



UNIVERSITE DE CAEN/BASSE-NORMANDIE

U.F.R. : SCIENCES CAEN

ECOLE DOCTORALE : SIMEM

THESE

présentée par

Philippe POGNANT-GROS

soutenue le 7 février 2003

en vue d'obtenir

LE DOCTORAT de l'UNIVERSITE de CAEN

Spécialité : Automatique

(Arrêté du 25 avril 2002)

TITRE :

**DE LA REDUCTION DE MODELES
VERS LA COMMANDE ROBUSTE
APPLICATION A LA COMMANDE
DES CANAUX D'IRRIGATION**

Soutenue devant la commission d'examen :

B. DAHOU	Professeur à l'Université Paul Sabatier, Toulouse
C. DUBUC	Professeur à l'Université de Caen
G. DUC	Professeur à SUPELEC, Gif-sur-Yvette (Rapporteur)
L. DUGARD	Directeur de Recherche CNRS, INPG-Grenoble (Rapporteur)
V. FROMION	Chargé de Recherche, INRA Montpellier (Co-encadrant)
P.O. MALATERRE	Ingénieur de Recherche, CEMAGREF Montpellier
M. M'SAAD	Professeur à l'ISMRA, Caen (Directeur de thèse)
G. SCORLETTI	Maître de conférences à l'Université de Caen (Co-encadrant)

à mon père
à mon grand père

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Gérard Scorletti (LAP) qui m'a guidé tout à long de ce travail de thèse et dans ma charge d'enseignement de Moniteur. Ce mémoire est également le fruit de l'encadrement que m'a apporté Monsieur Vincent Fromion (INRA) dont l'effervescence des idées m'a été d'une aide essentielle. Qu'il me soit donné ici de leur exprimer toute ma considération pour la connaissance scientifique, la méthode que j'ai pu apprendre d'eux et toute la liberté qu'ils ont su m'accorder.

Je souhaiterais également exprimer toute ma considération à l'égard du Professeur Mohammed M'Saad qui, m'ayant transmis la passion de l'Automatique en deuxième année de l'ENSI-Caen, m'a accueilli au sein de son laboratoire. Je remercie Monsieur Jean-Pierre Villa, Directeur du LASB-INRA pour l'accueil toujours agréable au sein du LASB-INRA de Montpellier. J'exprime toute ma gratitude à Jean-Pierre Baume, Xavier Litrico et Pierre-Olivier Malaterre de l'Unité de Recherche Irrigation du CEMAGREF Montpellier pour leur enseignement de l'hydraulique et leur aide constante concernant la partie de la thèse consacrée à la commande des canaux d'irrigation.

Je tiens à remercier Gilles Duc, Professeur à SUPELEC, et Luc Dugard, Directeur de Recherche à l'INPG, de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de mon travail. Je leur suis très reconnaissant pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce mémoire ainsi que pour leurs commentaires enrichissants qui ont contribué à la finition de cette thèse. Je remercie vivement messieurs Boutaïb Dahhou, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, et Christian Dubuc, Professeur à l'Université de Caen et Directeur de l'UFR Sciences, de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury de thèse.

Chacun sait que le chemin qui mène à la thèse est long et passionnant et que le soutien reçu de toute personne est appréciable. Je saisis cette occasion pour remercier toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé et encouragé, en particulier Mika, Fabrice, Mathieu, Guy, Mondher, POM, Azedine, Laure, Simo et Guillaume. Enfin, je salue le travail administratif inestimable accompli par Thérèse, Cécile et Christine.

Table des matières

Introduction générale	1
Contexte de la thèse	1
Objectifs	1
Organisation du document	3
Notations	5
I Réduction de modèles	7
1 Problématique de la réduction de modèles	9
1.1 Position du problème, formulation	10
1.1.1 Pourquoi réduire?	10
1.1.2 Réduire un modèle pour la commande	11
1.1.3 Exemple académique	11
1.1.4 Complexité et mise au point d'une loi de commande	13
1.1.4.1 Quelques mots sur la complexité algorithmique	14
1.1.4.2 Les approches connues	14
1.2 Réduction pour des ensembles de signaux	16
1.2.1 Exemple de pondération de sortie	18
1.2.2 Classification des méthodes existantes	20
1.3 Les différents exemples étudiés	21
1.3.1 Exemple de Safonov et al.	23
1.3.2 L'exemple du TGEN	24
1.3.3 L'exemple du bief de type 1	25
2 Caractérisation du problème de réduction de modèles	27
2.1 Problèmes d'optimisation <i>LMI</i>	27
2.2 Formalisation du problème	28
2.2.1 Remarque sur la condition de rang	30
2.2.2 Construction d'un modèle réduit	31
2.3 L'erreur absolue	32
2.3.1 Borne inférieure	32
2.3.2 Recherche de la solution	32

2.3.3	Cas particuliers de réduction optimale	33
2.3.4	Minimisation du rang à γ fixé	35
2.3.4.1	Algorithme et propriétés principales	35
2.3.4.2	Conditions suffisantes de dégénérescence du rang de 1 par conditions <i>LMI</i>	36
2.3.4.3	Application à la réduction d'un modèle de bief	37
2.3.5	Limitation de l'erreur absolue	39
2.4	L'erreur relative	41
2.4.1	Un intérêt particulier pour l'approximation en module et en phase	41
2.4.2	Propriétés	43
2.4.3	Recherche d'une solution	43
2.4.4	Limitation des erreurs absolues et relatives	45
2.5	Erreur relative pondérée	46
2.6	Résumé	47
3	Etude de l'erreur absolue	49
3.1	Introduction	49
3.2	Représentations équilibrées	49
3.2.1	Ensembles commandables, observables pour des signaux L_2 bornés	50
3.2.2	Commandabilité	50
3.2.3	Observabilité	54
3.2.4	Transformations équilibrées	56
3.3	Troncature équilibrée	60
3.3.1	Propriétés de la troncature équilibrée	60
3.3.2	Finesse de la borne H_∞ dans 2 cas	61
3.3.3	Mise en œuvre	62
3.3.4	Etude des exemples	63
3.3.4.1	Exemple de Safonov et al.	63
3.3.4.2	Exemple du TGEN	65
3.3.4.3	Exemple du bief de type 1	67
3.3.5	Perturbation singulière pour la conservation du gain statique	69
3.3.5.1	Perturbation singulière dans une représentation équilibrée	69
3.3.5.2	Résumé	70
3.4	Réduction par la norme de Hankel	71
3.4.1	Définitions et propriétés principales de la norme de Hankel	71
3.4.2	Norme de Hankel et approximation optimale \mathcal{L}_∞ d'un transfert stable	73
3.4.3	Principe de la démonstration classique	78
3.4.3.1	Le "All-pass embedding"	78
3.4.3.2	Caractérisation des transferts "all-pass"	79
3.4.3.3	Application au cas sous-optimal	80
3.4.3.4	Paramétrisation des solutions sous-optimales	82
3.4.3.5	Mise en œuvre dans le cas sous-optimal	82
3.4.3.6	Démarche dans le cas optimal	83
3.4.3.7	Paramétrisation et mise en œuvre dans le cas optimal	85
3.4.4	Réduction pas à pas par la norme de Hankel	85
3.4.5	Borne supérieure H_∞ sur l'erreur Hankel-optimale	87
3.4.6	Etude des exemples	87
3.4.6.1	L'exemple de Safonov et al.	87

3.4.6.2	L'exemple du TGEN	90
3.4.6.3	Exemple du bief de type 1	91
4	Réduction au sens de l'erreur absolue pondérée	95
4.1	Approche par décomposition modale	96
4.1.1	Principe	96
4.1.2	Mise en œuvre	97
4.1.3	Connexion avec la méthode d'Al-Saggaf et al.	99
4.2	Troncature équilibrée pondérée	99
4.2.1	La méthode de Enns	101
4.2.2	Méthode de Lin et Chiu	104
4.2.3	Méthode de Wang et al.	105
4.2.4	A propos des 3 méthodes précédentes	107
4.2.5	Approximation optimale au sens de la norme de Hankel	107
4.2.5.1	Discussion générale	108
4.2.5.2	Cas de pondérations anticausales et inversement anticausales	109
4.2.5.3	Pondérations anticausales à zéros stables	111
4.2.5.4	Optimisation du terme direct D_r	112
4.3	Etude des exemples	114
4.3.1	L'exemple de Safonov	114
4.3.2	L'exemple du TGEN	116
4.3.3	Exemple du bief de type 1	118
5	L'erreur relative et l'approximation de la phase	121
5.1	Introduction	121
5.1.1	Formulations selon la nature de $G(p)$	121
5.1.2	Présentation de l'approche	122
5.2	Un cas particulier d'erreur pondérée	123
5.2.1	Réduction de l'erreur relative par la méthode de Enns	123
5.2.1.1	Le cas carré minimum de phase	123
5.2.1.2	Le cas carré non-minimum de phase	124
5.2.1.3	Le cas non-carré	124
5.2.2	Réduction de l'erreur relative selon la norme de Hankel	125
5.3	Le cadre général du phase matching	127
5.3.1	Réduction d'un spectre, approximation en phase	128
5.3.1.1	Relation de Bode	128
5.3.1.2	Perspective historique : séries temporelles	128
5.3.1.3	Interprétation du transfert de phase	129
5.3.2	Démarche du phase matching	130
5.3.3	Troncature équilibrée stochastique (BST)	132
5.3.3.1	Réalisations stochastiques équilibrées	132
5.3.3.2	Présentation de la troncature stochastique équilibrée	133
5.3.3.3	Mise en œuvre	134
5.3.3.4	Lien avec la méthode de Enns	134
5.3.4	Bornes sur l'erreur de gain et de phase en monovariante	135
5.4	Etude des exemples	136
5.4.1	Exemple de Safonov	136
5.4.2	Exemple du bief de type 1	140
5.5	Erreur relative pondérée	145

5.5.1	Réduction relative pondérée Hankel-optimale	145
5.5.2	Extension de la BST au cas pondéré	146
5.5.3	Exemple de Safonov	146
5.5.4	Exemple du bief de type 1	149
6	Réduction à pôles fixés	153
6.1	Principe de l'agrégation	153
6.1.1	Différents degrés de complexité	154
6.1.2	Agrégation et optimisation convexe	155
6.2	Approche directe	158
6.2.1	Réduction de modèles en erreur relative sur une gamme de pulsations	158
6.2.2	Solution du problème "à pôles fixés"	159
6.3	Etude des exemples	163
6.3.1	Exemple de Safonov	164
6.3.2	Exemple du bief de type 1	166
6.4	Résumé	167
II	Commande des canaux d'irrigation	169
7	Introduction à la commande des canaux d'irrigation	171
7.1	Introduction	171
7.2	Un système de distribution d'eau	171
7.3	Les équations de Saint-Venant	173
7.3.1	Modèle dynamique de l'écoulement	173
7.3.2	Les régimes d'équilibre : calcul des régimes permanents	175
7.4	Etapas préalables à la synthèse de contrôleur	175
7.5	Vers un modèle de dimension finie	177
7.5.1	La linéarisation exacte	177
7.5.2	Modèle linéaire de dimension finie	177
7.5.3	Analyse des modèles obtenus	178
7.6	De la commande d'un bief à la commande multivariable d'un canal	180
8	Commande d'un bief	183
8.1	PI aval distant	183
8.2	Analyse d'une solution possible	188
8.3	Correcteur H_∞ d'un bief	191
8.3.1	Synthèse d'un correcteur H_∞	191
8.3.1.1	Expression du cahier des charges en terme de contraintes H_∞	191
8.3.1.2	Un critère 4 blocs comme solution	193
8.3.2	Mise en oeuvre et analyse d'une solution possible	195
8.4	Obtention d'un correcteur d'ordre faible	199
8.4.1	Synthèse sur le modèle réduit	200
8.4.2	Réduction du correcteur	201
8.5	Résumé	205

9 Synthèse d'un correcteur H_∞ pour le canal d'irrigation	207
9.1 Transferts multivariables	207
9.1.1 Le modèle du canal	207
9.1.2 Matrices de transfert de la boucle fermée	209
9.2 Synthèse d'un correcteur H_∞	210
9.2.1 Expression du cahier des charges en terme de contraintes H_∞	210
9.2.2 La structure du critère	212
9.2.3 Mise en oeuvre et analyse d'une solution possible	212
9.3 Obtention d'un correcteur réduit	216
9.3.1 Synthèse sur un modèle d'ordre faible	216
9.3.2 Réduction du correcteur	216
9.4 Résumé	218
 Conclusions générales	 219
 III Annexes	 223
 A Réduction pour des classes de signaux	 225
A.1 Ensembles de signaux et pondérations	225
A.2 Démonstration du théorème 1.2.1	226
 B Lemmes utiles	 229
B.1 Lemme réel borné	229
B.2 Lemme de Schur	229
B.3 Lemme d'élimination des variables	230
B.4 Lemme de complétion d'une matrice définie positive	230
B.5 Lemme de complétion d'une matrice symétrique d'inertie donnée	230
B.6 Autres lemmes	231
 C Démonstrations de différents résultats du chapitre 2	 235
C.1 Commentaires et démonstration du théorème 2.2.1	235
C.1.1 Développement de la condition (C.3)	236
C.1.2 Développement de la condition (C.4)	239
C.2 Démonstration du lemme 2.4.2	240
C.3 Démonstration du lemme 2.5.1	241
 D Norme de Hankel	 243
D.1 L'opérateur de Hankel	243
 E Modèle TGEN	 245
 F Éléments de factorisation spectrale	 247
F.1 Ensemble des facteurs spectraux associés à un spectre	248
F.2 Propriétés associées aux solutions extrémales	250
F.3 Techniques de calcul	252
F.3.1 Calcul d'un facteur spectral à droite minimum de phase	252
F.3.2 Calcul d'un facteur spectral à gauche minimum de phase	253
F.3.3 Représentation d'état compacte associée à 2 facteurs spectraux	253

G Compléments sur les exemples	255
G.1 Exemple de Safonov	255
G.1.1 Erreur absolue	255
G.1.1.1 Troncature équilibrée	255
G.1.1.2 Approximation optimale au sens de la norme de Hankel	256
G.1.2 Erreur relative	257
G.1.2.1 BST	257
G.1.2.2 Hankel relatif pas à pas	258
H Modèle de bief discrétisé	261
Bibliographie	265
Résumé de la thèse	275
Résumé de la thèse en anglais	275

Introduction générale

Contexte de la thèse

Le travail de cette thèse s'est fait dans le cadre d'une collaboration entre 3 laboratoires : l'Unité de Recherches Irrigation du CEMAGREF¹ Montpellier représentée par Jean-Pierre Baume, Xavier Litrico et Pierre-Olivier Malaterre, le Laboratoire d'Analyse des Systèmes et de Biométrie (LASB) de l'INRA² de Montpellier avec Vincent Fromion et enfin la Laboratoire d'Automatique de Procédés (LAP) de l'ISMRA³ de Caen représenté par Gérard Scorletti.

L'objectif de cette collaboration est de développer des outils de mise au point de commandes automatiques de canaux d'irrigation.

Depuis une dizaine d'années, des recherches sont menées au CEMAGREF Montpellier pour améliorer la qualité de la gestion de l'eau. Ses ingénieurs et chercheurs ont ainsi développé une forte compétence dans le domaine de l'étude, la modélisation et la commande des canaux d'irrigation.

De façon plus récente, à travers le projet AQUAE né il y a 4 ans, une collaboration avec le LASB de l'INRA a vu le jour sur le sujet.

Par ailleurs, le LASB et le LAP ont une collaboration de longue durée sur le développement de méthodologies de commande des systèmes, notamment en Automatique Fréquentielle et en conception de systèmes de commande assistés par ordinateur.

Objectifs

Dans l'approche adoptée, la mise au point des lois de commande des canaux d'irrigation se fait à partir de modèles dérivés de l'hydraulique pour la modélisation des écoulements à surface libre (équations de Saint-Venant). Ce modèle est non-linéaire et de dimension infinie (équations aux dérivées partielles), ce qui est le cas d'autres systèmes physiques (structures mécaniques, procédés thermiques, etc). L'obtention d'un modèle de dimension finie passe par l'utilisation d'un schéma numérique de résolution. Afin d'obtenir

¹Centre du Machinisme Agricole et du Génie Rural des Eaux et Forêts

²Institut National de Recherche Agronomique

³Institut des Sciences de la Matière et du Rayonnement

une simulation correcte, ce schéma peut être assez fin de manière à prendre en compte la topographie souvent complexe et la non-homogénéité dans l'espace de certains paramètres hydrauliques. Dans ce cadre, les ingénieurs et chercheurs du CEMAGREF ont créé le logiciel *SIC* destiné à simuler l'écoulement dans les canaux. De plus, il permet d'obtenir des modèles linéarisés sous forme d'une représentation d'état. Malheureusement, ces modèles sont en général de grande dimension (plusieurs centaines d'états pour un canal).

Dès lors, le calcul de lois de commande par les méthodes de synthèse avancées (LQG, H_∞ , etc) sur de tels modèles peut s'avérer impossible avec les logiciels standard. Quand bien même ces calculs seraient possibles, la loi de commande résultante serait de dimension au moins égale à celle du système et par conséquent prohibitive. Or, il est important d'obtenir des lois de commande d'ordre relativement faible. D'un point de vue fondamental, les cahiers des charges peuvent être généralement remplis par des correcteurs de complexité raisonnable. D'un point de vue pratique, leur mise en œuvre est plus simple que pour des correcteurs d'ordre important (implémentation plus fiable et moins coûteuse, retouche possible).

Le premier objectif de ce mémoire est donc d'étudier la réduction du modèle du système à commander afin de mettre au point sa loi de commande. Les méthodes de commande considérées a priori pour la commande des canaux d'irrigation sont basées sur l'approche fréquentielle (commande H_∞ ou commande robuste). Par rapport à cet objectif, une problématique de la réduction est ainsi développée. Celle-ci permet d'aboutir à une formalisation du problème comme un problème d'optimisation dont la complexité donne une idée de la difficulté du problème de réduction. On peut ainsi conjecturer que le problème ne peut être résolu à l'aide d'un algorithme au temps de convergence raisonnable. Cela souligne l'intérêt des nombreuses approches de réduction. Bien que ne traitant pas directement du problème de réduction de modèles considéré ici, elles sont en général d'une complexité algorithmique faible et permettent d'obtenir une solution en général sous optimale (éventuellement améliorable). Il apparaît donc nécessaire de faire un travail de synthèse sur ces différentes méthodes afin de voir si, au delà de leur apparente diversité, il est possible de développer un point de vue unificateur. Ce travail est d'autant plus important qu'un certain nombre de ces méthodes (par exemple, celles qui sont reliées à l'erreur relative) sont peu connues et peu utilisées alors qu'elles sont potentiellement intéressantes.

Tout au long de ce travail, nous étudierons sur 3 exemples, dont particulièrement un modèle d'écoulement, les potentialités de diverses méthodes de réduction ainsi que nos contributions dans le domaine.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous nous employons à formuler les objectifs de commande rattachés à la gestion d'un canal. Nous analysons dans un premier temps la commande monovariante d'un bief. Partant du réglage d'un simple *PI*, nous mettons en place le réglage de lois de commande qui satisfont automatiquement les objectifs demandés. La méthodologie adoptée est basée sur la formulation de chaque objectif de commande en terme de contrainte H_∞ . La résolution se fait par un critère H_∞ 4-blocs dont la solution (le correcteur) est solution d'un problème d'optimisation convexe de dimension finie. L'extension à la commande multivariante d'un canal est en partie faite en reconduisant le raisonnement monovariante lié aux spécifications majeures de rejet de perturbation et de suivi de signaux de consigne. Nous montrons comment spécifier a priori l'objectif de dé-

couplage, qui revient à demander l'équité de la répartition de l'eau, et l'obtention garantie de marges minimales de stabilité.

Organisation du document

Le mémoire de thèse se décompose en deux parties.

Partie 1

Problématique de la réduction de modèles (chapitre 1) : ce chapitre introduit le problème de la réduction de modèles dans le contexte de la commande. L'interaction entre un cahier des charges pour la commande et la réduction de modèles est formulée comme un problème de minimisation d'une norme H_∞ pondérée. Ce chapitre possède l'intérêt de présenter une discussion générale du problème de réduction. Trois exemples de modèles à réduire sont introduits : un modèle monovisible qui possède une anti-résonance, un benchmark de système multivariable et un modèle d'écoulement à surface libre dans un bief de canal d'irrigation.

Formalisation et discussion du problème (chapitre 2) : le problème de minimisation soulevé dans la problématique est formulé sous l'angle de l'optimisation. Cette formulation aboutie est développée dans différents cas particuliers. La non convexité du problème, qui fait de la réduction de modèles un problème ouvert du point de vue algorithmique, est discutée. Des conditions suffisantes de dégénérescence de l'ordre d'un modèle réduit satisfaisant un critère de qualité en erreur absolue sont développées. Enfin, nous mettons en avant l'avantage de considérer la réduction de modèles au sens d'une erreur relative plutôt qu'absolue.

Etude de l'erreur absolue (chapitre 3) : nous présentons dans ce chapitre les deux techniques fondamentales. La troncature équilibrée, basée sur des concepts d'état et bien que n'ayant pas été introduite pour répondre à notre problème, est une solution sous optimale. En revanche, l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel, est abordée comme une relaxation du problème de réduction au sens de l'erreur absolue. Chacune de ces techniques est interprétée à l'aide d'outils d'analyse matricielle.

Réduction au sens de l'erreur absolue pondérée (chapitre 4) : nous faisons une synthèse des différentes méthodes de réduction au sens de l'erreur absolue pondérée. Nous mettons en évidence les transformations qui permettent de se ramener aux deux techniques fondamentales que sont la troncature équilibrée et l'approximation au sens de la norme de Hankel. Un apport important réside dans la formulation convexe de l'optimisation du terme direct D_r du modèle réduit.

L'erreur relative et l'approximation de la phase (chapitre 5) : dans ce chapitre, nous étudions la réduction de modèles au sens de l'erreur relative. Après avoir bien posé le problème, nous mettons l'accent sur la connexion entre certaines des méthodes existantes et l'approximation de la phase (phase matching). Des bornes (dans le cas monovisible) sur l'erreur d'approximation en gain et en phase sont données. Toutes les méthodes peuvent être vues comme l'utilisation de la technique de troncature ou de la

norme de Hankel pour réduire un transfert particulier en erreur absolue. L'erreur relative pondérée est ensuite abordée sous le même angle.

Réduction à pôles fixés (chapitre 6) : partant du principe d'agrégation, qui revient à fixer une partie du modèle réduit, nous formulons de façon convexe la recherche du modèle réduit dans le cas de 2 pondérations. Une formulation voisine, pour l'erreur relative pondérée, en découle. Nous proposons dans la seconde partie de ce chapitre une nouvelle approche de la réduction de modèles sur des gammes de pulsations. Cette approche minimise l'erreur relative de modèles dans des gammes de pulsations sans faire intervenir de pondérations.

Partie 2

Introduction à la commande des canaux d'irrigation (chapitre 7) : les canaux d'irrigation ainsi que les enjeux majeurs rapportés à l'irrigation sont introduits. L'obtention de modèles linéaires de grande dimension à partir des équations de l'hydraulique est ensuite discutée. Une validation de ces modèles est présentée autour d'un point d'équilibre particulier pour lequel les équations hydrauliques sont intégrables. Cette étape justifie d'une part le passage à un modèle de dimension finie et motive, au vu de la taille du modèle, l'utilisation de modèles réduits pour la synthèse d'une loi de commande. La partie 1 fournit un éventail de modèles réduits dont la qualité peut être estimée grâce à divers indicateurs.

Commande d'un bief (chapitre 8) : la commande aval distante d'un bief est présentée. Le compromis de réglage d'un correcteur de type PI est abordé et une solution est analysée sur le modèle de dimension infinie. Afin d'intégrer automatiquement un plus grand nombre de spécifications telles que l'obtention de marges minimales, un schéma de type H_∞ est proposé. Le correcteur réduit obtenu est comparé au PI .

Commande multivariable d'un canal (chapitre 9) : la synthèse multivariable est réalisée dans la continuité de la commande d'un bief. Les spécifications multivariables sont formulées dans le cadre de la commande d'un canal composé de 3 biefs. Aux spécifications classiques formulées dans la commande d'un bief, viennent s'ajouter une contrainte de découplage et une contrainte de marge de robustesse minimale. Le correcteur obtenu sur le modèle de synthèse d'ordre faible est réduit. Le correcteur obtenu continue à vérifier le cahier des charges.

