rightarrow \epsilon}(p) = G(p)S_0(p)(1 - Q(p)T_0(p))$, on aura bien $T_{v \rightarrow \epsilon}(0) = 0$. Le rejet d'échelon est bien assuré.

Spécification de commande On a :

$$T_{y^* \rightarrow u}(p) = Q(p)C_0(p)S_0(p).$$

Les fonctions de transfert $Q(p)$, $C_0(p)$ et $S_0(p)$ ne sont pas passe-bas. La fonction de transfert $T_{y^* \rightarrow u}(p)$ n'est donc pas passe-bas. Il est donc nécessaire d'introduire un filtre passe bas dans la fonction de transfert Q par exemple du premier ordre. Un bon compromis est obtenu avec un constant de temps $\tau_Q = \frac{1}{1200}$ secondes. On a ainsi :

$$Q(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\xi_0 \frac{p}{\omega_0} + 1}{\frac{p^2}{\omega_d^2} + 2\xi_d \frac{p}{\omega_d} + 1} \frac{1}{\tau_Q p + 1}.$$

Le correcteur $C_1(p)$ s'écrit alors :

$$C_1(p) = \omega_d^2 \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\xi_0 \frac{p}{\omega_0} + 1}{p(p + 2\xi_d \omega_d)}.$$

Le correcteur final (représenté figure 4.10) est défini par les équations :

$$U(p) = C_0(p)C_1(p)Y^*(p) - C_0(p)(1 + C_1(p))Y(p)$$

Il s'agit d'un correcteur à deux degrés de liberté. La fonction de transfert en boucle ouverte correspondant au système en boucle fermée représenté figure 4.9 est donc donnée par $L(p) = G(p)(1 + C_0(p)C_1(p))$. Les

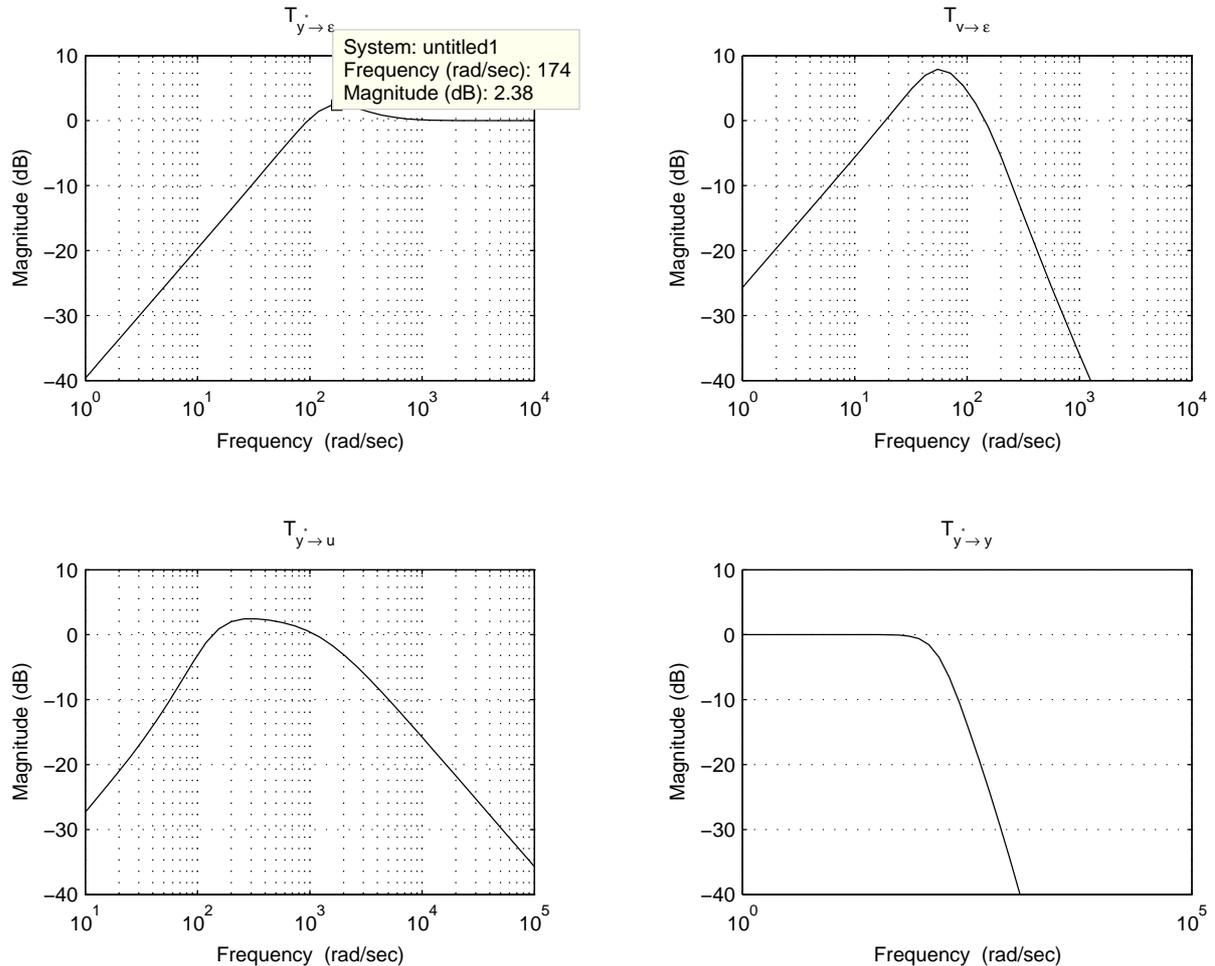


FIG. 4.12 – Fonctions de transfert en boucle fermée sur l'exemple moteur CC

spécifications de performance du cahier des charges sont satisfaites, voir les figures 4.12, 4.13 et 4.14. A partir de la figure 4.12, on détermine une marge de module $\Delta M = -2.38dB$ et à partir de la figure 4.15, une marge de phase $\Delta \Phi = 46$ degrés et une marge de gain $\Delta G = 22.6dB$.

Enfin, la partie du correcteur qui est dans la boucle de rétroaction $(1 + C_0(p)C_1(p))$ est représenté figure 4.16 : il est assez proche d'un correcteur PI avec avance de phase.

