
Automatique fréquentielle : des critères graphiques à l'optimisation LMI

G. Scorletti^{*}, V. Fromion[‡] et S. Font[†]

** LAP-ISMRA, Université de Caen, 6 Bd. du Maréchal Juin, 14050, Caen, France.
e-mail : scorletti@greyc.ismra.fr*

*‡ LASB, INRA-Montpellier, 2, place P. Viala, 34060 Montpellier, France.
e-mail : fromion@ensam.inra.fr*

*† Service Automatique, Supélec, Plateau du Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France
e-mail : font@supelec.fr*

RÉSUMÉ. XXX

ABSTRACT. XXX

MOTS-CLÉS : Automatique fréquentielle, robustesse, commande H_∞ , μ analyse, optimisation LMI, cahier des charges, analyse non linéaire, norme incrémentale, séquencement de gains

KEYWORDS: Robustness, H_∞ control, μ analysis, LMI optimization, nonlinear analysis, incremental norm, gain scheduling

2 Nom de la revue ou conférence (à définir par \submitted ou \toappear)

1. Introduction

Les applications industrielles sont plus que jamais au coeur des enjeux actuels de l'automatique. Ce renouveau est lié à l'augmentation constante des exigences de qualité et de performance des systèmes asservis et l'exigence de plus en plus forte du "meilleur compromis".

Les cahiers des charges d'asservissements industriels sont de plus en plus complexes et serrés. Tout cela a pour conséquence dans bien des cas d'invalider l'hypothèse de linéarité : les effets non linéaires des systèmes ne sont plus négligeables, ou même s'ils le sont, des correcteurs non linéaires sont souvent nécessaires pour satisfaire aux exigences de performance. Enfin, il faut prendre en compte dans le processus de synthèse l'évolution ou l'ajustement permanent du cahier des charges.

Face à cela, l'Automatique fréquentielle apparaît comme un outil incontournable, même si les outils classiques, généralement basés sur des critères graphiques et développés des années 30 aux années 60 ne sont pas adaptés pour traiter de problèmes aussi complexes.

L'automatique fréquentielle a subi une profonde mutation depuis le début des années 80, ce qui se traduit par une activité de recherche très dynamique dans ce domaine. Le moteur de cette mutation est l'optimisation. L'optimisation a remplacé l'utilisation des critères graphiques qui ont permis, par leur simplicité, de populariser l'automatique fréquentielle.

L'idée essentielle de cette nouvelle approche, et sans aucun conteste son succès actuel, est avant tout liée au fait qu'elle s'appuie sur les principes qui ont fait le succès de l'approche classique tout en l'étendant à l'ensemble des classes de systèmes usuellement considérés par les ingénieurs.

L'objectif de ce papier est de montrer que, sous la forme de logiciels de Conception assistée par ordinateurs, des outils basés principalement sur l'optimisation, étendant largement les critères graphiques tout en gardant leur simplicité, sont en cours de développement. Leur ambition est d'aborder les enjeux industriels actuels.

2. Automatique fréquentielle : un peu d'histoire

Face à ces défis, l'Automatique fréquentielle apparaît comme un outil incontournable. L'automatique fréquentielle est une branche importante de l'Automatique en tant que science de l'ingénieur, qui est très ancienne puisque ces origines remontent aux années 30.

Automatique fréquentielle classique Des années 30 aux années 50, se développa l'automatique fréquentielle "classique" : on peut citer, par exemple, les travaux de Black [BLA 34], Nyquist [NYQ 32], Bode [BOD 45], Horowitz [HOR 63]. Cela correspond grossièrement à ce qui est couramment enseigné lors de la formation initiale des ingénieurs. Ceci est assez paradoxal quand on sait qu'elle se base sur la théorie des fonctions d'une variable complexe, une théorie très profonde et subtile qu'on ne peut pas demander aux ingénieurs de maîtriser. En fait, le succès de l'automatique fréquentielle est lié au développement d'outils de mise en œuvre que l'on peut appliquer sans maîtriser la théorie des fonctions d'une variable complexe. Il s'agit d'outils utilisant des critères graphiques basés sur des représentations fréquentielles (diagrammes de Bode, Black, Nyquist) et nécessitant la manipulation de schéma-blocs (préférés à la manipulation d'équations). Le réglage d'asservissement de systèmes, en général monovariabiles, se fait "à la main" avec un fort recours au savoir faire. Dès les origines, les avantages de la boucle de rétroaction (rejet de perturbations non mesurées et robustesse) ont mis en avant.

Approche entrée/sortie Très tôt (années 60/70) l'extension de l'analyse de la stabilité des systèmes bouclés développée en automatique fréquentielle, des systèmes linéaires stationnaires aux systèmes non linéaires non stationnaires est entreprise : on peut citer les travaux de Sandberg [SAN 65], Zames [ZAM 60, ZAM 66], Safonov [SAF 80]. Elle est basée sur la théorie des opérateurs. Face au succès des outils de l'automatique classique, la motivation est d'offrir aux ingénieurs des outils équivalents mais pour les systèmes non linéaires. Beaucoup de résultats d'ordre en général théorique sont obtenus, avec, dans quelques cas, des outils (toujours graphiques) accessibles à l'ingénieur : voir, par exemple, le critère du cercle ou le critère de Popov. Cet axe de recherche décline à la fin des années 70, peut-être à cause de la difficulté à obtenir des outils accessibles alors que c'était une des motivations de départ.

Théorie de la robustesse Les années 80 ont vu émerger une théorie de la robustesse des systèmes linéaires stationnaires à partir des résultats de l'analyse des systèmes non linéaires par l'approche entrée sortie (comme par exemple le théorème du petit gain ou le lemme de Kalman Yakubovich Popov). Evoquée par Zames en 1966 [ZAM 66] : "*One of the broader implications of the theory here concerns the use of functional analysis for the study of poorly defined systems. It seems possible, from only coarse information about a system, and perhaps even without knowing details of internal structure, to make useful assessments of quantitative behavior.*" (cité par Safonov [SAF 80]), il faudra attendre la fin des années 70 et le début des années 80 pour que cette idée soit véritablement exploitée (Safonov [SAF 80]). L'accent est alors mis sur l'analyse de la robustesse des systèmes linéaires stationnaires multivariabiles [ZAM 81, DOY 81, SAF 81b] donnant naissance à la μ analyse [DOY 82b] (k_m analysis [SAF 82]). Cette avancée s'est basée sur un cadre mathématique rigoureux. Ce qui est remarquable, c'est qu'au delà de la formalisation des spécifications de robustesse, ce cadre propose aussi une formalisation pertinente des spécifications de performance (proposée par Zames [ZAM 81]), formalisation respectant les concepts de

base de l'automatique fréquentielle classique¹. C'est cette formalisation qui est à l'origine de l'approche H_∞ . Elle doit son nom à l'utilisation de la norme H_∞ (pondérée). Dans cette approche, la synthèse de la loi de commande est obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation ouvrant la voie à l'utilisation d'outils de conception assistée par ordinateur en automatique fréquentielle, en complément (voire parfois en remplacement pour des problèmes pratiquement inaccessibles aux outils classiques) du "réglage à la main" de l'automatique classique. Dans cette approche, le cahier des charges est placé au centre : comment régler l'asservissement d'un système multivariable de façon à remplir un cahier des charges ? quels sont les compromis entre les différentes spécifications ?

Optimisation convexe et informatique Un outil de conception assistée ne peut être intéressant que dans la mesure où l'algorithme de synthèse est efficace. Au début des années 90, l'optimisation convexe, notamment l'optimisation convexe sous contraintes LMIs (Linear Matrix Inequality), s'est fortement développée du fait de l'intérêt de ces problèmes d'optimisation en Automatique [BOY 94], des forts progrès au niveau de leur résolution [NES 93] et de la puissance de calcul de plus en plus importante pour un coût de plus en plus faible. Nous verrons dans le fil de ce papier que cette classe de problèmes d'optimisation occupe une place centrale dans les avancées récentes (postérieures aux années 80) de l'automatique fréquentielle, comparable à celle des critères graphiques dans l'automatique fréquentielle classique. Le premier apport important de l'informatique à l'automatique fréquentielle a été la possibilité d'obtenir rapidement des tracés graphiques. Avec l'optimisation convexe, apparaît le second progrès important : synthèse rapide de lois de commande en mettant à profit la puissance de calcul disponible.

Approche entrée/sortie : le retour Grâce à l'émergence de l'optimisation LMI, on est devenu capable de mettre en œuvre un grand nombre des résultats de l'analyse entrée/sortie de la stabilité des systèmes non linéaires. Par suite, les travaux des années 60/70 ont été repris vers le milieu des années 90 (voir par exemple des travaux de Megretsky [MEG 97]).

Commande robuste non linéaire devant le succès à la fois sur les aspects théoriques et pratiques de la commande robuste, une extension aux systèmes non linéaires a été proposée [FRO 95, FRO 99, FRO 01]. La démarche adoptée est très similaire à celle de la commande robuste linéaire. Notamment, une formalisation rigoureuse du cahier des charges respectant les concepts de bases de l'automatique fréquentielle classique a été proposée : elle est basée sur l'utilisation de la norme incrémentale (pondérée), proposée comme extension de la norme H_∞ pondérée.

3. CAO en Automatique fréquentielle : la commande H_∞ comme exemple

A la base de la commande H_∞ se trouve l'article de Zames de 1981 [ZAM 81].

1. La limitation fondamentale de l'automatique fréquentielle classique est liée à l'absence d'une formalisation rigoureuse du cahier des charges

Dans cette section, nous allons illustrer le fait que la commande H_∞ est la principale méthode de Conception Assistée par Ordinateur de l'Automatique Fréquentielle. On peut la qualifier de méthode :

1) néo classique : les concepts sous jacents sont ceux de l'automatique fréquentielle classique. La principale différence est que la commande H_∞ repose sur une formalisation mathématique rigoureuse du problème.

2) post moderne : les outils utilisés sont basés sur les outils de l'approche moderne (représentation d'état, LQG,...).

Nous allons d'abord illustrer le lien entre la synthèse H_∞ et la synthèse fréquentielle classique. La présentation adoptée est très informelle : l'objectif est de discuter simplement des problèmes plus que de les présenter rigoureusement. Une telle présentation semble nécessaire du fait, par exemple, que l'intérêt de la synthèse H_∞ basée sur le modelage de fonctions de transfert en boucle fermée n'est pas toujours largement reconnu (voir par exemple [ÅST 00]). Pour des documents introductifs à la synthèse H_∞ , voir par exemple les cours [DUC 94, DUC 99, DAM 01, SCO 01], le livre [MAC 89, SKO 96] ainsi que la thèse [FON 95] ; pour des exemples de mise en œuvre, voir par exemple [FON 94, FER 96, FER 99].

La figure 1 illustre le processus de conception de lois de commande en automatique fréquentielle classique et en Automatique fréquentielle néo classique (commande H_∞). Il est commenté sur un exemple.

3.1. CAO en automatique fréquentielle à travers un exemple

On considère le système en boucle fermée représenté figure 2. On désire mettre au point un correcteur monovariante K qui assure une certaine rapidité pour la réponse $y(t)$ à un échelon de référence $r(t)$, avec une limitation du dépassement et une erreur statique nulle (voir la figure 3).

Dans l'approche fréquentielle, la première étape (*étape "Gabarits sur les modules des transferts BF" (Boucle Fermée) sur la figure 1*) est de traduire (approximativement) cette spécification en contraintes sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée (voir la figure 4) :

1) $S(j\omega)$ qui relie $r(j\omega)$ à l'erreur de suivi de trajectoire $\epsilon(j\omega)$: pour des références en échelon, $|S(j\omega)|$ doit présenter une pente de $+20dB/decades$ en basses pulsations avec des gains suffisamment faibles pour assurer la rapidité et une erreur statique faible ;

2) $T(j\omega)$ qui relie $r(j\omega)$ à la sortie $y(j\omega)$: la valeur maximale de $|T(j\omega)|$ peut être limitée pour essayer de contraindre le dépassement.

Enfin pour assurer une bonne robustesse vis-à-vis d'incertitudes multiplicatives inverses (marge de module), la valeur maximale de $|S(j\omega)|$ doit être contrainte.

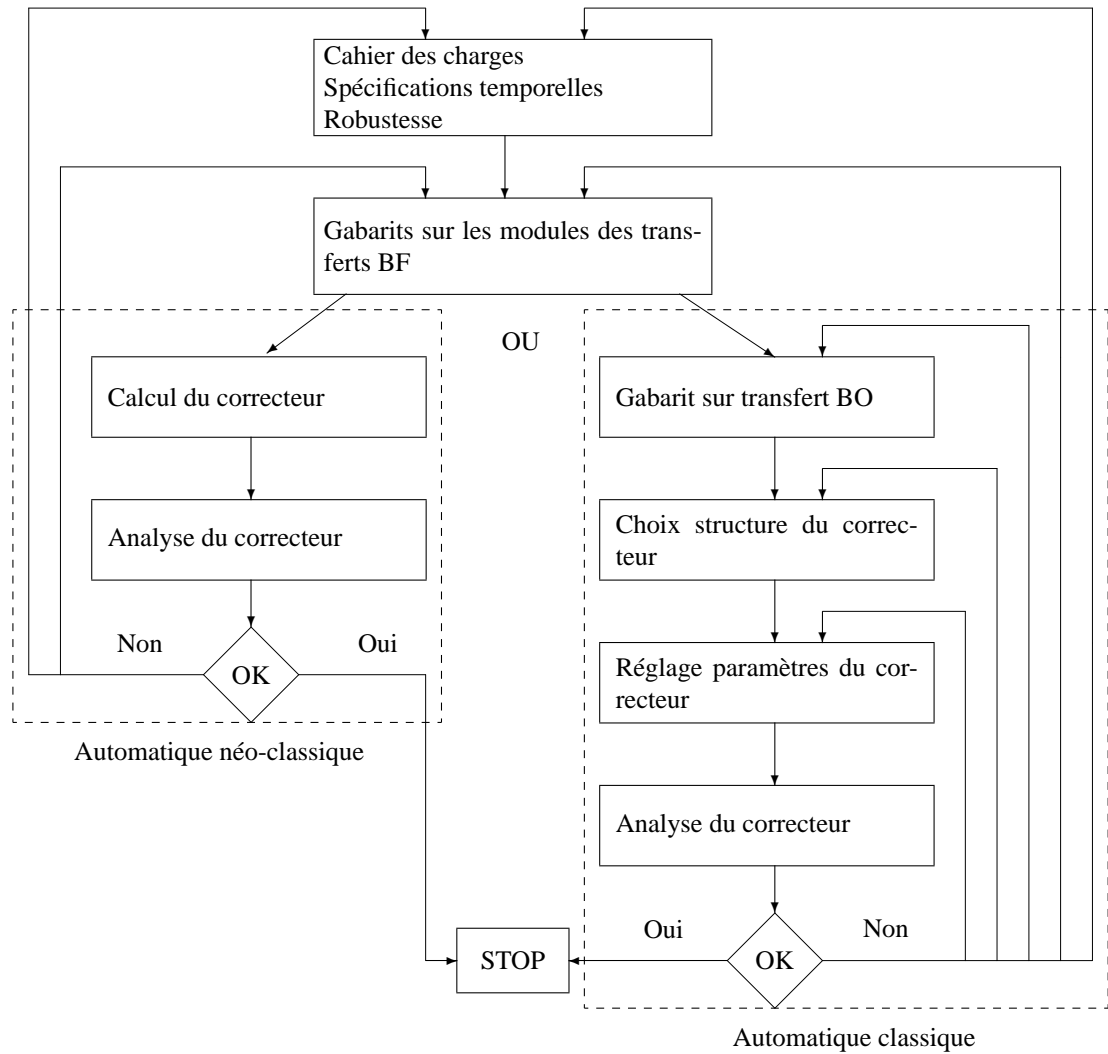


Figure 1. Liens entre Automatique fréquentielle classique et néo classique (H_∞)