Notations

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^+ (-)$	ensemble des nombres complexes à partie réelle > 0 (< 0)
L_2	ensemble des signaux de carré intégrable
L_∞	ensemble des fonctions $G(p) : C \rightarrow C^{p \times m}$ bornées sur l'axe imaginaire
$u(t) \in R^n$	$\ u(t)\ _T^2 = \int_0^T u(t)^* u(t) dt$
$u(t) \in L_2$	$\ u(t)\ ^2 = \int_0^{+\infty} u(t)^* u(t) dt$
M^T	transposée de M
trace (M)	trace de M
$\lambda_j(M)$	j -ième valeur propre de M
$\bar{\sigma}(M)$	valeur singulière maximum de M
Sp (M)	spectre de M
$\delta_0(M)$	nombre de valeurs propres de M sur l'axe imaginaire
$\delta_+(M)$	nombre de valeurs propres de M dans le demi plan droit ouvert
$\delta_-(M)$	nombre de valeurs propres de M dans le demi plan gauche ouvert
$In(M)$	le triplet $(\delta(M), \delta_-(M), \delta_+(M))$, inertie de la matrice M
E (y)	espérance mathématique du signal y
$G(p)$	$\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ réalisation d'état de G
$G_r(p)$	$\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right]$ modèle réduit de $G(p)$, d'état $x_r(t)$
$G(p)^*$	$G^T(-p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c c} -A^T & -C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right]$
$\sigma_j(G)$	j -ième valeur singulière de Hankel de $G(p)$

\mathcal{RH}_∞	ensemble des matrices de fonctions de transfert rationnelles causales et stables
$\mathcal{RH}_{\infty,-}$	ensemble des matrices de fonctions de transfert rationnelles anticausales et stables
$[F(p)] _+$	partie causale de $F(p)$
$\ G\ _\infty$	$\sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega))$ ($G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$)
$P \star K$	produit de Redheffer : $\left[\begin{array}{c c} A_P & B_P \\ \hline C_P & D_P \end{array} \right] \star \left[\begin{array}{c c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] = \dots$ $= \left[\begin{array}{c c} A_P + B_P A_K (I - D_P A_K)^{-1} C_P & B_P (I - A_K D_P)^{-1} B_K \\ \hline C_K (I - D_P A_K)^{-1} C_P & D_K + C_K D_P (I - A_K D_P)^{-1} B_K \end{array} \right]$
$\varepsilon_P = \{x, x^T P x \leq 1\}$	ellipsoïde défini par $P = P^T > 0$
Vectorisation de $M \in \mathbb{R}^{p \times q}$ $\text{vec}(M) =$	$\begin{bmatrix} M_{j1} \\ M_{j2} \\ \vdots \\ M_{jq} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pq \times 1}, \forall j \in [1 : p]$
Produit de Kronecker $M \otimes N =$ $M \in \mathbb{R}^{p \times q}, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$\begin{bmatrix} M_{11}N & M_{12}N & \dots & M_{1q}N \\ M_{21}N & & & \\ \vdots & & & \\ M_{p1}N & & & M_{pq}N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pm \times qn}$

Première partie
Réduction de modèles

CHAPITRE 1

Problématique de la réduction de modèles

Le problème d'approcher un modèle linéaire stationnaire de grande dimension par un modèle d'ordre plus faible a reçu une grande attention en Automatique. Un domaine de l'Automatique appelé réduction de modèles y est même entièrement consacré. Son importance est liée à deux applications technologiques. Premièrement, en Traitement du signal, le modèle en question peut être un filtre, stable dans la majorité des cas. Simplifier un tel filtre est souhaité afin de permettre une implémentation plus aisée. Secondement, en Automatique, un modèle représentant la dynamique du procédé à asservir permet de mettre au point une loi de commande. Pour un ensemble de raisons développées ci-après, il est fondamental d'obtenir à la fois un modèle simple du procédé et une loi de commande d'ordre raisonnable.

L'importance des applications a motivé un nombre très important de travaux sur la mise au point de méthodes de réduction de modèles. De multiples points de vue ont ainsi été proposés rendant parfois difficile la compréhension de leur intérêt respectif ainsi que de leur pertinence vis-à-vis de différentes applications. Néanmoins, malgré tout cela, aucune solution satisfaisante n'a été proposée. Nous définirons plus loin à quoi le terme satisfaisant correspond.

L'objectif de cette première partie du mémoire est de contribuer à améliorer leur compréhension, aussi bien d'un point de vue théorique que pratique, sachant que nous sommes essentiellement motivés par leur intérêt dans le domaine de l'Automatique. De plus, ce travail est justifié par la nécessité de mettre en œuvre des méthodes de réduction de modèles pour le réglage de lois de commande de canaux d'irrigation. Dans cette application particulière, l'obtention d'un modèle passe par la résolution numérique des équations distribuées de la mécanique des fluides. Pour des raisons liées à la convergence et à la consistance du schéma numérique de résolution de ces équations, le modèle d'état obtenu autour d'un point d'équilibre possède fréquemment une taille importante ; d'une vingtaine à une centaine de composantes d'état. L'étape de réduction de modèle s'avère dès lors incontournable.

Pour cela, un parti pris particulier a été adopté. Dans un premier temps, nous allons discuter d'une formulation assez générale du problème de réduction de modèles où la qualité du modèle réduit sera mesurée par un certain critère, l'ordre du modèle réduit étant fixé a priori. La résolution de ce critère peut être formulée de façon équivalente

comme la résolution d'un programme d'optimisation.

Dans un sens, cette écriture sous forme d'un programme d'optimisation permet d'évaluer la complexité du problème de réduction de modèles pour un cas assez général. Il s'avère que la résolution numérique directe peut être obtenue par la mise en oeuvre d'un algorithme dont le temps d'exécution n'est pas une fonction polynômiale de la taille du problème : algorithme de type *NP-difficile*, défini dans la section 1.1.4. Il est à noter que, par définition, la réduction de modèle doit pouvoir s'appliquer à des modèles de grande taille ce qui mène à des temps de calcul prohibitifs et donc est pratiquement inapplicable.

Dans ce contexte, toute solution permettant d'obtenir simplement (c'est-à-dire par un algorithme s'exécutant en un temps fonction polynômiale de la taille du problème) une solution sous optimale est pratiquement d'un grand intérêt. Dans ce mémoire, au delà d'une présentation des méthodes de réduction de modèles, nous proposons leur réinterprétation comme solution sous optimale du problème général.

Cette réinterprétation présente un intérêt qui n'est pas forcément simplement académique. En effet, la résolution du problème d'optimisation général est faite par un algorithme itératif qui partant d'un point d'initialisation et pour un nombre d'itérations raisonnable va converger vers une solution (probablement) sous optimale dépendant du point d'initialisation.

D'un premier point de vue, il est donc intéressant de connaître un bon point d'initialisation. En cela, les méthodes de réduction de modèles classiques peuvent fournir des solutions intéressantes, à partir du moment où elles ont été réinterprétées comme solutions sous optimales du problème général. D'un second point de vue, la résolution générale peut être vue comme une façon d'améliorer les solutions classiquement proposées.

De la discussion précédente, il apparaît que notre préoccupation principale est de caractériser la complexité du problème et de proposer des solutions de faible complexité, donc effectives. Avant d'aborder dans le chapitre 2 la résolution exacte du problème de réduction de modèles, nous allons ici discuter de la problématique et en proposer une formulation générale.

Dans ce mémoire, nous exposons ces méthodes appliquées à l'obtention de modèles simplifiés de canaux d'irrigation. Le dernier chapitre y est consacré.

1.1 Position du problème, formulation

1.1.1 Pourquoi réduire ?

Dans le but d'obtenir un correcteur implémentable, la synthèse d'une loi de commande avancée (H_∞ , LQG , ...) soulève deux aspects problématiques provenant de la taille du modèle de synthèse. Le premier réside dans la complexité des calculs aboutissant au correcteur. Par exemple, la résolution numérique des équations de Riccati de grande taille peut poser de grands problèmes. Dans un second temps, en supposant qu'un correcteur ait été obtenu, sa taille est au moins égale à celle du modèle de synthèse et peut poser des problèmes d'implémentation (ressources matérielles, problèmes numériques dans le traitement digital). Dans le contexte des canaux d'irrigation, la taille d'un modèle peut atteindre des centaines d'états ce qui rend inévitable l'étape de réduction, avant de synthétiser une loi de commande.

1.1.2 Réduire un modèle pour la commande

Dans notre application concernant les canaux d'irrigation, les modèles linéaires stationnaires provenant de la discrétisation des équations physiques sont de grande dimension. La réduction de modèles dans le contexte de l'Automatique s'inscrit comme une étape qui permet de nouvelles simplifications du modèle, mais en tenant compte des ensembles possibles de signaux d'entrée agissant sur le système. En boucle fermée, ces signaux sont loin d'être arbitraires. Ils reflètent les spécifications que l'on souhaite imposer au système. La synthèse d'une loi de commande ne requiert pas forcément le choix d'un modèle compliqué [Ske89]. L'exemple illustratif suivant montre l'interaction entre le choix d'un modèle simplifié pour la commande et un cahier des charges à respecter.

1.1.3 Exemple académique

Le but de cet exemple est de montrer que le choix d'un modèle simplifié pour l'obtention d'une loi de commande est lié aux spécifications du cahier des charges. Considérons un modèle du premier ordre $G_{nominal}(p) = \frac{0.1}{10^3 p + 1}$ en série avec un transfert du second ordre de la forme

$$E_{\omega_0}(p) = 100 \frac{p^2 + 2\xi \frac{\omega_0}{10} p + \left(\frac{\omega_0}{10}\right)^2}{100p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2}, \quad \xi = 0.2$$

Nous envisageons 3 cas pour $E_{\omega_0}(p)$ correspondant à 3 systèmes différents (figure 1.1).

- $\omega_0 = 10^{-1} rad/s$: $G_2(p)$,
- $\omega_0 = 100 rad/s$: $G_1(p)$,
- $\omega_0 = 10^5 rad/s$: $G_3(p)$.

Chacun des 3 cas précédents représente une dynamique négligée sur le modèle nominal $G_{nominal}(p)$ pour lequel $E_{\omega_0}(p) = 1$.

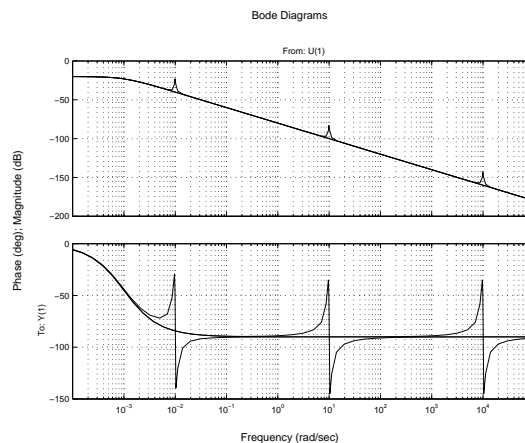


FIG. 1.1 – Représentation du modèle nominal et de 3 dynamiques négligées

Un modèle simplifié possible est le modèle nominal d'ordre 1. Il constitue une bonne approximation d'ordre 1 des tracés fréquentiels d'ordre 3. De plus, d'un point de vue temporel, ces 4 modèles sont très proches. Dans ce cadre, le modèle simplifié peut se substituer aux 3 autres.

Concevons maintenant un correcteur satisfaisant certaines spécifications sur le modèle réduit (nominal).

Cahier des charges :

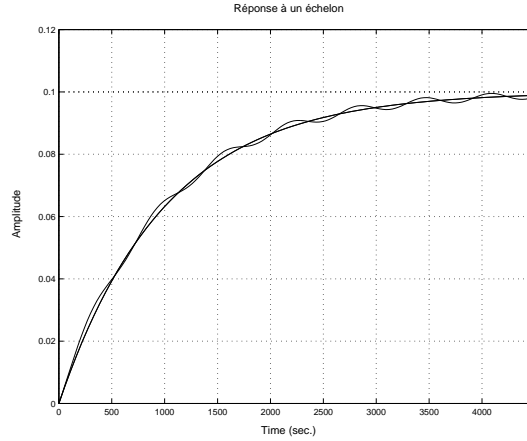


FIG. 1.2 – Réponse à un échelon pour les 4 configurations

1. poursuite de références en forme d'échelon ;
2. temps de réponse de l'ordre de 0,3s et dépassement inférieur à 20% ;
3. rejet de perturbation en échelon sur la commande ;
4. décroissance du gain du correcteur en hautes-fréquences ;
5. marges de gain et phase respectables.

Les spécifications 1 et 3 impliquent une commande intégrale : présence d'un intégrateur dans $K(p)$. La spécification 2 dimensionne la pulsation de coupure ω_c de la boucle ouverte GK à l'aide de règles de l'automatique fréquentielle. Ici $\omega_c \simeq 10\text{rad/s}$. Un correcteur de type PI +filtre est suffisant pour satisfaire toutes ces spécifications sur $G_{nominal}(p)$. Qu'en est-il de cette loi de commande appliquée aux modèles $G_i(p)$, $i = 1, 2, 3$? La figure 1.3 compare les tracés de Black-Nichols entre les boucles ouvertes $KG_{nominal}$ et KG_i .

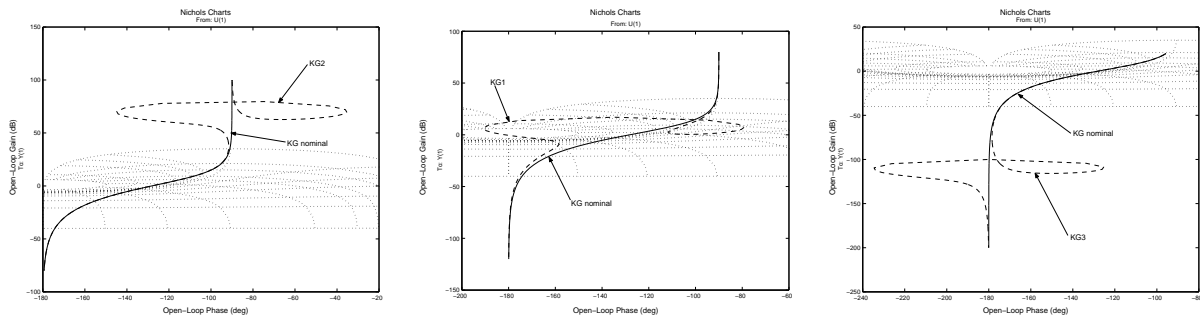


FIG. 1.3 – Comparaison des tracés de Black

Le correcteur $K(p)$ rend instable $G_1(p)$ car l'influence de la dynamique négligée apparaît au voisinage de ω_c . L'utilisation de $G_{nominal}(p)$ comme modèle de synthèse n'est pas valide. En revanche, les dynamiques négligées sur $G_2(p)$ et $G_3(p)$ sont situées dans des domaines de fréquences où la politique de commande est respectivement grand gain (commande intégrale basses fréquences) et faible gain (roll-off en hautes fréquences). La plupart des lois de commande suivent cette politique inhérente au cahier des charges [DS81]. Comparons maintenant les performances sur le suivi d'un échelon pour $G_{nominal}(p)$, $G_2(p)$ et $G_3(p)$.

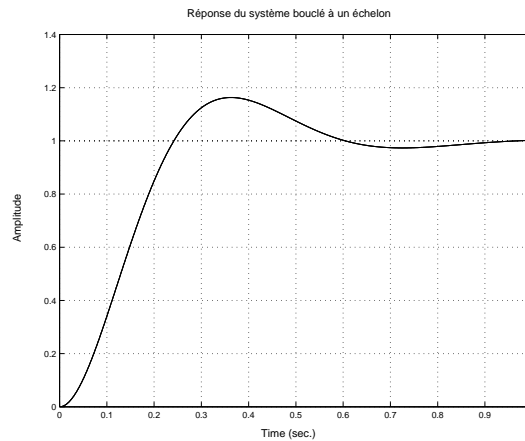


FIG. 1.4 – Réponse à un échelon pour $G_{nominal}(p)$, $G_2(p)$ et $G_3(p)$.

La figure 1.4 montre que $K(p)$ remplit le cahier des charges précédent sur les 2 modèles d'ordre 3 présentant une dynamique négligée. Cet exemple a montré que la détermination d'un modèle de synthèse est liée à son utilisation : ici, mettre au point une loi de commande remplissant un cahier des charges.

Cahier des charges/réduction

Un cahier des charges induit des échelles de temps (temps de montée, temps de rejet d'une perturbation, bande passante par exemple) désirées sur le système bouclé ainsi que l'influence des bruits de mesure. D'un point de vue fréquentiel, ceci a pour conséquence de donner de l'importance à certaines gammes de pulsations. Dans un voisinage de la bande passante les erreurs de modélisation peuvent être critiques, alors qu'ailleurs leur influence est mineure.

Comme nous le verrons dans l'approche par ensemble de signaux, l'interaction modèle/cahier des charges va permettre de définir des critères de réduction. Ces critères permettent d'obtenir à partir d'un modèle d'ordre élevé supposé pertinent par rapport au cahier des charges, un modèle réduit. Dans l'exemple précédent, le modèle réduit a été choisi naïvement pour son tracé fréquentiel très proche des modèles aux dynamiques négligées et sans tenir compte de la position de la fréquence de coupure.

Par ailleurs, certaines caractéristiques du système sont fondamentales par rapport aux spécifications du cahier des charges. Elles doivent se retrouver dans le modèle réduit. Par exemple, les zéros instables d'un système impliquent une contrainte sur la bande passante [FL85, FMS00]. De même, les pôles instables doivent être conservés (au moins leur nombre).

1.1.4 Complexité et mise au point d'une loi de commande

L'obtention d'une solution à un problème d'Automatique peut être plus ou moins coûteuse en temps de calcul. L'objectif étant de proposer des outils d'aide à la conception par ordinateur, il est pratiquement important de pouvoir quantifier la complexité d'un programme et le temps de calcul mis en jeu.

1.1.4.1 Quelques mots sur la complexité algorithmique

De manière générale, un algorithme est décrit par un programme constitué d'une séquence finie d'instructions. Le modèle algorithmique le plus conventionnel est basé sur la *RAM* (random access machine). Elle contient les données d'entrée, la sortie étant le résultat du calcul, un nombre illimité de registres destinés aux résultats intermédiaires, et le programme.

Lorsque qu'un algorithme s'arrête, nous définissons son temps de calcul comme étant la somme des "coûts" de chaque instruction. Par exemple, une instruction (ou opération) arithmétique d'un modèle RAM implique une unité de coût. En pratique, le temps de calcul grandit avec la taille du problème appelé m (nombre de variables). Nous distinguons deux classes de problèmes d'optimisation.

La première contient les problèmes d'optimisation de faible complexité. Plus précisément, cette classe regroupe les problèmes d'optimisation qui peuvent être résolus par des algorithmes dont le temps d'exécution est une fonction polynômiale. Ceci signifie que le pire-cas de son temps de calcul $T(m)$ est une fonction de la taille comparable à un polynôme : $\exists k, T(m) \sim m^k$. On nomme P cette classe. La programmation linéaire et plus largement l'optimisation d'un critère convexe sous contraintes LMI sont des problèmes de nature P. Des algorithmes en temps polynômial peuvent résoudre efficacement ces problèmes : par exemple par les points intérieurs [NN93].

Cependant, de nombreux problèmes d'intérêt pratique ne possèdent pas d'algorithme de résolution connu, de classe P. Ces problèmes sont regroupés dans l'autre classe appelée NP-complet. $P \subset NP$, et il est supposé que $P \neq NP$, bien qu'aucune démonstration n'existe. Un problème A sera considéré *NP-difficile* si et seulement si il existe un problème B NP-complet tel que B se ramène à A en temps polynômial.

Il est important de constater que les récents progrès de l'optimisation ont proposé, depuis les années 90, des algorithmes de plus en plus intéressants pour la classe des problèmes P. Ils autorisent le choix d'un compromis entre la précision du calcul et le temps de calcul pour parvenir à cette solution.

Pour plus de précisions, nous renvoyons le lecteur à une description détaillée et des ordres de grandeur dans [GJ79] ou à [BT97, BT00] pour des résultats spécifiques à l'Automatique.

Pour le cas de la réduction de modèles, il n'existe pas à notre connaissance de résultat de complexité. Néanmoins, suivant un avis assez général, la nature du problème peut être conjecturée *NP-difficile*. Dans ce cas, il est généralement admis qu'il n'existe pas d'algorithme en temps polynômial capable de traiter ce problème. Grâce à des heuristiques, des algorithmes en temps polynômial (cône complémentaire [GOA97], projections alternées [Gri95], XY centering [IS95]) convergent vers une solution sous-optimale. L'intérêt de cette solution dépend fortement du point d'initialisation.

1.1.4.2 Les approches connues

Dans le contexte d'une synthèse de lois de commande d'ordre réduit sur un modèle d'ordre important, une discussion des approches possibles est proposée sous l'angle de la complexité. La figure 1.5 montre les voies traditionnelles permettant d'obtenir un correcteur effectif.

Examinons de plus près les différentes possibilités amenant à un correcteur réduit. La voie (1) théoriquement attrayante consiste en la synthèse directe d'un correcteur sous contrainte d'ordre. Que cela soit par la norme H_2 ou H_∞ , cette technique est réputée

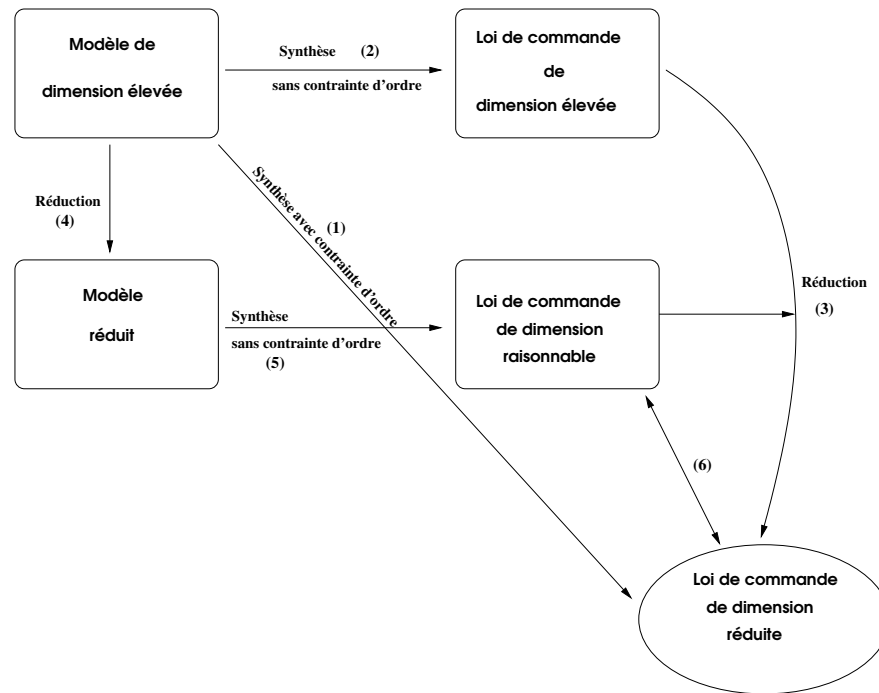


FIG. 1.5 – Synthèse d’une loi de commande réduite

difficile, car on montre que ce problème général rentre dans une classe de problèmes d’optimisation de nature *NP-difficile* [FL97]. Cette voie directe ne tient pas compte des possibilités de réduction du modèle de synthèse a priori. Dans notre cas, elle est à écarter absolument du fait de la dimension importante des modèles de canaux d’irrigation. Deux alternatives à cette approche sont mises en valeur.

La voie (2) puis (3) est la méthodologie prônée par de nombreux auteurs [ZCC95, AL89, OA00]. Dans un premier temps, un correcteur d’ordre élevé est supposé être calculé. La taille de ce correcteur dépend à la fois de la taille du modèle de synthèse mais aussi des diverses pondérations ajoutées lors de l’étape de synthèse. Lors de l’étape (3), le correcteur est réduit de manière à conserver la stabilité et un niveau de performance raisonnable [AL89, WC00, dVS88, GG98, CZ96, FGV90]. Cette dernière volonté demeure un problème ouvert (de type *NP-difficile*) dans le sens où aucun algorithme efficace ne peut traiter le problème de façon optimale.

La réduction de correcteur tenant compte des spécifications en boucle fermée, fait soit appel aux idées de la réduction de modèles classiques développées plus loin, soit utilise des propriétés de la méthode de synthèse, par exemple par la norme H_∞ [MG91]. L’idée essentielle est de ne pas vouloir réduire le modèle de synthèse, mais plutôt le correcteur, afin de conserver le maximum d’informations possibles durant la synthèse du correcteur. Cette approche s’adapte difficilement aux systèmes de grande dimension pour deux raisons. Premièrement, la complexité du modèle initial ne rend pas possible la synthèse d’un correcteur, notamment lorsque ce modèle est augmenté de diverses pondérations fréquentielles tenant compte d’un cahier des charges¹. A titre d’exemple, un modèle de canal à 5 biefs augmenté de pondérations possède une taille de 135 états ; les programmes standard de calcul de lois de commande H_∞ gèrent moins de 100 états. Il est donc impératif de

¹méthodes de synthèse pondérée par H_∞ , H_2 (LQG), GPC par exemple

réduire le modèle initial. Deuxièmement, comme l'exemple précédent le montre, certaines informations du modèle n'ont aucun intérêt pour la synthèse d'une loi de commande. L'action d'une loi de commande sur un système désensibilise ce dernier [Zam81] d'incertitudes de modèles pouvant être négligées lors de l'étape de synthèse, (voir l'exemple précédent). En fait, l'ordre de la loi de commande n'étant pas contraint explicitement, celui-ci est souvent supérieur à l'ordre réellement requis pour satisfaire un cahier des charges [WS90]. Les voies (4), (5) ont pour but de simplifier le meilleur modèle disponible à la lumière des objectifs de commande souhaités. Typiquement, le modèle réduit doit rester fidèle au modèle d'ordre élevé dans la bande de fréquences qui va déterminer les marges de stabilité et la fréquence de coupure. Cette étape (4) est conjecturée *NP-difficile*, alors que l'étape (5) s'opère pratiquement en temps polynômial. Ceci permet déjà de rendre possible l'étape de synthèse sur un modèle simplifié. Le correcteur obtenu peut avoir une taille raisonnable et être implémenté (6). Sinon, une réduction du correcteur est faisable par la voie (3), ou bien un retour à la réduction du modèle est possible, voie (4). Le fonctionnement d'un correcteur peut être plus délicat à saisir (surtout en multivariable) que le fonctionnement du système. Il est donc préférable de simplifier un modèle plutôt qu'un correcteur car l'interprétation des états sacrifiés est plus simple.