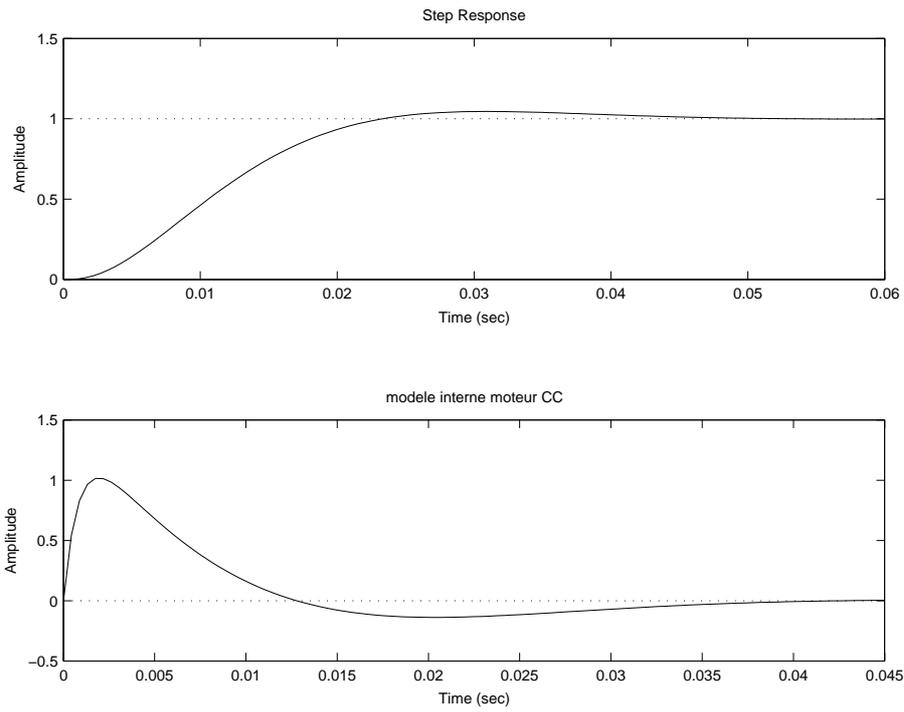


FIG. 4.13 – Réponse temporelle (y haut et u bas) exemple moteur CC

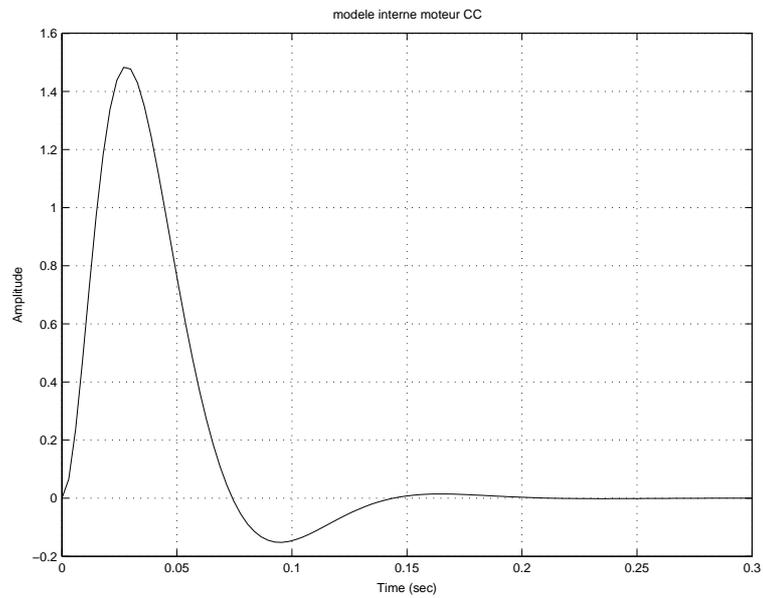


FIG. 4.14 – Réponse temporelle à une perturbation

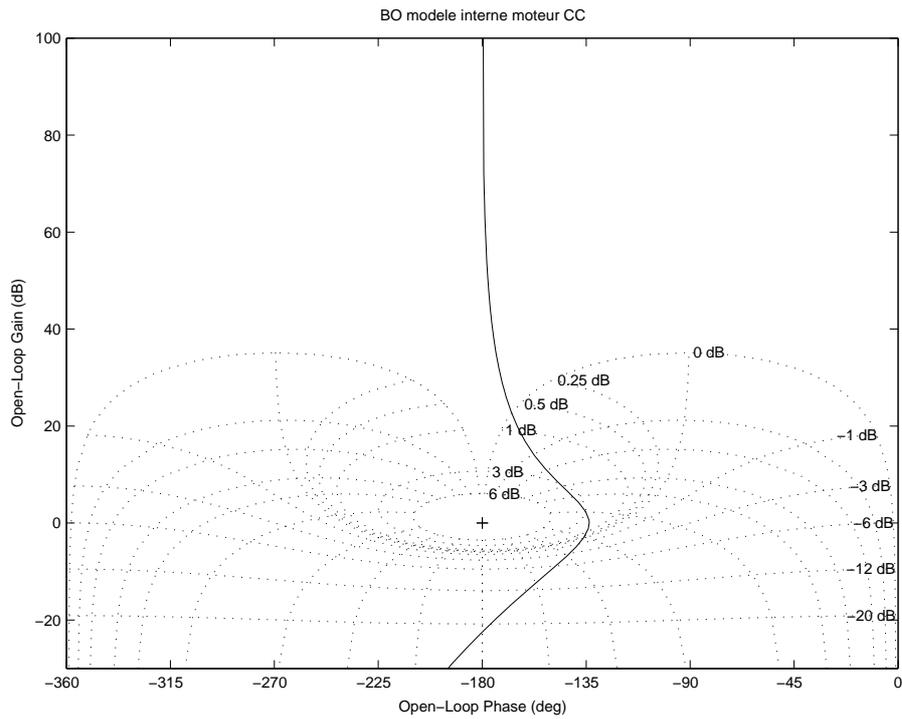
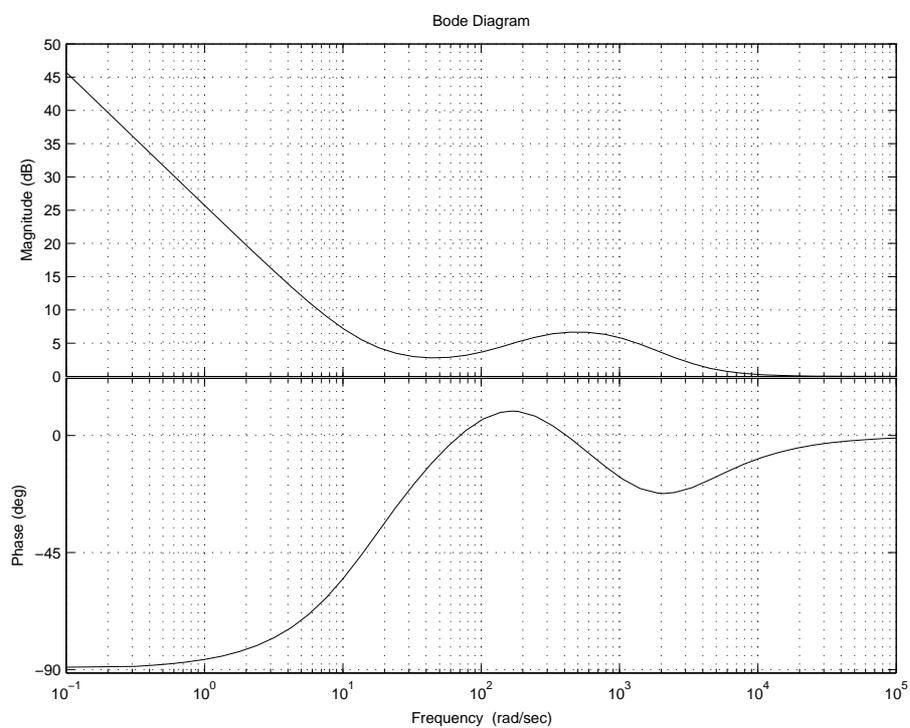


FIG. 4.15 – Boucle ouverte exemple moteur CC

FIG. 4.16 – Diagramme de Bode de $1 + C_0(p)C_1(p)$

Chapitre 5

Annexe

5.1 Transformée de Laplace de signaux élémentaires (Eric Magarotto©)

$f(t) \quad t \geq 0$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$
$\delta(t)$ impulsion unité (Dirac)	1
$1(t)$ échelon unité	$\frac{1}{p}$
$1(t - \tau)$ éch. unité retardé de τ	$\frac{e^{-p\tau}}{p}$
$1(t) - 1(t - \tau)$ impulsion rect.	$\frac{1 - e^{-p\tau}}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
t^2e^{-at}	$\frac{2}{(p+a)^3}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{ab} \left(1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
$\frac{1}{a^2} (1 - (at + 1)e^{-at})$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1}{(a-b)^2} [e^{-at} + ((a-b)t - 1)e^{-bt}]$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$
$\frac{e^{-at}}{(a-b)(a-c)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \sin(\varphi) + \omega_0 \cos(\varphi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \theta) \quad \theta = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)$	$\frac{p+\alpha}{p^2 + \omega_0^2}$
$1 - \cos(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}\right)$	$\frac{1}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2}$

5.2 Systèmes du premier ordre et du second ordre

Systèmes du premier ordre

Un système du premier ordre de gain statique K (sans zéro) est défini par la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{\tau p + 1}$$

Réponse temporelle à un échelon τ est appelée constante de temps. Le temps de monté T_m est le temps au bout duquel la sortie du système atteint 95 % de la valeur finale. Pour un système du premier ordre $T_m = 3\tau$ (voir la figure 5.1). D'autre part, le sortie du système atteint 63 % de la valeur finale en τ secondes. Ces expressions découlent du fait que la sortie du système est donnée par :

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

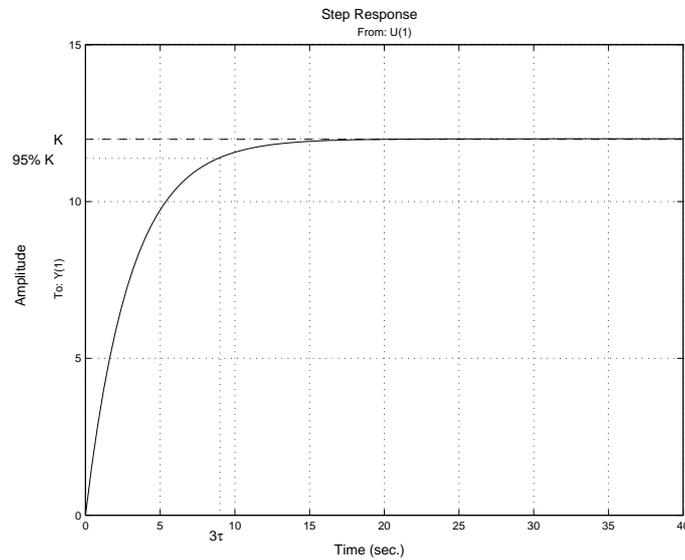


FIG. 5.1 – Réponse d'un système du premier ordre

Emplacement du pôle Le pôle se situe en $-\frac{1}{\tau}$. La distance au point 0 est inversement proportionnelle à la constante de temps τ .