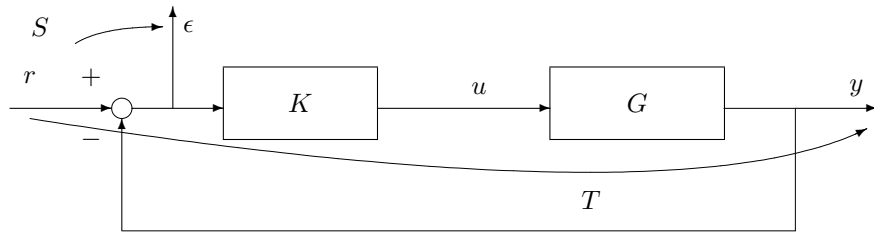


Figure 2. *Système en boucle fermée*

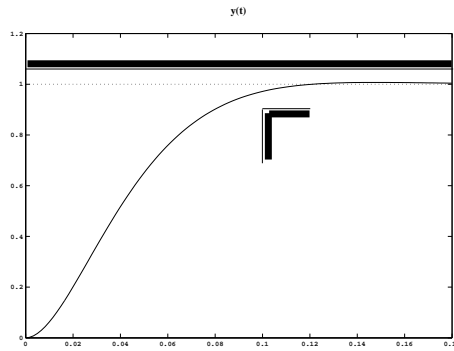


Figure 3. *Réponse à un échelon de référence r d'amplitude 1 désirée*

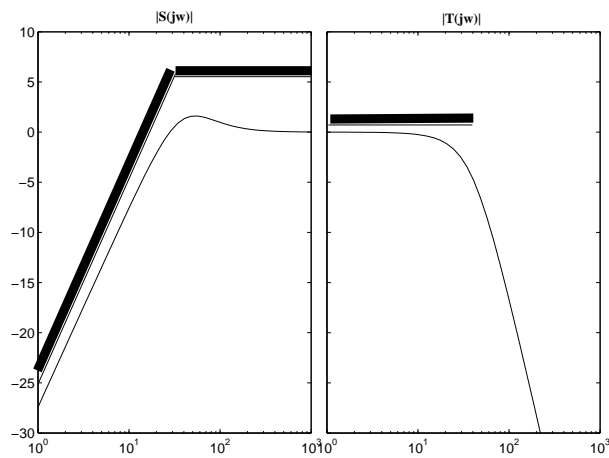


Figure 4. *Tracé de $|S(j\omega)|$ et de $|T(j\omega)|$*

Fonction	Basses pulsations	Hautes pulsations
$ G(j\omega)K(j\omega) $	$\gg 1$	$\ll 1$
$ S(j\omega) $	$\sim \frac{1}{ G(j\omega)\mathbf{K}(j\omega) }$	~ 1
$ G(j\omega)S(j\omega) $	$\sim \frac{1}{ \mathbf{K}(j\omega) }$	$\sim G(j\omega) $
$ K(j\omega)S(j\omega) $	$\sim \frac{1}{ G(j\omega) }$	$\sim \mathbf{K}(j\omega) $
$ T(j\omega) $	~ 1	$\sim G(j\omega)\mathbf{K}(j\omega) $

Tableau 1. Liens entre fonctions BO et fonctions BF quand $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$ pour les basses pulsations et $|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1$ pour les hautes pulsations

Ainsi, les spécifications du cahier des charges se formalisent naturellement par des contraintes portant sur les modules des fonctions de transfert du système en boucle fermée.

Notre objectif est ici de rechercher un correcteur $K(p)$ qui satisfasse le cahier des charges. Les méthodes d'automatique fréquentielle classique reposent sur une recherche manuelle de la loi de commande $K(p)$. Comme ces fonctions dépendent non linéairement du correcteur $K(p)$ que l'on cherche à mettre au point :

$$S(p) = \frac{1}{1+G(p)K(p)} \quad \text{et} \quad T(p) = \frac{G(p)K(p)}{1+G(p)K(p)}$$

une recherche "manuelle" de $K(p)$ de façon à satisfaire ces contraintes peut être très complexe, même dans le cas d'une structure simple pour le correcteur $K(p)$.

L'idée fondamentale des méthodes de synthèse de lois de commande en automatique fréquentielle classique consiste à transformer ces contraintes portant sur des fonctions de transfert du système en boucle fermée en contraintes portant sur la fonction de transfert du système en boucle ouverte $L(p) = G(p)K(p)$, en utilisant les liens qui existent entre les fonctions de transfert en boucle fermée et la fonction de transfert en boucle ouverte². L'intérêt est que $L(p)$ est une fonction linéaire de $K(p)$.

L'étape suivante du processus de conception est donc de rechercher les contraintes que doit satisfaire la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$

2. Ces contraintes sur la fonction de transfert en boucle ouverte sont traduites sur une ou plusieurs représentations graphiques (diagrammes de Bode, de Nyquist et/ou de Black Nichols). C'est l'utilisation de ces représentations graphiques qui rend ces méthodes extrêmement attractives.

pour que le cahier des charges soit rempli (*étape "Gabarit sur transfert BO" (Boucle Ouverte) sur la figure 1*) (voir la figure 5).

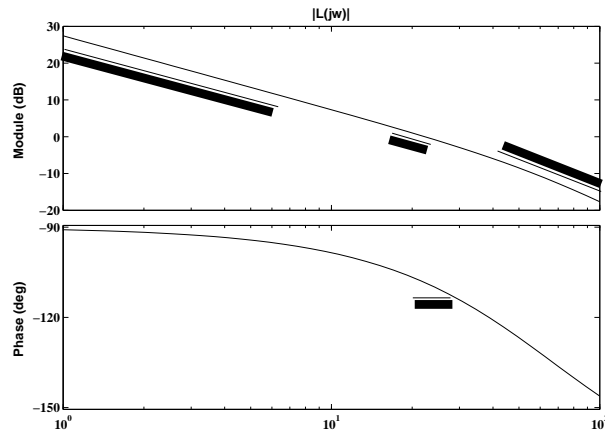


Figure 5. Tracé du $|L(j\omega)|$

Une fois que celles-ci sont déterminées, le correcteur $K(j\omega)$ doit être recherché manuellement de façon à ce que $L(j\omega)$ les satisfassent. La tâche est facilitée par le fait que $L(j\omega)$ est une fonction linéaire de $K(j\omega)$. Cette recherche se fait à l'aide du diagramme de Bode, du diagramme de Black, etc.. de la fonction de transfert $L(j\omega)$.

Pour cela, il est nécessaire de choisir une structure adaptée pour la loi de commande (*étape "Choix de la structure du correcteur" sur la figure 1*) comme par exemple :

- 1) Proportionnel Integral

$$K(p) = k^c \frac{p + a}{p}$$

- 2) Proportionnel Integral Avance de Phase

$$K(p) = k^c \frac{p + a}{p} \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1}$$

- 3) etc.

La structure étant déterminée, les paramètres du correcteur doivent être réglés de façon à ce que la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$ remplisse le cahier des charges (*étape "Réglage des paramètres du correcteur" sur la figure 1*), ce qui revient, par exemple,

10 Nom de la revue ou conférence (à définir par \submitted ou \toappear)

- 1) pour le Proportionnel Integral, à choisir a et k^c ;
- 2) pour le Proportionnel Integral Avance de Phase, à choisir a , k^c , τ_1 et τ_2 .

Il est enfin impératif de vérifier si le correcteur obtenu remplit bien le cahier des charges initial (*étape “Analyse du correcteur” sur la figure 1*). S’il n’est pas vérifié alors soit il n’existe pas de correcteur remplissant le cahier des charges, soit un mauvais choix a été fait à l’une des étapes du processus de conception :

- 1) mauvaise traduction des spécifications temporelles du cahier des charges en contraintes sur les fonctions de transfert en boucle fermée³ ;
- 2) mauvaise traduction des contraintes sur les fonctions de transfert en boucle fermée en contraintes sur la fonction de transfert en boucle ouverte⁴ ;
- 3) mauvais choix de structure pour le correcteur ;
- 4) mauvais choix de paramètres pour le correcteur.

Vue l’abondance des possibilités, sans un bon savoir-faire et de la patience, il est donc difficile de clairement identifier pourquoi le correcteur obtenu ne remplit pas le cahier des charges, où le processus de conception doit être repris et enfin comment il doit être modifié.

La synthèse H_∞ est née de la recherche d’un outil qui, à partir des contraintes sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée, recherche directement s’il existe un correcteur $K(p)$ telle que les fonctions de transfert en boucle fermée satisfassent les contraintes sur leur module et, si oui, fournit un tel correcteur (*étape “Calcul du correcteur” sur la figure 1*). Avec un tel outil, si l’algorithme ne fournit pas de correcteur, c’est que soit il n’existe pas de correcteur remplissant le cahier des charges, soit que la traduction des spécifications temporelles du cahier des charges en contraintes sur les fonctions de transfert en boucle fermée est mauvaise⁵. Il en résulte, d’une part, une considérable simplification du processus de conception et, d’autre part, la possibilité de réellement tester l’existence d’un correcteur vérifiant le cahier des charges.

Comment cela pourrait-il être possible ? Si on est capable de représenter les gabarits fréquentiels sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée, $|S(j\omega)|$ et $|T(j\omega)|$ par l’inverse du module de fonctions de transfert $|W_1(j\omega)|$ et $|W_3(j\omega)|$, appelées *pondérations*, (voir figure 6) alors la vérification des gabarits s’écrit :

$$\forall \omega, \quad |S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \quad \text{et} \quad \forall \omega, \quad |T(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_3(j\omega)|}$$

3. Rappelons que le passage des unes aux autres est assez approximatif.

4. Idem.

5. Idem.

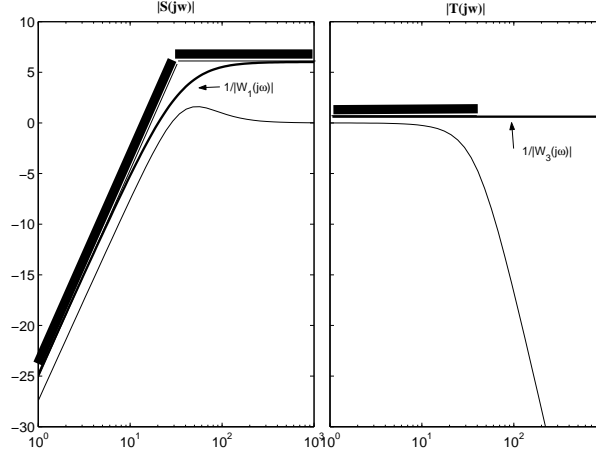


Figure 6. Tracé de $|S(j\omega)|$ et de $|T(j\omega)|$

c'est-à-dire, en introduisant la définition de la **norme H_∞ d'une fonction de transfert stable $F(p)$** qui est donnée par⁶ :

$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} |F(j\omega)| \quad [1]$$

on a

$$\|W_1 S\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \|W_3 T\|_\infty \leq 1. \quad [2]$$

Chaque pondération contient le modèle des signaux appliqués à l'entrée de la fonction de transfert en boucle fermée et le modèle des signaux que l'on veut avoir à sa sortie. Par exemple, dans le cas de la fonction de sensibilité S , avec $\epsilon = Sr$, on peut définir l'ensemble des signaux r par la fonction de transfert W_r tel que :

$$\{r(j\omega) \text{ tel que } |r(j\omega)| \leq |W_r(j\omega)|\}. \quad [3]$$

et l'ensemble des signaux de sortie ϵ par la fonction de transfert W_ϵ telle que :

$$\left\{ \epsilon(j\omega) \text{ tel que } |\epsilon(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_\epsilon(j\omega)|} \right\}. \quad [4]$$

On aura alors $W_1 = W_\epsilon W_r$.

6. Dans le cas d'une matrice de fonctions de transfert, on a :

$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \sigma_{max}(F(j\omega))$$

où σ_{max} désigne la valeur singulière maximale.

Complexité	Taille n du problème				
	10	20	30	40	50
n^3	0,01 s	0,08 s	0,27 s	0,64 s	1,25 s
	10 s	1,33 mn	4,50 mn	10,67 mn	20,83 mn
2^n	0,01 s	10,24 s	2,91 h	124,3 jours	348,7 ans
	10 s	2,84 h	121,4 jours	348,7 ans	$3,49 \times 10^5$ ans

Tableau 2. Exemple de temps de calcul en fonction de la complexité et de la taille du problème (tiré de [DOY 95])

On a donc ici un critère mathématique (les conditions (2)) qui indique si le cahier des charges traduit par des contraintes fréquentielles est vérifié. Reste maintenant à trouver l'algorithme qui permet de tester s'il existe un correcteur K tel que le critère (2) soit satisfait et si oui de le calculer.

3.2. De la nécessité d'un algorithme "efficace"

Si l'on dispose d'un tel algorithme, le processus de conception de la loi de commande reste par nature itératif du fait du passage assez approximatif des spécifications temporelles du cahier des charges aux contraintes sur le module des fonctions de transfert en boucle fermée. Par suite, il est nécessaire de disposer d'un algorithme de calcul du correcteur efficace. Par efficace, il faut comprendre que l'algorithme se termine normalement en un temps raisonnable (généralement en un temps qui est une fonction polynomiale d'une grandeur caractéristique du problème de commande) sur un résultat déterminé. Par exemple, on désire rechercher une loi de commande pour un système d'ordre n par l'exécution d'un algorithme. Le temps que va mettre sa résolution sur un ordinateur est fonction de la taille n du système à commander. Les problèmes considérés comme faciles (faible complexité) seront ceux pour lesquels le temps de résolution est une fonction polynomiale de la taille du problème (par exemple une fonction en n^3), ceux qui seront considérés comme difficile seront ceux pour lesquels le temps de résolution est une fonction exponentielle de la taille du problème (par exemple une fonction en 2^n). Dans le tableau 2 sont indiqués les temps de calcul correspondant à différentes valeurs de n dans les deux cas. Il est clair que la résolution des problèmes difficiles mène rapidement à des temps de calcul rétrograde (par exemple supérieurs à plusieurs milliers d'années). Il est important de noter que la complexité d'un problème est intrinsèque, c'est-à-dire indépendante par exemple des évolutions technologiques des ordinateurs : l'augmentation de la rapidité de calcul des ordinateurs ne sera jamais suffisante pour mener à des temps de calcul réalistes.

3.3. Retour à l'exemple

On recherche donc une loi de commande $K(p)$ telle que et le système bouclé (voir figure 2) soit stable et que :

$$\|W_1 S\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \|W_3 T\|_\infty \leq 1. \quad [5]$$

ce qui peut se réécrire : trouver $K(p)$ telle que :

1) le système en boucle fermée est stable

$$2) \forall \omega, \quad \left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$$

$$3) \forall \omega, \quad \left| W_3(j\omega) \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$$

Les deux dernières conditions peuvent être vues comme un problème d'optimisation particulier appelé problème de faisabilité où la variable d'optimisation est la fonction de transfert $K(j\omega)$. Malheureusement, elles ne sont pas convexes en $K(j\omega)$.

3.4. Quelques notions d'optimisation

Un problème d'optimisation peut s'écrire sous la forme :

$$\min_{\xi \in \mathcal{C}} f(\xi) \quad [6]$$

où \mathcal{C} est l'ensemble des contraintes, ξ est la variables d'optimisation (ξ est de dimension finie quand $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$), la fonction f (avec $f(\xi) \in \mathbb{R}$) est l'objectif ou la fonction de coût. L'ensemble \mathcal{C} des contraintes peut être défini par un ensemble d'inégalités et d'égalités. Si leur nombre est fini et si ξ est de dimension finie alors on parle de problèmes d'optimisation de dimension finie. Un problème d'optimisation particulier (mais important) est le *problème de faisabilité* : trouver ξ , s'il existe, tel que $\xi \in \mathcal{C}$. En automatique, cela peut correspondre à rechercher un correcteur qui satisfasse les spécifications d'un cahier des charges.