Les approches développées dans ce rapport s'appliquent aussi bien à la réduction d'un modèle physique (3) qu'à la réduction d'un correcteur (2). Bien que ces approches n'aspirent pas toujours à résoudre vraiment le même problème, nous allons les interpréter comme visant à minimiser un certain coût sous des contraintes, ce qui semble être une formulation justifiée au vu des outils modernes de l'analyse de la robustesse des systèmes multivariables.

1.2 Formalisation de la réduction pour des ensembles de signaux

Dans l'idéal, un modèle réduit doit pouvoir remplacer le modèle initial pour une synthèse de correcteurs d'ordre faible. La sortie des deux modèles doit être proche pour une même entrée. Or ces entrées sont en pratique des commandes délivrées par un actionneur, et ne sont donc pas arbitraires. De même (figure 1.6), bien que les perturbations agissant sur un système ne soient pas mesurables dans la plupart des cas, des connaissances a priori sont utilisables : ensemble auquel le signal p appartient. Il est fréquent de considérer, par exemple, des ensembles de signaux de perturbations comme des quasi-échelons, ou bien des sinusoïdes dont la pulsation est comprise dans un intervalle . Cette remarque est aussi valable pour les signaux de référence, qui eux, bien que connus sont susceptibles de varier (ensemble χ). L'ensemble ξ contenant les signaux d'erreur de poursuite spécifie la performance du système bouclé.

A partir des ensembles précédents, nous sommes donc amenés à définir un ensemble de signaux de commande admissibles appelé $\{\mathcal{U}\}$. Pour l'ensemble des commandes possibles, le modèle réduit G_r est cherché de manière à avoir une sortie la plus proche possible de celle de G . L'erreur entre les deux modèles peut être souhaitée plus faible dans certains domaines de fréquences qu'ailleurs. Un ensemble $\{\mathcal{E}\}$ de l'erreur admissible entre les deux modèles est ainsi défini. La figure 1.7 résume cette approche par ensemble de signaux.

Plusieurs manières existent pour définir des ensembles de signaux en Automatique. Comme nous nous intéressons à la modélisation des signaux fréquence par fréquence, une voie naturelle est de définir des gabarits fréquentiels sur ces signaux. Ainsi les ensembles

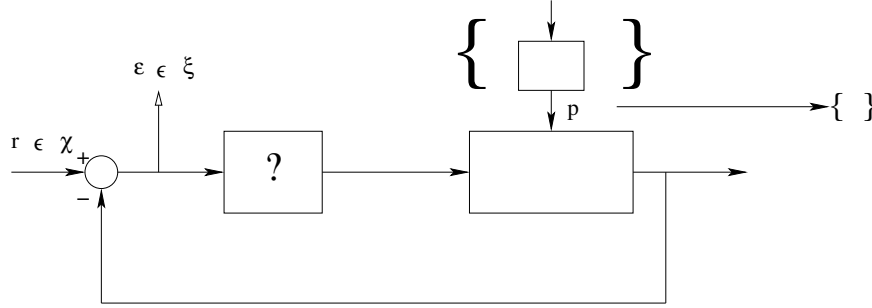


FIG. 1.6 – Représentation des ensembles de signaux agissant sur un système bouclé

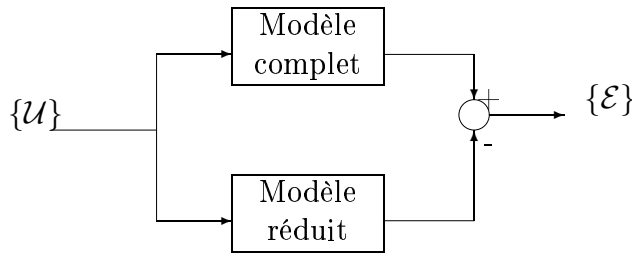


FIG. 1.7 – Réduction pour des ensemble de signaux

$\{\mathcal{U}\}$ et $\{\mathcal{E}\}$ peuvent s'écrire :

$$\{\mathcal{U}\} = \{u(j\omega), \|W_i^{-1}(j\omega)u(j\omega)\| \leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R}\} \quad (1.1)$$

où $W_i(p) \in \mathcal{RH}_\infty^{n_u \times n_u}$ est une pondération. Voir la section A.1, page 225 pour plus de détails.

$$\{\mathcal{E}\} = \{\epsilon(j\omega), \|W_o(j\omega)\epsilon(j\omega)\| < 1, \forall \omega \in \mathbb{R}\} \quad (1.2)$$

où $W_o(p) \in \mathcal{RH}_\infty^{n_y \times n_y}$. Ainsi, réduire un système pour une classe d'entrée admissible et une erreur de modèle souhaitée revient à chercher G_r tel que

$$\forall u(j\omega) \in \{\mathcal{U}\}, \epsilon(j\omega) = (G(j\omega) - G_r(j\omega))u(j\omega) \in \{\mathcal{E}\} \quad (1.3)$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur G_r pour que (1.3) soit vérifiée.

THÉORÈME 1.2.1

Soit \mathcal{U} l'ensemble défini par (1.1) et soit \mathcal{E} l'ensemble défini par (1.2).

$$\forall u(j\omega) \in \{\mathcal{U}\}, \epsilon(j\omega) \in \{\mathcal{E}\} \iff \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega)\|_\infty \leq 1 \quad (1.4)$$

La démonstration se trouve à la section 1.2.1, page 225.

REMARQUE 1.2.1

D'après la définition de l'ensemble $\{\mathcal{U}\}$, relation (1.1), une interprétation géométrique peut être donnée :

$\forall u(j\omega) \in \{\mathcal{U}\}$, $\|W_i^{-1}u(j\omega)\| \leq 1 \Leftrightarrow u^*(j\omega)(W_i(j\omega)W_i(j\omega)^*)^{-1}u(j\omega) \leq 1, \forall \omega$. En d'autres termes, à chaque pulsation ω , le vecteur $u(j\omega)$ est enfermé dans un ellipsoïde de demi-axes définis par les vecteurs propres de $W_i(j\omega)W_i(j\omega)^*$. Dans le cas d'un système mo-

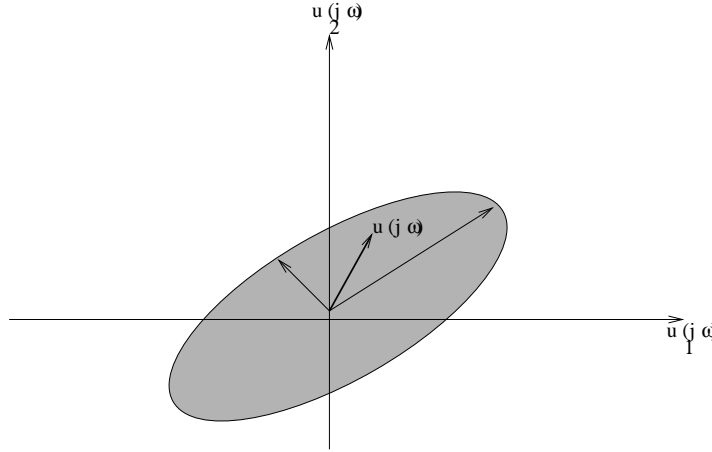


FIG. 1.8 – Schéma illustratif : appartenance du vecteur $u(j\omega) = [u_1(j\omega) \ u_2(j\omega)]$ à un ellipsoïde

novariable, les deux pondérations commutent et se ramènent à une seule pondération $W(p) = W_i(p)W_o(p)$.

1.2.1 Exemple de pondération de sortie

Pour un système monovariable, le modèle réduit et le modèle initial doivent être en adéquation au voisinage de la pulsation de coupure ω_c (voir exemple précédent). La pondération de sortie W_o définissant l'erreur de modèle doit donc privilégier majoritairement ces pulsations. Ailleurs, cette exigence est moins importante et l'erreur de modèle doit être raisonnablement bornée. Sur la figure 1.9, le module de la pondération $|W(j\omega)|$ met en valeur un intervalle de pulsations $[b \ c]$ contenant la pulsation de coupure ω_c . Cet intervalle est d'autant plus privilégié que le réel $\gamma > 0$ est petit. Le facteur η traduit le fait que dans les autres gammes de pulsations, l'erreur n'est pas arbitrairement grande. Ainsi, si $\|(G(j\omega) - G_r(j\omega))W(j\omega)\| \leq 1$ alors $|G(j\omega) - G_r(j\omega)|$ est borné par $1/\eta$ pour les pulsations ω extérieures à l'intervalle $[a \ d]$. Pour $\omega \in [b \ c]$, $|G(j\omega) - G_r(j\omega)| \leq \gamma$, d'où la nécessité d'avoir γ petit.

Une pondération $W_o(p)$ dont le module serait celui de la figure 1.9 peut se réaliser de la façon suivante :

$$W_o(p) = \eta \frac{(p + \eta\gamma b)(p + \gamma^{-1}\eta^{-1}c)}{(p + b)(p + c)}$$

$$b < c$$

$$\gamma > 0$$

$$\eta > 0$$

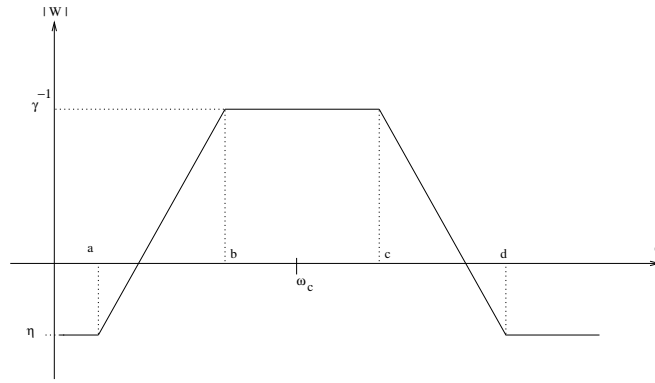


FIG. 1.9 – Pondération de sortie dépendant d'un paramètre γ

Sur la base du théorème 1.2.1 et de la remarque précédente, nous pouvons développer plusieurs catégories de problèmes :

- (i) Le problème le plus fréquent et le plus couramment soulevé, consiste à rechercher un modèle réduit d'ordre r fixé qui minimise l'erreur pondérée : pour r fixé, $r < n$,

$$\min_{G_r} \|W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty \quad (1.5)$$

- (ii) Ce problème fait intervenir la pondération de la figure 1.9. D'un intérêt pratique intéressant, la recherche d'une solution G_r satisfaisant : Pour r fixé, $r < n$,

$$\min_{G_r, \gamma \in \mathbb{R}} \gamma \quad (1.6)$$

sous la contrainte $\|W_o(s, \gamma)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty \leq 1$

permet de tenir compte au mieux d'un intervalle de pulsations pour lequel la qualité du modèle réduit doit être importante.

- (iii) Enfin, il est naturel de s'intéresser à la recherche d'un modèle réduit, d'ordre le plus faible possible, qui vérifie la contrainte (1.4) :

$$\min_{G_r} r \quad (1.7)$$

sous la contrainte $\|W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty \leq 1 \quad (1.8)$

REMARQUE 1.2.2

Dans la majorité des résultats énoncés dans ce mémoire, les différents transferts sont stables. Ainsi si $H(p)$ est un transfert stable et causal ($H(p) \in \mathcal{RH}_\infty$) alors (norme H_∞) :

$$\|H(p)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(p) > 0} \bar{\sigma}(H(p))$$

Par ailleurs, dans certains cas, nous serons amenés à considérer des transferts dont une partie des pôles se situe dans le demi plan droit (privé de l'axe imaginaire). Dans ce cas, la norme \mathcal{L}_∞ est implicitement considérée :

$$\|H(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(H(j\omega))$$

Les normes H_∞ et \mathcal{L}_∞ sont égales dans le cas où $H(p)$ est stable et causal (principe du module maximum).

1.2.2 Classification des méthodes existantes

La formalisation précédemment établie n'est pas apparue spontanément dans les travaux sur la réduction de modèles. Depuis les années 70, un grand nombre d'idées et de techniques ont été développées. Ce n'est qu'à partir du début des années 80 qu'a émergé la problématique de la réduction de modèles dans le contexte de la commande : l'objectif est de disposer d'un modèle simplifié, mais suffisamment pertinent pour la mise au point de la loi de commande d'un système. Cette préoccupation est en adéquation avec le souci de commander des systèmes de plus en plus complexes (centrales nucléaires [Aok68], engins spatiaux [Enn84], ...). De multiples exemples de systèmes où la réduction est un problème important se trouvent dans [CD02].

Les premières approches de la réduction de modèles ont été inspirées par des concepts physiques qui consistent à conserver les modes physiques d'un système dans le modèle réduit [Dav66, Aok68, SMB77, LB88]. Elles constituent l'idée principale des méthodes d'agrégation qui seront évoquées chapitre 6. De même, une autre approche réside dans la technique de la perturbation singulière [KOS76]. Cette technique (inspirée par les travaux du mathématicien Tihonov) propose de perturber afin de négliger une partie de la dynamique d'un système (linéaire ou non-linéaire). Dans le cas des systèmes linéaires, cette technique permet de conserver le gain statique du système.

Loin des préoccupations de la commande, le concept de réalisation équilibrée d'un système a été introduit dans le contexte du filtrage numérique [MR76]. Cette représentation d'état confère à l'erreur d'arrondi des données un impact minimal en sortie du filtre. Dès 1981, ce concept est repris par Moore [Moo81, PS82], qui le met en œuvre dans le contexte de l'Automatique. Les grammians déjà introduits [MR76] sont alors mis en valeur pour rendre compte de directions de l'espace d'état à la fois peu atteignables et peu observables.

Néanmoins, les approches citées ci-dessus ne s'intéressent pas à quantifier à quel point le modèle réduit obtenu approche le modèle initial. L'absence d'un quantificateur bien défini ne permet pas de formuler le problème comme un problème d'optimisation. Pour définir un quantificateur, l'idée naturelle est d'introduire une distance entre le modèle initial et le modèle réduit. Pour cela, on utilise comme quantificateur la norme H_∞ de l'erreur absolue $\Delta_{abs}(p) = G(p) - G_r(p)$. Cela revient à déterminer une distance entre les réponses fréquentielles du modèle réduit et du modèle initial. Suivant l'interprétation de la section 1.2, cela revient à rechercher une bonne approximation entre le modèle initial et le modèle réduit pour tout signal d'entrée possible. De plus, l'utilisation de cette norme est très appropriée car elle permet de se raccrocher à la théorie de la robustesse ². Dès lors, Enns [Enn84] établit une borne supérieure simple sur $\|\Delta_{abs}(p)\|_\infty = \|G(p) - G_r(p)\|_\infty$, où $G_r(p)$ est le modèle réduit obtenu par la méthode de Moore.

Dans le même temps, un algorithme efficace permettant la recherche d'un modèle réduit minimisant l'erreur absolue $\Delta_{abs}(p)$ au sens de la norme de Hankel a été proposé [Glo84]. Le principal désavantage de cette norme est sa difficulté d'interprétation. Le gros intérêt est qu'elle mène à un algorithme de réduction de modèle efficace. Quand on considère la recherche du modèle réduit minimisant l'erreur absolue au sens de la norme

²Le modèle initial est vu comme étant un modèle d'ordre plus faible incertain (ou perturbé par un opérateur borné).

H_∞ [VC98] ou même de la norme H_2 [YL99] (dont l'utilisation est courante en Automatique), on débouche sur des problèmes d'optimisation non convexe pour lesquels des algorithmes efficaces ne sont pas disponibles. (La réduction de modèle par minimisation de la norme H_∞ de l'erreur absolue sera étudiée dans le chapitre 2). Des algorithmes (qui ne convergent pas forcément vers la solution optimale) basés sur l'optimisation sous contraintes LMIs (introduite au début du chapitre 2) ont été proposés : nous en discuterons d'un dans ce chapitre. Par suite, l'intérêt des méthodes de réduction de modèles comme la troncature équilibrée ou la réduction au sens de la norme de Hankel est lié à leur simplicité de mise en œuvre même si elles ne permettent pas d'obtenir la solution optimale, c'est-à-dire le modèle réduit qui minimise la norme H_∞ de l'erreur absolue. C'est l'objet du chapitre 3 où ces différentes approches sont développées.

L'introduction de l'erreur absolue pondérée $\Delta_{pond}(p) = W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)$ pour tenir compte de l'utilisation de $G_r(p)$ comme modèle de synthèse d'une loi de commande, a été introduite par Enns [Enn84]. Enns étend naturellement la méthode de Moore (troncature équilibrée) [Moo81] au cas pondéré. Cette extension souffre d'un manque de garanties a priori sur le modèle réduit : stabilité de $G_r(p)$ non assurée, absence de borne sur $\|\Delta_{pond}(p)\|_\infty$. De nombreuses variantes ont tenté de palier les lacunes de cette méthode [KAM95a, WV98, WV99, DSL99]. Pour certaines classes de pondérations, la réduction optimale au sens de la norme de Hankel de l'erreur pondérée est établie dans [LA85]. De la même façon que pour l'erreur absolue, nous étudierons dans le chapitre 2 sa minimisation puis dans le chapitre 4, la troncature équilibrée et la minimisation de la norme de Hankel dans le cas de l'erreur absolue pondérée.

Un autre type d'erreur a été étudiée dans les années 80 : l'erreur relative définie par $\Delta_{rel}(p) = G^{-1}(p)(G(p) - G_r(p))$. Cette erreur a l'avantage, par rapport à l'erreur absolue, de "normaliser" les données. Nous verrons dans le chapitre 2 que, dans le contexte de la réduction d'un modèle de synthèse, elle présente des propriétés importantes. Ce problème est fortement connecté aux techniques de réalisations stochastiques de faible ordre [DP84] et aux techniques d'approximation de spectres rationnels [GA89, Gre88a, HJ85a] : la BST (Balanced Stochastic Truncation), etc. où des variantes de la troncature équilibrée et de la réduction au sens de la norme de Hankel sont développées. Ces différentes techniques peuvent être également interprétées comme des méthodes d'approximation de la phase d'un modèle initial par la phase d'un modèle réduit (phase matching) [GA89]. Le chapitre 5 fait le point sur ces différentes méthodes alors que la formulation de la minimisation de l'erreur relative est développée et discutée dans le chapitre 2.

Le tableau 1.10 résume l'ensemble des techniques connues et leur relation avec un type d'erreur, c'est-à-dire un choix particulier des pondérations $W_i(p)$ et $W_o(p)$.

Les techniques de réduction citées précédemment peuvent être classées comme l'indique la figure 1.11.

1.3 Les différents exemples étudiés

Les différents algorithmes rencontrés au cours de ce mémoire sont comparés à travers les exemples suivants.

W_i	W_o	type d'erreur	méthodes
I	I	erreur absolue	Troncature équilibrée (page 60) + perturbation singulière (page 69) Approximation optimale au sens de la norme de Hankel (page 83) Approximation pas à pas au sens de la norme de Hankel (page 85)
G^{-1} I	I G^{-1}	erreur relative	Balanced Stochastic Truncation (BST) (page 133) Approximation relative pas à pas au sens de la norme de Hankel (page 125)
quelconque	quelconque	erreur absolue pondérée	conjecture de Enns (page 101) Extension de Lin et Chiu (page 104) Méthode de Wang et al. (page 105) Approche par décomposition modale partielle (page 96) Approximation optimale pondérée au sens de la norme de Hankel (page 107)
quelconque G^{-1}	G^{-1} quelconque	erreur relative pondérée	BST pondérée (page 146) Approximation relative pondérée au sens de la norme de Hankel (page 145)

FIG. 1.10 – Les différents choix de pondérations

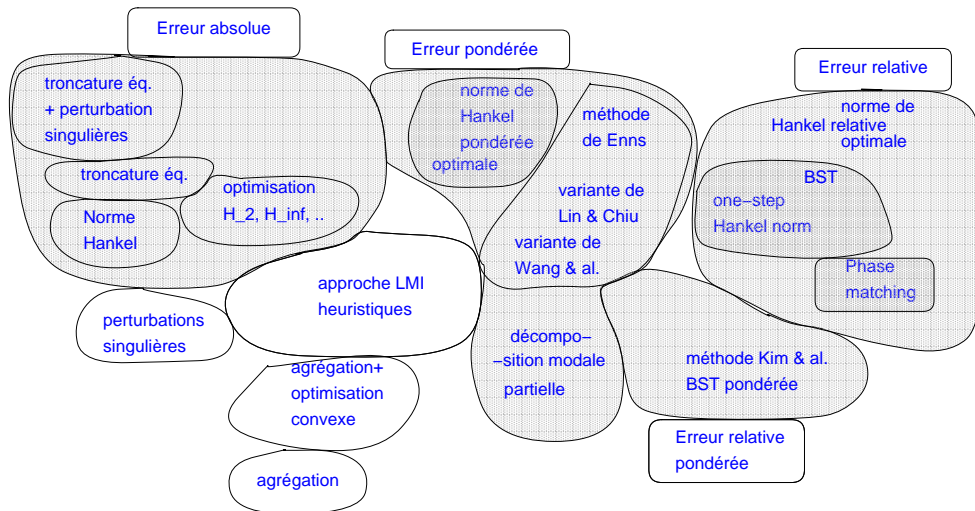


FIG. 1.11 – Aperçu des méthodes de réduction de modèles

1.3.1 Exemple de Safonov et al.

Le premier modèle considéré [SC92] est un système monovariabte d'ordre 7 :

$$G(p) = 0.05 \frac{(p + 799.7)(p + 1)(p + 0.1391)(p^2 + 0.115p + 0.2171)(p^2 + 0.02494p + 0.2298)}{(p + 0.1485)(p^2 + 0.5961p + 0.0898)(p^2 + 10p + 25.03)(p^2 + 1.854p + 0.8985)}$$

Le tracé fréquentiel qui est représenté sur la figure suivante, a la particularité de présenter une anti-résonance prononcée accompagnée d'une variation rapide de la phase.

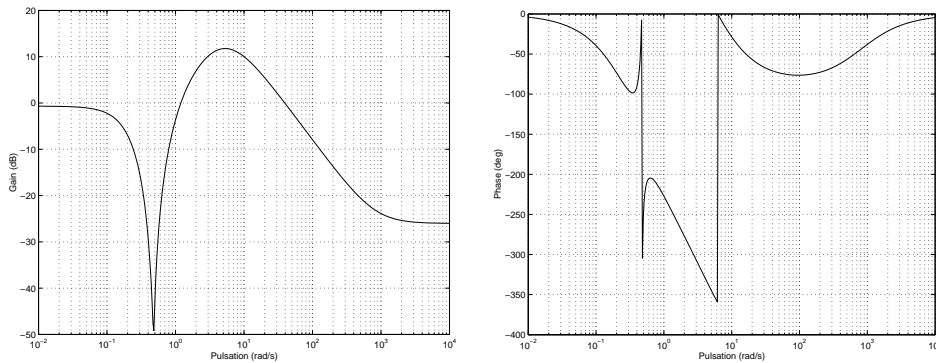


FIG. 1.12 – Diagramme de Bode de $G(p)$

Cette propriété remarquable sur le gain et la phase est essentiellement due à la présence de 2 paires de zéros complexes conjugués mal amortis.

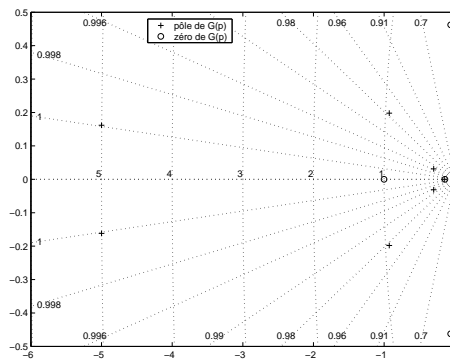


FIG. 1.13 – Carte des pôles et zéros de $G(p)$

Cet exemple pose le problème de trouver un modèle réduit qui conserve l'anti-résonance tout en restant fidèle au modèle initial à des pulsations inférieures. Les modèles réduits aux ordres 5 et 6 vérifient cette exigence quelle que soit la méthode utilisée. La difficulté est de calculer un modèle réduit à l'ordre 4 satisfaisant.

Dans ce cadre, nous pouvons introduire un indicateur qui représente la qualité du modèle réduit sur une gamme de pulsations allant de 0rad/s à 2rad/s . Cet indicateur est l'erreur relative de modèle sur cette gamme de pulsations :

$$\rho_r^{\text{ex1}} = \sup_{\omega \in [0,2]} (|G^{-1}(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))|) \quad (1.9)$$

1.3.2 L'exemple du TGEN

Le deuxième système étudié est un benchmark de réduction de modèles [Var99] de système multivariable, le TGEN (Nuclear plant turbo-generator model). Ce modèle d'ordre 10 possède les matrices d'état se trouvant page 245. Un tel modèle, strictement propre, n'est pas inversible sur l'ensemble des pulsations (non inversible pour $\omega = +\infty$). Son approximation au sens de l'erreur relative ne sera donc pas considérée, mais il est toujours possible d'inverser $G(j\omega)$ sur une gamme de pulsations et d'envisager alors une réduction absolue pondérée où l'une des pondérations est l'inverse de $G(j\omega)$ sur une gamme de pulsations allant de 0 à une pulsation donnée.