Système du second ordre

Un système du second ordre de gain statique unité (sans zéro) est défini par la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2\xi\frac{p}{\omega_0} + 1}$$

Réponse temporelle à un échelon La réponse temporelle à un échelon d'un système du second ordre est définie par deux paramètres (voir la figure 4.3) qui sont directement liés à la valeur de la pulsation propre ω_0 et de l'amortissement ξ :

Dépassement :

$$D_1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (5.1)$$

Temps du premier maximum :

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \quad (5.2)$$

Ces caractéristiques sont obtenues à partir de l'expression de la réponse indicielle $y(t)$ en fonction du temps :

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2} - \phi\right)$$

avec $\phi = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

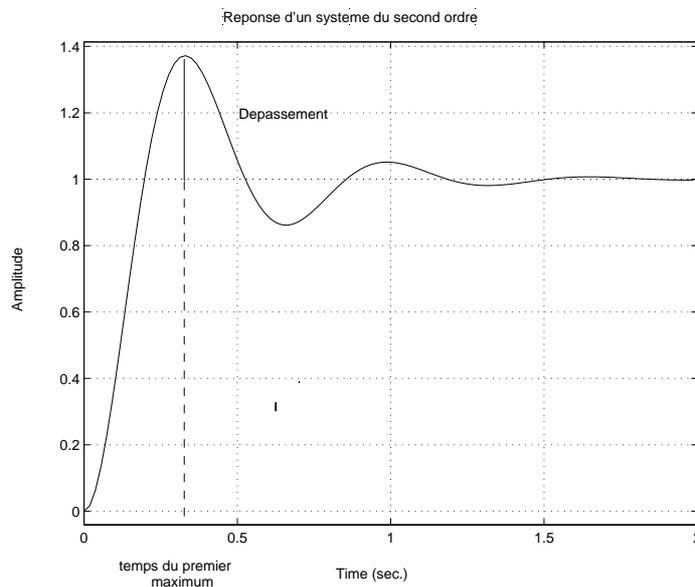


FIG. 5.2 – Réponse d'un second ordre

Emplacement des pôles Pour $0 \leq \xi < 1$, les pôles sont complexes conjugués et se situent en $-\xi\omega_0 \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_0$ (voir leur représentation dans le plan complexe, figure 5.4). De plus, on a $\cos(\theta) = \xi$.

Un choix intéressant est de choisir un amortissement ξ de 0,7, ce qui correspond à un dépassement de 5 % d'après la relation (5.1). Dans le plan complexe, ils sont alors représentés sur les deux bissectrices. Enfin, ω_0 est sélectionné pour obtenir un certain temps de montée en utilisant la relation (5.2).

Réponse fréquentielle : Diagramme de Bode Pour $\omega \ll \omega_0$, on a $|G(j\omega)|_{dB} \approx 0dB$ et $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$. Pour $\omega \gg \omega_0$, on a $|G(j\omega)|_{dB} \approx -40 \log(\omega) + \beta$ et $\arg(G(j\omega)) \approx -180^\circ$ si $\xi > 0$ et $\arg(G(j\omega)) \approx 180^\circ$ si $\xi < 0$. Par suite, pour $\omega \ll \omega_0$, le tracé du module $|G(j\omega)|_{dB}$ est approché par une droite horizontale, à $0dB$ et celui de la phase par une droite horizontale à 0° . Pour $\omega \gg \omega_0$, le tracé du module $|G(j\omega)|_{dB}$ est approché par droite de pente -40 dB/decade et celui de la phase par une droite horizontale à 180° si $\xi < 0$ et à -180° si $\xi > 0$. Voir la figure 5.10 pour le tracé de transferts du second ordre avec différentes valeurs possibles de l'amortissement ξ pour une même pulsation propre $\omega_0 = 10$. Pour $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, le tracé du module présente un maximum de $\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ à la pulsation $\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$. De plus, on a $|G(j\omega_0)| = \frac{1}{2\xi}$.

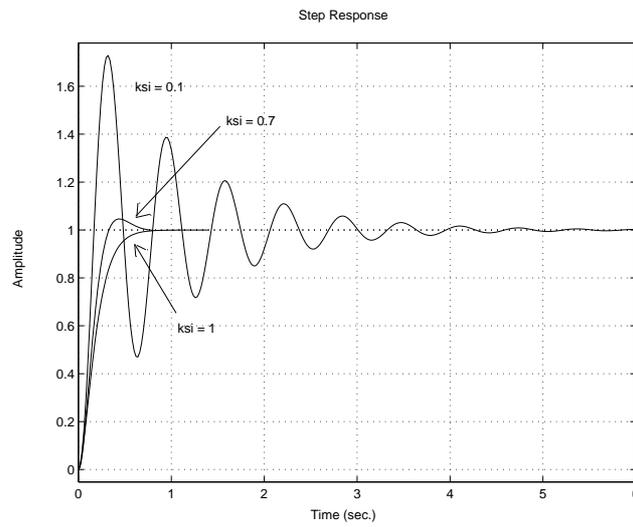


FIG. 5.3 – Réponses temporelles de fonctions de transfert du second ordre

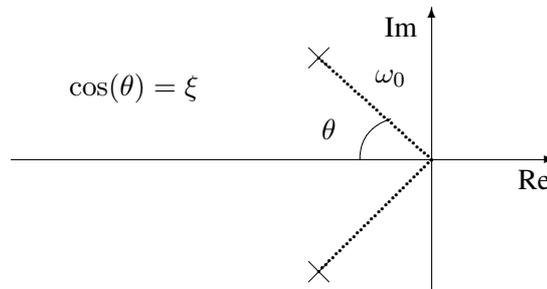


FIG. 5.4 – Pôles d'une fonction de transfert du second degré

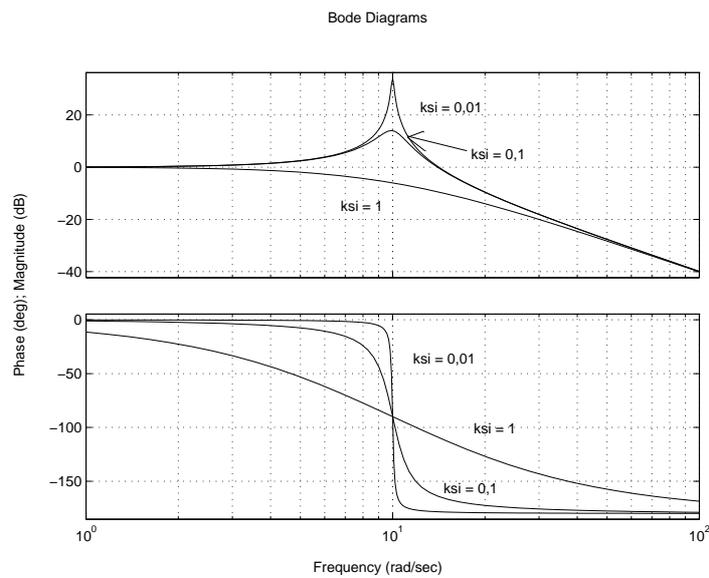


FIG. 5.5 – Diagramme de Bode de fonctions de transfert du second ordre

Réponse fréquentielle : Diagrammes de Nyquist et de Black-Nichols Voir les tracés sur les figures 5.6 et 5.7.

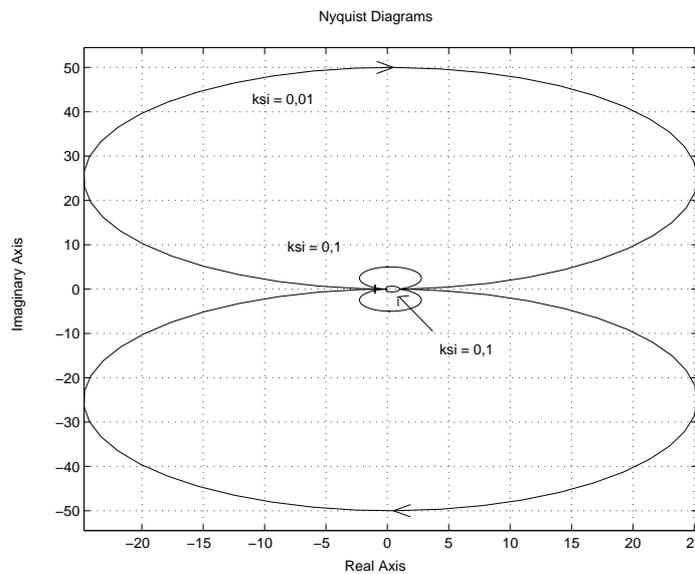


FIG. 5.6 – Diagramme de Nyquist de fonctions de transfert du second ordre

5.3 Tracé asymptotique de diagrammes de Bode

Rappeler les règles permettant de tracer un diagramme asymptotique de Bode peut sembler incongru. En effet, la plupart des logiciels de calcul scientifique généraux (comme `Matlab`) permettent de tracer un diagramme de Bode en une fraction de seconde. En fait, l'intérêt de connaître ses règles réside dans la capacité à analyser un diagramme de Bode. Après avoir rappeler les règles de tracé de diagramme de Bode, des exercices sont proposés en fin de section. Ils consistent à partir d'un diagramme de Bode à ébaucher la fonction de transfert correspondante.

Etant donnée une fonction de transfert réelle rationnelle $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j \arg(G(j\omega))}$, le diagramme de Bode consiste à

1. représenter le module de $G(j\omega)$ exprimé en dB et noté $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$ en fonction du logarithme de la pulsation $\log(\omega)$;
2. représenter la phase de $G(j\omega)$, notée $\arg(G(j\omega))$, en fonction du logarithme de la pulsation $\log(\omega)$;

Propriété 1 Dans le cas où $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdots G_r(j\omega)$, on a

1. $|G(j\omega)|_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} + \cdots + |G_r(j\omega)|_{dB}$;
2. $\arg(G(j\omega)) = \arg(G_1(j\omega)) + \cdots + \arg(G_r(j\omega))$;
3. $|G(j\omega)^{-1}|_{dB} = -|G(j\omega)|_{dB}$ et $\arg(G(j\omega)^{-1}) = -\arg(G(j\omega))$.