Dans le cas général, la résolution par un algorithme est un problème "compliqué". Pourquoi ? Très grossièrement, à partir d'un point initial ξ_0 , les algorithmes efficaces disponibles recherchent un minimum local. Si la fonction f admet plusieurs minima, le résultat va dépendre du point initial ξ_0 . Un cas très intéressant est celui où il n'existe qu'un seul minimum local (minimum local = minimum global) : indépendamment du point initial, le minimum global sera alors atteint. Cette propriété est obtenue dans le

cas où f est une fonction convexe et où \mathcal{C} est convexe : on parle alors d'*optimisation convexe*.

Un certain nombre de classes de problèmes d'optimisation convexe de dimension finie admettent des algorithmes de résolution efficaces :

Programmation linéaire la fonction f est affine en ξ et \mathcal{C} est défini par un système d'équations et d'inégalités linéaires en ξ .

Programmation quadratique la fonction f est quadratique convexe en ξ et \mathcal{C} est défini par un système d'équations et d'inégalités linéaires en ξ .

Optimisation LMI la fonction f est affine en ξ et $\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T F(\xi)x > 0\}$ avec $F(\xi) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i$, où les F_i sont m matrices symétriques données de $\mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$. Cette contrainte est appelée *contrainte Inégalité Matricielle Affine* ou *contrainte LMI*⁷. Notation $F(\xi) > 0$. Le symbole > 0 signifie définie positive. Les problèmes d'optimisation convexe sur des contraintes LMI ne sont résolus numériquement de façon efficace que depuis le début des années 90 [NES 94, VAN 96]. Ceci est le résultat d'une avancée en optimisation convexe vers la fin des années quatre vingt. Des boîtes à outils ont été développées dans les logiciels généraux de calcul scientifique (voir par exemple sous Scilab [NIK 95] et sous Matlab [EI 95, GAH 95, LAB 02]) pour traiter cette classe de problèmes d'optimisation.

La figure 7 illustre les liens entre ces différents problèmes. Des trois classes de problèmes, la troisième est la plus générale : son intérêt fondamental pour la résolution des problèmes d'Automatique a été mis en avant au début des années 90 [BOY 94].

3.5. Retour à l'exemple

Le problème (5) se formule donc comme un problème de faisabilité, a priori non convexe. Pour mettre le problème sous une forme convexe, on utilise la paramétrisation de Youla (voir par exemple [MAC 89, BOY 91, COL 97, HBA 02]) qui définit l'ensemble de tous les correcteurs stabilisant un système G . Tout correcteur stabilisant s'écrit comme une transformation linéaire fractionnaire bien déterminée (c'est-à-dire ici une fonction rationnelle) en Q , fonction de transfert stable :

$$K(p) = (Y(p) - M(p)Q(p))(X(p) - N(p)Q(p))^{-1}$$

7. Les LMIs (Linear Matrix Inequality) sont en fait des AMIs (Affine Matrix Inequalities). Bien qu'impropre, le terme LMI a été néanmoins choisi pour des raisons historiques : il s'agit du sigle utilisé par Willems dans [WIL 71].

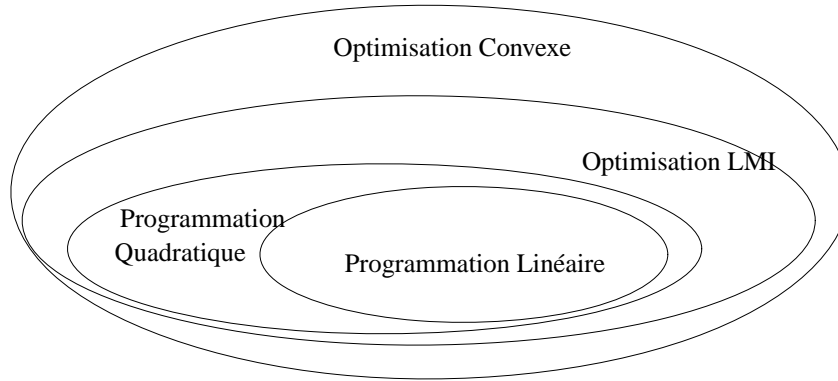


Figure 7. Différentes classes d'optimisation convexe

où $X(p)$, $Y(p)$, $M(p)$ et $N(p)$ sont déterminés à partir de $G(p)$. En faisant varier $Q(p)$ sur l'ensemble des fonctions de transfert stables, l'ensemble des correcteurs stabilisant le système G est obtenu.

La propriété fondamentale de cette paramétrisation des correcteurs stabilisant est que lorsque l'on exprime les fonctions de transfert en boucle fermée en fonction du paramètre Q , on obtient des fonctions qui dépendent *affinement* de Q . Par exemple, dans l'exemple précédent, dans le cas où G est stable, on peut obtenir :

$$S(p) = I - G(p)Q(p) \quad \text{et} \quad T(p) = G(p)Q(p)$$

Par suite, en remplaçant la variable d'optimisation K par la variable d'optimisation Q , on obtient :

Trouver $K(p)$ telle que :

Trouver $Q(p)$ telle que :

1) Boucle fermée stable

1) Q stable

2) $\forall \omega, \left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$ \Leftrightarrow

2) $\forall \omega, |W_1(j\omega)(1 + G(j\omega)Q(j\omega))| \leq 1$

3) $\forall \omega, \left| W_3(j\omega) \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$

3) $\forall \omega, |W_3(j\omega)Q(j\omega)| \leq 1$

Bonne nouvelle Chaque contrainte du problème de droite définit un ensemble convexe en Q . Comme l'intersection d'ensembles convexes est convexe, ceci est donc un pro-

blème d'optimisation convexe. Le problème de droite est donc un problème d'optimisation (faisabilité) convexe.

Mauvaise nouvelle Il est convexe mais de dimension infinie :

1) la variable d'optimisation Q appartient à un ensemble de dimension infinie (ensemble des fonctions de transfert)

2) le nombre de contraintes d'optimisation est infini : par exemple, la contrainte 2. est définie pour tout ω .

Sous cette forme-là, le problème d'optimisation (faisabilité) ne peut espérer qu'une résolution approchée : typiquement, Q va être recherché dans un sous espace de dimension finie de l'espace des fonctions de transfert stables et telle que les conditions 2. et 3. ne sont satisfaites que pour un nombre fini de pulsations. Cela permet d'approcher la solution par la résolution de problèmes d'optimisation de dimension finie mais de grande dimension. Un autre défaut est que le correcteur obtenu peut être d'ordre importante. L'idéal serait de trouver une solution sous la forme d'un problème d'optimisation convexe de dimension finie.

Vincent trouve pas bien

Que faire ? Dans un premier temps, on peut considérer un cas de figure simplifié : une seule contrainte sur la fonction de transfert en boucle fermée $S(p)$: trouver $K(p)$ telle que :

1) Boucle fermée stable

$$2) \forall \omega, \left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$$

On parle alors de synthèse *mono critère* : on cherche à satisfaire une seule spécification de performance. On est alors ramené au problème de synthèse H_∞ . Soit le système

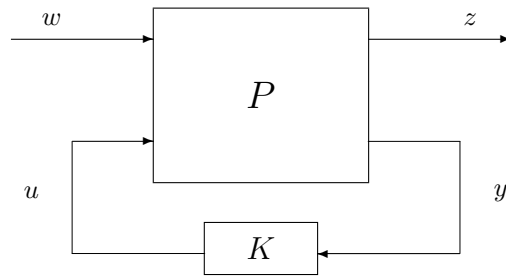


Figure 8. Problème sous forme standard

P . Le problème H_∞ standard s'écrit :

1) Etant donné $\gamma > 0$, existe-il une loi de commande K telle que

- le système bouclé représenté figure 8 et noté $P \star K$ soit asymptotiquement stable

- $\|P \star K\|_\infty < 1$

2) Si oui, construire une loi de commande K assurant pour le système en boucle fermée les deux propriétés précédentes.

Pour obtenir une formulation de dimension finie du problème, la démarche est de passer en représentation d'état. D'une part, pour un ordre donné, le correcteur est alors paramétrisé par les matrices de sa représentation d'état (soit un nombre fini de variables de décision). D'autre part, un résultat fondamental, le lemme borné réel (cas particulier du lemme de Kalman Yakubovitch Popov [POP 73]⁸ des années 60 permet de transformer la vérification de la contraintes 2. (qui doit être vraie pour toute pulsation ω) en la résolution d'un problème d'optimisation de dimension *finie*. En deux mots, soit $H = D + C(pI - A)^{-1}B$ une fonction de transfert stable décrite par une représentation d'état minimale. Alors

$$\forall \omega, \quad |H(j\omega)| \leq \gamma \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{P} > 0 \text{ telle que} \\ \left[\begin{array}{cc} A^T \underline{P} + \underline{P} A + C^T C & \underline{P} B + C^T D \\ B^T \underline{P} + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{array} \right] \leq 0 \end{array} \right. \quad [7]$$

Le second problème est un problème d'optimisation (faisabilité) LMI (donc convexe) dont la variable d'optimisation est \underline{P} (donc de dimension finie). Ce résultat est fondamental dans la recherche de formulations sous forme de problèmes d'optimisation de dimension finie. De plus, il permet de comprendre le lien entre les critères graphiques et l'optimisation LMI. Vérifier que $\forall \omega, \quad |H(j\omega)| \leq \gamma$ peut être effectué en regardant si le diagramme de Nyquist de H est inclus dans le disque de centre 0 et de rayon γ (voir la figure 9). La pratique de l'automatique fréquentielle classique est basée sur l'examen des tracés fréquentiels. Ce résultat met en avant la possibilité de rechercher certaines propriétés des tracés fréquentiels par la résolution d'un problème d'optimisation de dimension finie. Ceci est à la base des avancées de l'automatique fréquentielle moderne.

Pour notre problème, en se basant sur cette formulation, une solution au problème de synthèse H_∞ a été donnée [GAH 94] sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI, de dimension finie.

Une condition équivalente à (7) peut être obtenue sous la forme d'une équation de Riccati [ZHO 95]. A partir de cette formulation, pour une classe moins générale de système P^9 , une autre solution au problème de synthèse H_∞ a été proposée [DOY 89]

8. Le lemme de Kalman Yakubovitch Popov a été introduit pour l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires stationnaires rebouclé sur des non linéarités statiques : ceci illustre le rôle joué dans la commande robuste par les outils développés pour l'analyse des systèmes non linéaires dans les années 70.

9. Ce qui est en général peu limitatif en pratique !

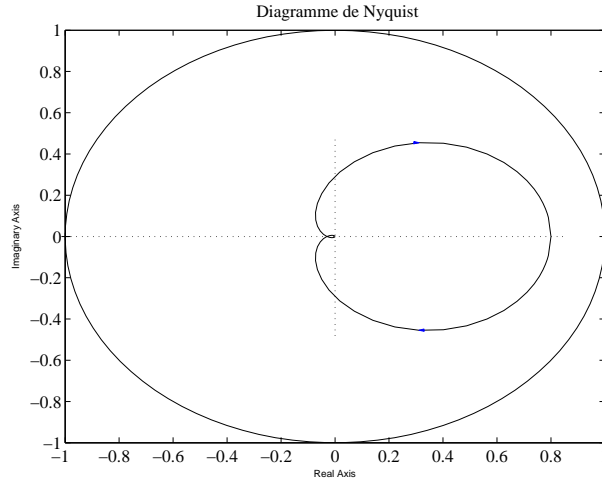


Figure 9. Vérification graphique de l'inégalité $\forall \omega, |H(j\omega)| \leq 1$ à partir du diagramme de Nyquist de $H(j\omega)$

sous la forme de résolutions d'une série d'équations de Riccati. La résolution numérique est plus efficace que pour la première solution. Historiquement, la solution par équations de Riccati est antérieure à la solution par optimisation LMI. Cependant, la démarche adoptée pour l'obtenir est beaucoup moins générale et beaucoup moins transposable à d'autres problèmes contrairement à la première solution.

Revenons à notre exemple de départ, c'est-à-dire un nombre de spécifications de performance supérieur à un : trouver $K(p)$ telle que :

1) Boucle fermée stable

$$2) \forall \omega, \left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$$

$$3) \forall \omega, \left| W_3(j\omega) \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$$

On parle de synthèse *multi critère* (on cherche à remplir plusieurs critères de performance). A partir de la solution du problème de synthèse H_∞ , on peut essayer de rechercher une solution exprimable comme un problème d'optimisation de dimension finie suivant deux axes :

1) reprendre les grandes idées de la démonstration du problème de synthèse (mono critère) H_∞ et les mettre en œuvre sur le problème de synthèse multi

critère (voir par exemple [CHI 96]). Le problème d'optimisation obtenu basé sur une condition nécessaire et suffisante est alors *non convexe*. Pour éviter une résolution difficile, il est en général nécessaire de considérer des conditions qui ne sont que suffisantes mais qui se formulent comme des problèmes d'optimisation convexe [CHI 96, FOL 97, SCH 97, MAG 99, PEA 00] (par exemple, par restriction du problème d'optimisation non convexe de départ). Par suite, si le problème d'optimisation n'admet pas de solution, cela n'indique pas que le problème de départ n'admet pas de solution : il n'a pas été "démontré" qu'il n'existe pas de correcteur remplissant le cahier des charges. On parle alors de "conservatisme".

2) se ramener à un problème de synthèse mono critère dont on peut garantir que la solution satisfait le problème de synthèse multi critère initial [FON 95]. Pour cela, dans notre exemple, on considère le problème : trouver K tel que

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq 1 \quad [8]$$

Du fait des propriétés de la norme H_{∞} ¹⁰, on a (8) \Rightarrow (2), c'est-à-dire s'il existe un correcteur K qui satisfait (8) alors elle satisfait (2). De plus, c'est un cas particulier du problème de synthèse H_{∞} qui se formule comme un problème d'optimisation convexe de dimension finie.

Devant cette alternative, quel choix effectuer ? On peut donner deux éléments de réponse, le premier dans le cas général, le second dans l'exemple considéré.

Pour un ingénieur automatique, la seconde approche apparaît plus intéressante que la première. En effet, dans la première, le conservatisme apparaît au niveau du problème d'optimisation lui-même. Cela veut dire que dans sa mise en œuvre pratique, l'ingénieur automatique devra avoir de bonnes notions d'optimisation, un certain savoir faire dans ce domaine, ce qui rend l'outil peu accessible. Dans la seconde approche, le conservatisme apparaît au niveau de la formulation du problème d'automatique lui-même. Pour résoudre cette difficulté, l'ingénieur est amené à modifier la traduction dans le domaine fréquentiel du cahier des charges. Par suite, lors de la mise en œuvre, il n'est pas nécessaire qu'il connaisse et travaille sur le problème d'optimisation utilisé. Dans l'optique de disposer d'un outil de conception facilement accessible à un ingénieur automatique, cette approche est plus pertinente.

D'autre part, dans l'exemple considéré, la seconde approche n'est pas si "conservative" que cela. Notons que :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \sup_{\omega} \sqrt{|W_1(j\omega)S(j\omega)|^2 + |W_3(j\omega)T(j\omega)|^2}$$

10. La norme H_{∞} d'une matrice de fonctions de transfert est supérieure à la norme H_{∞} de chacun des éléments de la matrice.

$\|W_1S\|_\infty = \sup_\omega |W_1(j\omega)S(j\omega)|$ et $\|W_3T\|_\infty = \sup_\omega |W_3(j\omega)T(j\omega)|$. Pratiquement, pour de larges gammes de pulsation ω , $|W_1(j\omega)S(j\omega)|$ et $|W_3(j\omega)T(j\omega)|$ ne sont pas proches simultanément de 1 et donc la contrainte

$$\sqrt{|W_1(j\omega)S(j\omega)|^2 + |W_3(j\omega)T(j\omega)|^2} \leq 1$$

et les deux contraintes $|W_1(j\omega)S(j\omega)| \leq 1$ et $|W_3(j\omega)T(j\omega)| \leq 1$ peuvent être vérifiées simultanément sans difficulté. Les satisfaire simultanément peut être difficile pour des gammes de pulsation limitées. Par suite, remplacer (2) par (8) n'est pas très limitatif. Il faut noter que ce raisonnement est essentiellement basé sur un savoir-faire en automatique fréquentielle et non en optimisation.