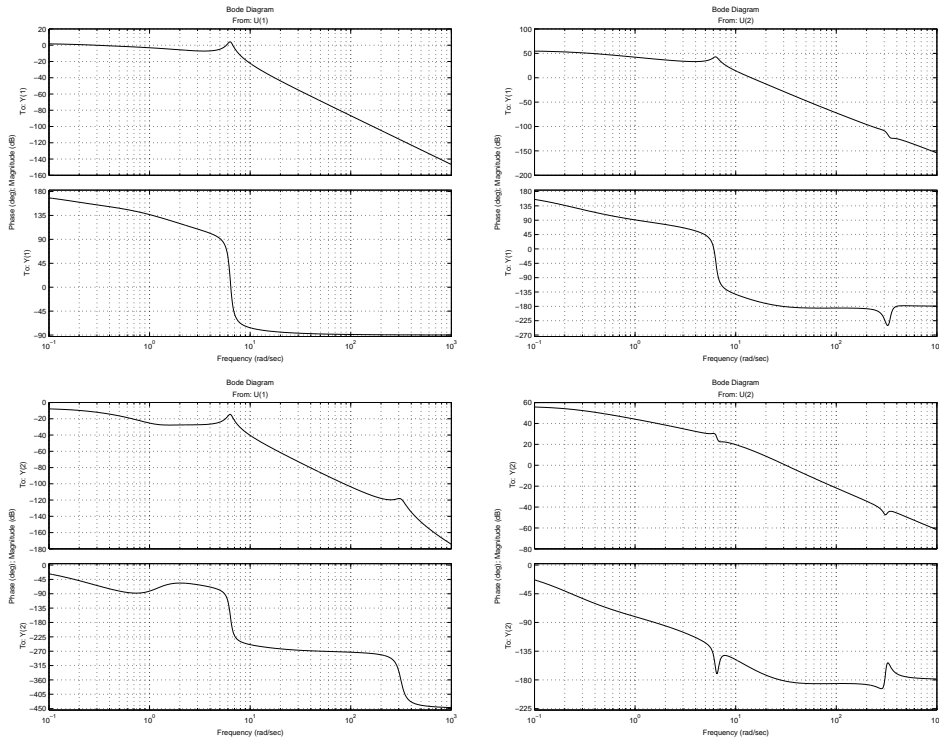


FIG. 1.14 – Diagramme de Bode du TGEN

Deux modes résonnants sont présents dans ce système. Un modèle réduit est cherché de façon à ne conserver que le premier dont la pulsation propre est de 5.5 rad/s . Ce modèle devra conserver les caractéristiques fréquentielles du système pour des pulsations allant de 0 rad/s à 50 rad/s (environ une décade après le premier mode). Il est alors naturel d'introduire l'indicateur de qualité suivant :

$$\rho_r^{\text{ex2}} = \sup_{\omega \in [0, 50]} (\bar{\sigma}(G^{-1}(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega)))) \quad (1.10)$$

Nous pouvons noter que la première résonance sur le transfert (2, 1) possède des gains faibles de l'ordre de -15 dB . Un second indicateur est donc introduit pour rendre compte de la qualité du modèle réduit sur le transfert (2, 1).

$$\rho_r^{\text{ex2b}} = \sup_{\omega \in [0, 50]} (|G_{(2,1)}^{-1}(j\omega)(G_{(2,1)}(j\omega) - G_{(2,1)r}(j\omega))|) \quad (1.11)$$

1.3.3 L'exemple du bief de type 1

Enfin, le troisième exemple est un modèle d'écoulement dans un bief. L'obtention d'un tel modèle multivariable est discutée dans le chapitre 7.3, page 173. Le tracé fréquentiel de ce modèle multivariable d'ordre 24 est présenté sur la figure suivante.

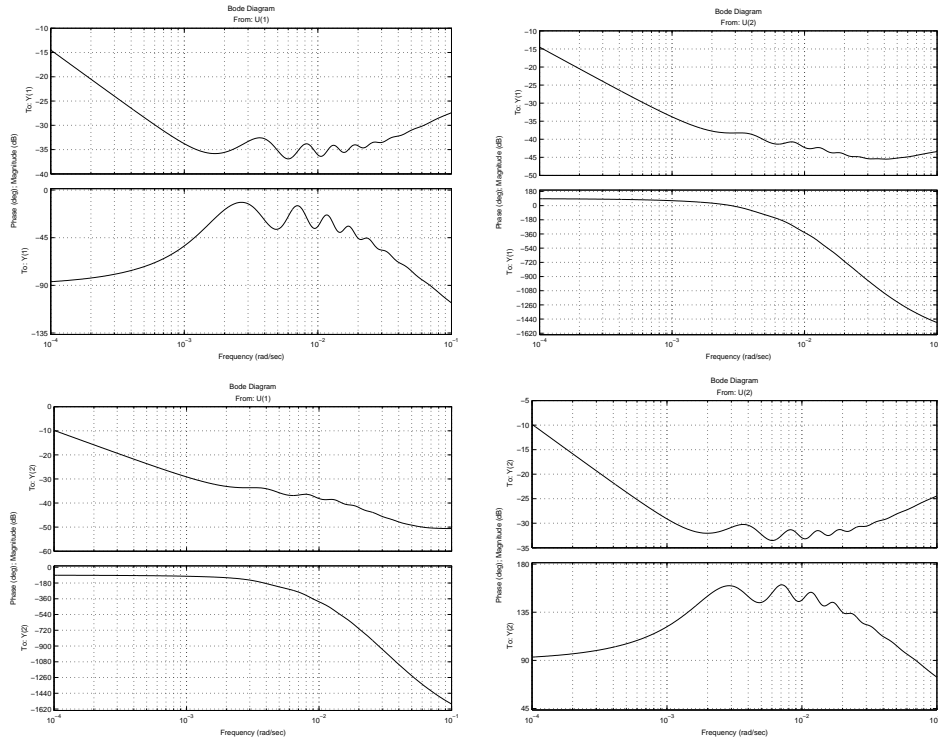


FIG. 1.15 – Diagramme de Bode du bief de type 1

Ce modèle d'ordre important présente des résonances très visibles sur les transferts diagonaux et qui sont atténuées sur les transferts croisés. Ces mêmes transferts croisés présentent un retard visible sur la phase. Par ailleurs, ce modèle possède un zéro (multi-variable) réel instable et un intégrateur.

Dans cet exemple, un modèle d'ordre réduit est recherché de manière à représenter le modèle initial à des pulsations allant de 0 à $5 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$. Une telle spécification est justifiée pour 2 raisons :

- La cohérence du modèle d'ordre 24 avec le modèle de dimension infinie présenté dans le chapitre 7.3 est établie pour des pulsations allant de 0 à $5 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$.
- Pour des raisons développées dans la partie portant sur la commande des canaux, la bande passante est intrinsèquement limitée et inférieure à $5 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$.

Il est naturel d'introduire un indicateur qui représente la qualité du modèle réduit sur une gamme de pulsations allant de 0 rad/s à $5 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$. Cet indicateur est défini comme la valeur singulière de l'erreur relative de modèle sur cette gamme de pulsations :

$$\rho_r^{\text{ex3}} = \sup_{\omega \in [0, 5 \cdot 10^{-3}]} (\bar{\sigma}(G^{-1}(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega)))) \quad (1.12)$$

Le transfert (2,1) du modèle de bief est d'un intérêt particulier pour la synthèse de lois de commande. En effet, cette fonction de transfert relie la commande u_1 (débit au niveau de la vanne amont) à la sortie à commander y_2 (niveau d'eau à l'aval du bief).

L'indicateur précédent ne saurait, à lui seul, mesurer à quel point le transfert $(2, 1)$ du modèle réduit est proche de celui du modèle de départ. C'est pourquoi, nous introduisons un indicateur de qualité propre à ce sous-transfert :

$$\rho_r^{\text{ex3b}} = \sup_{\omega \in [0, 5 \cdot 10^{-3}]} (|G_{(2,1)}^{-1}(j\omega)(G_{(2,1)}(j\omega) - G_{(2,1)r}(j\omega))|) \quad (1.13)$$

CHAPITRE 2

 Caractérisation du problème de réduction de modèles

Ce chapitre a pour but de formaliser le problème de réduction de modèles. A partir du théorème 1.2.1, nous allons d'abord donner une formulation générale pour des pondérations quelconques. Ensuite, pour des pondérations particulières (tableau 1.10 page 22), des conditions plus spécifiques seront dégagées.

Dans de nombreux contextes de l'Automatique linéaire, les problèmes peuvent se formuler comme la minimisation d'une fonction de coût convexe sous contraintes convexes. Plus spécifiquement, la section suivante résume la formulation et l'intérêt des problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles affines.

2.1 Problèmes d'optimisation sous contrainte *LMI*

Pratiquement, la majeure partie des problèmes d'Automatique linéaire stationnaire peut se formuler comme un problème d'optimisation sous contraintes de type inégalités matricielles. Soit une fonction coût $f(\cdot)$ de la variable vectorielle ξ . La minimisation de la fonction coût sous contraintes matricielles peut s'écrire :

$$\min_{\xi \in \mathcal{C}} f(\xi)$$

où

$$\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^T F(\xi)x \geq 0\} \quad \text{ou} \quad \mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x^T F(\xi)x > 0\}$$

avec ξ le vecteur des variables de décision, vecteur de \mathbb{R}^m . Le symbole > 0 (≥ 0) signifie définie positive (semi définie positive)¹.

Très grossièrement, à partir d'un point initial ξ_0 , les algorithmes efficaces disponibles recherchent un minimum local. Si la fonction f admet plusieurs minima, le résultat va dépendre du point initial ξ_0 . Un cas très intéressant est celui où il n'existe qu'un seul minimum local (minimum local = minimum global) : indépendamment du point initial, le minimum global sera alors atteint. Cette propriété est obtenue dans le cas où f est une

¹Rappelons que $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n, x^T F(\xi)x > 0 \Leftrightarrow$ les valeurs propres de $F(\xi)$ sont strictement positives.

fonction convexe et où \mathcal{C} est convexe : on parle alors d'*optimisation convexe*.

Dans le cas où F est bilinéaire en ξ , de nombreux problèmes d'Automatique linéaire peuvent se formaliser de la sorte (optimisation BMI (Bilinear Matrix Inequality)). Cependant, une telle classe de problèmes d'optimisation contient des problèmes *NP-difficiles*. Ce type de problèmes d'optimisation ne possède pas à ce jour d'algorithme de résolution générique de complexité raisonnable, c'est-à-dire P (se reporter section 1.1.4.1, page 14). Cependant, une sous classe intéressante de problèmes considère des inégalités matricielles affines en les variables de décision :

$$F(\xi) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i$$

où les F_i sont m matrices symétriques données de $\mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$. Cette contrainte est appelée contrainte Inégalité Matricielle Affine ou contrainte *LMI*. L'optimisation *LMI* a émergé au début des années 90 [BGF94]. Les premiers solveurs efficaces, de complexité P sont apparus vers 1994 [GN93]. Ils permettent de résoudre la majeure partie des problèmes de complexité P recensés en automatique linéaire.

Dans la suite de cette thèse, nous considérons 2 classes de problème d'optimisation *LMI*.

Problème de Faisabilité

Tester si $\mathcal{C} \neq \emptyset$ et si oui déterminer un $\xi \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \text{trouver } & \xi \in \mathbb{R}^m \\ \text{tel que } & F(\xi) > 0 \end{aligned}$$

Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire

$$\begin{aligned} \text{minimiser } & c^T \xi \\ \text{pour } & \xi \in \mathbb{R}^m \\ \text{contraint par } & F(\xi) > 0 \end{aligned}$$

où c^T est un vecteur ligne donné.

2.2 Formalisation du problème de réduction de modèles

Dans la suite, les modèles $G(p)$, $G_r(p)$ ainsi que les pondérations sont décrits par :

$$G(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] ; G_r(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] ; W_i(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{wi} & B_{wi} \\ \hline C_{wi} & D_{wi} \end{array} \right] ; W_o(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{wo} & B_{wo} \\ \hline C_{wo} & D_{wo} \end{array} \right] \quad (2.1)$$

Ces pondérations sont supposées carrées inversibles et de terme direct inversible. Leur ordre est noté n_o et n_i .

Dans la suite, nous proposons une formulation du problème (1.5), page 19 qui peut s'appréhender comme un cas particulier de la synthèse d'un correcteur H_∞ d'ordre réduit. La solution du problème H_∞ donnée par exemple dans [GA94] est proposée sous

une forme compacte dans le théorème C.1.1 situé en annexe, page 236.

La structure particulière du problème de réduction de modèles mène à une simplification des expressions par rapport à celles utilisées pour la synthèse d'une loi de commande. D'une formulation basée sur des matrices de fonctions de transferts (problème (1.5)), nous passons à des conditions équivalentes dans l'espace d'état. Le lien entre les deux réside dans le lemme réel borné explicité dans l'annexe B, page 229.

Pour formuler notre problème comme un problème de commande H_∞ , nous écrivons l'erreur absolue pondérée $\Delta(p) = W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)$ autrement comme l'interconnexion de $G_r(p)$ avec un opérateur : $H(p) : \Delta(p) = H(p) \star G_r(p)$, voir figure 2.1. Le modèle réduit $G_r(p)$ est assimilable à un correcteur pour le problème de commande. $\Delta(p)$ est représenté par le transfert liant l'entrée w à la sortie z .

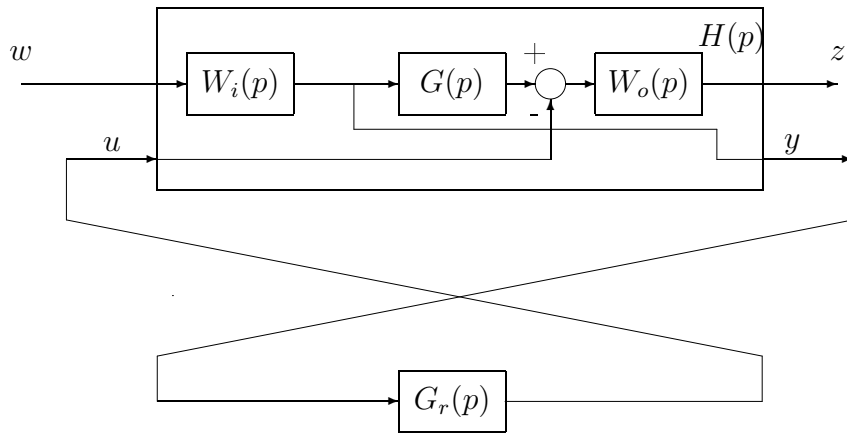


FIG. 2.1 – Interconnexion d'un transfert H avec G_r

La représentation d'état de $\Delta(p)$ est :

$$\Delta(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{cccc|c} A_{wo} & B_{wo}C & B_{wo}(D - D_r)C_{wi} & -B_{wo}C_r & B_{wo}(D - D_r)D_{wi} \\ 0 & A & BC_{wi} & 0 & BD_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} & 0 & B_{wi} \\ 0 & 0 & B_rC_{wi} & A_r & B_rD_{wi} \\ \hline C_{wo} & D_{wo}C & D_{wo}(D - D_r)C_{wi} & -D_{wo}C_r & D_{wo}(D - D_r)D_{wi} \end{array} \right] \quad (2.2)$$

D'après le lemme réel borné, $\|\Delta(p)\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si :

$$\exists \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0 \quad (2.3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} & \tilde{P} \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T \tilde{P} & -\gamma^2 I & \tilde{D}^T \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -I \end{array} \right] \leq 0 \quad (2.4)$$

L'inégalité (2.4) est une *BMI* puisque des termes bilinéaires en les variables de décision $(\tilde{P}, A_r, B_r, C_r, D_r)$ apparaissent. Il est possible de développer la précédente inégalité et de faire disparaître les termes bilinéaires en les variables de $G_r(p)$, à savoir A_r, B_r, C_r et D_r . Par application du lemme d'élimination page 230, les inégalités précédentes donnent

naissance à des conditions de type *LMI* et à une contrainte de rang sur une matrice affine en les variables de décision. Cette dernière contrainte de rang n'est pas convexe. Le théorème suivant présente ces nouvelles contraintes qui permettent de faire explicitement apparaître la difficulté du problème.

THÉORÈME 2.2.1

Soit $G(p)$ un modèle stable de dimension n dans l'espace d'état. Il existe $G_r(p)$ stable de dimension r vérifiant :

$$\|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega)\|_\infty \leq \gamma$$

si et seulement si

(i) $\exists P \in \mathbb{R}^{(n_o+n+n_i) \times (n_o+n+n_i)}$, $P = P^T /$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{wi} - B_{wi}D_{wi}^{-1}C_{wi} \end{array} \right]^T P + P \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{wi} - B_{wi}D_{wi}^{-1}C_{wi} \end{array} \right] + \dots \\ & \dots + \left[\begin{array}{cc|c} \begin{array}{c} C_{wo}^T \\ C_{wo}^T D_{wo}^T \end{array} & \begin{array}{c} C_{wo} \\ D_{wo}C \end{array} & 0 \\ \hline 0 & & -\gamma^2 C_{wi}^T D_{wi}^{-T} D_{wi}^{-1} C_{wi} \end{array} \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

(ii) $\exists Q \in \mathbb{R}^{(n_o+n+n_i) \times (n_o+n+n_i)}$, $Q = Q^T /$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} & 0 & 0 \\ 0 & A & BC_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} \end{array} \right] Q + Q \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} & 0 & 0 \\ 0 & A & BC_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} \end{array} \right]^T + \dots \\ & \dots + \left[\begin{array}{cc|c} -\gamma^2 B_{wo}D_{wo}^{-1}D_{wo}^{-T}B_{wo}^T & & 0 \\ \hline \begin{array}{c} BD_{wi} \\ B_{wi} \end{array} & \begin{array}{c} D_{wi}^T B^T \\ B_{wi}^T \end{array} \end{array} \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.7)$$

(iv)

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{bmatrix} \leq n + n_i + n_o + r \quad (2.8)$$

Démonstration : Le développement des calculs est mené en annexe C.1, page 235. \square

2.2.1 Remarque sur la condition de rang

La condition (2.8) est une contrainte non-convexe portant sur les matrices P et Q . Cette contrainte est du reste commune à de multiples problèmes : retour statique de sortie, synthèse d'une loi de commande H_∞ ...

Dans le cas de la synthèse H_∞ , cette contrainte disparaît si l'ordre du correcteur est égal à l'ordre du modèle de synthèse. Si l'ordre est fixé à une valeur strictement inférieure à l'ordre du système augmenté des pondérations, sauf conditions très particulières, les algorithmes conventionnels de type P deviennent impuissants. Néanmoins, il n'est pas montré, pour autant, que ce problème non-convexe est de type *NP-difficile* (voir page 14). En revanche, le retour statique de sortie est lui, montré *NP-difficile* [BT97] sous certaines hypothèses. Nous conjecturons qu'il en est de même pour notre problème de réduction de modèles [AA02]. La condition de rang du problème d'optimisation formulé précédemment peut être relaxée de deux manières de nature heuristique :

- la première consiste à ramener le problème d'optimisation à un problème d'optimisation convexe en considérant un sur-ensemble convexe de l'ensemble des solutions (P, Q) vérifiant les contraintes (2.5), (2.6), (2.7), (2.8). Il s'agit ensuite de satisfaire la condition de rang non-convexe en utilisant l'une des techniques de projection existante (XY centering [IS95], projections alternées [Gri95, GLS96, Wu97], cône complémentaire linéarisé [GOA97]). De plus, la convergence peut dépendre fortement du point d'initialisation.
- Une autre possibilité que l'on peut qualifier aussi d'heuristique, consiste à donner des structures particulières aux matrices P et Q , assurant que la contrainte (2.8) est vérifiée. Comme nous le verrons, ces structures ne sont pas innocentes et s'inspirent de concepts connus de l'Automatique : formes équilibrées, norme de Hankel.

Notons aussi que cette condition de rang existe aussi lorsque l'on s'intéresse à une autre norme que H_∞ . En utilisant la norme H_2 [Woe94, GLS96, YL99] ou la norme de Froebénus [Hal92], la même difficulté subsiste.

2.2.2 Construction d'un modèle réduit

Afin d'obtenir un G_r possible, c'est à dire A_r, B_r, C_r et D_r , il est possible de paramétriser toutes les matrices \tilde{P} à partir de P et Q vérifiant (2.5), (2.6), (2.7), (2.8). C'est un problème de complétion de matrices en notant que $\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & * \\ * & * \end{bmatrix}$ et $\tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma^{-2}Q & * \\ * & * \end{bmatrix}$.

La condition (2.7) et la condition de rang (2.8) permettent la factorisation suivante $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times r} P - \gamma^2 Q^{-1} = X X^T$. Alors,

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & X \\ X^T & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donnant

$$\tilde{P}^{-1} = \gamma^{-2} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & -QX \\ -X^T Q & \gamma^2 I_r + X^T Q X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T^{-T} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Le modèle réduit devient la variable de l'inégalité (2.4) qui devient une *LMI*.

REMARQUE 2.2.1

Il existe des expressions analytiques permettant de paramétriser G_r à partir des matrices P et Q [Gri95].

2.3 L'erreur absolue

Ce cas particulier consiste à prendre $W_i = W_o = I$. Dans ce cas, le système stable $G(p)$ s'exprime comme le modèle réduit $G_r(p)$ bouclé sur une incertitude additive directe $\Delta_{abs}(p)$: $G(p) = G_r(p) + \Delta_{abs}(p)$, (figure 2.2).

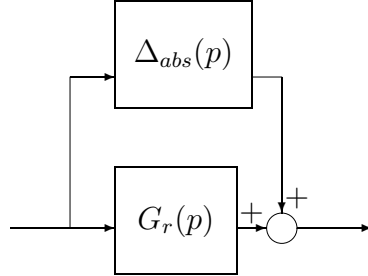


FIG. 2.2 – Expression de $G(p)$ comme un modèle réduit incertain

Nous considérons deux problèmes dans cette section. Le premier consiste à chercher $G_r(p)$ d'ordre r tel que $\|\Delta_{abs}(p)\|_\infty = \|G(p) - G_r(p)\|_\infty \leq \gamma$. Après discussion de ce problème, nous nous intéressons à la diminution de l'ordre r pour γ fixé. Avant de formaliser ces 2 problèmes, une propriété fondamentale est donnée sur $\|G(p) - G_r(p)\|_\infty$, $\forall G_r(p)$ d'ordre inférieur ou égal à r .

2.3.1 Borne inférieure

LEMME 2.3.1

Etant donné un transfert $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ de valeurs singulières de Hankel $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \sigma_{r+2} \dots \geq \sigma_n > 0$, alors pour tout $G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ de degré $\leq r$

$$\|G(p) - G_r(p)\|_\infty \geq \|G(p) - G_r(p)\|_H \geq \sigma_{r+1}(G(p)) \quad (2.11)$$

$\|\cdot\|_H$ désigne la norme de Hankel développée en détail dans la section 3.4. Les démonstrations de ce lemme [Glo84, OA00] s'appuient sur l'approximation d'opérateurs par des opérateurs de rang inférieur (résultats de Mirsky (1960) en continu). Cependant, le corollaire 3.4.5 page 77 propose une démonstration basée sur l'approche d'état.

REMARQUE 2.3.1

Le modèle réduit $G_r(p)$ ne peut approcher $G(p)$ d'une distance inférieure à

$$\gamma_{inf}(r) = \sigma_{r+1}(G(p))$$

Dans le chapitre 4, des résultats plus spécifiques sur cette borne sont donnés.

2.3.2 Recherche de la solution

Le lemme suivant est équivalent à des résultats connus [Gri95, GLS96, KB93].

LEMME 2.3.2

$G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ de représentation d'état (2.1) admet un modèle réduit d'ordre r satisfaisant $\|\Delta_{abs}\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si $\exists P = P^T$ et $Q = Q^T$ telles que :

$$A^T P + P A + C^T C \leq 0 \quad (2.12)$$

$$A Q + Q A^T + B B^T \leq 0 \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \gamma I_n \\ \gamma I_n & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.14)$$

$$\mathbf{rang} \begin{bmatrix} Q & \gamma I_n \\ \gamma I_n & P \end{bmatrix} \leq n + r \quad (2.15)$$

Démonstration : D'après le théorème 2.2.1, en supprimant les lignes et colonnes correspondant aux états de $W_i(p)$ et $W_o(p)$, le lemme est immédiat. \square

REMARQUE 2.3.2

Les contraintes (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) peuvent se formuler autrement par un changement de variable $P = \gamma \bar{P}$ et $Q = \gamma \bar{Q}$. Les contraintes du lemme 2.3.2 deviennent :

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A + \gamma^{-1} C^T C \leq 0 \quad (2.16)$$

$$A \bar{Q} + \bar{Q} A^T + \gamma^{-1} B B^T \leq 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & \bar{Q} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{rang} \begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & \bar{Q} \end{bmatrix} \leq n + r \quad (2.19)$$

Cette réécriture du problème sera plus adaptée dans l'étude de la minimisation de l'ordre du modèle réduit.

COROLLAIRE 2.3.3

Le problème (1.5) page 19 avec $W_o(p) = I$ et $W_i(p) = I$ est équivalent à

$$\gamma_{opt} = \mathbf{min}_{P=P^T, Q=Q^T, \gamma} \gamma$$

sous les contraintes (2.12), (2.13), (2.14), (2.15)

2.3.3 Cas particuliers de réduction optimale

Le corollaire 2.3.3 montre bien la difficulté du problème d'optimisation, conjecturé *NP-difficile* dans le cas général. On ne peut pas traiter ce problème à l'aide d'un algorithme en temps polynômial.

Cependant, dans 2 cas particuliers, le problème se simplifie et devient équivalent à un problème d'optimisation convexe où la condition de rang disparaît.