Propriété 2 : relation de Bode entre le gain et la phase Dans le cas d'une fonction de transfert sans pôle et zéro instables, à une variation du gain $|G(j\omega)|_{dB}$ à une pulsation donnée de $20 \times N$ correspond une variation de la phase $\arg(G(j\omega))$ à cette pulsation de $90^\circ \times N$.

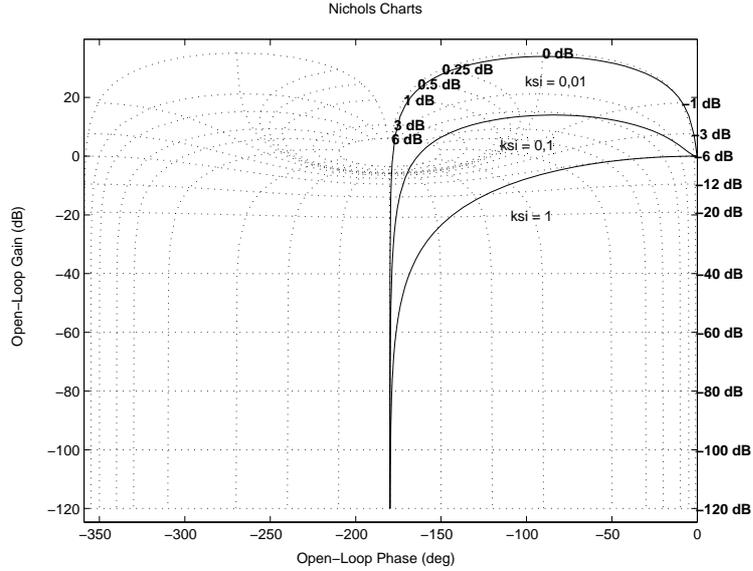


FIG. 5.7 – Diagramme de Black Nichols de fonctions de transfert du second ordre

Les propriétés précédentes peuvent être mises à profit pour faire un tracé approché du diagramme de Bode. Les propriétés 1. et 2. permettent de réduire le tracé du diagramme de Bode du transfert :

$$G(j\omega) = K \times (j\omega)^{\pm k} \times \frac{\prod_l (j\omega\tau_l + 1) \prod_m \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_m} \right)^2 + 2\xi_m \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right)}{\prod_p (j\omega\tau_p + 1) \prod_q \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_q} \right)^2 + 2\xi_q \frac{j\omega}{\omega_q} + 1 \right)} \quad (5.3)$$

à la combinaison des tracés de diagrammes de Bode de :

1. $K \times (j\omega)^{\pm k}$
2. $(j\omega\tau + 1)^{\pm 1}$
3. $\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_m} \right)^2 + 2\xi_m \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right)^{\pm 1}$.

La propriété 3. permet de relier le tracé des diagrammes de Bode de $K \times (j\omega)^k$, $(j\omega\tau + 1)$ et $\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_m} \right)^2 + 2\xi_m \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right)$ à ceux de $K (j\omega)^{-k}$, $(j\omega\tau + 1)^{-1}$ et $\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_m} \right)^2 + 2\xi_m \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right)^{-1}$.

Dans ce qui suit, on considère que $\omega \geq 0$.

Diagramme de Bode de $G(j\omega) = K \times (j\omega)^{-k}$. Comme $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) - 20k \log(\omega)$, le tracé du module $|G(j\omega)|_{dB}$ est une droite de pente $-20 \times k$ dB par décades. Comme $\arg(G(j\omega)) = -90^\circ \times k$, la phase est indépendante de la pulsation. Voir la figure 5.8 dans le cas d'un intégrateur ($k = 1$ et $K = 1$).

Diagramme de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$. Pour $\omega\tau \ll 1$, on a $|G(j\omega)|_{dB} \approx 0dB$ et $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$. Pour $\omega\tau \gg 1$, on a $|G(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(\omega) - 20 \log(|\tau|)$ et $\arg(G(j\omega)) \approx +90^\circ$ si $\tau < 0$ et $\arg(G(j\omega)) \approx -90^\circ$ si $\tau > 0$. Pour $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$, le tracé du module $|G(j\omega)|_{dB}$ est approché par une droite horizontale, à $0dB$ et celui de la phase par une droite horizontale à 0° . Pour $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$, le tracé du module

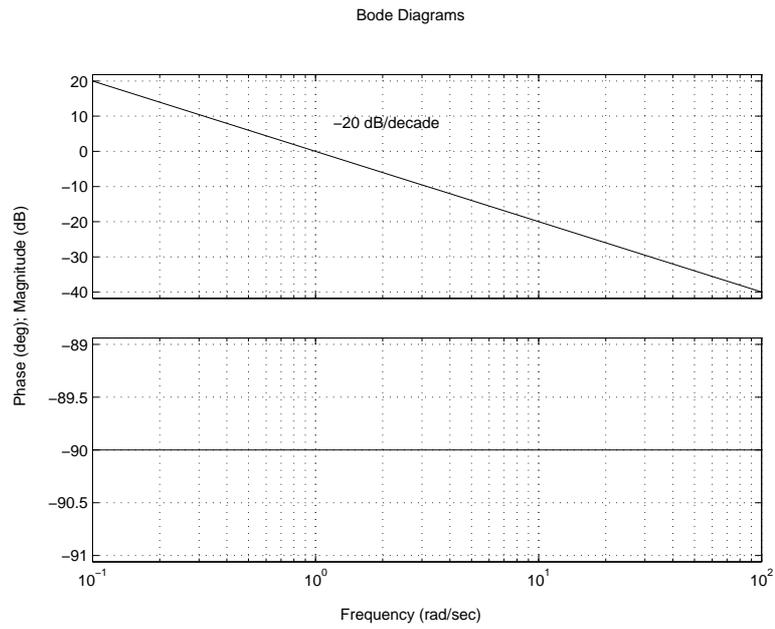


FIG. 5.8 – Diagramme de Bode d'un intégrateur : $\frac{1}{p}$

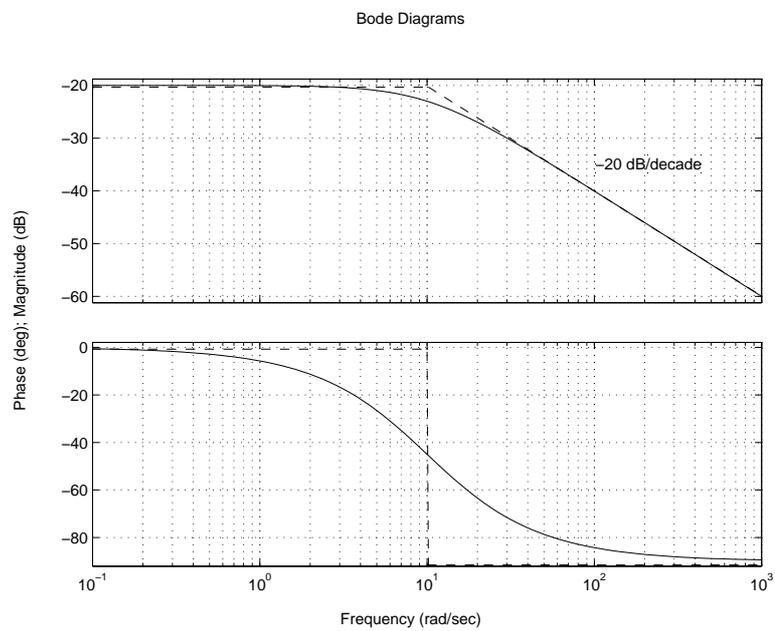


FIG. 5.9 – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert du premier ordre : $\frac{0,1}{0,1p+1}$

$|G(j\omega)|_{dB}$ est approché par droite de pente -20 dB/décade et celui de la phase par une droite horizontale à 90° si $\tau < 0$ et à -90° si $\tau > 0$. Voir la figure 5.9 pour le tracé du transfert $\frac{0,1}{0,1p+1}$.

Diagramme de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0}^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_0} + 1}$ Pour $\omega \ll \omega_0$, on a $|G(j\omega)|_{dB} \approx 0dB$ et $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$. Pour $\omega \gg \omega_0$, on a $|G(j\omega)|_{dB} \approx -40 \log(\omega) + \beta$ et $\arg(G(j\omega)) \approx -180^\circ$ si $\xi > 0$ et $\arg(G(j\omega)) \approx 180^\circ$ si $\xi < 0$. Par suite, pour $\omega \ll \omega_0$, le tracé du module $|G(j\omega)|_{dB}$ est approximé par une droite horizontale, à $0dB$ et celui de la phase par une droite horizontale à 0° . Pour $\omega \gg \omega_0$, le tracé du module $|G(j\omega)|_{dB}$ est approximé par droite de pente -40 dB/décade et celui de la phase par une droite horizontale à 180° si $\xi < 0$ et à -180° si $\xi > 0$. Voir la figure 5.10 pour le tracé de transferts du second ordre avec différentes valeurs possibles de l'amortissement ξ pour une même pulsation propre $\omega_0 = 10$. Pour $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, le tracé du module présente un maximum de $\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ à la pulsation $\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$. De plus, on a $|G(j\omega_0)| = \frac{1}{2\xi}$.