3.6. Morale de cette histoire

La synthèse H_∞ se base sur :

- 1) l'utilisation des concepts fondamentaux de l'automatique fréquentielle classique : le cahier des charges peut se traduire comme des gabarits sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée ;
- 2) une formalisation mathématique rigoureuse du problème d'automatique (par contraste avec l'automatique fréquentielle classique) à l'aide de norme H_∞ pondérée ;
- 3) la recherche d'une solution au problème sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante pour "qualifier" la difficulté du problème : ici un problème d'optimisation convexe mais de dimension infinie ;
- 4) si cette dernière ne dispose pas d'un algorithme de résolution efficace, recherche de solutions basées sur des conditions qui ne sont que suffisantes (conservatisme) mais disposant d'un algorithme de résolution efficace en général sous forme d'optimisation de préférence convexe et de préférence de dimension finie ; rôle central joué par l'optimisation LMI. C'est le cas de la synthèse H_∞ qui ne traite pas du problème posé par Zames [ZAM 81] ;
- 5) un outil simple d'utilisation : remplacement de la manipulation des diagrammes et autres représentations graphiques par des algorithmes d'optimisation. Les pré requis sont ceux de l'automatique fréquentielle classique à condition de choisir, dans le cas de solutions suffisantes, celles dont l'utilisation ne nécessite pas de connaissance en optimisation.

Les bénéfices de la synthèse H_∞ pour l'ingénieur sont importants :

- 1) une considérable simplification du processus de mise au point des lois de commande : on est passé du réglage à la main à la conception assistée par ordinateur ;
- 2) résolution de problèmes jusque là difficilement abordables : explorer rapidement les compromis d'un cahier des charges, commande des systèmes multivariables, etc. ;

3) pré requis relativement limités pour sa mise en œuvre : bagage de l'automatique fréquentielle classique : il n'est pas nécessaire de connaître les espaces de Hardy ou l'optimisation convexe pour utiliser la synthèse H_∞ !

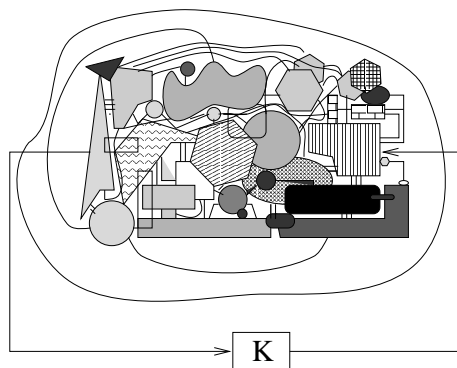
Dans le cadre de la recherche de méthodologies, la démarche qui a abouti à la synthèse H_∞ est un cas d'école pour le chercheur.

Contrairement à une idée reçue, comme pour la synthèse H_2 , la performance est un objectif fondamental de la synthèse H_∞ . L'utilisation de l'optimisation pour la mise au point de lois de commande n'est certes pas nouvelle, voir les exemples de la synthèse H_2 et de la synthèse LQG. Cependant, par rapport à celles-ci, la synthèse H_∞ présente plusieurs avantages importants :

1) la synthèse H_∞ est dans la continuité de l'automatique fréquentielle classique : ceci permet d'utiliser le savoir faire existant des ingénieurs en automatique fréquentielle pour sa mise en œuvre.

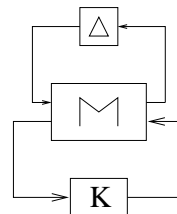
2) En plus des spécifications de performance, elle permet d'inclure des spécifications de robustesse.

4. Théorie de la robustesse en linéaire stationnaire : des critères graphiques à l'optimisation



Réalité

et ...



Ce que voit l'automaticien

Les méthodes de synthèse assistée par ordinateur de lois de commande sont basées sur un modèle du système à commander. Malheureusement, il est expérimentalement plus probable d'obtenir une modélisation où les paramètres et la structure ne sont qu'approximativement connus. Par essence, une modélisation ne peut pas être certaine. De plus, au cours du temps, ses caractéristiques peuvent évoluer. Cette remarque a motivé l'introduction de la notion de *famille de modèles*. L'idée sous-jacente est que, puisqu'il est illusoire de décrire précisément un système physique par un modèle, il serait fructueux de considérer une famille de modèles pouvant potentiellement contenir

un modèle adéquat. Le terme adéquat peut paraître obscur : il traduit simplement le fait que le comportement du système est assez fidèlement modélisé pour refléter correctement ses propriétés qualitatives. Il est important d'insister sur le fait qu'un modèle ne peut pas représenter de façon exacte un système réel. En résumé, l'indétermination¹¹ est dans la nature même des objets physiques. L'utilisation d'une famille de modèles susceptible de contenir le modèle le plus adéquat constitue l'idée de base de la robustesse [DOY 78, SAF 78, DOY 81, SAF 81a, SAF 81b, DOY 82a, SAF 82, FON 95]. L'analyse consiste alors à garantir une propriété sur le système réel (stabilité, rapidité, etc.) en vérifiant si elle est satisfaite pour tous les éléments de la famille de modèles.

Ce concept de famille de modèles est au centre de l'automatique fréquentielle classique. Malheureusement, comme dans le cas de la synthèse, la formalisation est en général assez pauvre¹². On ne définit qu'un nombre limité d'incertitudes : sur le gain (marge de gain), la phase (marge de phase) et le retard (marge de retard). A la fin des années 70, sont apparues des classes de familles de modèles plus riches.

4.1. Robustesse vis-à-vis d'une incertitude : introduction à travers un exemple

Un exemple de famille de modèles Ces classes sont évoquées à travers un exemple élémentaire. La première étape est de définir la famille de modèles. Soit $G_{reel}(p)$ la fonction de transfert décrivant exactement le système à commander et $G_{mod}(p)$ son modèle, qui sera forcément entaché d'incertitudes. Une façon d'évaluer la différence entre le système réel et son modèle est d'exprimer que $G_{reel}(p)$ appartient à une famille de modèles :

$$G_{reel} \subset \{G \mid \exists \Delta, \|\Delta\|_{\infty} \leq \beta, G = G_{mod} + \Delta\}.$$

La quantité d'incertitude est alors évaluée par un paramètre réel $\beta > 0$. Ce type d'incertitude est appelé *incertitude additive*¹³. La difficulté ici est que seul le paramètre β est connu. Tout ce que l'on sait sur la fonction de transfert $\Delta(j\omega)$, c'est qu'elle est bornée en module par β . Pour garantir que le système réel (que l'on ne connaît pas) en boucle fermée est stable, l'idée est de démontrer que pour tout transfert stable $\Delta(j\omega)$ dont la norme H_{∞} est inférieure à β , on a le système bouclé représenté sur la figure 11 qui est stable.

11. Le terme couramment employé est celui d'incertitude. Nous pensons que le terme indétermination est plus adapté. En effet, il souligne qu'un système ne peut être exactement "mesuré". Le terme incertitude a une connotation probabiliste. Néanmoins, pour être cohérent avec l'usage courant, nous utiliserons dans ce mémoire le terme incertitude.

12. A l'exception notable d'Horowitz [HOR 63].

13. De façon générale, une famille de modèles peut être définie comme la transformation linéaire fractionnaire d'une matrice de fonctions de transfert incertaines Δ par une matrice de fonctions de transfert déterminée : plus simplement, tout système de la famille de modèles s'écrit comme une fonction rationnelle en Δ .

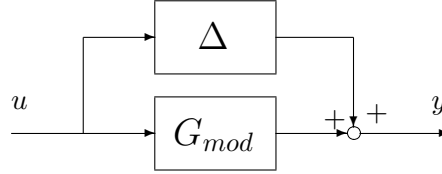


Figure 10. Incertitude additive

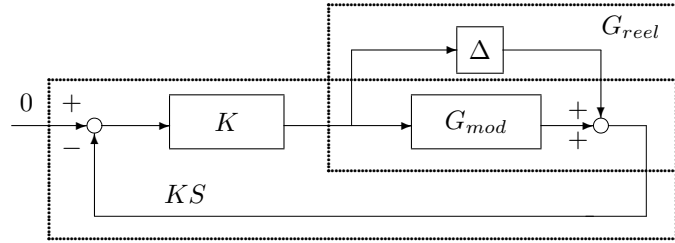


Figure 11. Connexion de KS avec Δ

Analyse de la stabilité par le critère de Nyquist Pour évaluer la stabilité de cet ensemble de systèmes en boucle fermée, il faut donc appliquer le critère de Nyquist pour toutes les fonctions de transfert en boucle ouverte $(G_{mod}(j\omega) + \Delta(j\omega)) K(j\omega)$ obtenues par toutes les fonctions de transfert stables $\Delta(j\omega)$ telle que $|\Delta(j\omega)| \leq \beta$. Une condition nécessaire est que pour $\Delta(j\omega) = 0$, la condition du critère de Nyquist soit vérifiée. Pour assurer que, pour toutes les fonctions de transfert $\Delta(j\omega)$, le système bouclé reste stable, il suffit de vérifier que pour toutes les pulsations ω , les points $(G_{mod}(j\omega) + \Delta(j\omega)) K(j\omega)$ ne recouvrent pas le point $(-1, 0)$.

Pour une pulsation ω donnée, l'ensemble des points $(G_{mod}(j\omega) + \Delta(j\omega)) K(j\omega)$ correspond à un disque de centre $G_{mod}(j\omega)K(j\omega)$ et de rayon $\beta|K(j\omega)|$, quand $\Delta(j\omega)$ décrit l'ensemble des fonctions de transfert stables dont la norme H_∞ est inférieure à β . Il faut donc que ce disque ne recouvre pas le point $(-1, 0)$. Pour cela, il suffit d'assurer que la distance entre le point $(-1, 0)$ et le point $G_{mod}(j\omega)K(j\omega)$ est supérieure au rayon du disque, à savoir $\beta|K(j\omega)|$, soit :

$$\forall \omega, |1 + G_{mod}(j\omega)K(j\omega)| > \beta|K(j\omega)| \Leftrightarrow \forall \omega, \left| \frac{K(j\omega)}{1 + G_{mod}(j\omega)K(j\omega)} \right| < \frac{1}{\beta}$$

soit $\|KS\|_\infty < \frac{1}{\beta}$. Il est intéressant de voir que le système bouclé se réécrit comme la connexion de la fonction de transfert KS avec la fonction de transfert Δ (voir la figure 11). Le système bouclé est stable pour toute fonction de transfert stable Δ telle que

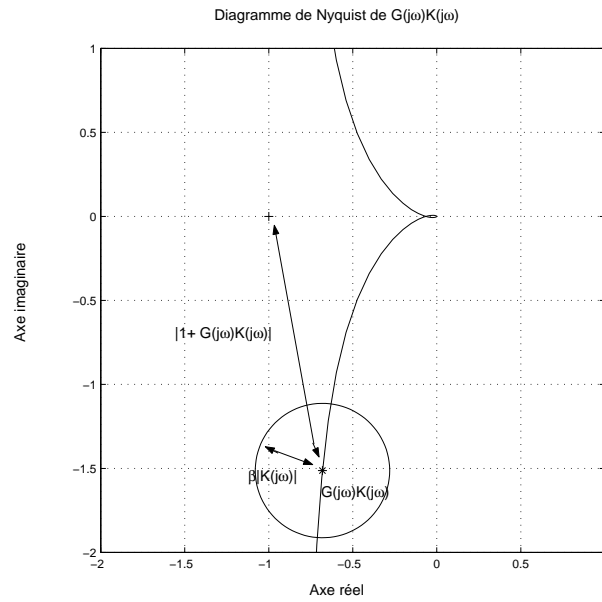


Figure 12. Diagramme de Nyquist de $G(j\omega)K(j\omega)$

$\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ si et seulement si $\|KS\|_\infty < \frac{1}{\beta}$. Ceci est un cas particulier du théorème du petit gain.

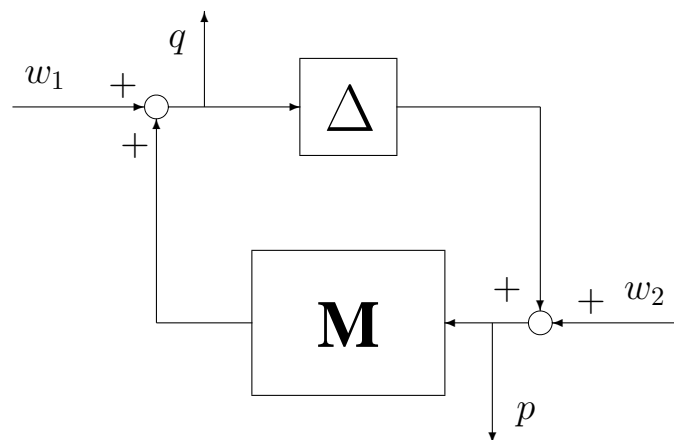


Figure 13. Connexion de M avec Δ

Analyse par le théorème du petit gain Dans la cas général, le théorème du petit gain “linéaire stationnaire” peut s’énoncer de la façon suivante : la famille des systèmes (M, Δ) représentés figure 13 est stable pour toutes les (matrices de) fonctions de transfert stables Δ telles que $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ si et seulement si

$$\|M\|_\infty < \frac{1}{\beta}.$$

La plus grande valeur du scalaire β telle que les conditions du Théorème du petit gain sont satisfaites peut être considérée comme une *marge de stabilité*. Dans l’exemple introductif, on a $M = KS$ (voir figure 11).

Mise en œuvre par optimisation Par application du lemme borné réel (voir section précédente), tester la condition de ce théorème peut s’effectuer par la résolution d’un problème d’optimisation convexe LMI, de dimension finie. Par suite, l’utilisation d’un critère graphique (tracé dans le plan de Nyquist des disques de centre $K(j\omega)G_{mod}(j\omega)$ et de rayon $\beta|K(j\omega)|$ pour tout ω et examen du tracé par rapport au point $(-1, 0)$) est remplacé par un algorithme d’optimisation. L’utilisation de l’algorithme d’optimisation est plus rigoureuse que l’utilisation du critère graphique puisque les disques ne peuvent être représentés que pour un nombre fini de pulsations ω .

Le théorème du petit gain : outil fondamental de l’analyse de la robustesse Plusieurs points de vue pour démontrer la suffisance de la condition $\|M\|_\infty < \frac{1}{\beta}$ sont possibles :

1) démonstration directe basée sur le critère de Nyquist : c’est la démarche qui a été suivie pour l’exemple introductif. Cela permet de présenter ce résultat comme une extension de la définition et du calcul des marges de stabilité classiques qui sont basées sur le critère de Nyquist.

2) application de théorèmes plus généraux comme le théorème du petit gain proposée au milieu des années 60 [ZAM 66, WIL 69, DES 75] ou comme le théorème de séparation des graphes proposé par Safonov [SAF 80] dont l’intérêt s’est récemment renouvelé dans le cadre plus particulier des IQCs (Contraintes Intégrales Quadratiques [MEG 97]) (voir aussi [IWA 98]).

Considérons par exemple le théorème du petit gain proposé par Zames en 1966 [ZAM 66, DES 75]. Il propose une condition *suffisante* de stabilité pour le système constitué par la connexion d’un opérateur H_1 avec un opération H_2 (voir la figure 14)¹⁴.

La nécessité est obtenue dans le cas des systèmes linéaires stationnaires par le fait que l’on étudie la stabilité pour une famille de modèles (M, Δ) complète (pour toutes les (matrices de) fonctions de transfert stables Δ telles que $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$). Par suite, même si, pour l’étude de la stabilité de la connexion de deux opérateurs particuliers

14. Les conditions obtenues sont celles du cas linéaire stationnaire avec les normes H_∞ remplacées par le L_2 gain [DES 75].