- Pour $r = 0$: un modèle stable de dimension n peut être approché de façon optimale par un gain constant.
- Pour $r = n - 1$: un modèle stable de dimension n peut être approché de façon optimale par un modèle stable d'ordre immédiatement inférieur.

Dans ces 2 cas, la condition de rang est vérifiée de manière structurelle.

Les lemmes suivants développent ces deux cas particuliers.

LEMME 2.3.4

L'approximation optimale de $G(p)$ par un gain G_0 revient à résoudre le problème suivant de minimisation d'un coût linéaire sous contrainte LMI :

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma, \bar{P}} \gamma \\ & \bar{P} > 0 \\ & \begin{bmatrix} A^T \bar{P} + \bar{P} A & C^T \\ C & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \\ & \begin{bmatrix} \bar{P} A + A^T \bar{P} & \bar{P} B \\ B^T \bar{P} & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Démonstration : Considérons le lemme 2.3.2 associé aux contraintes (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) en \bar{P} , \bar{Q} .

La condition (2.18) implique après application du lemme de Schur $\bar{P} > 0$, $\bar{P} - \bar{Q}^{-1} \geq 0$. Pour $r = 0$, la condition (2.19) est satisfaite si 0 est valeur propre de $\bar{P} - \bar{Q}^{-1}$ de multiplicité n , entraînant $\bar{P} = \bar{Q}^{-1}$.

En post et pré-multipliant l'inégalité (2.17) par \bar{Q}^{-1} , nous avons :

$\bar{Q}^{-1} A + A^T \bar{Q}^{-1} + \gamma^{-1} \bar{Q}^{-1} B B^T \bar{Q}^{-1} \leq 0$. Après application du lemme de Schur (page 229) et du fait que $\bar{P} = \bar{Q}^{-1}$, cette dernière inégalité devient l'inégalité (2.20). \square

LEMME 2.3.5

Soit j la multiplicité de plus petite valeur singulière de Hankel σ de $G(p)$ (σ^2 est la plus petite valeur propre du produit $P_b Q_b$ des grammians d'observabilité et de commandabilité de $G(p)$).

La réduction optimale à l'ordre $r = n - j$, est un problème convexe. De plus, $\gamma_{opt} = \sigma$.

Démonstration : Considérons $G(p)$ dans une base équilibrée, c'est-à-dire une base dans laquelle les grammians P_b et Q_b de $G(p)$ sont égaux et diagonaux (se reporter à la définition 3.2.1, page 56). Par suite, $P_b = Q_b = \mathbf{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots > \sigma$.

La borne inférieure assure déjà que $\|G(p) - G_{n-j}(p)\| \geq \sigma$ (voir lemme 2.3.1 page 32). Les inégalités (2.12) et (2.13) sont satisfaites car deviennent des égalités. Pour $\gamma_{opt} = \sigma$, l'inégalité (2.14) est vraie car (lemme de Schur) $P_b > 0$ et $P_b - \sigma^2 Q_b^{-1} = \mathbf{diag}(\sigma_1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1}, \sigma_2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2}, \dots, 0_{1 \times j}) \geq 0$.

$$\begin{bmatrix} P_b & \sigma I \\ \sigma I & Q_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma_1 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots \\ \hline \sigma & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots \\ & & \sigma & \sigma \end{array} \right]$$

La condition de rang dégénère de j dans ce cas particulier. \square

Ces deux cas particuliers où la solution optimale peut être atteinte présentent un intérêt pratique limité.

Par ailleurs, il peut être utile pour γ fixé de chercher un modèle dont l'ordre est le plus faible possible. Dans ce cas, une solution sous-optimale est atteignable. Cette partie concerne le problème (1.8), page 19 dans le cas $W_o(p) = W_i(p) = I$.

2.3.4 Minimisation du rang à γ fixé

La minimisation du rang d'une matrice définie positive dépendant affinement des variables a fait l'objet de plusieurs travaux. Nous proposons une approche basée sur l'algorithme du cône complémentaire linéarisé [GOA97, VC98]² avec des conditions supplémentaires de dégénérescence du rang.

Rappelons les contraintes en γ , $\bar{P} = \bar{P}^T$, $\bar{Q} = \bar{Q}^T$:

$$\text{contrainte (2.16)} \quad A^T \bar{P} + \bar{P} A + \gamma^{-1} C^T C \leq 0$$

$$\text{contrainte (2.17)} \quad A \bar{Q} + \bar{Q} A^T + \gamma^{-1} B B^T \leq 0$$

$$\text{contrainte (2.18)} \quad \begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & \bar{Q} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\text{contrainte (2.19)} \quad \mathbf{rang} \begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & \bar{Q} \end{bmatrix} \leq n + r$$

Cette satisfaction de la condition de rang peut se voir de la manière suivante. D'après le lemme B.6.2 page 232, si 0 devient valeur propre de $\bar{P} - \bar{Q}^{-1}$ de multiplicité $n - r$, alors $\mathbf{rang} \begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & \bar{Q} \end{bmatrix} = n + r$. L'idée est alors d'essayer de saturer la contrainte $\bar{P} - \bar{Q}^{-1} \geq 0$ en minimisant $\mathbf{trace}(\bar{P}\bar{Q})$. Notons que $\bar{P} - \bar{Q}^{-1} \geq 0$ assure que $\mathbf{trace}(\bar{P}\bar{Q}) \geq n$, ce qui implique que la fonction de coût à minimiser est bornée inférieurement. En pratique, cette minimisation s'opère en minimisant la linéarisation de ce critère non-linéaire.

2.3.4.1 Algorithme et propriétés principales

Etape 0 Fixer (diminuer ou augmenter) γ ,

Etape 1 Point d'initialisation (\bar{P}^0, \bar{Q}^0) : 3 possibilités

1. (\bar{P}^0, \bar{Q}^0) point faisable des contraintes (2.16), (2.17), (2.18),
2. (\bar{P}^0, \bar{Q}^0) solution du problème

$$\begin{aligned} & \mathbf{min}_{P, Q} \mathbf{trace}(P + Q) \\ & \text{sous les contraintes (2.16), (2.17), (2.18)} \end{aligned}$$

3. ou partir d'une solution existante G_r , c'est à dire calculer \tilde{P} de l'inégalité (2.4) puis en extraire le sous bloc supérieur gauche de dimension $n \times n$ \tilde{P}_{11} . De même, poser \tilde{P}_{11}^{-1} le sous bloc $n \times n$ de \tilde{P}^{-1} . D'après les formules (2.9) et (2.10), $(\bar{P}^0, \bar{Q}^0) = (\gamma^{-1} \tilde{P}_{11}, \gamma \tilde{P}_{11}^{-1})$.

Etape 2 Trouver (\bar{P}, \bar{Q}) qui résolvent le problème de minimisation :

$$t_k = \mathbf{min}_{\bar{P}, \bar{Q}} \mathbf{trace}(\bar{Q}^{(k-1)} \bar{P} + \bar{P}^{(k-1)} \bar{Q}), \quad k \geq 1$$

sous les contraintes (2.16), (2.17), (2.18)

Etape 3 Si le coût minimisé atteint un point stationnaire, alors arrêter et poser $\bar{P}_\infty = \bar{P}$ et $\bar{Q}_\infty = \bar{Q}$. Sinon, itérer en posant : $\bar{P}^{(k)} = \bar{P}$ et $\bar{Q}^{(k)} = \bar{Q}$, $k = k + 1$ et revenir à l'étape 2.

²algorithme destiné au départ à la synthèse d'un retour statique de sortie

□

Cet algorithme converge vers une solution sous-optimale $t_\infty \geq 2n$.

Dès que l'étape 3 est atteinte, nous disposons de deux matrices \bar{P}_∞ et \bar{Q}_∞ . $\bar{P}_\infty - \bar{Q}_\infty^{-1}$ présente des valeurs singulières faibles. Dans le cas dégénéré, celles-ci doivent être nulles. Or, un calcul numérique ne va pas sans erreurs et la précision associée fait que 0 ne peut être obtenu rigoureusement. Comment peut-on alors considérer qu'une valeur singulière faible est assimilable à 0? Une idée consiste à tester si, en perturbant légèrement \bar{P}_∞ en \bar{P}_p et \bar{Q}_∞ en \bar{Q}_p de manière à rendre $\bar{P}_p - \bar{Q}_p^{-1}$ singulière, \bar{P}_p et \bar{Q}_p vérifient encore les contraintes (2.16), (2.17), (2.18).

2.3.4.2 Conditions suffisantes de dégénérescence du rang de 1 par conditions LMI

Décomposons $\bar{P}_\infty - \bar{Q}_\infty^{-1}$ en valeurs singulières sous la forme :

$$\bar{P}_\infty - \bar{Q}_\infty^{-1} = U^T \mathbf{diag}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, 0)U + U^T \mathbf{diag}(0, 0, \dots, 0, s_n)U \quad (2.21)$$

où s_n désigne la plus petite valeur singulière. Le deuxième terme de la décomposition (2.21) est une matrice de rang 1 qui peut s'écrire $-E$ à travers l'expression suivante.

$$\begin{aligned} \bar{P}_\infty - \bar{Q}_\infty^{-1} &= LL^T - E \\ \mathbf{rang}(L) &= n - 1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Une approche possible est d'assimiler E à une perturbation sur $\bar{P}_\infty - \bar{Q}_\infty^{-1}$. Plus précisément, E est décomposée comme la somme de 2 termes : $E = E_{\bar{P}} + E_{\bar{Q}^{-1}}$ que l'on assimile respectivement à deux perturbations sur les matrices \bar{P}_∞ et \bar{Q}_∞^{-1} . La décomposition (2.22) s'écrit :

$$\bar{P}_\infty - \bar{Q}_\infty^{-1} + E = (\bar{P}_\infty + E_{\bar{P}}) - (\bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}}) = LL^T$$

Posons alors

$$\bar{P}_p \triangleq \bar{P}_\infty + E_{\bar{P}} \quad (2.23)$$

$$\bar{Q}_p^{-1} \triangleq \bar{Q}_\infty^{-1} - E_{\bar{Q}^{-1}} = \bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}} \quad (2.24)$$

La question est de savoir s'il est possible de choisir $E_{\bar{P}}$ et $E_{\bar{Q}^{-1}}$ telles que $E = E_{\bar{P}} + E_{\bar{Q}^{-1}}$ et telles que \bar{P}_p et \bar{Q}_p sont solutions des contraintes : (2.16), (2.17), (2.18).

LEMME 2.3.6

Soient \bar{P}_∞ et \bar{Q}_∞ données par l'algorithme précédent et E donnée par (2.22). S'il existe $E_{\bar{P}}$ vérifiant

$$\bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}} > 0 \quad (2.25)$$

$$A^T(\bar{P}_\infty + E_{\bar{P}}) + (\bar{P}_\infty + E_{\bar{P}})A + \gamma^{-1}C^T C \leq 0 \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}})A + A^T(\bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}}) & (\bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}})B \\ B^T(\bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}}) & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.27)$$

alors

1. \bar{P}_p et \bar{Q}_p données respectivement par (2.23) et (2.24) vérifient encore les contraintes (2.16), (2.17), (2.18)
2. De plus,

$$\exists G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty, \quad r \leq n-1, \quad \|G(p) - G_r(p)\|_\infty \leq \gamma$$

Démonstration : L'application du lemme de Schur sur (2.18) est équivalent à :

(i) $\bar{Q}^{-1} > 0$ donc $\bar{Q} > 0$

(ii) $\bar{P} - \bar{Q}^{-1} \geq 0$

\bar{P}_p et \bar{Q}_p vérifient (i) et (ii) si et seulement si $\bar{P}_\infty + E_{\bar{P}} - (\bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}}) \geq 0$ (ii) et $\bar{Q}_\infty^{-1} - E + E_{\bar{P}} > 0$ (i). La première inégalité représente (2.25). La seconde inégalité est toujours vérifiée car elle s'écrit $\bar{P}_\infty - \bar{Q}_\infty^{-1} + E = LL^T \geq 0$.

L'inégalité (2.26) s'obtient de façon immédiate par (2.16).

En post et pré-multipliant (2.17) par \bar{Q}^{-1} et en appliquant le lemme de Schur, il vient

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}^{-1}A + A^T\bar{Q}^{-1} & \bar{Q}^{-1}B \\ B^T\bar{Q}^{-1} & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0$$

\bar{Q}_p^{-1} est donc solution de cette inégalité s'il existe $E_{\bar{P}}$ vérifiant (2.27).

Pour la deuxième partie du lemme, notons \bar{P}_p et \bar{Q}_p répondent aux conditions du lemme 2.3.2 avec $r = n-1$ car la contrainte (2.19) est forcément vérifiée. \square

REMARQUE 2.3.3

Le lemme précédent revient à résoudre un problème de faisabilité LMI. Il est ainsi possible de tester si à γ fixé, le rang peut dégénérer de 1 à chaque test d'existence de $E_{\bar{P}}$ (voir figure 8.1).

2.3.4.3 Application à la réduction d'un modèle de bief

Cet algorithme est utilisé dans le cadre de la réduction d'un bief de type 1. Les caractéristiques de ce modèle sont présentées page 25. La figure suivante montre le compromis entre γ et l'ordre obtenu grâce aux conditions précédentes. Le même point d'initialisation est utilisé pour les différentes valeurs de γ . Ce point correspond à la deuxième possibilité discutée lors de l'étape 2 de l'algorithme (**min trace**($P + Q$)).

Le même algorithme est aussi utilisé avec un point d'initialisation qui est une solution connue, donnée par une méthode simple : la troncature équilibrée (voir section 3.3, page 60). Dans ce cas, comme l'indique la figure 2.4, une amélioration notable apparaît. Ce point d'initialisation particulier a permis d'améliorer de 5 états la solution pour la même valeur de γ .

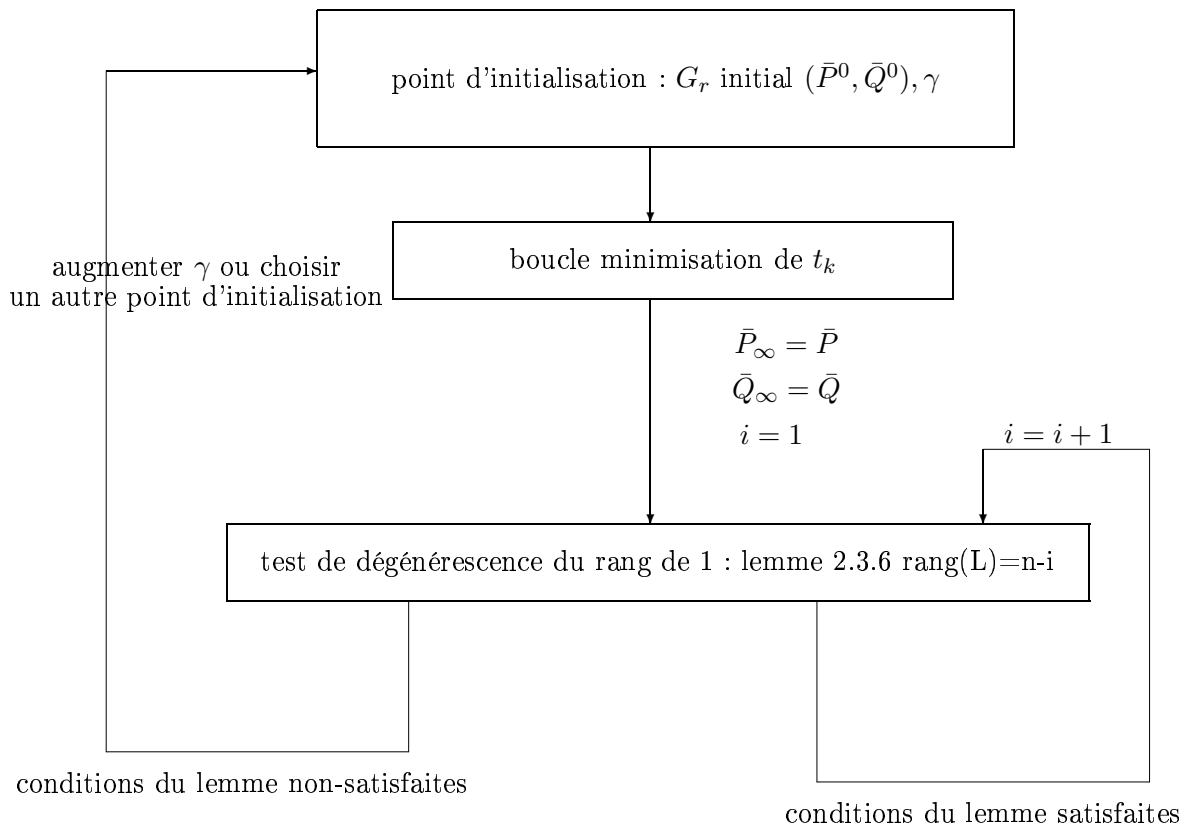


FIG. 2.3 – Diminution de l'ordre à partir d'un modèle réduit initial : résumé de l'approche

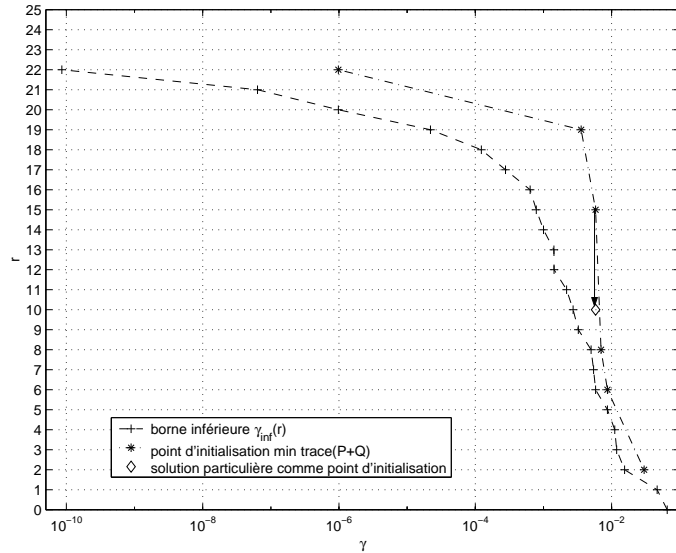


FIG. 2.4 – Réduction de l'ordre à γ fixé

A titre illustratif, voici ce que donne la réduction d'un bief de dimension 24 à l'ordre 6.

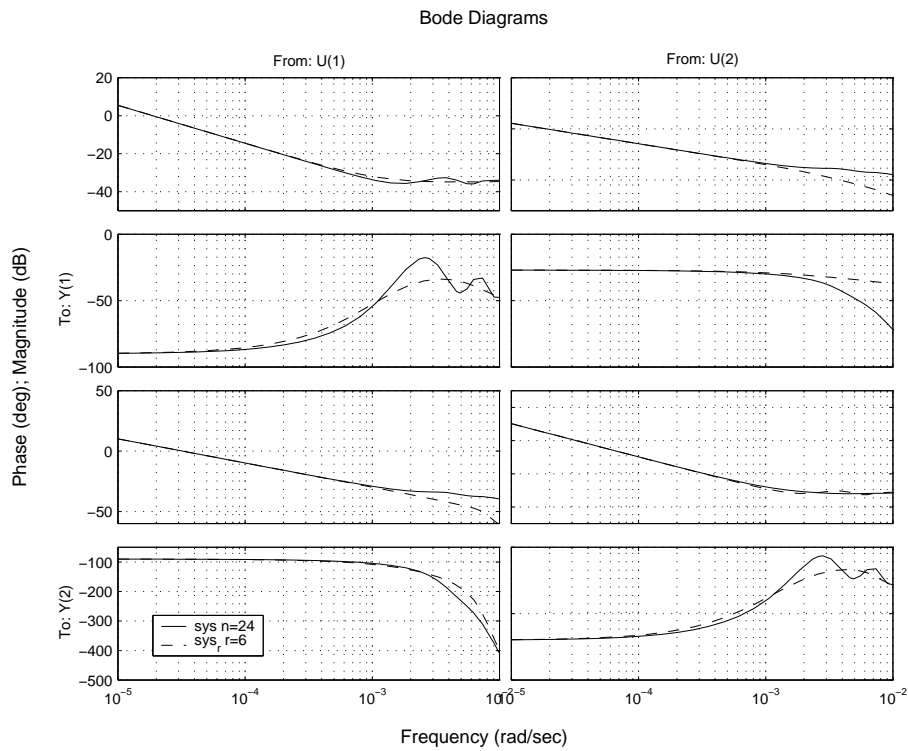


FIG. 2.5 – Réduction d'un bief de 24 états à 6 états

2.3.5 Limitation de l'erreur absolue

Dans le cas monovariante, examinons du point de vue fréquentiel l'implication d'une erreur faible, c'est-à-dire $|\Delta_{abs}(j\omega)| \leq \epsilon$. Nous pouvons en déduire facilement que l'erreur

de module $||G(j\omega)| - |G_r(j\omega)||$ est bornée par ϵ :

$$||G(j\omega)| - |G_r(j\omega)|| \leq \epsilon \quad (2.28)$$

Ceci procure une propriété intéressante sur l'erreur de module qui n'est pas reductible entièrement sur la phase. En effet, nous pouvons distinguer 2 cas, comme l'indique la figure 2.6.

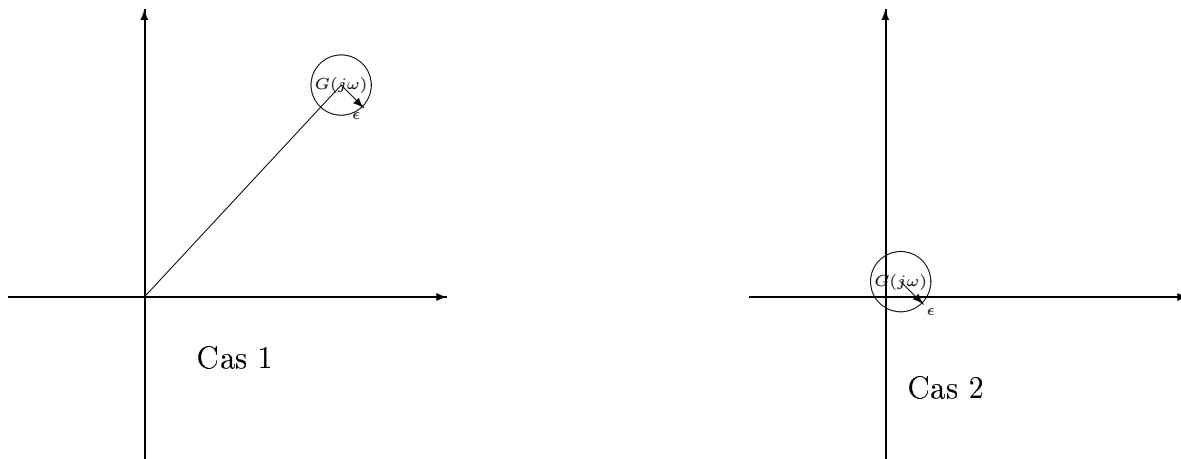


FIG. 2.6 – Limitation de l'erreur absolue

Lorsque $|G(j\omega)| > \epsilon$ (cas 1), ce qui est en général le cas dans un domaine basses pulsations, les transferts $G(j\omega)$ et $G_r(j\omega)$ sont proches. L'erreur de phase entre les 2 modèles peut même être majorée de la façon suivante³ :

$$|\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_r(j\omega))| \leq \mathbf{asin} \left(\frac{\epsilon}{|G(j\omega)|} \right)$$

Dans ce cas, le module et la phase du système G sont bien approchés par le module et la phase de G_r . En revanche, dans des domaines de pulsations où $|G(j\omega)| < \epsilon$, ce qui est généralement le cas en hautes pulsations, on ne peut rien conclure quant à l'influence d'une erreur faible sur la qualité de la réduction. En effet, même si l'erreur (absolue) entre $|G(j\omega)|$ et $|G_r(j\omega)|$ est faible, l'erreur entre la phase de G et la phase de G_r n'est pas bornée et elle peut être quelconque comme le montre la figure 2.6 (cas 2).

Partant de la constatation précédente, l'erreur absolue n'est pas adaptée à la réduction d'un système dans des gammes de pulsations où son gain est plus faible que dans d'autres gammes. Il n'est donc pas conseillé d'utiliser une telle erreur en vue de synthétiser un correcteur accélérant le système. En effet, la boucle ouverte associée à un tel correcteur va posséder une pulsation de coupure comprise dans un domaine où la phase du système G et celle du modèle de synthèse G_r peuvent être assez fortement différentes. Dans ce contexte, G_r n'est pas une bonne approximation de G pour la commande.

³En considérant le pire cas où $G_r(j\omega)$ se situe à la fois sur le cercle et la tangente au cercle passant par l'origine.

2.4 L'erreur relative

Dans cette partie, un critère de réduction de modèles au sens de l'erreur relative est étudié. L'erreur concernée $\Delta_{rel}(j\omega)$ s'écrit ici $\Delta_{rel}(j\omega) = G(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_r(j\omega))$. Dans un premier temps, le système est supposé stable, carré minimum de phase, inversible et l'inverse $G(j\omega)^{-1}$ est placée en sortie. Différents cas sur la nature de $G(p)$ (non-carré, non-minimum de phase) sont discutés dans le chapitre 5 page 121.

Un tel critère entraîne que le système de départ G peut s'exprimer comme une incertitude multiplicative inverse car $G(p) = G_r(p)(I - \Delta_{rel}(p))^{-1}$, figure 2.4.