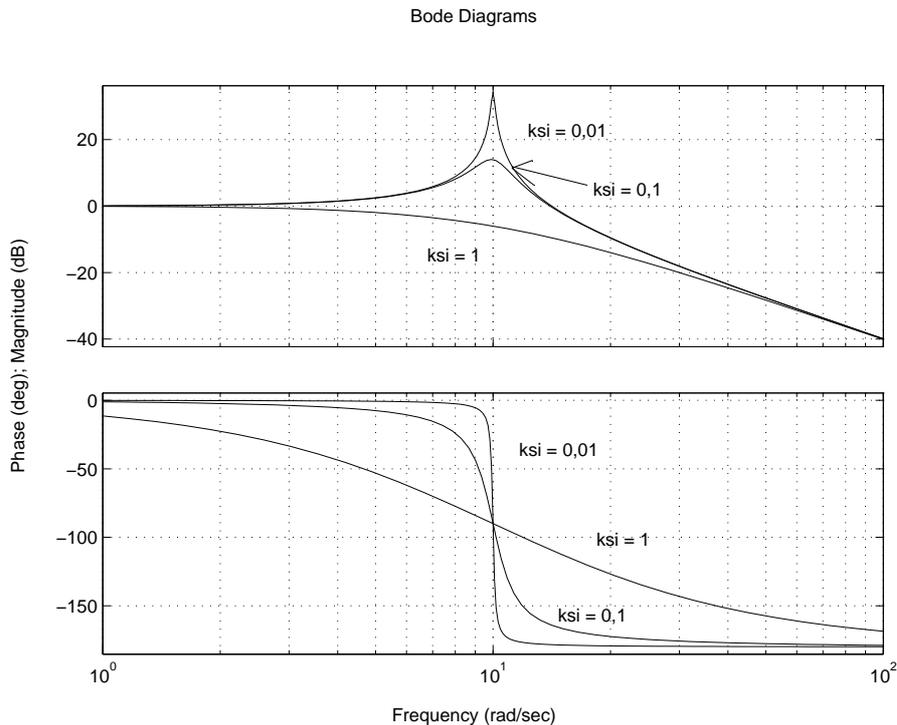


FIG. 5.10 – Diagramme de Bode de fonctions de transfert du second ordre

Règles sur le tracé approché du diagramme de Bode d'une fonction de transfert

Étape 1 Mettre la fonction de transfert sous la forme (5.3) ;

Étape 2 Tracer le module asymptotique en basses pulsations : il est de pente $20 \times (\pm k)$ dB par décade et passe pour $\omega = 1$ par le point $20 \log(K)$.

Étape 3 Cette asymptote est tracée jusqu'à la première "cassure", c'est-à-dire la plus petite des valeurs $\frac{1}{|\tau_i|}$, $\frac{1}{|\tau_p|}$, ω_m et ω_0 . La pente de la droite est alors incrémentée de ± 1 ou de ± 2 suivant que la cassure correspond à un terme du premier ordre au numérateur ou au dénominateur ou encore à un terme du second ordre au numérateur ou au dénominateur. Effectuer de façon itérative cette opération pour les "cassures" suivantes.

Etape 4 Tracer la phase asymptotique en basses pulsations : elle est constante et égale à $90^\circ \times (\pm k)$.

Etape 5 Cette asymptote est tracée jusqu'à la première cassure, c'est-à-dire la plus petite des valeurs $\frac{1}{|\tau_i|}$, $\frac{1}{|\tau_p|}$, ω_m et ω_0 . La valeur de la phase est alors incrémentée de $\pm 90^\circ$ ou de $\pm 180^\circ$ suivant que la cassure correspond à un terme du premier ordre au numérateur ou au dénominateur, stable ou instable ou encore à un terme du second ordre au numérateur ou au dénominateur, stable ou instable. Effectuer de façon itérative cette opération pour les "cassures" suivantes.

5.3.1 Exemple

On considère la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{40(p+10)}{(p+400)(p^2+0,8p+1)}$$

soit

$$G(p) = \frac{\left(\frac{p}{10} + 1\right)}{\left(\frac{p}{400} + 1\right)(p^2 + 0,8p + 1)}.$$

Cette fonction a un zéro réel en -10 , un pôle en -400 et deux pôles complexes conjugués de pulsation propre $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ et d'amortissement $\xi_1 = 0,4$. Comme elle n'a pas de pôle ni de zéro en 0, le tracé asymptotique en basse pulsation du module est une droite de pente 0 et d'abscisse le gain statique de la fonction de transfert exprimée en dB soit 0 dB ; le tracé de la phase est une droite de pente 0 et d'abscisse 0 degré.

A partir de la pulsation $\omega = \omega_1$ (pulsation propre des deux pôles complexes conjugués), la pente du tracé asymptotique en basses pulsations du module est diminuée de -40 dB/dec (on obtient ainsi une pente -2). Du fait de la relation de Bode entre la phase et le gain, le tracé asymptotique en basses pulsations de la phase est une droite de pente 0 et d'abscisse -180 degrés. A partir de la pulsation 10 rad/s (qui correspond au zéro en -10), la pente du tracé asymptotique du module est augmentée de $+20 \text{ dB/dec}$ (on obtient ainsi une pente -1); le tracé de la phase est une droite de pente 0 et d'abscisse -90 degrés. A partir de la pulsation 400 rad/s (qui correspond au pôle en -400), la pente du tracé asymptotique du module est diminuée de $+20 \text{ dB/dec}$ (on obtient ainsi une pente -2); le tracé de la phase est alors une droite de pente 0 et d'abscisse -180 degrés.

On obtient ainsi le tracé représenté figure 5.11 : en gras, le tracé asymptotique et en traits tirés le tracé du bode obtenu par la fonction `bode` de `Matlab`.

5.3.2 Exercices

Ex. 1 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{p+a}{p(p+b)}$$

avec $0 < a \ll b$.

Ex. 2 Evaluer la fonction de transfert associée au diagramme de Bode représenté figure 5.12.

Nota Bene : dans cette série d'exercices, on demande simplement d'évaluer les transferts représentés sans essayer de les déterminer exactement.

Ex. 3 Evaluer la fonction de transfert associée au diagramme de Bode représenté figure 5.13.

Ex. 4 Evaluer la fonction de transfert associée au diagramme de Bode représenté figure 5.14.

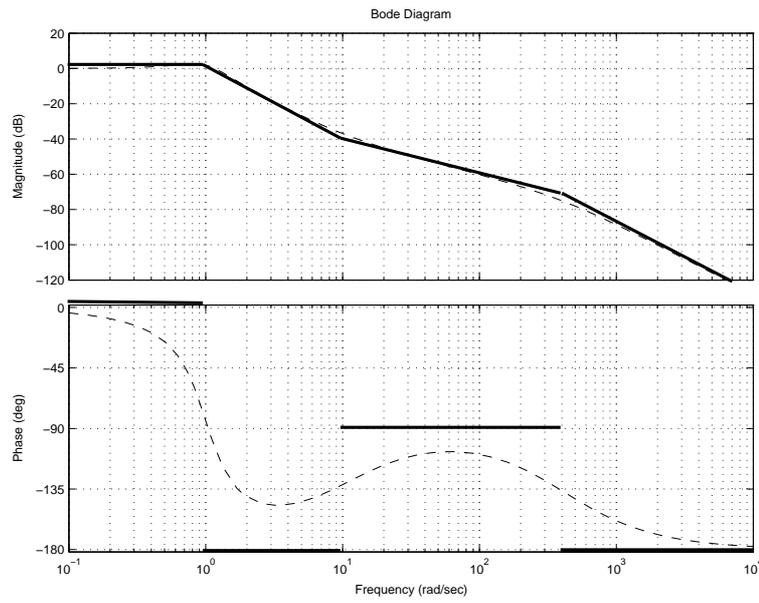


FIG. 5.11 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \frac{40(p + 10)}{(p + 400)(p^2 + 0,8p + 1)}$