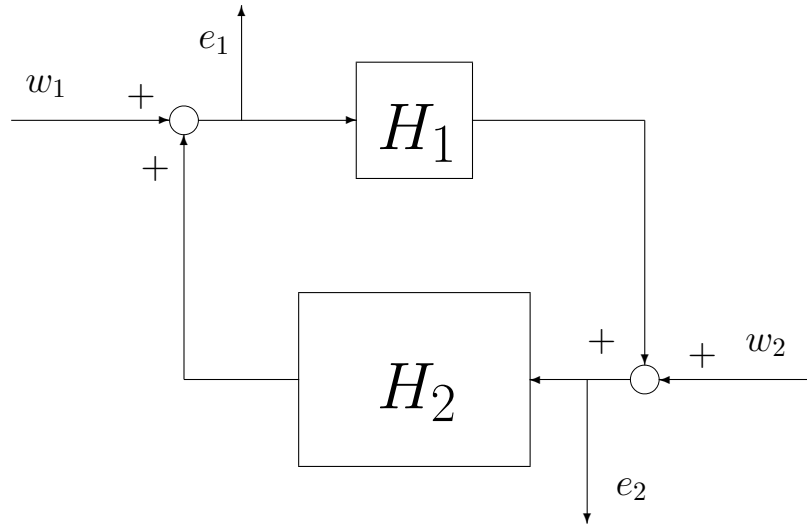


Figure 14. Connexion deux opérateurs H_1 et H_2

(problème initialement considéré), le théorème du petit gain peut s’avérer très pessimiste (“conservatif”), il s’avère non conservatif pour l’analyse de la robustesse pour laquelle il est un résultat très attractive (en fait fondamental). Cet intérêt avait été très tôt entrevu par Zames en 1966 [ZAM 66] :

“One of the broader implications of the theory here concerns the use of functional analysis for the study of poorly defined systems. It seems possible, from only coarse information about a system, and perhaps even without knowing details of internal structure, to make useful assessments of quantitative behavior.” (cité par Safonov [SAF 80])

Schéma blocs L’analyse des systèmes est basée en automatique fréquentielle classique sur l’utilisation de schéma blocs, le plus élémentaire étant celui qui représente la connexion du correcteur avec le système. Ceci est conservé dans les outils récents de l’analyse fréquentielle. Pour appliquer le théorème du petit gain, il est nécessaire de se ramener à un schéma bloc constitué de deux parties interconnectées : les incertitudes Δ d’une part et le reste du système d’autre part (voir les figures 11 et 13). Dans ce schéma-là, contrairement aux schémas élémentaires classiques, les signaux reliant les deux blocs sont des signaux “fictifs”, c’est-à-dire sans réalité physique.

Affiner la description des familles de modèles : pondérations fréquentielles Un modèle n’est généralement représentatif du système physique que dans une certaine gamme de pulsations. Par suite, l’incertitude liée à la modélisation $\Delta(j\omega)$ présente une taille dépendant de la pulsation ω . Cette “taille” peut être définie par une fonction de transfert $W^i(j\omega)$ stable, appelée *pondération* et telle que $\forall \omega, |G_{reel}(j\omega) - G_{mod}(j\omega)| = |\Delta(j\omega)| \leq |W^i(j\omega)|$. Cette écriture revient à définir l’ensemble des

incertitudes comme l'ensemble des $\Delta(j\omega) = W^i(j\omega)\tilde{\Delta}(j\omega), \forall \omega$ avec $|\tilde{\Delta}(j\omega)| \leq 1$ (soit $\|\tilde{\Delta}\|_\infty \leq 1$), ce qui permet d'appliquer le théorème du petit gain.

4.2. Cas de plusieurs incertitudes : μ analyse

Un exemple Il est plus probable que plusieurs incertitudes dynamiques interviennent *simultanément* en différents points de la boucle fermée : par exemple, sur les actionneurs, sur le système à commander lui-même, sur les capteurs etc (voir par exemple le schéma représenté figure 15). Pour appliquer le théorème du petit gain, il serait néces-

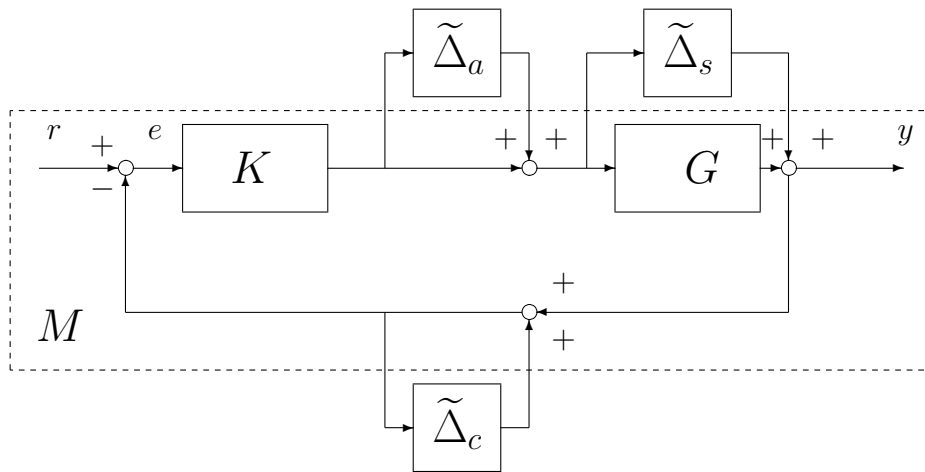


Figure 15. Incertitudes dynamiques dans une boucle fermée

saire de faire apparaître une seule incertitude dynamique. Pour cela, on peut regrouper les différentes incertitudes en une seule incertitude $\tilde{\Delta}$ (voir la figure 16) : Le théorème du petit gain donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité sur la matrice de transfert M ($\|M\|_\infty \leq \frac{1}{\beta}$) pour toute incertitude qui est une matrice de fonctions de transfert bornée en norme H_∞ ($\|\tilde{\Delta}\|_\infty < \beta$). Ici, l'incertitude n'est pas quelconque puisque les termes (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1) et (3, 2) sont nuls. Dans ce cas, on parle d'une incertitude *structurée*. Par suite, la condition du théorème du petit gain n'est plus nécessaire dans ce cas-là, elle est simplement suffisante. Si elle est vérifiée alors la stabilité est assurée pour tous les $\tilde{\Delta}$, sinon, on ne peut pas conclure.

μ analyse L'analyse de systèmes avec plusieurs sources d'incertitude a motivé l'émergence dans le contexte linéaire de la μ/k_m analyse [DOY 82a, SAF 81a]. La μ/k_m analyse considère l'étude de la stabilité d'une famille de modèles linéaires stationnaires de dimension finie, avec des incertitudes de structure (dynamiques linéaires négligées)

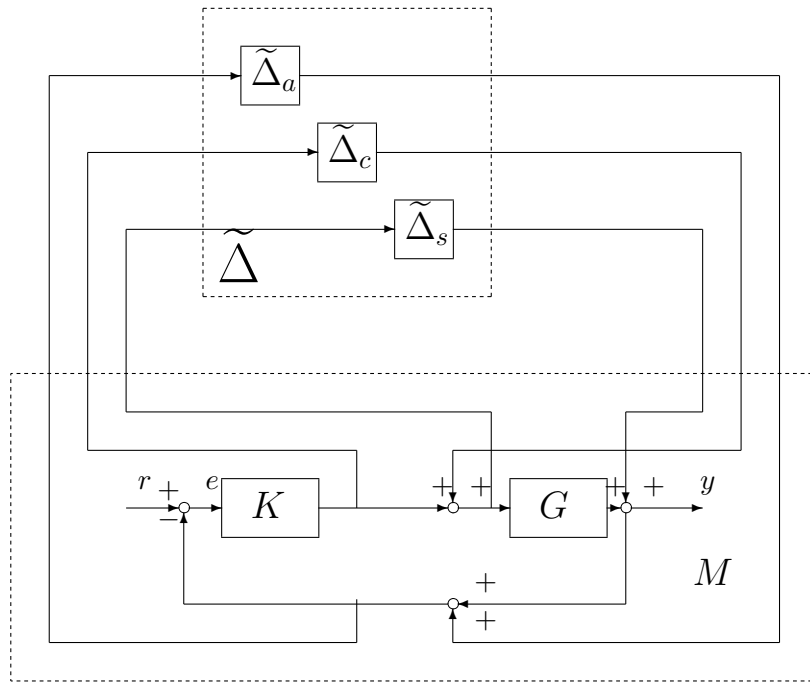


Figure 16. *Incertitudes dynamiques dans une boucle fermée*

et des incertitudes paramétriques (paramètres appartenant à des intervalles). Le premier problème abordé par la μ/k_m analyse est le suivant : pour une certaine “taille” d’incertitudes structurelles et paramétriques, la famille de systèmes est-elle stable ? Le second consiste à déterminer la taille des incertitudes que le système peut tolérer avant de devenir instable. La valeur maximale obtenue est appelée $k_m = 1/\mu$.

Des tests exacts ont été proposés dans les années quatre vingt [GAS 88]. Ils résolvent le problème en temps exponentiel, ce qui laissait présager à l’époque que le problème lui même ne pouvait pas être résolu en temps polynomial. Quelques années plus tard, il a été effectivement démontré que la résolution exacte de ce problème est NP difficile [NEM 93, BRA 94]. En général, les propriétés de stabilité d’une famille de modèles linéaires ne peuvent donc pas être efficacement vérifiées de façon exacte. Dès que le problème atteint une taille significative, les algorithmes de calcul exact du μ/k_m ne sont plus capables de donner une réponse en un temps de calcul raisonnable dans le pire des cas [FER 96].

Parallèlement, des tests sous estimant l'étendue maximale de la famille des modèles stables ont été proposés¹⁵ (conservatisme). Un test est dit conservatif s'il démontre de façon exacte des propriétés pour une famille de modèles contenant *strictement* la famille considérée. Parmi les formulations conservatives proposées pour la μ analyse, nous pouvons citer celles proposées par [DOY 82b, SAF 82, FAN 91, SAF 93, LY 94] : elles s'écrivent comme des problèmes d'optimisation (quasi) convexe LMI. Bien que théoriquement conservatifs, pratiquement, ces tests donnent pour des problèmes industriels des résultats encourageants [FER 96]. Ils illustrent qu'un bon compromis entre la précision d'un test et sa difficulté de vérification peut être obtenu.

De manière générale, le conservatisme ne peut pas être considéré comme rédhibitoire. C'est le cas par exemple des tests LMIs pour la μ/k_m analyse. En effet, dans le cas où sont uniquement considérées des incertitudes dynamiques, Poolla et Tikku ont démontré que la borne supérieure basée sur les LMIs est une condition *nécessaire* et suffisante de stabilité contre des incertitudes "variant lentement" dans le temps [POO 95]¹⁶. Le pessimisme permet donc de garantir de façon exacte une propriété désirable en pratique (intuitivement un système évolue toujours lentement dans le temps). A la limite, nous pouvons même nous interroger sur la pertinence d'une évaluation exacte de μ vis-à-vis de l'application. Cela tient à la nature topologique de la borne supérieure du μ alors que le μ exact est de nature algébrique [FER 95b]. Du point de vue de l'application, le problème de μ/k_m analyse peut être donc mal posé. De plus, cet exemple montre qu'il existe une continuité et une forte interaction entre les outils d'analyse des systèmes non linéaires et non stationnaires et ceux destinés à l'analyse des systèmes linéaires stationnaires.

15. La thèse [FER 95a] propose une excellente synthèse des différentes méthodes (exactes et approchées) de μ analyse, leur comparaison et leur mise en œuvre sur un exemple industriel.

16. Dans le cas d'incertitudes sur les paramètres, Chou et Tits ont démontré que la borne supérieure constitue une condition suffisante mais non nécessaire de stabilité contre des variations des paramètres bornées [CHO 95].

Valeur singulière structurée De façon plus précise, on définit l'ensemble des matrices complexes ayant la structure de l'incertitude considérée :

$$\underline{\Delta} = \left\{ \Delta \in \mathbb{C}^{k \times k} / \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Delta_q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \delta_1 I_{r_1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \delta_r I_{r_r} \end{bmatrix} \right. \quad [9]$$

$$\left. \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \Delta_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, \quad i \in \{1, \dots, q\} \\ \delta_j \in \mathbb{R}, \quad j \in \{1, \dots, r\} \\ k = \sum_{i=1}^q k_i + \sum_{j=1}^r r_j \end{array} \right. \right\}.$$

Les blocs de scalaires répétés réels δ_j représentent les réponses fréquentielles des incertitudes paramétriques (incertitudes sur les paramètres du système à analyser). Les blocs matrices complexes Δ_i représentent les réponses fréquentielles des incertitudes dynamiques. La valeur singulière structurée d'une matrice complexe A par rapport à la structure $\underline{\Delta}$, notée $\mu_{\underline{\Delta}}$, est définie par :

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{\Delta}}(A) &= \frac{1}{\inf_{\Delta \in \underline{\Delta}} (\bar{\sigma}(\Delta) / \det(I - \Delta A) = 0)} \\ &= 0 \quad \text{si } \forall \Delta \in \underline{\Delta}, \quad \det(I - \Delta A) \neq 0 \end{aligned} \quad [10]$$

Théorème du petit gain structuré Soit la famille de systèmes bouclés (M, Δ) , où $M(p)$ est une matrice de fonctions de transfert stable et où $\Delta(p)$ est une fonction de transfert stable telle que $\Delta(j\omega) \in \underline{\Delta}$. La famille de systèmes bouclés (M, Δ) est stable pour tout Δ , tel que $\|\Delta\|_{\infty} < \beta$ si et seulement si

$$\forall \omega \in [0, +\infty], \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \frac{1}{\beta}. \quad [11]$$

Le plus grand ensemble d'incertitudes Δ pour lequel la famille de systèmes (M, Δ) reste stable est de taille donnée par

$$\frac{1}{\sup_{\omega \in [0, +\infty]} \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))}. \quad [12]$$

En général, le calcul "exact" de l'indicateur μ est NP difficile. Il est possible de calculer une borne supérieure et une borne inférieure de l'indicateur μ ¹⁷ par des algorithmes

17. En réalité, il en existe un certain nombre. Je ne sais pas s'il est égal à 12.

efficaces. Par exemple, la borne supérieure la plus couramment utilisée est obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI.

Lien entre la borne supérieure de μ et le théorème du petit gain à travers un exemple Soit m une fonction de transfert stable à une entrée et à une sortie. On désire

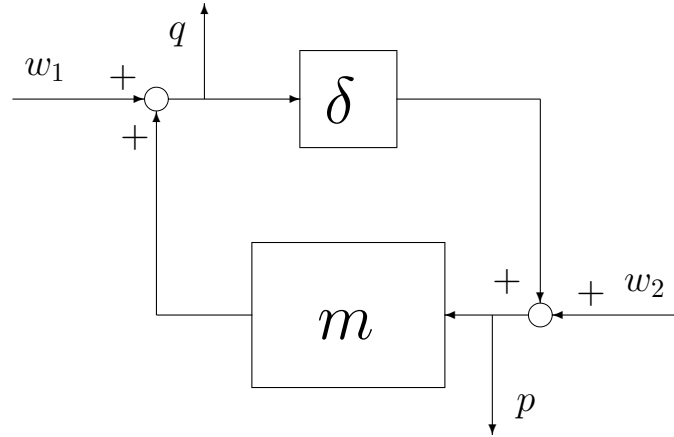


Figure 17. Connexion de M avec Δ

vérifier que le système bouclé représenté figure 17 est stable pour tout scalaire $\delta \in]-1, 1[$ ¹⁸. D'après le théorème du petit gain structuré, une condition nécessaire et suffisante est donnée par :

$$\forall \omega, \quad \mu_{\Delta}(m(j\omega)) \leq 1.$$

(Dans ce qui suit, on considère une pulsation ω donnée.) On dispose d'une borne supérieure [FAN 91] $\mu_{\Delta}^{sup}(m(j\omega))$ telle que

$$\mu_{\Delta}(m(j\omega)) \leq \mu_{\Delta}^{sup}(m(j\omega))$$

où, dans le cas particulier considéré, la borne supérieure de μ est obtenue par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\mu_{\Delta}^{sup}(M(j\omega)) = \min_{\substack{g \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{R}^+}} \beta \\ m(j\omega)^* m(j\omega) + jg(m(j\omega) - m(j\omega)^*) - \beta^2 \leq 0$$

Dans ce cas particulier, la borne supérieure de μ donne la valeur de μ . Ce problème est un problème de minimisation de valeur propre généralisée sous contrainte LMI¹⁹. On

18. Il s'agit en fait d'un problème proche de celui de la marge de gain.

19. En réalité, la matrice définissant l'inégalité est complexe. Néanmoins, il est possible de se ramener à une matrice réelle [BOY 93].

garantira la stabilité de la boucle fermée pour tout scalaire $\delta \in]-1, 1[$ si et seulement s'il existe $\underline{g} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$m(j\omega)^*m(j\omega) + j\underline{g}(m(j\omega) - m(j\omega)^*) - 1 \leq 0 \quad [13]$$

ce qui est un problème de faisabilité LMI. Essayons de donner une interprétation graphique à la condition (13).