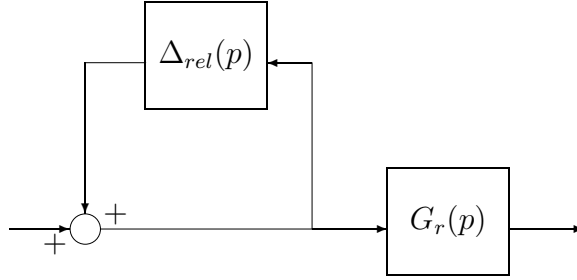


FIG. 2.7 – Expression de $G(p)$ comme un modèle réduit incertain

2.4.1 Un intérêt particulier pour l'approximation en module et en phase

Comme dans la présentation de l'erreur absolue, intéressons nous à la signification d'une erreur faible, $|\Delta_{rel}(j\omega)| \leq \epsilon < 1$, lorsque G est un système stable monovarié.

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |G_r(j\omega)| = |G(j\omega)| |1 - \Delta_{rel}(j\omega)|$$

Soit :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \mathbf{log}(|G_r(j\omega)|) = \mathbf{log}(|G(j\omega)|) + \mathbf{log}(|1 - \Delta_{rel}(j\omega)|) \quad (2.29)$$

Or

$$1 - \epsilon \leq 1 - |\Delta_{rel}(j\omega)| \leq |1 - \Delta_{rel}(j\omega)| \leq 1 + |\Delta_{rel}(j\omega)| \leq 1 + \epsilon$$

et pour ϵ petit :

$$-\epsilon \sim \mathbf{ln}(1 - \epsilon) \leq |\mathbf{ln}(|1 - \Delta_{rel}(j\omega)|)| \leq \mathbf{log}(1 + \epsilon) \sim \epsilon$$

donc, $|\mathbf{log}(|1 - \Delta_{rel}(j\omega)|)| \leq \frac{\epsilon}{\mathbf{ln}(10)}$.

Finalement, d'après (2.29), en exprimant les modules des transferts de G et G_r en décibels, il vient :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \left| |G_r(j\omega)|_{db} - |G(j\omega)|_{db} \right| \leq 8.69 \mathbf{max}(\mathbf{log}(1 + \epsilon), |\mathbf{log}(1 - \epsilon)|) \quad (2.30)$$

ou encore pour ϵ petit :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \left| |G_r(j\omega)|_{db} - |G(j\omega)|_{db} \right| \leq 8.69\epsilon \quad (2.31)$$

Il est possible par ailleurs d'exprimer l'erreur en phase $|\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_r(j\omega))|, \forall \omega \in \mathbb{R}$:

Par définition : $\mathbf{arg}(G_r(j\omega)) = \mathbf{arg}(G(j\omega)) + \mathbf{arg}(1 + \Delta_{rel}(j\omega))$.

Exprimons $\Delta_{rel}(j\omega)$ en fonction de sa partie réelle et de sa partie imaginaire :

$\Delta_{rel}(j\omega) = \Delta_{rel}^{re}(j\omega) + j\Delta_{rel}^{im}(j\omega)$, avec $|\Delta_{rel}^{re}(j\omega)| \leq \epsilon$ et $|\Delta_{rel}^{im}(j\omega)| \leq \epsilon$.

Nous avons donc $\mathbf{arg}(1 + \Delta_{rel}(j\omega)) = \mathbf{atan}\left(\frac{\Delta_{rel}^{im}(j\omega)}{1 + \Delta_{rel}^{re}(j\omega)}\right)$. La dernière expression permet d'écrire $|\mathbf{arg}(1 + \Delta_{rel}(j\omega))| \leq \mathbf{atan}(\epsilon)$, ce qui amène finalement à majorer l'erreur de phase :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_r(j\omega))| \leq \mathbf{atan}(\epsilon) \quad (2.32)$$

Approcher un modèle G par un modèle réduit G_r au sens de l'erreur relative fournit donc une bonne approximation du module et de la phase à la fois sous la forme d'une borne garantie. Il est de plus intéressant de constater que les bornes garanties par les relations (2.31) (pour le module) et (2.32) (pour la phase) sont valables sur l'ensemble des pulsations.

REMARQUE 2.4.1

Il existe 2 façons de considérer l'erreur de réduction amenant à une incertitude de type multiplicative. Alors que la figure 2.4 illustre une incertitude Δ_{rel} multiplicative inverse, il est possible d'introduire $\Delta_{mult}(p) = G_r(p)^{-1}(G(p) - G_r(p))$ ou encore $\Delta_{mult}(p)$ tel que $G(p) = G_r(p)(I + \Delta_{mult}(p))$. On parle alors d'erreur multiplicative de réduction. Celle-ci apparaît sur la figure suivante comme une incertitude multiplicative directe.

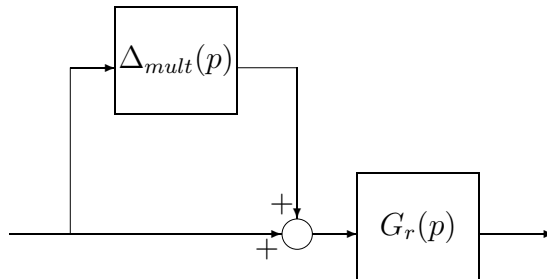


FIG. 2.8 – Erreur multiplicative

Le choix de la réduction au sens de l'erreur multiplicative possède un intérêt pratique pour la conception d'une loi de commande monovariante $K(p)$ basée sur le modelage du transfert en boucle ouverte $G_r(p)K(p)$. Assurer la stabilité en robustesse, c'est-à-dire que $K(p)$ appliqué sur $G(p)$ donne une rétroaction stable, revient à ce que le module de $T(j\omega) \triangleq G_r(j\omega)K(j\omega)(1 + G_r(j\omega)K(j\omega))^{-1}$ soit strictement inférieur au module de $\Delta(j\omega)^{-1}$ à chaque pulsation. Connaissant $\Delta(j\omega)$, la conception de $K(p)$ dans le plan de Nichols est facilitée grâce à l'abaque de Black (courbe iso gain de T). Il devient alors possible de synthétiser graphiquement une loi de commande assurant la robustesse en stabilité.

Dans le contexte de la commande multivariable, l'intérêt de l'erreur multiplicative a été souligné dans [SC92].

2.4.2 Propriétés

Comme dans le cas de l'erreur absolue, une borne inférieure peut s'écrire en fonction de $G(p)$. Pour présenter simplement cette borne, nous omettons quelques explications que le lecteur pourra trouver dans le chapitre sur l'erreur relative, page 121. Tout d'abord, remarquons que :

$$\|\Delta_{rel}\|_\infty = \|G(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty = \|W(j\omega)^{-*}(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty$$

où W facteur spectral à droite, c'est-à-dire une fonction de transfert qui vérifie $GG^* = W^*W$ (voir annexe F, page 247).

Une borne inférieure est alors donnée dans le lemme suivant, conséquence du lemme 5.2.3, page 125.

LEMME 2.4.1

Soit $G(p)$ et $W(p)$ des transferts stables, avec $G(p)$ d'ordre n . Soit $G_r(p)$ stable et d'ordre r . Alors

$$\|W(j\omega)^{-*}(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty \geq \sigma_{k+1}(W(j\omega)^{-*}G(j\omega)) \quad (2.33)$$

REMARQUE 2.4.2

Le facteur spectral $W(p)$ n'est pas unique [GA89, And73] et il est possible d'établir une relation d'ordre sur l'ensemble des facteurs spectraux W associés à G . Une paramétrisation est donnée dans la section F, page 247. La borne inférieure donnée dans le lemme précédent dépend donc du choix de $W(p)$. Les $\sigma_i(W(j\omega)^{-*}G(j\omega))$ sont minimisés lorsque $W(p)$ est choisi minimum de phase, correspondant "au plus petit" des facteurs spectraux possibles.

2.4.3 Recherche d'une solution

Considérons $G(p)$ stable et minimum de phase et inversible sur l'axe imaginaire. La pondération $W_o(j\omega) = G^{-1}(j\omega)$ est donc stable et inversement stable. L'erreur concernée $\Delta_{rel}(j\omega)$ vaut $\Delta_{rel}(j\omega) = G^{-1}(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega)) = I - G^{-1}(j\omega)G_r(j\omega)$. Dans ce cas particulier, la pondération s'écrit :

$$W_o(j\omega) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right]$$

La figure 2.9 exprime le problème sous forme d'une interconnexion.

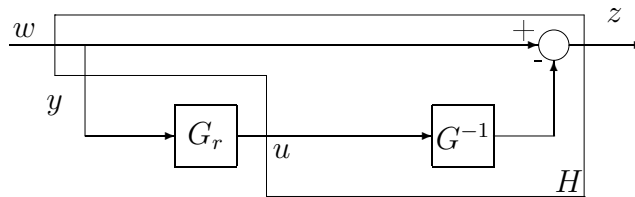


FIG. 2.9 – Schéma d'interconnexion avec $G_r(p)$

LEMME 2.4.2

Il existe un modèle réduit $G_r(j\omega)$ d'ordre r tel que $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma < 1$ si et seulement si :

(i) $\exists P = P^T$

$$(A - BD^{-1}C)^T P + P(A - BD^{-1}C) + C^T D^{-T} D^{-1} C \leq 0 \quad (2.34)$$

(ii) $\exists Q = Q^T$

$$AQ + QA^T + (1 - \gamma^2)BB^T \leq 0 \quad (2.35)$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.36)$$

(iv)

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{bmatrix} \leq n + r \quad (2.37)$$

Démonstration : La démonstration est située en annexe page 240. \square

Les conditions du lemme 2.4.2 peuvent s'écrire à nouveau à l'aide d'un changement de variable $\bar{P} = P$ et $\bar{Q} = (1 - \gamma^2)^{-1}Q$:

$$(A - BD^{-1}C)^T \bar{P} + \bar{P}(A - BD^{-1}C) + C^T D^{-T} D^{-1} C \leq 0 \quad (2.38)$$

$$A\bar{Q} + \bar{Q}A + BB^T \leq 0 \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} I \\ \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} I & \bar{Q} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.40)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{P} & \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} I \\ \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} I & \bar{Q} \end{bmatrix} \leq n + r \quad (2.41)$$

Réduction optimale à l'ordre $n - 1$ **LEMME 2.4.3**

L'approximation au sens de l'erreur relative, d'un modèle d'ordre n stable et minimum de phase, peut se faire de façon optimale par un modèle d'ordre $n - 1$. De plus

$$\gamma_{opt} = \min_{G_r} \|G^{-1}(p)(G(p) - G_r(p))\|_\infty = \frac{\alpha_n}{\sqrt{1 + \alpha_n^2}}$$

où α_n est la plus petite valeur singulière de Hankel de $G^{-1}(p)$.

Démonstration : Plaçons nous dans la base équilibrée de $G^{-1}(p)$. Les grammien de commandabilité et d'observabilité de $G^{-1}(p)$ sont $P_b = Q_b = \mathbf{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec par hypothèse $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$.

Une borne inférieure sur $\|G^{-1}(p)(G(p) - G_{n-1}(p))\|_\infty$ est donnée par le lemme 2.4.1, c'est-à-dire $\sigma_n(W^{-*}G)$. Cette borne s'exprime en fonction de α_n de la façon suivante [OA00, CGZ95] :

$$1 > \gamma = \sigma_n(W^{-*}G) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{1 + \alpha_n^2}}$$

ou encore

$$\alpha_n = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}, \quad \gamma < 1$$

Les contraintes (2.38) et (2.39) sont satisfaites pour $P = P_b$ et $Q = Q_b$ (égalités). Les contraintes (2.40) et (2.41) deviennent

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_b & \alpha_n I \\ \alpha_n I & Q_b \end{bmatrix} &\geq 0 \\ \text{rang} \begin{bmatrix} P_b & \alpha_n I \\ \alpha_n I & Q_b \end{bmatrix} &\leq 2n - 1 \end{aligned}$$

Comme pour le cas de l'erreur absolue, nous pouvons montrer sans difficulté que ces contraintes sont satisfaites. \square

REMARQUES 2.4.1

Le résultat précédent montre simplement qu'un résultat similaire à l'erreur absolue peut être établi. Dans le cas de deux pondérations W_i et W_o quelconques, aucun résultat de ce genre n'existe.

Dans le cas précédent, G^{-1} est placé en sortie. C'est le cas le plus recensé dans la littérature. Cependant, G^{-1} placé à l'entrée i.e. $W_i = G^{-1}$ présente un intérêt plus pratique. L'avantage est ainsi de normaliser les données d'entrée.

L'erreur étudiée devient $\|(G(j\omega) - G_r(j\omega))G^{-1}(j\omega)\|_\infty$. Dans ce cas, le calcul des orthogonaux donne :

$$\begin{aligned} [B_u^T \ D_{zu}^T]^\perp &= [I \ 0]^T \\ [C_y \ D_{yw}]^\perp &= [I \ C^T]^T \end{aligned}$$

Nous aboutissons alors à des inégalités duales aux précédentes :

(i) $\exists Q = Q^T$

$$(A - BD^{-1}C)Q + Q(A - BD^{-1}C)^T + BD^{-1}D^{-T}B \leq 0$$

(ii) $\exists P = P^T$

$$A^T P + PA + (1 - \gamma^2)C^T C \leq 0$$

(iii) ainsi que les contraintes (2.36) et (2.37).

2.4.4 Limitation des erreurs absolues et relatives

Le choix d'une erreur absolue, justifié dans la section 2.3.5, est intéressant lorsque l'on souhaite approcher $G(p)$ dans un domaine où le gain $G(j\omega)$ est grand. L'erreur relative est quant à elle motivée dans la section 2.4.1 pour l'approximation de la phase.

L'exemple suivant concerne un système d'ordre 5 que nous souhaitons approcher à l'ordre 3 tout en gardant le premier phénomène situé à la pulsation 30rad/s . Deux méthodes de réduction sont employées. La première, adaptée à l'erreur absolue, est développée page 60.

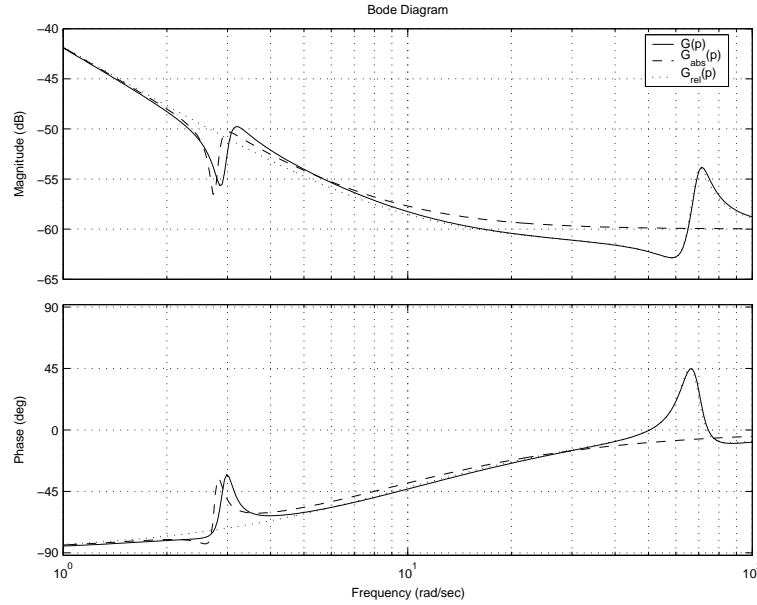


FIG. 2.10 – Réduction en erreur absolue et relative

La seconde, utilisée pour l'erreur relative, est présentée page 133. La figure 2.10 montre les réponses fréquentielles du système de départ et des deux modèles réduits.

Sans surprise, nous constatons que la méthode pour l'erreur absolue a tendance à conserver le phénomène désiré, mais le dégrade notablement. La méthode pour l'erreur relative approche le second phénomène car celui-ci est attaché à une grande variation de phase. Dans les 2 cas, la solution obtenue n'est pas satisfaisante.

Il est de ce fait raisonnable de rajouter une pondération au critère absolu ou au critère relatif de manière à accentuer le domaine de pulsations au voisinage de 30 rad/s . Une telle pondération permet de tenir compte d'intervalles de pulsations dans lesquels le critère absolu ou relatif seul s'avérerait insuffisant. Dans la section suivante, un critère relatif pondéré est étudié. Au vu de la discussion de la section 1.2 page 16, une pondération $W_o(p)$, placée en sortie, permet alors de réduire l'erreur relative de modèle dans des gammes de pulsations choisies.

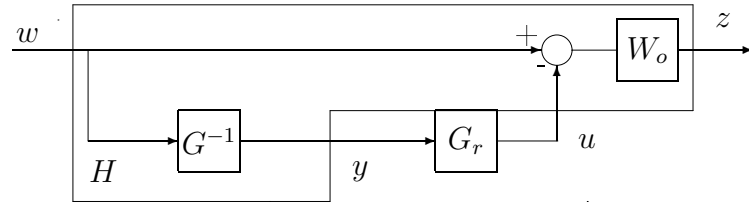
2.5 Erreur relative pondérée

Le critère étudié dans ce qui suit normalise les signaux d'entrée (G^{-1} placé en entrée) tout en permettant de pondérer l'erreur de réduction dans certaines gammes de pulsations grâce à une pondération $W_o(p)$:

$$\Delta(p) = W_o(p)(G(p) - G_r(p))G(p)^{-1}$$

Ce critère s'exprime comme l'interconnexion d'un transfert $H(p)$ avec $G_r(p)$, comme le montre la figure 2.11.

$$H(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|cc} A - BD^{-1}C & 0 & BD^{-1} & 0 \\ 0 & A_{wo} & B_{wo} & -D_{wo} \\ \hline 0 & C_{wo} & D_{wo} & -D_{wo} \\ -D^{-1}C & 0 & D^{-1} & 0 \end{array} \right]$$


 FIG. 2.11 – Schéma d'interconnexion de $G_r(p)$
LEMME 2.5.1

Soient $W_o(p)$ et $G(p)$ des matrices de fonctions de transfert stables et carrées. Il existe un modèle réduit $G_r(j\omega)$ d'ordre r tel que $\|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))G^{-1}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si :

(i) $\exists P = P^T /$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{wo} \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{wo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma^2 C^T C & 0 \\ 0 & C_{wo}^T C_{wo} \end{bmatrix} \leq 0$$

(ii) $\exists Q = Q^T /$

$$\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} \end{bmatrix}^T + \dots \\ + \begin{bmatrix} BD^{-1}D^{-T}B^T & 0 \\ 0 & -\gamma^2 B_{wo}D_{wo}^{-1}D_{wo}^{-T}B_{wo}^T \end{bmatrix} \leq 0$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

(iv)

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{bmatrix} \leq n + n_o + r$$

Démonstration : La démonstration se situe en annexe, section C.3, page 241. \square

2.6 Résumé

Ce chapitre a proposé une formulation de la réduction de modèles au sens général de l'erreur pondérée, puis au sens de l'erreur relative et relative pondérée. La plupart des démonstrations se situent en annexe C, page 235. Nous avons par ailleurs mis en perspective les avantages de l'erreur relative qui assure (en monovariante) une bonne approximation en gain et en phase, par rapport à l'erreur absolue.

La mise sous forme d'un problème d'optimisation a mis en valeur la difficulté du problème de réduction compte tenu des moyens algorithmiques à disposition. Dès lors, il est important de mettre en perspective des résultats plus classiques de la réduction de modèles.

En effet, il est essentiel :

- de disposer de méthodes facilement utilisables,
- de réinterpréter ces méthodes dans notre formalisme, lorsque cela sera possible,
- d’obtenir des solutions accessibles par une méthode simple à mettre en œuvre et pouvant servir de point d’initialisation à un algorithme plus coûteux (par exemple, l’heuristique utilisée dans la section 2.3.4).

Dans le chapitre suivant, nous faisons état des méthodes concernant la réduction au sens de l’erreur absolue. Ce domaine largement étudié fournit les méthodes les plus utilisées.

CHAPITRE 3

Etude de l'erreur absolue

3.1 Introduction

Ce chapitre présente les méthodes de réduction de modèles stables en relation avec la norme de l'erreur absolue. Ces approches, qui sont des plus anciennes (années 80), demeurent néanmoins les plus répandues. Nous présentons dans ce chapitre les deux classes de méthodes : la fameuse troncature équilibrée (et sa variante basée sur la perturbation singulière) et l'approximation au sens de la norme de Hankel. Ces 2 approches offrent des solutions sous-optimales au problème de minimisation de la norme H_∞ de l'erreur absolue. La seconde technique est, de plus, optimale dans le cas $r = n - 1$ présenté dans le chapitre précédent.

La première technique, appelée troncature équilibrée, est basée sur une interprétation géométrique des ensembles commandables et observables, lorsque les signaux entrée/sortie $u(t)$ et $y(t)$ sont d'énergie bornée par 1. Ces ensembles permettent de mettre en valeur des directions de l'espace d'état peu atteignables en agissant sur l'entrée et de contribution faible pour l'énergie de sortie. De telles directions de l'espace d'état peuvent alors être jugées négligeables d'un point de vue entrée/sortie.

La seconde technique est basée sur la norme de Hankel. Cette norme, définie plus loin, offre des propriétés intéressantes pour l'étude de la norme H_∞ de l'erreur absolue.

Le point commun de ces 2 approches réside dans le choix particulier de la représentation d'état d'un système. Ces représentations d'états dites équilibrées sont présentées dans la section suivante.

3.2 Représentations équilibrées

Loin des préoccupations de la commande, le concept de réalisation équilibrée d'un système linéaire stationnaire est introduit dans le contexte du filtrage numérique [MR76]. Cette structure de la représentation d'un système confère à l'erreur d'arrondi des données une influence minimale en sortie du filtre. Dès 1981, le concept est repris par Moore [Moo81], qui montre qu'une telle représentation met en évidence des directions de l'espace d'état à la fois facilement (respectivement difficilement) atteignables et facilement (res-

pectivement difficilement) observables. La représentation d'état équilibrée est alors vue comme une solution pour l'approximation des systèmes, dans le sens où les directions de l'espace les moins commandables et les moins observables sont peu influentes au niveau entrée/sortie. Dès lors, elles peuvent être éliminées [Moo81, PS82].

La troncature équilibrée devient la technique la plus communément utilisée en commande, dès lors que Enns [Enn84] et Glover [Glo84] calculent une borne sur la norme H_∞ de l'erreur entre le modèle initial et le modèle réduit.

Avant de présenter la technique de troncature équilibrée, une définition de la représentation équilibrée est nécessaire. Celle-ci est basée sur les concepts de commandabilité et d'observabilité.

3.2.1 Ensembles commandables, observables pour des signaux L_2 bornés

Dans la suite, nous considérons un système stable $G(p)$, décrit par la représentation page 28.

$$G(p) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.1)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$.

3.2.2 Commandabilité

La commandabilité est une notion qui exprime l'existence possible d'une commande $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ déplaçant l'état d'une valeur arbitraire $x(t_1)$ à une valeur souhaitée $x(t_2)$. Lorsque $x(t_2)$ désigne un vecteur quelconque de l'espace d'état, l'existence d'une telle commande $u(t)$ signifie que le système est commandable. En d'autres termes, tout vecteur de l'espace d'état peut être atteint par l'état du système par l'application d'une commande u .

La limitation de ce concept provient d'une part de sa notion binaire (système commandable ou non), mais aussi du fait qu'il ne tient pas compte de l'énergie de commande nécessaire pour déplacer l'état du système. Pour une énergie donnée d'entrée u , il est intéressant de déterminer des directions privilégiées dans l'espace d'état, selon lesquelles l'état a plus de facilité à se déplacer.

Les définitions suivantes précisent formellement les concepts de commandabilité classique et de commandabilité étendue pour une énergie de commande bornée.

DÉFINITIONS 3.2.1

Commandabilité classique [Bro70]

1. L'espace commandable à l'instant T traduit l'ensemble des vecteurs atteignables au bout du temps T avec une commande (continue par morceaux) $u(\cdot)$ et une condition initiale $x(0)$ nulle¹. Il est défini de la manière suivante $\forall T \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{S}_{Fc}(T) \triangleq \{v \in \mathbb{R}^n / \exists u(\cdot), (x, u) \text{ satisfaisant (3.1), } x(0) = 0, x(T) = v\}$$

Un système est commandable lorsque $\mathcal{S}_{Fc}(T) = \mathbb{R}^n$.

¹si $x(0) = x_0 \neq 0$, l'ensemble commandable se déduit par une translation de vecteur x_0

Extension de la commandabilité[Moo81, BGFB94]

2. $G(p)$ est supposé commandable.

En restreignant $u(\cdot)$ à une classe de signaux d'énergie bornée sur $[0, T]$, introduisons l'ensemble commandable pour $T \in \bar{\mathbb{R}}^+$

$$\mathcal{S}'_{Fc}(T) \triangleq \{v \in \mathbb{R}^n / \exists u(\cdot), \|u\|_T \leq 1, (x, u) \text{ satisfaisant (3.1), } x(0) = 0, x(T) = v\} \quad (3.2)$$

3. Pour un temps T quelconque, l'ensemble commandable pour une entrée d'énergie bornée s'écrit

$$\mathcal{S}'_{Fc} \triangleq \bigcup_{T \in \bar{\mathbb{R}}^+} \mathcal{S}'_{Fc}(T) = \dots$$

$$\dots = \{v \in \mathbb{R}^n / \exists T \in \bar{\mathbb{R}}^+, \exists u(\cdot), \|u\|_T \leq 1, (x, u) \text{ satisfaisant (3.1), } x(0) = 0, x(T) = v\}$$

THÉORÈME 3.2.1

Soit $\varepsilon_{Q_T^{-1}}$ l'ellipsoïde défini par

$$\varepsilon_{Q_T^{-1}} = \{w \in \mathbb{R}^n | w^T Q_T^{-1} w \leq 1\}$$

où $Q_T = Q_T^T > 0$ est définie par

$$Q_T = \int_0^T e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

alors

$$\mathcal{S}'_{Fc}(T) = \varepsilon_{Q_T^{-1}}$$

Démonstration : Montrons d'abord que $\mathcal{S}'_{Fc}(T) \subset \varepsilon_{Q_T^{-1}}$.