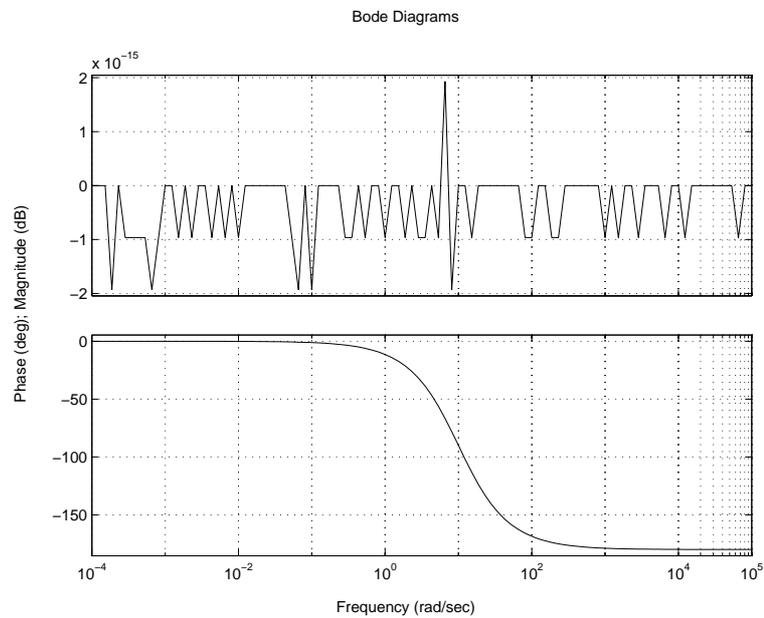


FIG. 5.12 – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert à déterminer

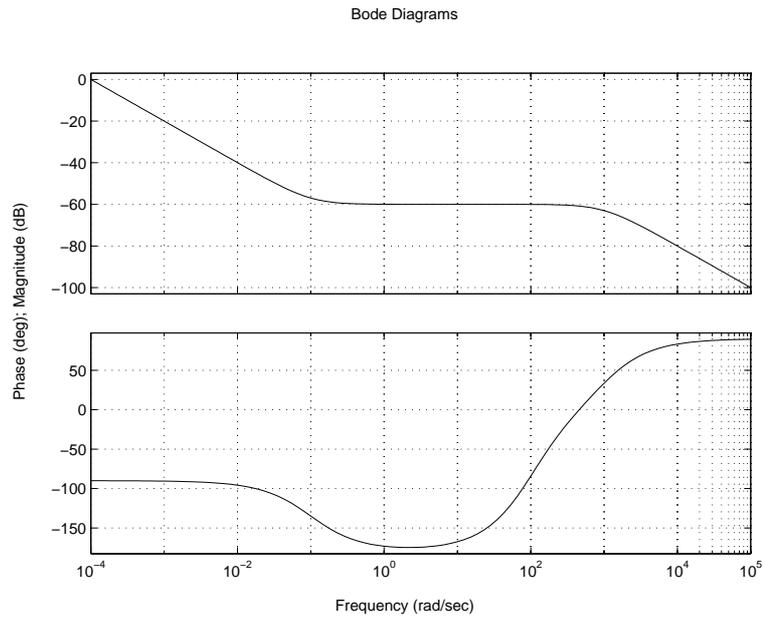


FIG. 5.13 – Diagramme de Bode d’une fonction de transfert à déterminer

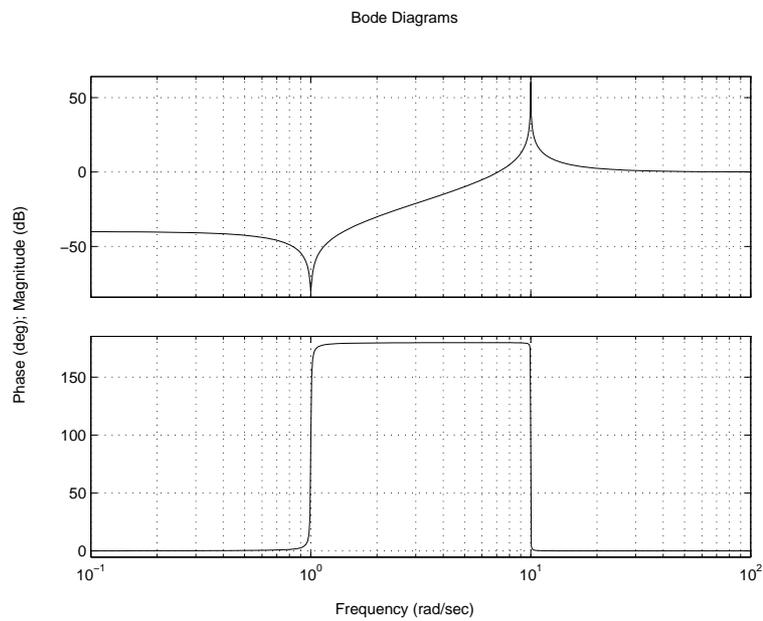


FIG. 5.14 – Diagramme de Bode d’une fonction de transfert à déterminer

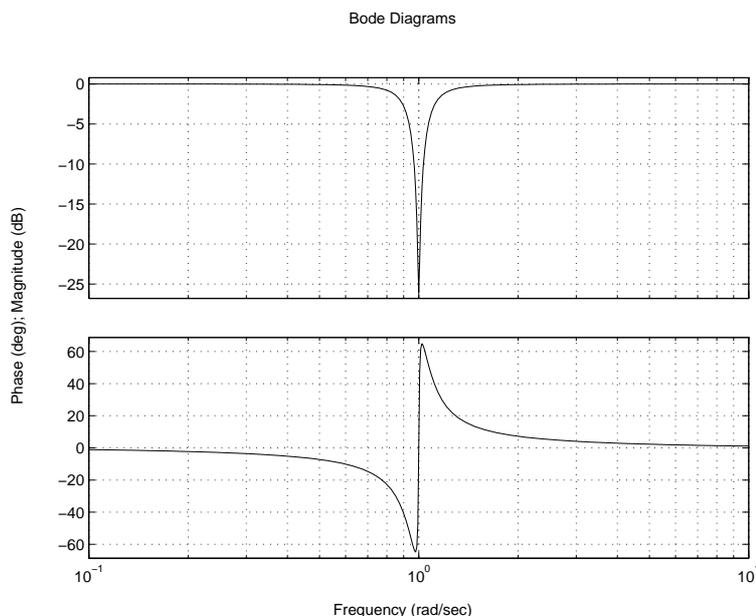


FIG. 5.15 – Diagramme de Bode d’une fonction de transfert à déterminer

Ex. 5 Evaluer la fonction de transfert associée au diagramme de Bode représenté figure 5.15.

5.3.3 Solution des exercices

Ex. 2 $\frac{0,1p-1}{0,1p+1}$

Ex. 3 $10^{-4} \frac{(-10p+1)(0,01p+1)}{p(-0,01p+1)(-0,001p+1)}$

Ex. 4 $10^{-2} \frac{p^2+0,1p+1}{\left(\frac{p}{10}\right)^2+0,01\frac{p}{10}+1}$

Ex. 5 $\frac{p^2+0,01p+1}{p^2+0,2p+1}$

5.4 Synthèse de correcteurs numériques par les méthodes de synthèse continues

Dans de nombreux cas, le problème de commande consiste à développer un correcteur discret qui sera programmé sur un calculateur numérique afin de commander un procédé continu via un convertisseur analogique/numérique (pour les mesures) et un convertisseur numérique/analogique (pour les commandes à appliquer) (voir figure 5.16). Il est à noter que les méthodes efficaces d’Automatique se concentrent généralement sur deux problèmes :

1. synthèse d’un correcteur discret pour un procédé discret (approche “tout discret”);
2. synthèse d’un correcteur continu pour un procédé continu (approche “tout continu”).

Ces deux approches ne traitent donc pas du vrai problème qui est (dans un nombre important de cas) la commande d’un système continu par un correcteur numérique. Cela est dû au fait que le vrai problème est actuellement un problème ouvert.

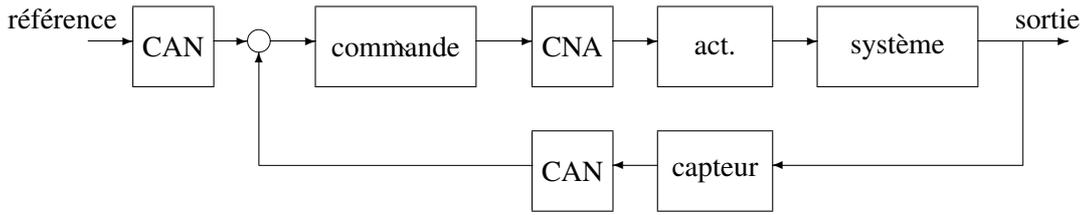


FIG. 5.16 – Problème de l’asservissement d’un système continu par un correcteur numérique

De plus, les méthodes de synthèse de lois de commande reposent sur l’utilisation d’un modèle. Dans le cas où celui-ci est obtenu par identification, il est en général discret et dans le cas où il est obtenu par application des lois de la physique, il est en général continu.

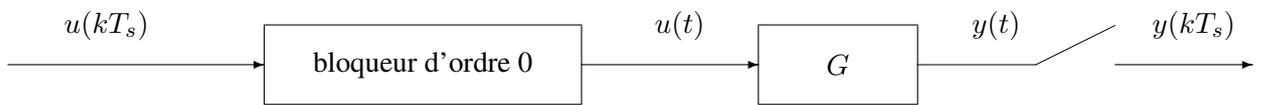


FIG. 5.17 – Échantillonnage d’un système continu

Par contre, l’application des méthodes d’automatique fréquentielle nécessite un modèle continu et mène à un correcteur analogique (fonction de transfert continue) ce qui ne permet pas de répondre à notre problème. Une première façon de procéder est de mettre au point sur le modèle continu un correcteur continu puis de l’approcher par une fonction de transfert discrète. L’inconvénient d’une telle approche est de ne pas prendre en compte de façon directe lors de l’étape de synthèse du correcteur le fait que le système sera échantillonné bloqué. Le correcteur numérique obtenu peut présenter des performances dégradées par rapport au correcteur analogique de départ. Par suite, même dans le cas où le modèle du procédé est continu, il est important de travailler sur un modèle échantillonné bloqué.