Interprétation graphique Par application du critère de Nyquist, la fonction de transfert $m(j\omega)$ étant stable, la famille de modèles (m, δ) sera stable si et seulement si pour toute pulsation ω le tracé de $\delta m(j\omega)$ pour δ décrivant l'intervalle $]-1, 1[$ ne recouvre pas le point $(-1, 0)$.

Qu'assure la condition (13) par rapport à cela ? On a la propriété suivante :

$$\forall \delta \in]-1, 1[, \quad \delta^2 + j\underline{g}(\delta - \delta) - 1 < 0$$

ce qui peut se réécrire en complétant les carrés :

$$\forall \delta \in]-1, 1[, \quad (\delta - j\underline{g})^*(\delta - j\underline{g}) < 1 + \underline{g}^2 \quad [14]$$

Le segment $]-1, 1[$ est inclus dans le disque ouvert de centre $j\underline{g}$ et de rayon $\sqrt{1 + \underline{g}^2}$. Par suite, dans le plan de Nyquist, pour une pulsation ω donnée, le tracé de $\delta m(j\omega)$ pour δ décrivant l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans le disque ouvert de centre $j\underline{g}m(j\omega)$ et de rayon $\sqrt{1 + \underline{g}^2}|m(j\omega)|$. Si le point $(-1, 0)$ est à l'extérieur de ce disque alors on a la garantie que le tracé de $\delta m(j\omega)$ pour δ décrivant l'intervalle $]-1, 1[$ ne recouvre pas le point $(-1, 0)$. Cette condition s'écrit :

$$(-1 - j\underline{g}m(j\omega))^*(-1 - j\underline{g}m(j\omega)) \geq (1 + \underline{g}^2)m(j\omega)^*m(j\omega)$$

En développant et en simplifiant, on retrouve la condition (13) du problème d'optimisation LMI.

En résumé, le calcul de la borne supérieure de μ pour une pulsation donnée se formule comme un problème d'optimisation LMI. Ce problème d'optimisation garantit que le tracé de $\delta m(j\omega)$ pour $\delta \in]-1, 1[$ ne recouvre pas le point $(-1, 0)$. Ici encore apparaît le lien entre critère graphique et optimisation LMI. De plus, pour garantir cela, on recherche un disque contenant le tracé de $\delta m(j\omega)$ pour $\delta \in]-1, 1[$ et excluant le point $(-1, 0)$. Ce disque peut s'interpréter comme le tracé à la pulsation ω obtenu par une famille de fonctions de transfert définies par une incertitude dynamique :

$$\{L(j\omega) \mid \exists \Delta(j\omega), \quad |\Delta(j\omega)| \leq \sqrt{1 + \underline{g}^2} \text{ et } L(j\omega) = (j\underline{g} + \Delta(j\omega))m(j\omega)\}$$

On a donc plongé la famille de fonctions de transfert incertaine $\delta m(j\omega)$ avec une incertitude réelle δ :

$$\{L(j\omega) \mid \exists \delta \in]-1, 1[, \quad L(j\omega) = \delta m(j\omega)\}$$

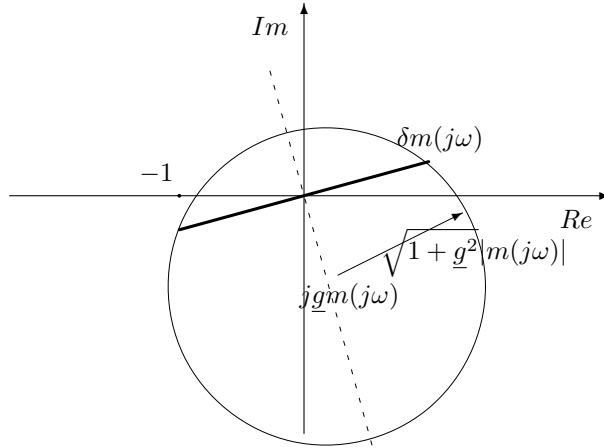


Figure 18. Pour une pulsation ω , tracé de $\delta m(j\omega)$ pour $\delta \in]-1, 1[$ et disque de centre $j\underline{g}m(j\omega)$ et de rayon $\sqrt{1 + \underline{g}^2}|m(j\omega)|$

dans une famille définie par une incertitude additive dynamique. La définition de cette dernière dépend du paramètre d'optimisation \underline{g} . Le choix de celle-ci parmi l'ensemble de toutes les familles possibles définies par une incertitude additive est donc fait par la résolution du problème d'optimisation. Elle est choisie de telle façon à ce que, pour la pulsation ω , le point $(-1, 0)$ ne soit pas recouvert.

Lien avec le théorème du petit gain Pour analyser la stabilité de la famille de modèles (m, δ) , le théorème du petit gain peut être appliqué pour la pulsation ω^{20} . Cependant, puisque l'incertitude n'est pas dynamique, la condition obtenue est simplement suffisante. Par application du théorème du petit gain, on obtient :

$$m(j\omega)^*m(j\omega) - 1 \leq 0$$

ce qui correspond à la condition (13) avec $\underline{g} = 0$, ce qui peut être très conservatif (pessimiste). Nous allons voir que trouver \underline{g} telle que cette condition soit satisfaite peut s'interpréter comme la recherche d'un système bouclé équivalent au système bouclé représenté figure 17 pour lequel si c'est possible, le théorème du petit gain puisse s'appliquer.

20. La norme H_∞ est remplacée par le module de la fonction de transfert à la pulsation ω .

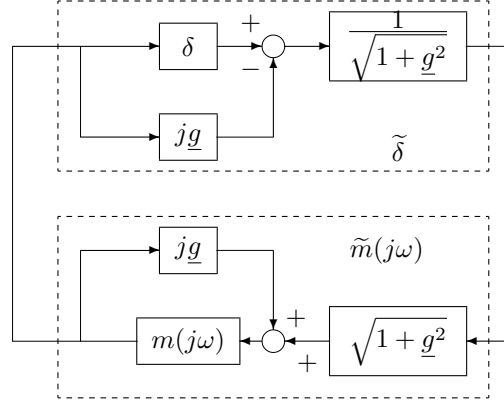


Figure 19. Réécriture de la connexion (M, Δ)

Posons $\tilde{\delta} = \frac{1}{\sqrt{1+g^2}}(\delta - jg)$. On peut réécrire le schéma bloc représenté figure 17 de façon équivalente en faisant apparaître explicitement $\tilde{\delta}$: le schéma obtenu correspond à la connexion de $\tilde{\delta}$ avec

$$\tilde{m}(j\omega) = \frac{m(j\omega)}{1 - jgm(j\omega)} \sqrt{1+g^2}$$

il est représenté figure 19 (technique de “loop-shifting”, voir par exemple [DES 75]).

D’après l’inégalité (14), on a $|\tilde{\delta}| < 1$. La condition (13) assure que $|\tilde{m}(j\omega)| \leq 1$. On est donc bien dans les conditions du théorème du petit gain.

L’optimisation convexe a donc permis de rechercher dans une famille de schémas blocs paramétrisée par g un schéma bloc équivalent au schéma bloc de départ mais pour lequel la condition du théorème du petit gain est satisfaite.

Remarque : autres familles d’incertitudes Les familles d’incertitudes évoquées dans cette section sont celles qui sont le plus couramment utilisées en commande robuste (dans le cas monovarié, incertitude “en forme de disque” pour les incertitudes dynamiques dans le plan de Nyquist). Néanmoins, de multiples extensions sont possibles : incertitudes dynamiques avec une contrainte de phase (dans le cas monovarié, incertitude “en forme de tranche de tarte” dans le plan de Nyquist) [TIT 99] ou encore retard incertain et borné [SCO 97b, FER 98] (dans le cas monovarié, incertitude “en forme d’arc” dans le plan de Nyquist).

4.3. Conclusion

Les résultats d'analyse des systèmes incertains (théorie de la robustesse) résultent du même cheminement que ce qui a mené à la synthèse H_∞ :

1) Utilisation des concepts fondamentaux de l'automatique fréquentielle classique : un système est représenté par une famille de modèles et comme support du raisonnement, les schéma blocs sont préférés aux équations.

2) Formalisation mathématique rigoureuse du problème d'automatique : comme dans le cas de la formalisation de la performance, la formalisation de la robustesse repose sur l'utilisation de la norme H_∞ pondérée. Un même cadre (norme H_∞ pondérée) permet ainsi de traiter de la performance et de la robustesse.

3) Recherche d'un algorithme efficace : rôle de l'optimisation de préférence convexe, de préférence de dimension finie ; notamment rôle central de l'optimisation LMI (quite à modifier la formulation du problème).

4) Un outil simple d'utilisation : ici encore, remplacement de la manipulation des diagrammes et autres représentations graphiques par l'utilisation d'algorithme d'optimisation. De plus, les pré requis sont ceux de l'automatique fréquentielle classique.

En conclusion, dans le cadre de l'automatique fréquentielle appliquée aux systèmes linéaires stationnaires, une forte évolution est intervenue dans les années 80. Les concepts de base de l'automatique fréquentielle classique ont été conservés :

- le cahier des charges se traduit par des contraintes sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée : notamment nécessité de la rétroaction pour le rejet de perturbation non mesurée (objectif de désensibilisation) ;
- un système physique est représenté par une famille de modèles : importance de la robustesse ;
- rôle fondamental des schéma-blocs.

Une solution élégante a été apportée au défaut le plus important de l'automatique fréquentielle qui est l'absence de formalisation mathématique précise du cahier des charges. Cela a permis des développements théoriques importants qui ont mené à des solutions exactes, très souvent de complexité importante. Le cadre théorique est actuellement très complet. Parallèlement à cela, des solutions dotées d'algorithmes efficaces, faisant appel à l'optimisation convexe, ont été recherchées. Elles sont basées sur des conditions suffisantes. Du fait de ce conservatisme, elle nécessite une certaine expertise de la part de l'utilisateur. De notre point de vue, doivent être privilégiées celles qui nécessitent essentiellement une expertise en automatique, par rapport à celle qui nécessite aussi une expertise en optimisation. Si le volet "théorie" a été bien cerné, beaucoup de travail est encore nécessaire sur le volet "outils et méthodes".

5. Non linéaire : du séquençement de gains à la norme incrémentale

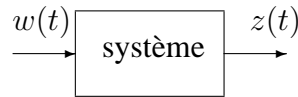
6. De l'art d'obtenir des formulations convexes : tentative d'approche

Une approche générale pour l'analyse et la commande des systèmes par optimisation convexe est en train d'émerger (voir la thèse [SCO 97a, SCO 98]). La méthodologie proposée repose sur la démarche suivante :

- 1) Description du comportement d'un système par des *contraintes quadratiques*
- 2) Modélisation d'un système par *Interconnexion*
- 3) Analyse des systèmes par optimisation, pour la
 - Stabilité : *Séparation des graphes*
 - Performance : *S procédure*
- 4) Synthèse de Correcteurs par utilisation du Lemme d'*Elimination*

Description du comportement d'un système par des contraintes quadratiques

Comment caractériser le comportement d'un système, éventuellement non linéaire, non stationnaire ? A une entrée donnée du système $w(t)$, correspond une sortie $z(t)$



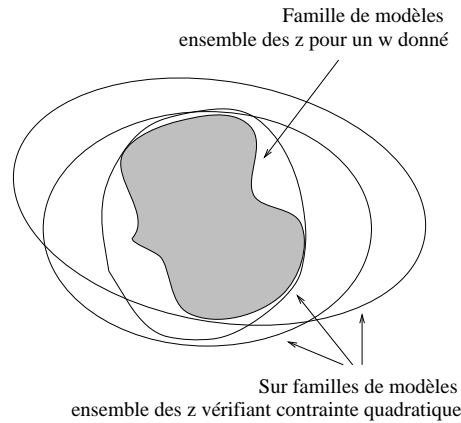
déterminée si on considère que l'on est capable de décrire le système par un modèle unique ou même un ensemble de sorties $z(t)$ si, selon le point de vue de la commande robuste, le système est décrit par une famille de modèles (modèle incertain). L'ensemble des couples $(z(t), w(t))$ est appelé graphe. On peut alors ramener l'étude du comportement du système à celui de son graphe. La question qu'on se pose est de déterminer, pour un ensemble de signaux d'entrée $w(t)$, la famille des signaux de sortie $z(t)$.

L'idée est de caractériser ces ensembles par des contraintes quadratiques. Par exemple, si on note \mathcal{L}_2 l'ensemble des signaux d'énergie finie :

$$\left\{ w \mid \int_0^{+\infty} w(t)^T w(t) dt < \infty \right\}$$

une première caractérisation est la stabilité : pour tout $w \in \mathcal{L}_2, z \in \mathcal{L}_2$ ²¹. Une caractérisation plus fine peut être obtenue à travers la \mathcal{L}_2 gain stabilité : le système est

21. L'instabilité peut se définir à partir de $\mathcal{L}_2^c = \left\{ w \mid \forall T > 0, \int_0^T w(t)^T w(t) dt < \infty \right\}$. Un système est instable si pour une entrée $w \in \mathcal{L}_2$, la sortie z appartient à $\mathcal{L}_2^c \setminus \mathcal{L}_2$.



stable et de plus, on peut définir une borne sur l'amplification énergétique maximale (\mathcal{L}_2 gain) : $\exists \gamma \geq 0, \forall Tw, \forall T \geq 0,$

$$\int_0^T z(t)^T z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T w(t)^T w(t) dt$$

Il est possible de définir une caractérisation plus fine des signaux en considérant une contrainte quadratique en w et z plus générale : $\{X, Y, Z\}$ dissipativité où $X \leq 0, Y$ et Z sont trois matrices telles que :

$$\forall T \geq 0, \int_0^T \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt \geq 0$$

Cette caractérisation inclue la \mathcal{L}_2 gain stabilité et la passivité

gain \mathcal{L}_2 inférieur à γ $X = -I, Y = 0$ et $Z = \gamma^2 I$

passivité $X = 0, Y = I$ et $Z = 0$

Enfin une caractérisation très fine peut être obtenue dans le domaine fréquentiel : $\{X(j\omega), Y(j\omega), Z(j\omega)\}$ dissipativité, avec $X(j\omega) \leq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X(j\omega) & Y(j\omega) \\ Y(j\omega)^* & Z(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0$$

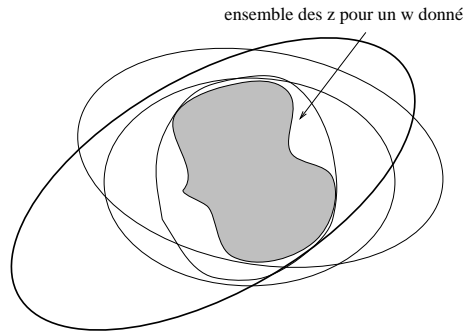
Cela correspond par exemple à la formalisation de la performance par l'utilisation de la norme H_∞ pondérée. Dans la suite de la section, par simplicité, on considérera la caractérisation par des propriétés de $\{X, Y, Z\}$ dissipativité.