Soit $v \in \mathcal{S}'_{Fc}(T)$ c'est-à-dire $\exists u(\cdot) / \|u\|_T \leq 1, (x, u)$ satisfaisant (3.1), $x(0) = 0, x(T) = v$. Supposons que la fonction $V(x(t)) = x(t)^T R(t) x(t), t \in [0, T]$ satisfait

$$(\forall x(t) \neq 0, V(x(t)) > 0) \Leftrightarrow R(t) > 0$$

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq u^T u \text{ pour tout } (x, u) \text{ vérifiant (3.1)} \quad (3.3)$$

En intégrant de 0 à T , comme $x(0) = 0$, il vient $V(x(T)) \leq \int_0^T u(t)^T u(t) dt \leq 1$.

Donc, $x(T)^T R(T) x(T) \leq 1$ implique

$$\mathcal{S}'_{Fc}(T) \subset \varepsilon_{R(T)} \quad (3.4)$$

Montrons qu'il est possible de déterminer une solution $R(t)$.

Les conditions (3.3) sont équivalentes aux inégalités suivantes en $R(t)$,

$$\forall t \in [0, T], R(t) > 0, \begin{bmatrix} \dot{R}(t) + A^T R(t) + R(t)A & R(t)B \\ B^T R(t) & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

ou bien, en utilisant le lemme de Schur et en post et pré-multipliant par $R(t)^{-1}$ ($R(t) > 0, \forall t > 0$),

$$\begin{aligned} -\dot{Q}(t) + AQ(t) + Q(t)A^T + BB^T &\leq 0 \\ R(t)^{-1} &= Q(t), t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'intégration entre 0 et t de l'égalité suivante

$$\frac{d(e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau})}{d\tau} = Ae^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau} + e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}A^T$$

donne, en posant $Q_t = \int_0^t e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau$

$$e^{At}BB^Te^{A^Tt} - BB^T = AQ_t + Q_tA^T \quad (3.6)$$

Cette dernière relation correspond au cas égalité de l'inégalité (3.5), donc $Q(t) = Q_t$.

Par suite $R(t) = Q(t)^{-1} \triangleq Q_t^{-1}$ permet d'obtenir une fonction $V(x(t))$ vérifiant (3.3).

Finalement, d'après (3.4) à l'instant T , $\mathcal{S}'_{Fc}(T) \subset \varepsilon_{Q_T^{-1}}$.

Réciproquement, montrons que $\varepsilon_{Q_T^{-1}} \subset \mathcal{S}'_{Fc}(T)$.

Soit $w \in \varepsilon_{Q_T^{-1}}$, la commande

$$T > 0 \quad u(\tau) = B^Te^{A^T(T-\tau)} \left(\int_0^T e^{A\alpha}BB^Te^{A^T\alpha}d\alpha \right)^{-1} w$$

amène l'état de $x(0) = 0$ à $x(T) = w$ [ZDG96].

Montrons que $\|u\|_T \leq 1$.

$$\int_0^T u^T(\tau)u(\tau)d\tau = w^T \left(\int_0^T e^{A\alpha}BB^Te^{A^T\alpha}d\alpha \right)^{-1} w = w^T Q_T^{-1} w \leq 1$$

Donc, $\|u(\cdot)\|_{2T} \leq 1$. Par suite $\varepsilon_{Q_T^{-1}} \in \mathcal{S}'_{Fc}(T)$. □

LEMME 3.2.2 (GRAMMIEN DE COMMANDABILITÉ)

Supposons A stable. Soit :

$$Q = \lim_{T \rightarrow +\infty} Q_T = \int_0^{+\infty} e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau \quad (3.7)$$

Alors,

(i) Q vérifie l'équation de Lyapunov

$$AQ + QA^T + BB^T = 0 \quad (3.8)$$

(ii) $\varepsilon_{Q^{-1}} = \mathcal{S}'_{Fc}$

Démonstration : Montrons d'abord (i).

En faisant tendre t vers $+\infty$ dans la relation (3.6), il vient

$$AQ + QA^T + BB^T = 0$$

Montrons (ii), $\mathcal{S}'_{Fc} \subset \varepsilon_{Q^{-1}}$

D'après (3.6), $\forall T$, $A(Q - Q_T) + (Q - Q_T)A^T \leq 0$.

Comme A a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négatives, $\forall T$, $Q - Q_T \geq$

0, donc $Q \geq Q_T$ ce qui entraîne $\varepsilon_{Q_T^{-1}} \subset \varepsilon_{Q^{-1}}$.
 Il s'ensuit que $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}/t_1 < t_2 < +\infty$,

$$\varepsilon_{Q_{t_1}^{-1}} \subset \varepsilon_{Q_{t_2}^{-1}} \subset \varepsilon_{Q^{-1}}$$

Ceci implique que les ellipsoïdes $\varepsilon_{Q_t^{-1}}$ sont imbriqués les uns dans les autres et sont contenus dans l'ellipsoïde limite $\varepsilon_{Q^{-1}}$. Donc d'après le théorème précédent, $\mathcal{S}'_{F_c} \subset \varepsilon_{Q^{-1}}$. L'inclusion inverse se montre en reprenant la commande $u(\cdot)$ de la démonstration du théorème précédent pour $T = +\infty$. \square

REMARQUE 3.2.1

Comme nous venons de le souligner, \mathcal{S}'_{F_c} possède des propriétés géométriques : cet ensemble de \mathbb{R}^n est l'ellipsoïde $\varepsilon_{Q^{-1}}$ où Q est définie dans le lemme 3.2.2. Introduisons alors la décomposition en valeurs singulières de Q : $Q = V_c \Sigma_c V_c^T$, avec V_c unitaire et $V_c = (v_{1c}, \dots, v_{nc})$, $\Sigma_c = (\sigma_{1c}, \dots, \sigma_{nc})$. $\varepsilon_{Q^{-1}}$ possède alors pour demi axes $\sigma_{ic}^{1/2} v_{ic}$. Cette caractérisation permet de mettre en évidence des directions facilement atteignables par l'état pour une entrée d'énergie bornée. En classant les σ_{ic} par ordre décroissant, nous faisons apparaître les directions de l'espace d'état (v_{1c}, \dots, v_{nc}) , des plus commandables aux moins commandables.

Enfin, un dernier résultat qui est utile pour la suite, donne l'expression de l'énergie minimale à mettre en entrée de $G(p)$ pour que l'état atteigne x_0 à l'instant $t = 0$, partant d'une valeur arbitraire en $t = -\infty$.

LEMME 3.2.3

Notons

$$\Phi = \inf_{u \in L_2(-\infty, 0)} \{ \|u\|_2, \mid x(0) = x_0 \}$$

l'énergie minimale pour atteindre l'état $x(0)$ à partir d'un état arbitraire $x(-\infty)$. Alors

$$\Phi = (x(0)^T Q^{-1} x(0))^{1/2}$$

Nous renvoyons le lecteur à une démonstration basée sur les multiplicateurs de Lagrange se trouvant dans [Woe94].

Illustration

Les ellipsoïdes précédents sont tracés sur l'exemple suivant, un système d'ordre 2 :

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+9)} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 \\ \hline 1/8 & -1/8 & 0 \end{array} \right]$$

La figure 3.1 trace dans le plan $(x_1(t), x_2(t))$ quelques ellipsoïdes $\varepsilon_{Q_t^{-1}}$.

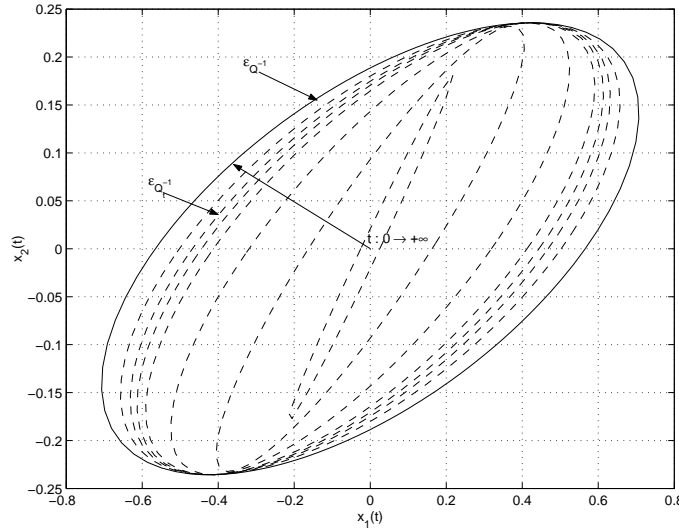


FIG. 3.1 – Ellipsoïdes $\varepsilon_{Q_t^{-1}}, t = \{0.05, 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.8, 1\}$ et $\varepsilon_{Q^{-1}}$

Nous remarquons l'imbrication des ellipsoïdes entre eux. Plus t augmente, plus l'ellipsoïde atteignable se dilate (et tourne) jusqu'à atteindre l'ellipsoïde limite $\varepsilon_{Q^{-1}}$.

3.2.3 Observabilité

Comme précédemment, nous donnons une définition de l'observabilité classique puis une extension de l'observabilité tenant compte de l'énergie récupérable en sortie d'un système.

DÉFINITIONS 3.2.2

Observabilité classique[Bro70]

1. L'ensemble des conditions initiales observables sur $]0, T], T > 0$ est l'ensemble des conditions initiales non nulles amenant à une sortie non nulle.

$$\mathcal{S}_{F_o}(T) = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\{v \in \mathbb{R}^n / \forall t \leq T, x(0) = v \Rightarrow y(t) = 0\}}_{\text{ensemble inobservable}}$$

Un système est observable lorsque $\mathcal{S}_{F_o}(T) = \mathbb{R}^n$.

Extension de l'observabilité[Moo81, BGFB94]

2. Supposons maintenant $G(p)$ est observable. L'ensemble des conditions initiales amenant à une sortie d'énergie plus grande que 1 est noté :

$$\mathcal{S}'_{F_o}(T) = \mathbb{R}^n \setminus \{v \in \mathbb{R}^n / x(0) = v \Rightarrow \|y\|_T \leq 1\}$$

3. Sur un horizon de temps quelconque, notons

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{F_o} &\triangleq \bigcup_{T \in \bar{\mathbb{R}}^+} \mathcal{S}'_{F_o}(T) = \dots \\ &\dots = \mathbb{R}^n \setminus \{v \in \mathbb{R}^n / \exists T \in \bar{\mathbb{R}}^+, x(0) = v \Rightarrow \|y\|_T \leq 1\} \end{aligned}$$

THÉORÈME 3.2.4

Soit ε_{P_T} l'ensemble (intérieur d'un ellipsoïde) défini par

$$\varepsilon_{P_T} \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n / w^T P_T w < 1\}$$

où $P_T = P_T^T > 0$ est définie par

$$P_T \triangleq P(T) = \int_0^T e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

alors

$$\mathcal{S}'_{F_o}(T) = \mathbb{R}^n \setminus \varepsilon_{P_T}$$

Démonstration : Montrons d'abord que $\mathbb{R}^n \setminus \varepsilon_{P_T} \subset \mathcal{S}'_{F_o}(T)$.

Soit $w \in \mathbb{R}^n \setminus \varepsilon_{P_T}$ c'est-à-dire $w^T P_T w \geq 1$, démontrons que $\int_0^T y(t)^T y(t) dt \geq 1$ pour $x(0) = w$.

il vient immédiatement $\int_0^T y(t)^T y(t) dt = w^T \left(\int_0^T e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \right) w = w^T P_T w \geq 1$.

Montrons $\mathcal{S}'_{F_o}(T) \subset \mathbb{R}^n \setminus \varepsilon_{P_T}$.

Soit $v \in \mathcal{S}'_{F_o}(T)$ c'est-à-dire $x(0) = v \Rightarrow \|y\|_T \geq 1$.

Supposons que la fonction $V(x(t)) = x(t)^T P(t) x(t)$, $t \in [0, T]$ satisfait

$$\begin{aligned} (\forall x \neq 0, V(x) > 0) &\Leftrightarrow P(t) > 0 \\ \frac{dV(x)}{dt} &\leq -y^T y \end{aligned} \tag{3.9}$$

En intégrant de 0 à T , il vient $V(x(0)) - V(x(T)) \geq \int_0^T y^T(t) y(t) dt$.

Ou encore, $V(x(0)) \geq 1 + V(x(T))$.

Donc $v^T P(T) v \geq 1$ et par suite, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \varepsilon_{P_T}$.

Nous pouvons déterminer une solution $P(t)$ d'après la relation (3.9) qui est équivalente à l'inégalité

$$\forall t \in [0, T] \quad \dot{P}(t) + AP(t) + P(t)A^T + C^T C \leq 0$$

En reprenant la démarche de la démonstration du théorème précédent, il est possible de déterminer que $P(t) = P_t = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$ donne le cas égalité de l'inégalité précédente. \square

LEMME 3.2.5 (GRAMMIEN D'OBSERVABILITÉ)

Supposons A stable. Soit :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} P_T = \int_0^{+\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \tag{3.10}$$

Alors,

(i) P vérifie l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A + C^T C = 0 \tag{3.11}$$

(ii) $\mathcal{S}'_{F_o} = \mathbb{R}^n \setminus \varepsilon_P$

Démonstration : A partir du théorème précédent, cette démonstration est similaire à celle du lemme 3.2.2. \square

REMARQUE 3.2.2

Comme dans le cas de la commandabilité, une propriété géométrique remarquable caractérise \mathcal{S}'_{F_o} . Cet ensemble est une région de \mathbb{R}^n dont le complémentaire est un ellipsoïde défini par la décomposition en valeurs singulières de $P = V_o \Sigma_o^2 V_o^T$ où V_o est unitaire et $V_o = (v_{1o}, \dots, v_{no})$, $\Sigma_o = (\sigma_{1o}, \dots, \sigma_{no})$. Cet ellipsoïde possède des demi axes $\sigma_{io}^{-1/2} v_{io}$. En classant les σ_{io} par ordre croissant, nous mettons en évidence des directions de l'espace d'état (v_{1o}, \dots, v_{no}) classées de la plus fortement observable à la plus faiblement observable.

Illustration

Pour illustrer les ellipsoïdes caractérisant l'observabilité, reprenons l'exemple introduit page 54.

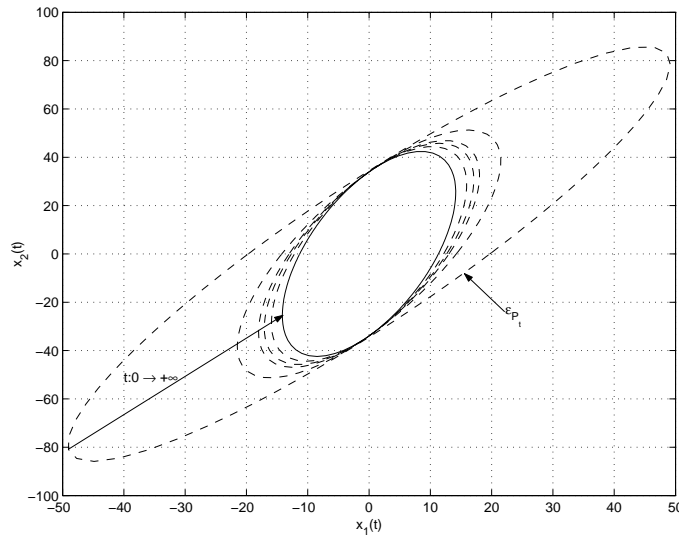


FIG. 3.2 – Ellipsoïdes ε_{P_t} , $t = \{1, 0.8, 0.7, 0.5, 0.2\}$ et ε_P

La figure 3.2 montre que les ellipsoïdes ε_{P_t} se contractent au fur et à mesure que le temps augmente, jusqu'à atteindre ε_P .

DÉFINITION 3.2.1

Les matrices définies positives P et Q respectivement introduites dans les lemmes 3.2.5 et 3.2.2 sont appelées *grammiens d'observabilité* et de *commandabilité* du système $G(p)$.

3.2.4 Transformations équilibrées

D'après ce qui précède, l'ensemble commandable pour une entrée d'énergie bornée fait apparaître des directions dans l'espace d'état plus facilement atteignables que d'autres. Ces directions correspondent aux axes principaux v_{ic} de $\varepsilon_{Q^{-1}}$ de plus grande longueur de

demi-axe (σ_{ic} importants).

L'ensemble observable possède une propriété presque similaire. Les conditions initiales les mieux observables correspondent aux axes principaux de ε_P de direction v_{io} dans l'espace d'état et ayant des longueurs de demi-axe les plus petites (σ_{io} importants).

Cette remarque donne un sens "topologique" à la minimalité d'une réalisation d'état. En effet, même si un système est structurellement commandable et observable ², la qualification précédente peut mettre en valeur des directions difficilement observables ou commandables.

Le problème est que dans une représentation d'état quelconque, des états x selon une direction peuvent être fortement commandables (c'est-à-dire u agit fortement sur x) et faiblement observables (énergie y faible pour une condition initiale x_o). La figure suivante illustre ceci :

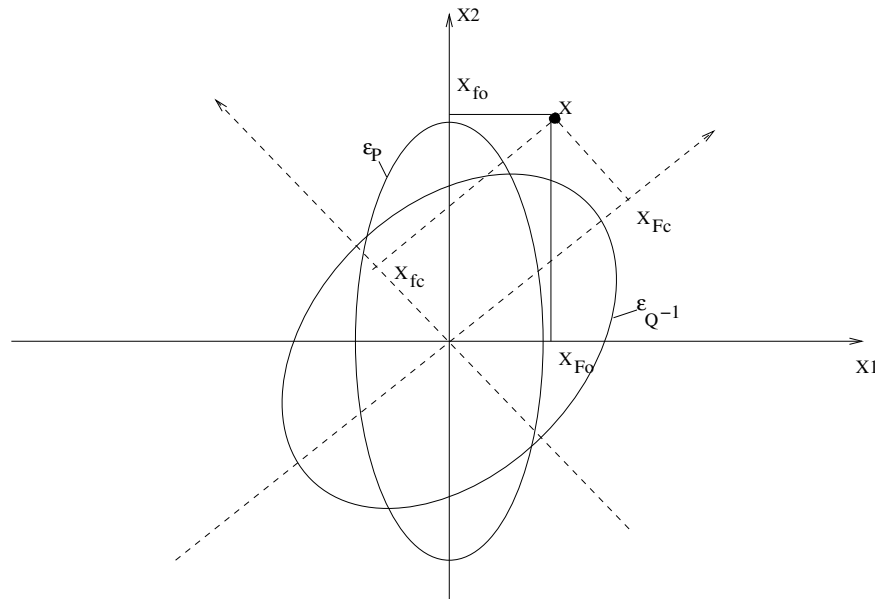


FIG. 3.3 – Ellipsoïdes $\varepsilon_{Q^{-1}}$ et ε_P dans une base quelconque

L'état x peut se décomposer selon les axes principaux des ellipsoïdes :

$$\begin{aligned} x &= x_{Fc}v_{1c} + x_{fc}v_{2c} \\ x &= x_{Fo}v_{1o} + x_{fo}v_{2o} \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les σ_{ic} (longueurs des demi-axes de $\varepsilon_{Q^{-1}}$) sont classées par ordre décroissantes, et de même pour les σ_{io} (longueurs des demi-axes de ε_P). Ainsi, les composantes x_{Fc} et x_{Fo} désignent les composantes de x respectivement les plus commandables et observables.

Dans une représentation d'état quelconque (comme sur la figure précédente), il n'est pas possible de conclure sur l'importance de x_{Fc} ou x_{Fo} pour la relation entrée/sortie.

En revanche, dans une représentation d'état où une direction serait à la fois fortement (respectivement faiblement) commandable et fortement (respectivement faiblement) observable, nous pourrions conclure que cette direction est importante (respectivement négligeable) pour la relation entrée/sortie. C'est le cas, lorsque $x_{fc} \ll x_{Fc}$, $x_{fo} \ll x_{Fo}$ et $x \simeq x_{Fc} \simeq x_{Fo}$.

²conditions de rang plein des matrices de commandabilité et d'observabilité algébriquement vérifiées.

L'idéal est donc de se placer dans une représentation où les axes principaux des ellipsoïdes $\varepsilon_{Q^{-1}}$ et ε_P sont alignés, ce qui est assuré pour $P = Q$. Ainsi, les axes de forte commandabilité et de forte observabilité coïncident. La définition suivante précise cette idée.

DÉFINITIONS 3.2.3

- (i) On appelle *représentation équilibrée* d'un système $G(p)$, une représentation d'état dans laquelle les matrices P et Q décrites respectivement par (3.11) et (3.8) sont égales.
- (ii) Une représentation d'état est dite *strictement équilibrée* lorsque $P = Q = \Sigma$ où Σ est diagonale. En plus d'être alignées entre elles, les ellipsoïdes possèdent des axes principaux qui coïncident avec les vecteurs de la base de la représentation d'état.
- (iii) En notant $\Sigma = \mathbf{diag}(\sigma_i)$, $1 \leq i \leq n$, les σ_i sont appelées *valeurs singulières de Hankel (VSH)*.

Dans la littérature, les représentations strictement équilibrées sont souvent appelées représentations équilibrées par abus de langage. Dans ce rapport, nous faisons la distinction entre ces deux représentations.

La figure suivante présente les ellipsoïdes dans une base strictement équilibrée. Comme $P = Q = \Sigma$, Σ diagonale, les axes principaux coïncident et les longueurs des demi-axes de $\varepsilon_{Q^{-1}}$ et ε_P sont inversement proportionnelles.

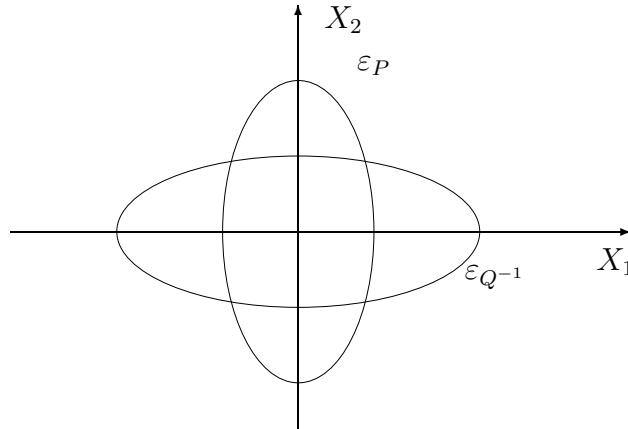


FIG. 3.4 – Ellipsoïdes $\varepsilon_{Q^{-1}}$ et ε_P dans une base strictement équilibré

REMARQUE 3.2.3 (TRANSFORMATION DES GRAMMIENS PAR CHANGEMENT DE BASE)

Lors d'un changement de réalisation d'état, les grammiens se modifient de la façon suivante : si P et Q correspondent à $G(p)$, alors $\tilde{G} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & D \end{array} \right] a$ pour grammiens

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= P(T) = T^{-1}PT^{-T} \\ \tilde{Q} &= Q(T) = T^TQT \end{aligned}$$

La transformation par une matrice unitaire ($UU^T = I$) n'altère pas l'égalité entre 2 grammiens. Soient $P = Q$ dans une base donnée. Alors :

$$P(U) = U^{-1}PU^{-T} = U^T P U = U^T Q U = Q(U)$$

Par conséquent, toute transformation unitaire conserve l'égalité entre les grammien et permet de passer d'une représentation strictement équilibrée à une représentation équilibrée. De plus, par une telle transformation, la matrice \tilde{A} peut être mise sous forme de Schur. Dans ce cas, l'égalité conservée des grammien permet en plus de faire apparaître les modes du système. On parle alors de forme Schur équilibrée [Woe94].

Il est toujours possible, à partir d'une représentation d'état quelconque, de trouver un changement de base amenant à une représentation strictement équilibrée. La proposition suivante montre comment à partir d'une représentation quelconque il est possible de passer dans une base strictement équilibrée.

PROPOSITION 3.2.6 ([Moo81])

Soit $G(p)$ décrit par (3.1), un système stable (continu ou discret) de réalisation d'état minimale quelconque. Soient $V_o, \Sigma_o, V_c, \Sigma_c$ définis par la décomposition en valeurs singulières des grammien P et Q : $P = V_c \Sigma_c^2 V_c^T$, $Q = V_o \Sigma_o^2 V_o^T$. Notons $H = \Sigma_o V_o^T V_c \Sigma_c$ et introduisons la décomposition en valeurs singulières de $H^T H = \tilde{V}_o \tilde{\Sigma}_o^2 \tilde{V}_o^T$.

Alors

$$T_b = \tilde{V}_o \tilde{\Sigma}_o^{-1/2} V_c \Sigma_c$$

est une transformation d'état menant à

$$G(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} T_b^{-1} A T_b & T_b^{-1} B \\ \hline C T_b & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_b & B_b \\ \hline C_b & D \end{array} \right]$$

de réalisation strictement équilibrée.

De plus, $\tilde{\Sigma}_o = \mathbf{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ contient les valeurs singulières de Hankel.