Une façon de contourner le problème est de se demander s’il n’est pas possible de transformer un modèle discret en un modèle *équivalente* ayant l’aspect d’un modèle continu. Ce dernier sera appelé dans la suite “modèle continu équivalent”. Par équivalent, il faut comprendre que :

1. le modèle continu équivalent est stable si et seulement si le modèle discret l’est ;
2. les réponses fréquentielles des deux modèles coïncident au moins en basses pulsations.

Enfin, le modèle continu équivalent aura l’aspect d’un modèle continu s’il peut s’écrire comme une fonction rationnelle à coefficients réels d’un variable complexe notée w . Ici, w joue le rôle de la variable de Laplace p d’un “vrai” transfert continu.

La transformation qui accomplit cela est la *transformation bilinéaire* ou *transformation de Tustin*. Elle consiste à remplacer dans la fonction de transfert discrète la variable z par une expression rationnelle en w :

$$z = \frac{1 + \frac{T_s}{2}w}{1 - \frac{T_s}{2}w}$$

La fonction de transfert (pseudo) continue sera obtenue en remplaçant dans la fonction de transfert discrète z par cette expression en fonction de w . Le transfert fréquentiel correspondant est obtenu en remplaçant w

par $j\nu$ où ν est l'analogue de la pulsation ω . Elles sont reliées par :

$$\nu = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega T_s}{2}.$$

Comme en basses pulsations, $\nu \simeq \omega$ (voir figure 5.18), les réponses fréquentielles seront proches en basses pulsations. Par contre, les réponses diffèrent en hautes pulsations. A la valeur $\omega = \frac{\pi}{T_s}$ correspond la valeur $\nu = +\infty$.

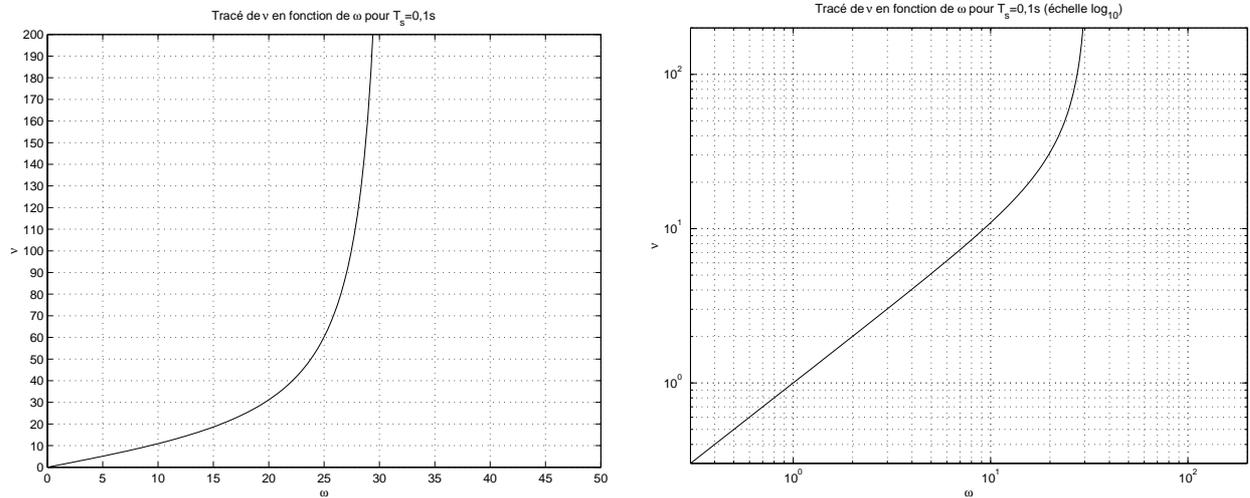


FIG. 5.18 – Tracé de $\nu = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega T_s}{2}$ (échelles logarithmique à droite)

Sous Matlab, la fonction `c2d`, avec l'option 'tustin' permet de réaliser une telle transformation.

Exemple Soit le système continu défini par le modèle :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Avec une période d'échantillonnage $T_s = 0,1s$, le modèle discret correspondant à l'échantillonné-bloqué obtenu par `c2d` est alors :

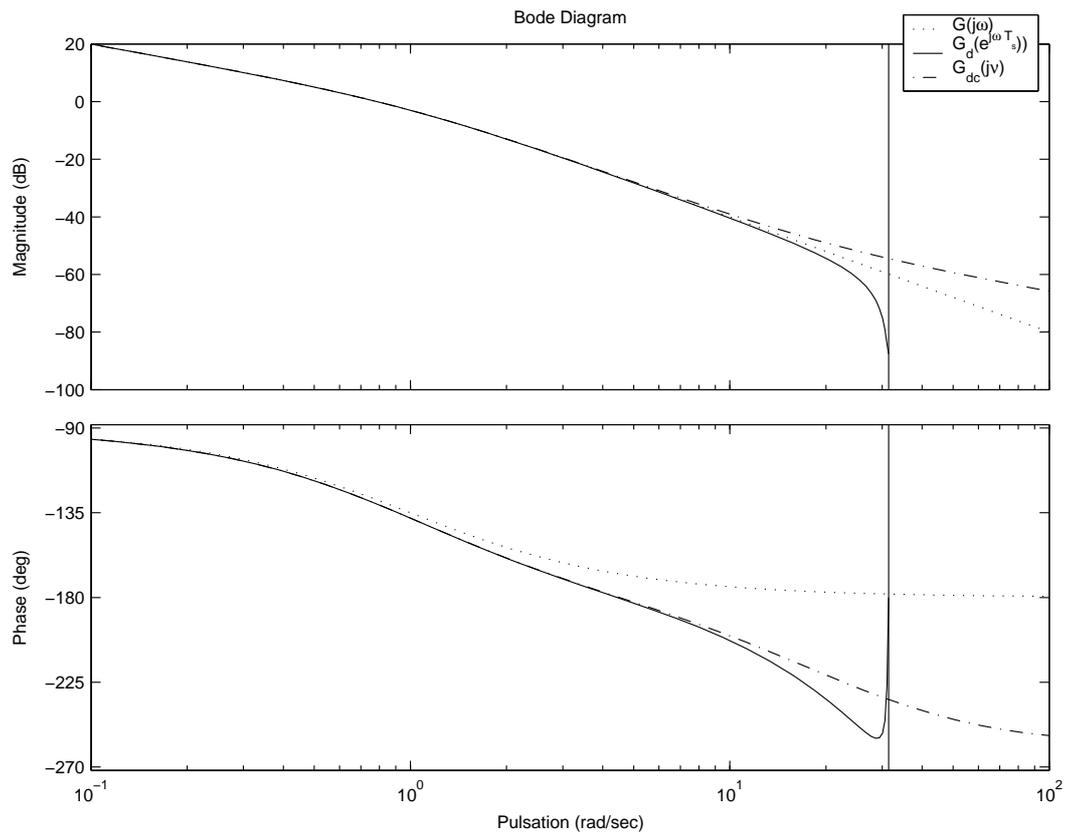
$$G_d(z) = \frac{0,0048374(z+0,9672)}{(z-1)(z-0.9048)}.$$

Par application de la transformation bilinéaire, on obtient le modèle continu équivalent au modèle discret :

$$G_{dc}(w) = \frac{-4.1625 \times 10^{-5}(w+1200)(w-20)}{w(w+0.9992)}.$$

On retrouve bien un pôle stable comme dans le modèle discret. Noter que G et G_{dc} n'ont pas la même expression ! Les réponses fréquentielles de G , G_d et G_{dc} sont représentés figure 5.19. Voir aussi la figure 5.20.

Mise en œuvre pour la synthèse de correcteurs numériques Cette transformation va être utilisée pour synthétiser un correcteur discret en utilisant les méthodes de synthèse continue de la façon suivante. Dans le cas où le modèle du système à commander est continu, le modèle discret correspondant au système échantillonné/bloqué est calculé de façon à disposer d'un modèle prenant en compte l'échantillonnage et le blocage (commande Matlab `c2d`). A partir de ce modèle discret un modèle continu équivalent est obtenu (commande Matlab `d2c`). En se basant sur ce modèle, un correcteur "continu" (équivalent à un correcteur discret) peut être mis au point par des méthodes de synthèse continue. Le correcteur numérique