Dans ce contexte-là, analyser un système revient à :

- Vérifier sa (\mathcal{L}_2 gain) stabilité

– Etudier sa “performance” à travers de la caractérisation de son comportement par :

- la vérification d’une propriété de dissipativité particulière (par exemple H_∞)



- la paramétrisation d’un ensemble de propriétés de dissipativité

Modélisation d’un système par Interconnexion Une approche classique en théorie des systèmes est de modéliser les systèmes (complexes) comme une interconnexion de sous-systèmes élémentaires Δ_i (figure 20). Dans le cadre considéré ici, on peut définir un système élémentaire comme un système pour lequel on a une (paramétrisation des) propriété(s) de dissipativité. Par exemple, on peut définir 3 ensembles $\mathbf{X}(\Delta_i)$, $\mathbf{Y}(\Delta_i)$ et $\mathbf{Z}(\Delta_i)$ tels que chaque Δ_i est $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ dissipativité avec $X_i \in \mathbf{X}(\Delta_i)$, $Y_i \in \mathbf{Y}(\Delta_i)$, $Z_i \in \mathbf{Z}(\Delta_i)$. A partir de ces ensembles, il est possible de construire 3 ensembles $\mathbf{X}(\Delta)$, $\mathbf{Y}(\Delta)$ et $\mathbf{Z}(\Delta)$ tels que Δ est $\{X, Y, Z\}$ dissipativité avec $X \in \mathbf{X}(\Delta)$, $Y \in \mathbf{Y}(\Delta)$, $Z \in \mathbf{Z}(\Delta)$. La description est d’autant plus fine que l’ensemble des contraintes quadratiques considérées est riche. Cependant au plus la description sera fine, au plus la complexité des critères d’analyse et de commande sera importante.

L’analyse du système interconnecté revient alors à rechercher une ou plusieurs propriétés de dissipativité vérifiées par ses entrées et ses sorties, connaissant (une paramétrisation des) propriété(s) de dissipativité de chacun de ses sous systèmes Δ_i et le “schéma” d’interconnexion M (voir la figure 20).

Exemple Comme exemple de système “complexe”, on peut citer les systèmes linéaires stationnaires d’équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax+Bw \\ z(t) &= Cx+Dw \end{cases} \quad [15]$$

Un tel système peut être vu comme l’interconnexion d’intégrateurs, le schéma d’interconnexion M étant donné par la matrice de gains (voir la figure 21) : $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

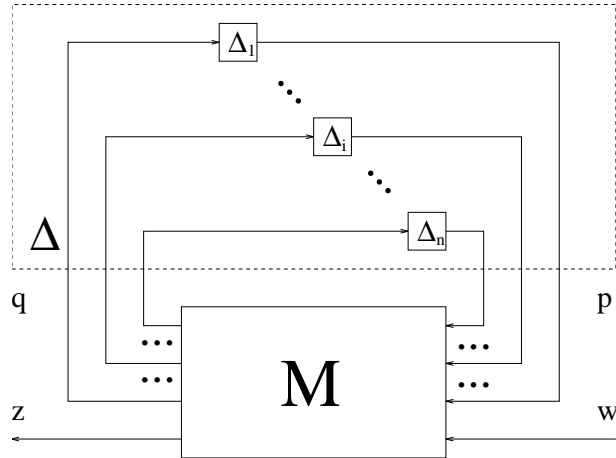


Figure 20. Modélisation par un système interconnecté

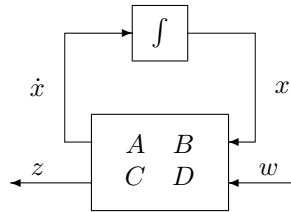


Figure 21. Système linéaire stationnaire

Il est simple de trouver un ensemble de contraintes quadratiques vérifiées par les intégrateurs. Avec une condition initiale nulle, on a :

$$\forall T > 0, \int_0^T x(t)^T \dot{x}(t) dt = \frac{1}{2} x(T)^T x(T) \geq 0.$$

Ils sont donc passifs ($\{0, I, 0\}$ -dissipatifs). En introduisant une matrice définie positive P , on peut obtenir une paramétrisation d'un ensemble de contraintes quadratiques :

$$\forall T > 0, \int_0^T x(t)^T P \dot{x}(t) dt = \frac{1}{2} x(T)^T P x(T) \geq 0.$$

Par suite, les signaux aux bornes des intégrateurs vérifient une famille de contraintes quadratiques paramétrisées par la matrice définie positive P (ils sont $\{0, P, 0\}$ -dissipatifs). On peut donc les considérer comme des systèmes élémentaires.

Analyse de la stabilité La stabilité interne du système interconnecté représenté figure 21 peut être définie par le fait que l'opérateur qui à w_1 et w_2 associe p et q est \mathcal{L}_2 gain stable (voir figure 22).

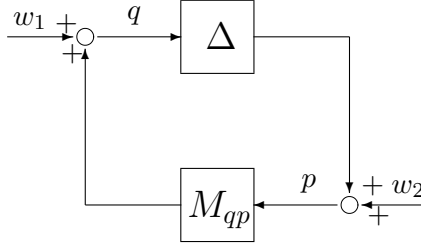


Figure 22. Stabilité interne

Les théorèmes de stabilité sont basés sur la notion de *séparation des graphes* [SAF 80]. Dans le cas de la $\{X, Y, Z\}$ dissipativité, si

- 1) pour les signaux $p(t)$ et $q(t)$ tels que $p(t) = \Delta(q(t))$:

$$\forall T > 0, \int_0^T \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \geq 0$$

- 2) pour les signaux $p(t)$ et $q(t)$ tels que $q(t) = M_{qp}p(t)$: il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall T > 0, \int_0^T \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \leq -\epsilon \int_0^T (p(t)^T p(t) + q(t)^T q(t)) dt$$

(ces deux conditions assurent que les graphes de Δ et de M_{qp} n'ont que $(0, 0)$ comme point commun) alors le système interconnecté représenté figure 22 est intérieurement stable.

Théorème La stabilité interne est assurée s'il existe $X \in \mathbf{X}(\Delta)$, $Y \in \mathbf{Y}(\Delta)$ et $Z \in \mathbf{Z}(\Delta)$ telles que

$$\begin{bmatrix} M_{qp} \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z & Y^T \\ Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{qp} \\ I \end{bmatrix} < 0. \quad [16]$$

Dans le cas où les ensembles $\mathbf{X}(\Delta)$, $\mathbf{Y}(\Delta)$, $\mathbf{Z}(\Delta)$ sont affines, trouver $X \in \mathbf{X}(\Delta)$, $Y \in \mathbf{Y}(\Delta)$ et $Z \in \mathbf{Z}(\Delta)$ tels que la condition (16) soit satisfaite est un problème de faisabilité LMI (voir page 14).

Exemple (suite) Puisque les intégrateurs sont $\{0, P, 0\}$ -dissipatifs, d'après le théorème de séparation des graphes, le système (20) est intérieurement stable si pour $\dot{x} = Ax$ on a :

$$\forall T > 0, \int_0^T \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} dt \leq -\epsilon \int_0^T (x(t)^T x(t) + \dot{x}(t)^T \dot{x}(t)) dt$$

ce qui est assuré par :

$$A^T P + P A < 0. \quad [17]$$

Il suffit alors de trouver une matrice P définie positive (c'est-à-dire d'exhiber une propriété de $\{X, Y, Z\}$ dissipativité vérifiée par Δ) telle que la condition (17) soit satisfaite (condition de séparation des graphes) pour démontrer la stabilité interne. On retrouve la condition obtenue par le théorème de Lyapunov.

Analyse de la performance La performance pour le système interconnecté, représenté figure 20, peut être définie comme la stabilité interne et une propriété de $\{X_{perf}, Y_{perf}, Z_{perf}\}$ dissipativité vérifiée par les entrées/sorties z et w .

Des conditions garantissant la performance peuvent être obtenues à partir de la S procédure [JAK er].

$$\sigma_0 = \int_0^T \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{perf} & Y_{perf} \\ Y_{perf}^T & Z_{perf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt > 0$$

pour $z(t), w(t), p(t)$ et $q(t)$ tels que $\begin{bmatrix} q(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} p(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$

$$\sigma_1 = \int_0^T \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \geq 0$$

est vérifiée si $\exists \tau \geq 0$ tel que

$$\forall (p, w), \quad \sigma_0(p, w) > \tau \sigma_1(p, w).$$

Théorème Le système est performant s'il existe $X \in \mathbf{X}(\Delta)$, $Y \in \mathbf{Y}(\Delta)$ et $Z \in \mathbf{Z}(\Delta)$ telles que

$$\begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{cc|cc} Z & 0 & Y^T & 0 \\ 0 & -X_{perf} & 0 & -Y_{perf} \\ \hline Y & 0 & X & 0 \\ 0 & -Y_{perf}^T & 0 & -Z_{perf} \end{array} \right] \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad [18]$$

Dans le cas où les ensembles $\mathbf{X}(\Delta)$, $\mathbf{Y}(\Delta)$, $\mathbf{Z}(\Delta)$ sont affines, trouver $X \in \mathbf{X}(\Delta)$, $Y \in \mathbf{Y}(\Delta)$ et $Z \in \mathbf{Z}(\Delta)$ tels que la condition (18) soit satisfaite est un problème de faisabilité LMI (voir page 14).

Exemple (suite) On cherche une condition garantissant que le système (20) est \mathcal{L}_2 gain stable, avec un \mathcal{L}_2 gain inférieur à γ (soit une propriété de $\{-I, 0, \gamma^2 I\}$ dissipativité). Puisque nous sommes dans le cas de systèmes linéaires stationnaires, le \mathcal{L}_2 gain correspond à la norme H_∞ de la fonction de transfert $G(p) = D + C(pI - A)^{-1}B$ avec

$$\|G\|_\infty = \sup_{\mathbf{Re}(p) > 0} \bar{\sigma}(H(p)) = \sup_{\omega \in [0, +\infty]} \bar{\sigma}(H(j\omega)).$$

Par application du théorème précédent, on obtient : trouver P telle que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

On retrouve la condition du lemme borné réel (cas particulier du lemme de Kalman Yakubovitch Popov) évoqué à la section 3.

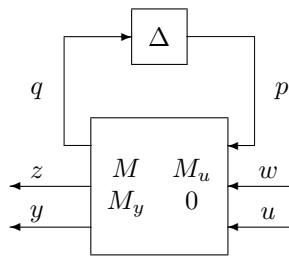


Figure 23. *Système à commander*

Synthèse de correcteurs On veut connecté le système interconnecté à commander (voir figure 23) avec un autre système interconnecté à déterminer (correcteur) de telle façon à ce que le système bouclé (voir la figure 24) soit stable et $\{X_{perf}, Y_{perf}, Z_{perf}\}$ dissipatif entre w et z . Le système interconnecté à déterminer s'écrit comme la connexion

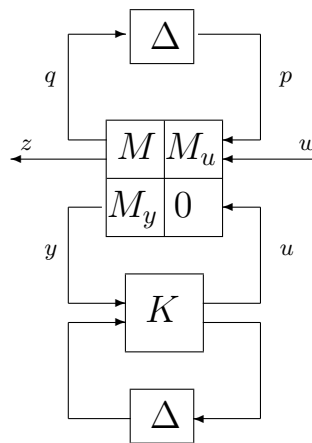


Figure 24. *Commande d'un système interconnecté*

d'une matrice de gains K à déterminer et d'une copie des sous systèmes Δ du système à commander. Le système en boucle fermée peut se réécrire de façon équivalente

comme cela est représenté figure 25. La recherche du correcteur revient à compléter l'interconnexion du système en boucle fermée. La démarche consiste à appliquer le

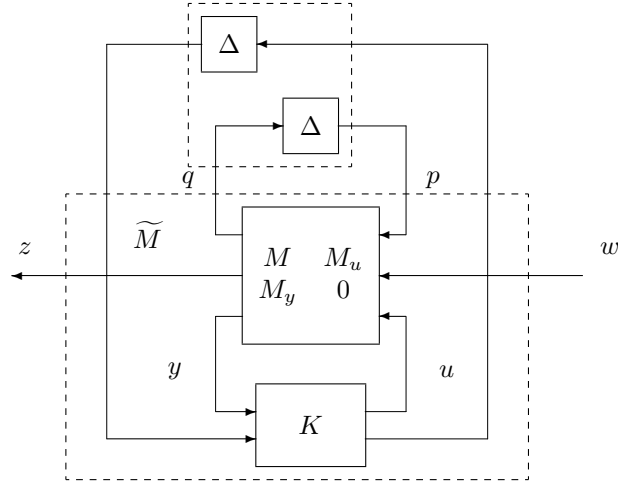


Figure 25. *Système à commander*

théorème d'analyse de la performance au système en boucle fermée représenté figure 25. En introduisant la décomposition :

$$\left[\begin{array}{c|c} M & M_u \\ \hline M_y & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} M_{qp} & M_{qw} & M_{qu} \\ M_{zp} & M_{zw} & M_{zu} \\ \hline M_{yp} & M_{yw} & 0 \end{array} \right]$$

on a :

$$\widetilde{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{qp} & 0 & M_{qw} \\ 0 & 0 & 0 \\ M_{zp} & 0 & M_{zw} \end{bmatrix}}_{\overline{M}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_{qu} \\ I & 0 \\ 0 & M_{zu} \end{bmatrix}}_{\overline{M}_u} K \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ M_{yp} & 0 & M_{yw} \end{bmatrix}}_{\overline{M}_y}$$

Par suite, le système en boucle fermée s'écrit comme la connexion de \overline{M} sur les sous systèmes

$$\overline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}.$$

A partir des ensembles $\mathbf{X}(\Delta)$, $\mathbf{Y}(\Delta)$ et $\mathbf{Z}(\Delta)$, il est possible de déterminer des ensembles $\mathbf{X}(\overline{\Delta})$, $\mathbf{Y}(\overline{\Delta})$ et $\mathbf{Z}(\overline{\Delta})$. D'après le théorème d'analyse de la performance,

le système bouclé sera stable et performant s'il existe $\bar{X} \in \mathbf{X}(\bar{\Delta})$, $\bar{Y} \in \mathbf{Y}(\bar{\Delta})$ et $\bar{Z} \in \mathbf{Z}(\bar{\Delta})$ tels que

$$\left[\begin{array}{c} \bar{M} + \bar{M}_u K \bar{M}_y \\ I_n \end{array} \right]^T \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \bar{Z} & 0 & \bar{Y}^T & 0 \\ 0 & -X_{perf} & 0 & -Y_{perf} \\ \hline \bar{Y} & 0 & \bar{X} & 0 \\ 0 & -Y_{perf}^T & 0 & -Z_{perf} \end{array} \right]}_{\left[\begin{array}{c} \underline{X} \quad \underline{Y} \\ \underline{Y}^T \quad \underline{Z} \end{array} \right]} \left[\begin{array}{c} \bar{M} + \bar{M}_u K \bar{M}_y \\ I_n \end{array} \right] < 0. \quad [19]$$

Dans cette inégalité, les matrices à déterminer sont K , $\mathbf{X}(\bar{\Delta})$, $\mathbf{Y}(\bar{\Delta})$ et $\mathbf{Z}(\bar{\Delta})$. La matrice ne dépendant pas de façon affine de ces variables, le problème ne peut pas s'écrire comme un problème d'optimisation LMI (faisabilité). Cependant, le *lemme d'élimination* [BOY 94] permet de réécrire ce problème sous une forme équivalente où la matrice K a disparu.

Théorème Il existe une matrice $K \in \mathbf{R}^{k \times l}$ telle que la condition (19) soit satisfaite si et seulement si

$$\bar{M}_y^{\perp T} \left[\begin{array}{c} \bar{M} \\ I_n \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \underline{X} \quad \underline{Y} \\ \underline{Y}^T \quad \underline{Z} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{M} \\ I_n \end{array} \right] \bar{M}_y^{\perp} < 0$$

$$\bar{M}_u^{\perp T} \left[\begin{array}{c} \bar{M}^T \\ I_n \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \tilde{X} \quad \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^T \quad \tilde{Z} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{M}^T \\ I_n \end{array} \right] \bar{M}_u^{\perp} < 0$$

avec \tilde{X} , \tilde{Y} et \tilde{Z} avec $\bar{M}_u^{\perp T}$ qui représente la matrice orthogonal de la matrice \bar{M}_u^T et :

$$\left[\begin{array}{c} \underline{X} \quad \underline{Y} \\ \underline{Y}^T \quad \underline{Z} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -\tilde{Z} & \tilde{Y}^T \\ \tilde{Y} & -\tilde{X} \end{array} \right] = I$$

Dans le cas considéré, les deux inégalités et la contrainte égalité associée se simplifient de façon à obtenir un problème de faisabilité LMI (pour détails, voir [SCO 97a]). Une fois ce problème résolu, le correcteur peut être obtenu.

Exemple (suite) Soit le système à commander :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{aligned}$$

On recherche une loi de commande par retour d'état de même ordre que le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K + B_K y \\ u(t) = C_K x_K + D_K y \end{cases} \quad [20]$$

(c'est-à-dire la matrice $K = \left[\begin{array}{cc} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{array} \right]$) qui assure que :

- 1) le système bouclé est stable ;
- 2) la norme H_∞ de la fonction de transfert en boucle fermée entre l'entrée w et la sortie z est inférieure à γ (soit une propriété de $\{-I, 0, \gamma^2 I\}$ dissipativité).

L'application du théorème présenté ci-dessus mène au résultat suivant : un tel correcteur existe si et seulement s'il existe deux matrices P et Q telles que :

$$\begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}_\perp^T \begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}_\perp \leq 0 \quad [21]$$

$$\begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix}_\perp^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_w & C_z^T \\ B_w^T P & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix}_\perp \leq 0 \quad [22]$$

et

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad [23]$$

Tester l'existence d'un correcteur qui assure un "niveau de performance" γ donné est un problème de faisabilité LMI. Tester l'existence d'un correcteur qui assure le plus petit "niveau de performance" γ peut s'écrire comme un problème de minimisation d'un coût linéaire sous contrainte LMI.

7. Conclusion

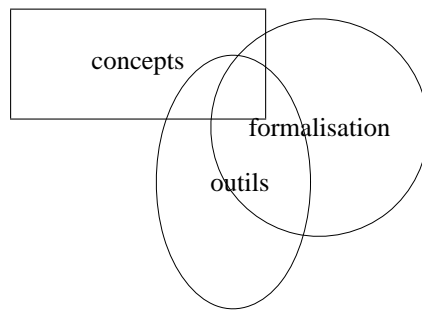
Le développement de l'automatique fréquentielle répond à un besoin industriel de méthodologies (pas forcément simplistes) basées sur des outils simples et accessibles.

Pour cela, l'automatique fréquentielle classique a développé des outils graphiques qui, face aux exigences actuelles, ne sont plus adaptés. Dès le début des années 80, il a été proposé de développer, dans le cadre des systèmes linéaires stationnaires, de nouveaux outils. Pour cela, les concepts fondateurs de l'automatique classique ont été conservés, cependant une formalisation du cahier des charges a été entreprise qui a permis de bien poser le problème. A partir de celle-ci, des outils ont été proposés sous la forme d'algorithme d'optimisation convexe. Face à la complexité intrinsèque des problèmes et dans l'optique d'obtenir des outils efficaces et accessibles, l'accent a été mis sur la recherche d'un compromis entre la conservatisme des conditions sous jacentes aux outils et la complexité des algorithmes de résolution.

Dans le cadre des systèmes linéaires stationnaires, la formalisation est très avancées. Beaucoup de travaux ont été faits au niveau des outils : cependant beaucoup de travail reste à faire. On dispose maintenant d'une palette d'outils de mise au point des

asservissements multivariables (analyse et synthèse). Cependant, le tableau général n'est pas encore achevé.

Dans le cadre des systèmes non linéaires, la même démarche a été appliquée très récemment. L'introduction de la norme incrémentale (pondérée) pour la formalisation du cahier des charges a permis de proposer une formalisation assez complète du problème d'asservissement non linéaire. Les travaux au niveau des outils ont débuter : beaucoup reste à faire ! Cependant les premiers résultats obtenus avec des outils très conservatif sont particulièrement encourageant.



En fait, les succès de l'automatique "fréquentielle" vient de ce qu'elle se situe au delà des clivages traditionnels : théorie/pratique, ancien/moderne, linéaire/non linéaire. Comme l'illustre par exemple la nécessité de la borne supérieure de μ pour assurer la stabilité face à des incertitudes dynamiques variant lentement dans le temps, il est important d'intervenir sur les différents maillons de la chaîne, des concepts au développement et à la mise en œuvre des outils. C'est ce qui rend sans doute l'automatique fréquentielle si excitante !

8. Bibliographie

- [ÅST 00] ÅSTRÖM K. J., « *Lecture Notes on Iterative Identification and Control Design* », chapitre Model uncertainty and robust control, p. 63-100, 2000.
- [BLA 34] BLACK H. S., « Stabilized Feedback Amplifiers », *Bell System Technical Journal*, vol. 13, 1934, p. 1-18.
- [BOD 45] BODE H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, New York, 1945.
- [BOY 91] BOYD S., BARRATT C., *Linear Controller Design : Limits of Performance*, Prentice-Hall, 1991.
- [BOY 93] BOYD S., EL GHAOUI L., « Method of Centers For Minimizing Generalized Eigenvalues », *Linear Algebra and Applications, special issue on Numerical Linear Algebra Methods in Control, Signals and Systems*, vol. 188, 1993, p. 63-111.

- [BOY 94] BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V., *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, vol. 15 de *Studies in Appl. Math.*, SIAM, Philadelphia, juin 1994.
- [BRA 94] BRAATZ R. D., YOUNG P. M., DOYLE J. C., MORARI M., « Computational complexity of μ calculation », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-39, n° 5, 1994, p. 1000-1002.
- [CHI 96] CHILALI M., « Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multi-critère », PhD thesis, Université Paris Dauphine, Paris, France, 1996.
- [CHO 95] CHOU Y., TITS A., « On Robust Stability Under Slowly-Varying Memoryless Uncertainty », *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, New Orleans, LA, décembre 1995.
- [COL 97] COLANERI P., GÉROMEL J., LOCATELLI A., *Control theory and design, a RH_2 and RH_∞ viewpoint*, Academic Press, 1997.
- [DAM 01] DAMEN A., WEILAND S., *Robust Control*, Polycopié de la Technische Universiteit d'Eindhoven disponible sur <http://www.er.ele.tue.nl/pages/people/index2.html>, 2001.
- [DES 75] DESOER C. A., VIDYASAGAR M., *Feedback Systems : Input-Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.
- [DOY 78] DOYLE J., « Guaranteed Margins for LQG Regulators », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-23, n° 4, 1978, p. 756-757.
- [DOY 81] DOYLE J., STEIN G., « Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, n° 1, 1981, p. 4-16.
- [DOY 82a] DOYLE J., WALL J. E., STEIN G., « Performance and Robustness Analysis for Structured Uncertainties », *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, 1982, p. 629-636.
- [DOY 82b] DOYLE J., « Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties », *IEE Proc.*, vol. 129-D, n° 6, 1982, p. 242-250.
- [DOY 89] DOYLE J., GLOVER K., KHARGONEKAR P. P., FRANCIS B. A., « State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 34, n° 8, 1989, p. 831-847.
- [DOY 95] DOYLE J., WILLEMS J., « The Behavioral Approach to Systems and Control », Tutorial Workshop, Conference on Decision and Control, décembre 1995.
- [DUC 94] DUC G., *Robustesse des systèmes linéaires multivariés*, Ecole Supérieure d'Electricité, 1994.
- [DUC 99] DUC G., FONT S., *Commande H_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*, Hermès, 1999.
- [EI 95] EL GHAOUI L., NIKOUKHAH R., DELEBECQUE F., « LMIT00L : A front-end for LMI optimization, users's guide », février 1995, Available via anonymous ftp to <ftp.ensta.fr>, under /pub/elghaoui/lmitool.
- [FAN 91] FAN M. K. H., TITS A. L., DOYLE J. C., « Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 36, n° 1, 1991, p. 25-38.
- [FER 95a] FERRERES G., « De l'utilisation des outils de robustesse pour la commande adaptative », PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, janvier 1995.
- [FER 95b] FERRERES G., FROMION V., M'SAAD M., « Set-membership identification for adaptive H_∞ control », *submitted to the int. J. of Robust and Nonlinear Control*, , 1995.

- [FER 96] FERRERES G., FROMION V., DUC G., M'SAAD M., « Non-Conservative Robustness Evaluation of a Multivariable H_∞ Missile Autopilot », *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 6, n° 8, 1996, p. 743-769.
- [FER 98] FERRERES G., SCORLETTI G., « Robustness Analysis in Presence of Time Delays », *IFAC Workshop on Linear Time-Delay systems*, Grenoble, France, juillet 1998.
- [FER 99] FERRERES G., FROMION V., « H_∞ control for a flexible transmission system », *European Journal of Control*, vol. 5, n° 2-4, 1999, p. 185-192.
- [FOL 97] FOLCHER J., « Approche Multicritère par Formulation LMI de la Commande des Systèmes », PhD thesis, Université Paris VI, décembre 1997.
- [FON 94] FONT S., DUC G., « H_∞ control of an electromechanical drive with nonlinearities using a multiblock-Criterion », *Control Engineering Practice*, vol. 2, n° 6, 1994, p. 1019-1030.
- [FON 95] FONT S., « Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis : optimisation H_∞ et approche symbolique de la forme standard », PhD thesis, Université Paris XI Orsay, France, 1995.
- [FRO 95] FROMION V., « Une approche incrémentale de la robustesse non linéaire ; application au domaine de l'aéronautique », PhD thesis, Université de Paris Sud Orsay, janvier 1995.
- [FRO 99] FROMION V., SCORLETTI G., FERRERES G., « Nonlinear Performance of a PID controlled missile : a simple explanation », *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, n° 9, 1999, p. 485-518.
- [FRO 01] FROMION V., MONACO S., NORMAND-CYROT D., « The weighted incremental norm approach : from linear to nonlinear H_∞ control », *Automatica*, vol. 37, n° 10, 2001, p. 1585-1592.
- [GAH 94] GAHINET P., APKARIAN P., « A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control », *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, 1994, p. 421-448.
- [GAH 95] GAHINET P., NEMIROVSKY A., LAUB A. L., CHILALI M., *LMI Control Toolbox*, The Mathworks Inc., 1995.
- [GAS 88] GASTON R. R. E. D., SAFONOV M. G., « Exact Calculation of the Multiloop Stability Margin », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 33, n° 2, 1988, p. 156-171.
- [HBA 02] HBAIEB S., « Optimisation convexe pour la commande », PhD thesis, Université d'Orsay, Paris, France, 2002, In French.
- [HOR 63] HOROWITZ I. M., *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, New York, 1963.
- [IWA 98] IWASAKI T., HARA S., « Well-posedness of Feedback Systems : Insights into Exact Robustness Analysis and Approximate Computations », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 43, 1998, p. 619-630.
- [JAK er] JAKUBOVIČ V., « The \mathcal{S} -procedure in nonlinear control theory », *Vestnik Leningrad Univ. (russian) Vestnik Leningrad Univ. Math. (amer.)*, vol. 4 (amer.), n° 1 (russian), 1971 (russian) 1977 (amer.).
- [LAB 02] LABIT Y., PEAUCELLE D., HENRION D., « SeDuMi Interface 1.02 : a Tool for Solving LMI Problems with SeDuMi », *CACSD Conference, Glasgow*, September 2002.

- [LY 94] LY J., SAFONOV M., CHIANG R., « Real / Complex Multivariable Stability Margin Computation via Generalized Popov Multiplier - LMI Approach », *Proc. American Control Conf.*, 1994.
- [MAC 89] MACIEJOWSKI J. M., *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, 1989.
- [MAG 99] MAGAROTTO E., « Approche LMI pour la Synthèse de Correcteurs et d'Observateurs : Application aux Systèmes Spatiaux et aux Systèmes Bilinéaires », PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 1999.
- [MEG 97] MEGRETSKI A., RANTZER A., « System Analysis via Integral Quadratic Constraints », *IEEE Trans. Aut. Control*, , 1997, p. 819-830.
- [NEM 93] NEMIROVSKII A., « Several NP-Hard Problems Arising in Robust Stability Analysis », *MCSS*, vol. 6, 1993, p. 99-105.
- [NES 93] NESTEROV Y., NEMIROVSKY A., *Interior-point polynomial methods in convex programming*, N° 13 Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1993.
- [NES 94] NESTEROV Y., NEMIROVSKY A., *Interior point polynomial methods in convex programming : Theory and applications*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [NIK 95] NIKOUKHAH R., DELEBECQUE F., GHAOUI L. E., « LMIT00L : a Package for LMI optimization in Scilab », rapport, 1995, INRIA Rocquencourt.
- [NYQ 32] NYQUIST H., « Regeneration theory », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 11, 1932, p. 126-147.
- [PEA 00] PEAUCELLE D., « Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres », PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse III, Toulouse, France, 2000.
- [POO 95] POOLLA K., TIKKU A., « Robust Performance Against Time-Varying Structured Perturbations », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 40, n° 9, 1995, p. 1589-1602.
- [POP 73] POPOV V. M., *Hyperstability of Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [SAF 78] SAFONOV M. G., « Large Scale Systems Research : A perspective », *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 1978, p. 474-476.
- [SAF 80] SAFONOV M. G., *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*, MIT Press, Cambridge, 1980.
- [SAF 81a] SAFONOV M. G., ATHANS M., « A Multiloop Generalization of the Circle Criterion for Stability Margin Analysis », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, n° 2, 1981, p. 415-422.
- [SAF 81b] SAFONOV M., LAUB A., HARTMANN G., « Feedback Properties of Multivariable Systems : The Role and Use of the Return Difference Matrix », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 26, n° 1, 1981, p. 47-67.
- [SAF 82] SAFONOV M. G., « Stability Margin of Diagonally Perturbed Multivariable Feedback Systems », *IEE Proc., Part D*, vol. 129, n° 6, 1982, p. 251-256.
- [SAF 93] SAFONOV M., LEE P., « A Multiplier Method for Computing Real Multivariable Stability Margin », *IFAC World Congress*, Sydney, Australia, juillet 1993.
- [SAN 65] SANDBERG I. W., « Some Results in the Theory of Physical Systems Governed by Nonlinear Functional Equations », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, 1965, p. 871-898.
- [SCH 97] SCHERER C., GAHINET P., CHILALI M., « Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 42, n° 7, 1997, p. 896-911.

- [SCO 97a] SCORLETTI G., « Approche Unifiée de l'analyse et la commande des systèmes par formulation LMI », PhD thesis, Université d'Orsay, Paris, France, 1997, In French.
- [SCO 97b] SCORLETTI G., FROMION V., « Robustness Analysis with Time Delays », rapport, 1997, CESAME, In preparation.
- [SCO 98] SCORLETTI G., GHAOUI L. E., « Improved LMI Conditions for Gain Scheduling and Related Problems », *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, n° 10, 1998, p. 845-877.
- [SCO 01] SCORLETTI G., FROMION V., *Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle H_∞* , Polycopié Université/ENSI Caen disponible sur http://www.greyc.ismra.fr/LAP/Gerard_S/ENSI_comrob.html, 2001.
- [SKO 96] SKOGESTAD S., POSTLETHWAITE I., *Multivariable Feedback Control*, John Wiley and Sons Chichester, 1996.
- [TIT 99] TITS A., BALAKRISHNAN V., LEE L., « Robustness under bounded uncertainty with phase information », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 44, n° 1, 1999.
- [VAN 96] VANDENBERGHE L., BOYD S., « Semidefinite programming », *SIAM Review*, vol. 38, n° 1, 1996, p. 49-95.
- [WIL 69] WILLEMS J. C., *The Analysis of Feedback Systems*, vol. 62 de *Research Monographs*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.
- [WIL 71] WILLEMS J. C., « Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-16, n° 6, 1971, p. 621-634.
- [ZAM 60] ZAMES G., « Nonlinear Operators for System Analysis », rapport n° 370, août 1960, Massachusetts Institut of Technology.
- [ZAM 66] ZAMES G., « On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems—Part I, II », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 11, 1966.
- [ZAM 81] ZAMES G., « Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, n° 2, 1981, p. 301-320.
- [ZHO 95] ZHOU K., DOYLE J., GLOVER K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.