FIG. 5.19 – Réponses fréquentielles de G , G_d et G_{dc}

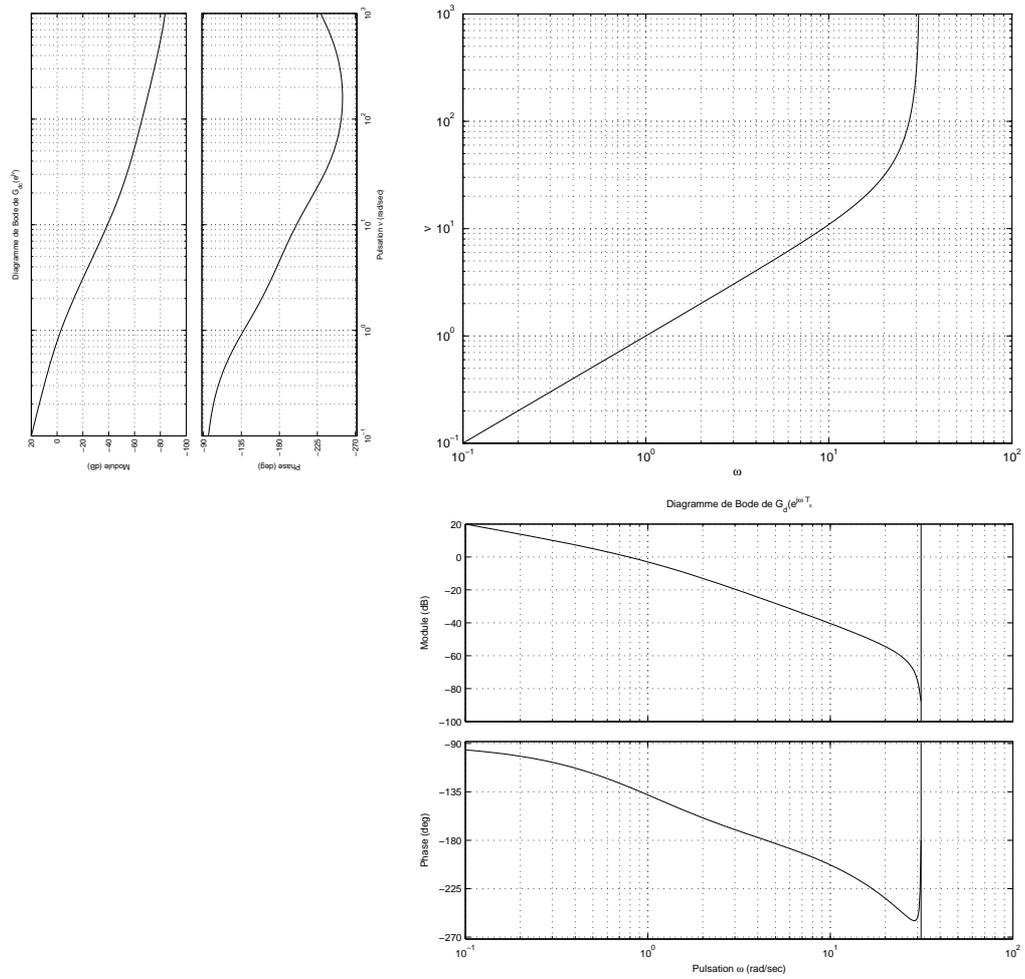


FIG. 5.20 – En bas à droite, diagramme de Bode de G_d , en haut à droite transformation appliquée à l'axe des pulsation pour obtenir le diagramme de Bode de G_{dc} en haut à gauche

correspondant est alors obtenu par la transformation inverse (commande Matlab `c2d1`) (voir la figure 5.21).

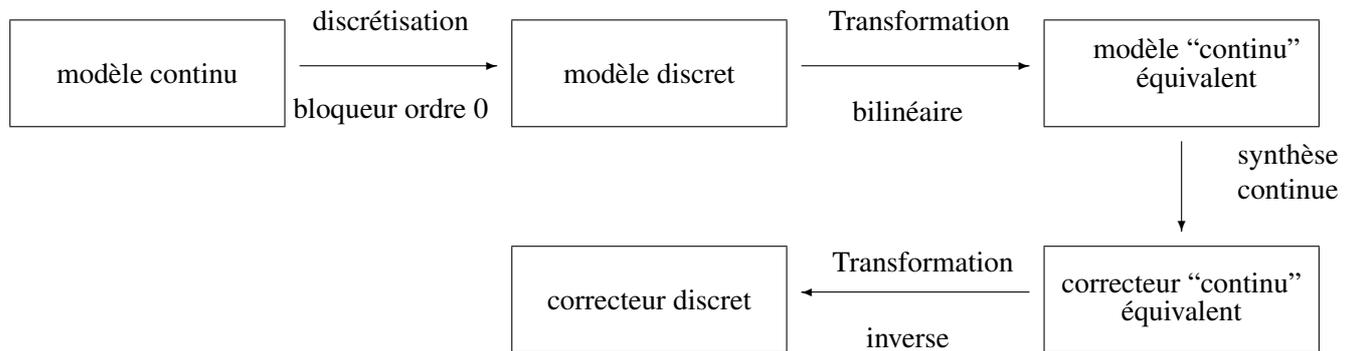


FIG. 5.21 – Synthèse continue de la commande discrète d'un système continu

5.5 Différentielle logarithmique

Différentielle logarithmique On appelle différentielle logarithmique d'un variable y la quantité :

$$\frac{d y}{y}$$

Elle correspond à la différentielle de la variable $\ln(y)$. Les propriétés sont :

$$\frac{d x y}{x y} = \frac{d x}{x} + \frac{d y}{y}, \quad \frac{d \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} = \frac{d x}{x} - \frac{d y}{y} \quad \text{et} \quad d f(x) = f'(x) dx$$

5.6 Notion de pôles dominants

Exemple Soit la fonction de transfert :

$$G_c(p) = \frac{1}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}$$

avec $\tau_1 \gg \tau_2$. Les deux pôles $-\frac{1}{\tau_1}$ et $-\frac{1}{\tau_2}$ peuvent être représentés dans le plan complexe (voir figure 5.22). On peut la décomposer comme la somme de deux premiers ordres :

$$G_c(p) = \frac{\tau_1}{(\tau_1 - \tau_2)} \frac{1}{(\tau_1 p + 1)} - \frac{\tau_2}{(\tau_1 - \tau_2)} \frac{1}{(\tau_2 p + 1)}$$

La réponse indicielle de $G_c(p)$ sera donc la somme de la réponse indicielle de

- $\frac{\tau_1}{(\tau_1 - \tau_2)} \frac{1}{(\tau_1 p + 1)}$ comme $\tau_1 \gg \tau_2$, sa réponse indicielle est plus lente que la réponse indicielle de $\frac{-\tau_2}{(\tau_1 - \tau_2)} \frac{1}{(\tau_1 p + 1)}$
- $\frac{-\tau_2}{(\tau_1 - \tau_2)} \frac{1}{(\tau_2 p + 1)}$ comme $\tau_1 \gg \tau_2$, sa réponse indicielle est plus rapide que la réponse indicielle de la fonction de transfert précédente. De plus sa valeur finale sera plus faible.

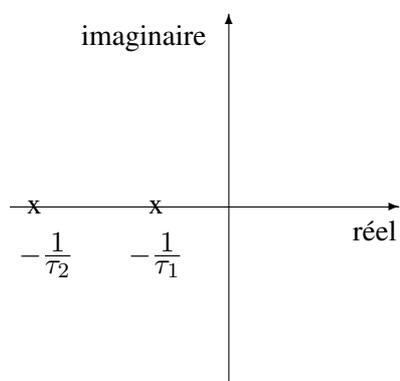
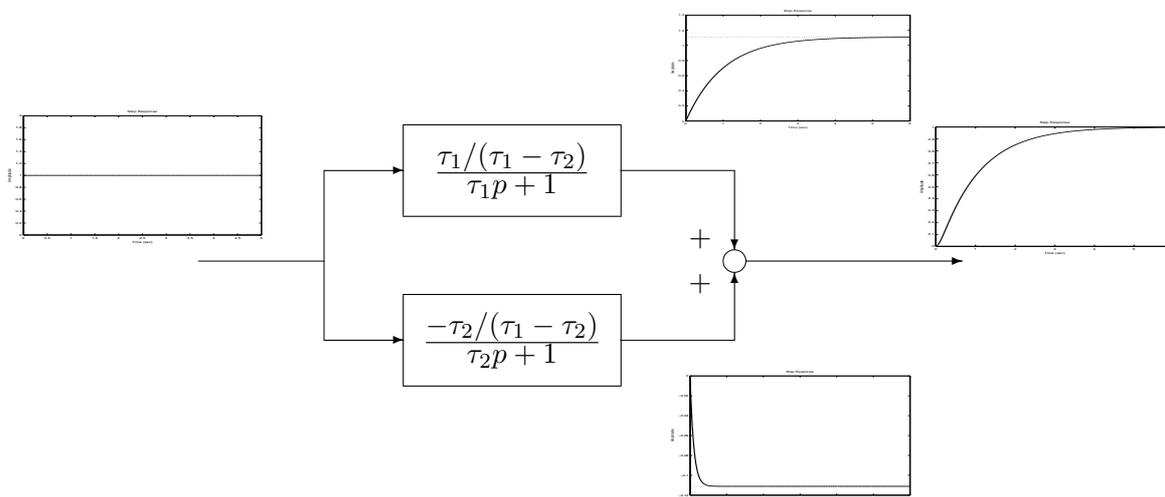
FIG. 5.22 – Pôles de $G_c(p)$ 

FIG. 5.23 – Réponse indicielle par décomposition parallèle

Par suite, le temps de réponse global sera donné par la première fonction de transfert qui est la plus lente (voir la figure 5.23), c'est-à-dire par le pôle qui est le plus proche du point 0. Par suite, la dynamique de $G_c(p)$ est donnée par le (ou les) pôles les plus proches de 0 appelés *pôles dominants*.

¹Avec la bonne option