Démonstration : Un premier changement de base $T_1 = V_c \Sigma_c$ transforme P en : $T_1^{-1} P T_1^{-T} = I_n$ et Q en $T_1^T Q T_1 = H^T H$ où $H = \Sigma_o V_o^T V_c \Sigma_c$.

Une décomposition de $H^T H$ en valeurs singulières donne $H^T H = \tilde{V}_o \tilde{\Sigma}_o^2 \tilde{V}_o^T$.

Après une seconde transformation $T_2 = \tilde{V}_o \tilde{\Sigma}_o^{-1/2}$, les grammien deviennent égaux à $\tilde{\Sigma}_o$. Le changement de base $T_b = T_2 T_1$ diagonalise le produit PQ sous la forme :

$$T^{-1}(PQ)T = \tilde{\Sigma}_o^2 = \mathbf{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$$

où les σ_i sont les valeurs singulières de Hankel. □

REMARQUE 3.2.4

Les valeurs singulières de Hankel au carré peuvent s'obtenir comme les valeurs propres du produit PQ : $\sigma_i = \lambda_i^{1/2}(PQ)$ ou de manière équivalente comme les racines carrées des valeurs singulières de PQ .

Une représentation strictement équilibrée n'est généralement pas unique [Kab85, Ant96].

La remarque 3.2.3 met en évidence qu'une représentation d'état strictement équilibrée est déterminée, soit à une permutation près des vecteurs de la base de la représentation d'état, soit à un changement de base unitaire près qui commute avec Σ .

Lorsqu'un tel changement de base permet aussi de diagonaliser la matrice A , la réduction est dite Schur-équilibrée [Woe94].

3.3 Troncature équilibrée

Comme nous l'avons vu, se placer dans une base strictement équilibrée est intéressant si des directions fortement (peu) observables et fortement (peu) commandables apparaissent, c'est-à-dire $\exists r$ tel que :

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_{r-1} > \sigma_r \gg \sigma_{r+1} > \dots > \sigma_{n-1} > \sigma_n \quad (3.12)$$

dans le cas où chaque VSH est de multiplicité 1. Nous supposons dans la suite que les VSH sont ainsi classées. Si une ou plusieurs VSH peuvent être de multiplicité strictement supérieure à 1, il en sera fait mention.

L'idée principale de la troncature équilibrée est très simple. Au vu des ellipsoïdes de la figure 3.4, si les VSH vérifient (3.12), il est naturel d'approcher les ellipsoïdes $\varepsilon_{Q^{-1}}$ et ε_P par leur projection (= l'intersection) avec le sous-espace engendré par $(v_{1c}, \dots, v_{rc}) = (v_{1o}, \dots, v_{ro})$.

DÉFINITION 3.3.1

Soit $G(p)$ un système stable minimal, de représentation d'état strictement équilibré et de VSH classées par ordre décroissantes. Dans la suite, nous supposons les σ_i ainsi classées. Les équations de Lyapunov (3.11) et (3.8) sont

$$\begin{aligned} A\Sigma + \Sigma A^T + BB^T &= 0 \\ A^T\Sigma + \Sigma A + C^TC &= 0 \\ \Sigma &= \mathbf{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \end{aligned}$$

En partitionnant $G(p)$ à l'ordre r , c'est-à-dire avec $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$:

$$G(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

Alors, le modèle réduit à l'ordre r

$$G_r(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$$

est appelé modèle réduit à l'ordre r par troncature équilibrée.

3.3.1 Propriétés de la troncature équilibrée

Le théorème suivant fait état des garanties et propriétés que vérifie $G_r(p)$ dans le cas continu.

REMARQUE 3.3.1

L'approche par troncature équilibrée ne fait pas intervenir le terme direct D du système à réduire car celui-ci n'intervient pas dans les relations entrée/état et état/sortie. Conventionnellement, le terme direct D_r du modèle réduit est pris égal à celui du système. Dès lors, les réponses fréquentielles du système et de son réduit par troncature équilibrée coïncident en $\omega = +\infty$. Néanmoins, comme nous le voyons plus loin, le terme direct peut être affiné pour la conservation du gain statique de $G(p)$ dans $G_r(p)$.

THÉORÈME 3.3.1 ([PS82, ANT96])

Etant donné un système continu $G(p)$ asymptotiquement stable représenté par (3.1), le modèle réduit $G_r(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$ obtenu par troncature équilibrée a les propriétés suivantes :

1. $G_r(p)$ est équilibré et n'a aucun pôle à partie réelle strictement positive.
2. $G_r(p)$ est commandable, observable et n'a aucun pôle sur l'axe imaginaire.
3. La norme H_∞ de l'erreur absolue vérifie

$$\|G(p) - G_r(p)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n) \quad (3.13)$$

De plus, il y a égalité si $r = n - 1$.

REMARQUE 3.3.2

Dans le cas où les VSH sont de multiplicité quelconque, nous pouvons écrire :

$\Sigma = \mathbf{diag}(\sigma_1 I_{r_1}, \dots, \sigma_l I_{r_l}, \sigma_{l+1} I_{r_{l+1}}, \dots, \sigma_m I_{r_m})$, avec $n = r_1 + r_2 + \dots + r_m$.

Les propriétés 1 et 2 ne sont pas forcément conservées [PS82, Kab85] si la troncature sépare 2 VSH identiques. C'est le cas, si par exemple $r = r_1 + \dots + r_l + 1$ et que $r_{l+1} \geq 2$. La borne de la propriété 3 est conservée si $G_r(p)$ est stable : $\|G(p) - G_r(p)\|_\infty \leq 2(\sigma_{l+1} + \dots + \sigma_m)$.

3.3.2 Finesse de la borne H_∞ dans 2 cas

Enns [Enn84] soulève la question de la finesse de la borne précédente. Considérons 2 exemples illustratifs.

- Le premier exemple est un système constitué de la mise en parallèle de sous-systèmes du premier ordre.

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{p + \alpha_i}$$

avec $\alpha_i > 0, \beta_i > 0, \frac{\beta_i}{\alpha_i} > \frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}$.

Notons qu'un tel système est minimum de phase. Une réalisation de $G(p)$ est donnée par $A = \mathbf{diag}(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)$, $B = (\beta_1^{1/2} \beta_2^{1/2} \dots \beta_n^{1/2})^T = C^T$. Cette réalisation est équilibrée avec pour grammiens

$$\Sigma = \mathbf{diag}\left(\frac{\beta_1}{2\alpha_1}, \frac{\beta_2}{2\alpha_2}, \dots, \frac{\beta_n}{2\alpha_n}\right)$$

Le modèle réduit d'ordre r obtenu par troncature équilibrée, est bien sûr

$$G_r(p) = \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{p + \alpha_i}$$

L'erreur en $\omega = 0$ est

$$G(0) - G_r(0) = \sum_{i=r+1}^n \frac{\beta_i}{\alpha_i}$$

qui est aussi $2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$. De fait, la borne est atteinte dans ce cas.

- Le second exemple est un système constitué de la mise en parallèle de sous-systèmes du second ordre.

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{p^2 + 2\xi\omega_i p + \omega_i^2}$$

où $\xi > 0$ et $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$. $G(p)$ est donc d'ordre $2n$. Lorsque les ω_i sont bien espacés et que ξ est très petit, G est assimilable à une mise en parallèle de résonances séparées. On peut alors démontrer [OA00] que pour $\xi \rightarrow 0$, on a

$$\mathbf{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n) \rightarrow \frac{1}{2\xi} I_{2(n-r)}$$

et que

$$\sup_{\omega} |G(j\omega) - G_r(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{2\xi}$$

La borne usuelle $2 \sum_{i=2r+1}^{2n} \sigma_i$ est ici $2(n-r)$ fois plus grande que la valeur atteinte réellement. La borne peut être dans ce cas pessimiste.

3.3.3 Mise en œuvre

1. *Calcul des grammians P et Q* solutions de (3.11) et (3.8). Ces matrices sont solutions d'un système linéaire matriciel. Les solutions P et Q , sous forme vectorisées, peuvent respectivement s'exprimer à l'aide du produit de Kronecker [Bre78] comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{vec}(P) &= (A^T \otimes I_n + I_n \otimes A^T)^{-1} \mathbf{vec}(-C^T C) \\ \mathbf{vec}(Q) &= (A \otimes I_n + I_n \otimes A)^{-1} \mathbf{vec}(-B B^T) \end{aligned}$$

2. *Calcul d'une transformation équilibrée* à partir de la proposition 3.2.6.
 - *calcul classique* : introduisons les décompositions en valeurs singulières de P et Q :

$$\begin{aligned} P &= U_P \Sigma_P U_P^T \\ Q &= U_Q \Sigma_Q U_Q^T \end{aligned}$$

Construire $H = \Sigma_Q^{1/2} U_Q^T U_P \Sigma_P^{1/2}$ et en calculer la décomposition en valeurs singulières :

$$H = U_H \Sigma_H U_H^T$$

Une transformation équilibrée T est donnée par :

$$T = U_Q \Sigma_Q^{-1/2} U_H \Sigma_H^{1/2}$$

- *calcul "racine carée"* : Introduisons la décomposition

$$\begin{aligned} P &= L_P L_P^T \\ Q &= L_Q L_Q^T \end{aligned}$$

où L_Q et L_P sont respectivement triangulaires supérieures et inférieures. Calculer la décomposition en valeurs singulières de $L_Q^T L_P$:

$$L_Q^T L_P = Z \Sigma_H Y^T$$

Une transformation équilibrée T_{sr} est donnée par :

$$T_{sr} = \Sigma_H^{1/2} Z^T L_Q^{-1}$$

3. Les valeurs singulières de Hankel σ_i sont les éléments diagonaux de Σ_H .
4. Appliquer le changement de base T (ou T_{sr}) sur

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right], \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

5. Tronquer les matrices d'état à l'ordre r de la nouvelle représentation :

$$G_r(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$$

REMARQUE 3.3.3

L'étape 1 de la démarche précédente peut être adaptée à des systèmes de grande taille mal conditionnés. La résolution d'équations de Lyapunov de grande taille peut se traiter à l'aide d'algorithmes spécialisés : décomposition de Krylov, Arnoldi [Ant96], ... La méthode "square root" s'intéresse à P et Q séparément plutôt qu'au produit PQ . L'intérêt numérique réside dans le fait que le conditionnement des facteurs L_Q et L_P sont respectivement la racine carrée du conditionnement de Q et P .

3.3.4 Etude des exemples

Nous proposons d'utiliser la troncature équilibrée sur les 3 exemples présentés page 21.

Dans chacun de ces exemples, les bornes inférieure (page 32) et supérieure sur la norme H_∞ de l'erreur absolue (théorème 3.3.1) sont tracées en fonction de l'ordre r .

3.3.4.1 Exemple de Safonov et al.

Le modèle initial est d'ordre 7 et présente une anti-résonance. Dans cet exemple, les VSH sont :

$$\sigma_i = [2.2908 \quad 1.9125 \quad 0.6613 \quad 0.2489 \quad 0.0925 \quad 0.0016 \quad 0.0003]$$

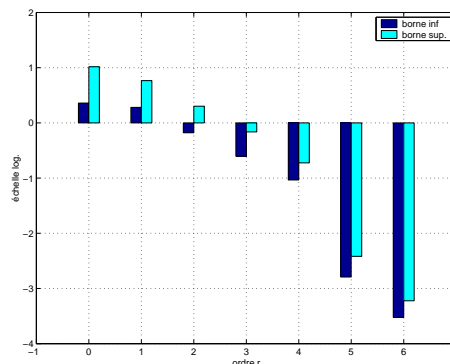


FIG. 3.5 – Bornes inférieure (lemme 2.3.1, page 32) et supérieure (3.13) sur l'erreur absolue en fonction de r

La figure 3.5 montre que l'approche par troncature équilibrée permet d'éliminer sans problème 2 états (ordres 5 et 6) car l'erreur absolue résultante reste inférieure à $-40dB$.

Les modèles $G_6(j\omega)$ et $G_5(j\omega)$ approchent $G(j\omega)$ sur l'ensemble des pulsations ω , conservent l'anti-résonance et présentent approximativement les mêmes zéros complexes conjugués mal amortis. Les résultats graphiques se trouvent en annexe, page 255. L'étude du modèle réduit à l'ordre 4 amène au tracé fréquentiel suivant.

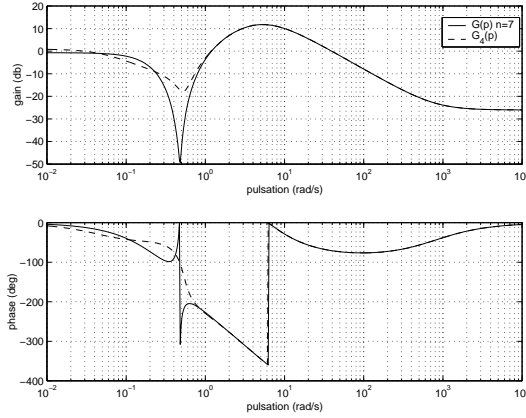


FIG. 3.6 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_4(j\omega)$ obtenu par troncature équilibrée

$$G_4(p) = \frac{40(p + 800.3)(p + 0.1825)(p^2 - 0.2072p + 0.2889)}{(p + 5.812)(p + 4.026)(p + 1.426)(p + 0.05677)}$$

L'anti-résonance n'est plus conservée et le modèle réduit possède une paire de zéros complexes conjugués instables. Le module de l'erreur

$$|G(j\omega) - G_4(j\omega)| \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i \quad (3.14)$$

est représenté sur la figure 3.7.

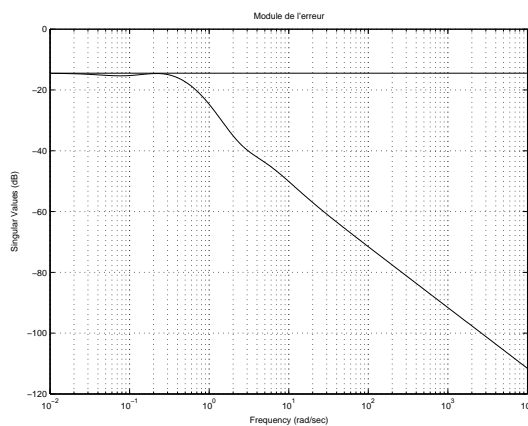


FIG. 3.7 – Module de l'erreur $G(j\omega) - G_4(j\omega)$ et borne supérieure (3.13)

Dans le cas présent, la norme H_∞ de l'erreur est $\|G(j\omega) - G_4(j\omega)\|_\infty = 0.188$. La figure suivante représente en fonction de ω les erreurs en module (avec la borne (3.14)) et en phase entre $G(j\omega)$ et $G_4(j\omega)$.

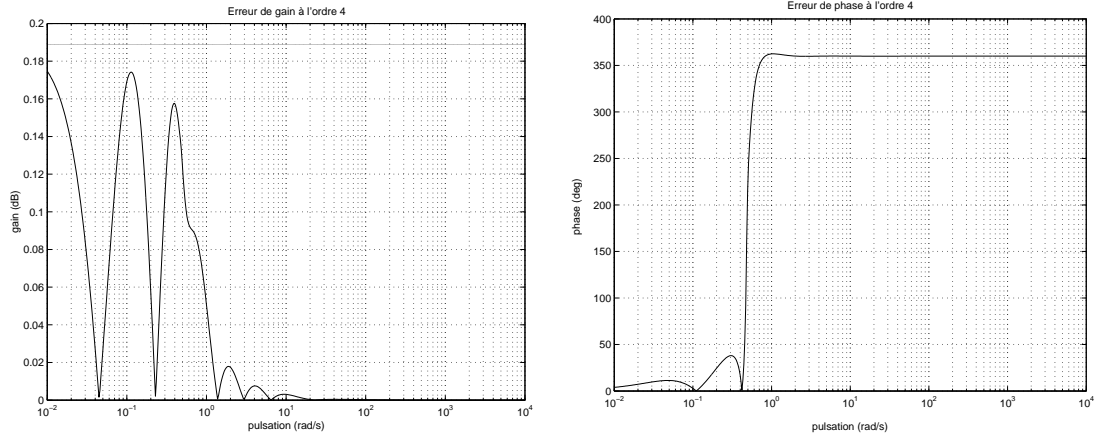


FIG. 3.8 – Erreur sur le gain $|G(j\omega)| - |G_4(j\omega)|$ et sur la phase $\arg(G(p)) - \arg(G_4(p))$

L'utilisation de la troncature équilibrée sur cet exemple ne permet pas d'accéder à une modèle réduit d'ordre 4 convenable. L'indicateur de qualité sur la gamme de pulsations allant de 0rad/s à 2rad/s se dégrade fortement à l'ordre 4. Le tableau suivant représente l'indicateur ρ_r^{ex1} , défini page 23, en fonction de r .

r	6	5	4
ρ_r^{ex1}	0.11	0.53	42.28

3.3.4.2 Exemple du TGEN

L'application de la troncature équilibrée sur cet exemple doit mener à un modèle réduit qui conserve le comportement fréquentiel de $G(p)$ de 0rad/s à 50rad/s . Les VSH de $G(p)$ sont :

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} 455.9850 & 76.5248 & 68.5691 & 10.4294 & 7.2374 \dots \\ 0.2704 & 0.1115 & 0.0022 & 0.0019 & 0.0014 \end{bmatrix}$$

Les bornes inférieure et supérieure sur la norme de l'erreur sont représentées ci-dessous.

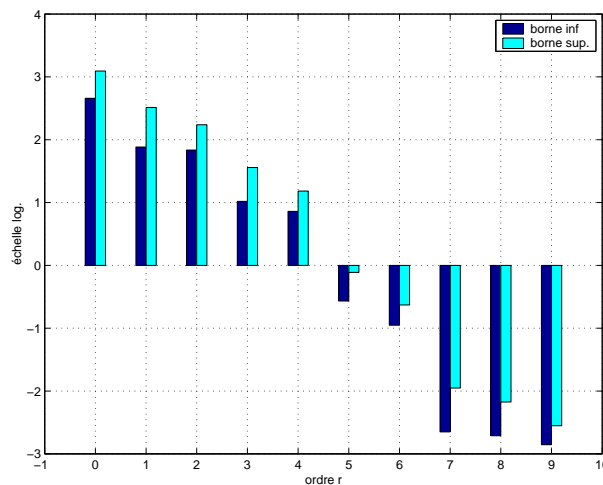


FIG. 3.9 – Bornes inférieure (lemme 2.3.1, page 32) et supérieure en fonction de r

L'étude des bornes précédentes suggère qu'un modèle réduit à l'ordre 7 assure que $\forall \omega, \bar{\sigma}(G(j\omega) - G_7(j\omega)) \leq 2(\sigma_8 + \sigma_9 + \sigma_{10}) \simeq -39dB$. La valeur singulière supérieure d'une matrice A possède la propriété de majorer les modules des éléments A_{ij} de A :

$$\bar{\sigma}(A) \geq |A_{ij}|$$

Les sous transferts G_{ij} de G et G_r ij de G_r vérifient donc $|G_{ij}(j\omega) - G_{6\ ij}(j\omega)| \leq -39dB$. A l'ordre 6, l'erreur devient $|G_{ij}(j\omega) - G_{6\ ij}(j\omega)| \leq -12dB$. $G_7(j\omega)$ et $G_6(j\omega)$ sont présentés sur la figure suivante.

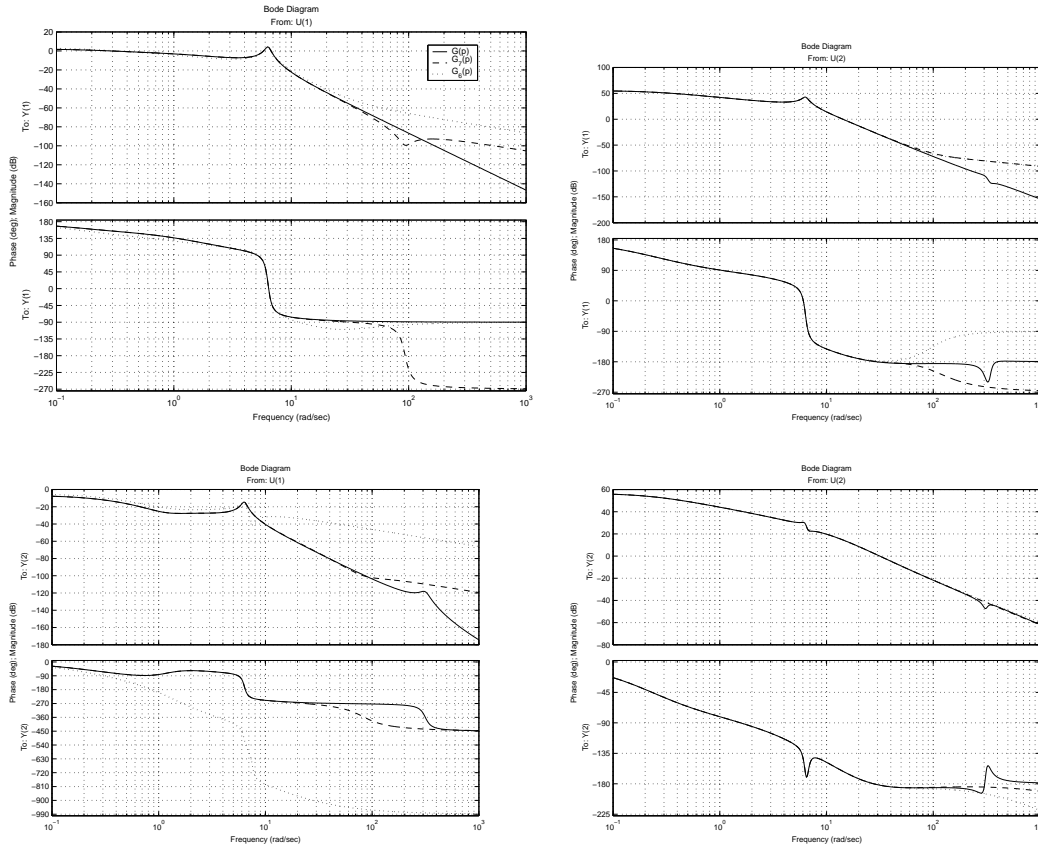


FIG. 3.10 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$, $G_7(j\omega)$ et $G_6(j\omega)$

On observe que le transfert (2, 1) est sensible au passage de $r = 7$ à $r = 6$. Effet, il possède des gains faibles de l'ordre de $-30dB$ aux alentours de $1rad/s$. $G_6(p)$ n'est donc pas satisfaisant et pour cette méthode, l'ordre réduit est 7. La pulsation propre du premier mode et son coefficient d'amortissement sont conservés. Les valeurs singulières de l'erreur de modèle $G(j\omega) - G_7(j\omega)$ sont présentées sur la figure 3.18, page 89.

La norme H_∞ de l'erreur est $\|G(j\omega) - G_7(j\omega)\|_\infty = 4.3 \times 10^{-3}$.

Les indicateurs (1.10) et (1.11) introduits dans la section 1.3.2 page 24 sont présentés dans le tableau suivant.

r	ρ_r^{ex2}	ρ_r^{ex2b}
7	2.3×10^{-2}	0.25
6	0.3	74.3

Une flagrante détérioration du transfert (2, 1) est à noter sur à l'ordre $r = 6$.

3.3.4.3 Exemple du bief de type 1

La difficulté ici est que $G(p)$ n'est pas stable (système intégrateur). La troncature équilibrée peut être étendue aux système instables [The89, Chi93, ZSW99, Zho95c] en isolant l'intégrateur de façon additive :

$$G(p) = \frac{K}{p} + G_s(p)$$

où $G_s(p)$ est stable. $G_{sr}(p)$ va désigner le modèle réduit de $G_s(p)$ et $G_r(p) = G_{sr}(p) + \frac{K}{p}$ le modèle réduit de $G(p)$. Il s'ensuit que $\|G_s(j\omega) - G_{sr}(j\omega)\|_\infty = \|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_\infty$. Notons l'existence de la troncature équilibrée basée sur l'approche par factorisation première [Mey90]. L'inconvénient de cette approche réside dans le fait que les pôles instables ne se retrouvent pas forcément dans $G_r(p)$.

Les bornes inférieure et supérieure sur l'erreur absolue de réduction de $G_s(p)$ sont représentées sur la figure 3.11.

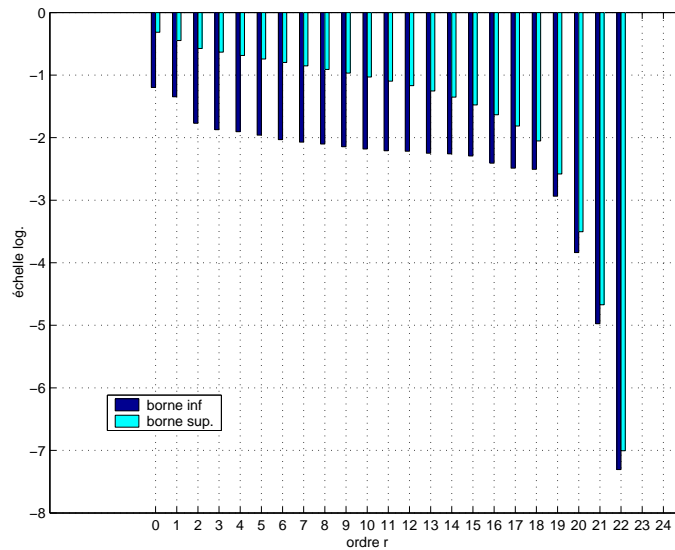


FIG. 3.11 – Bornes inférieure (lemme 2.3.1, page 32) et supérieure sur l'erreur absolue en fonction de r

A partir de la figure 3.11, nous pouvons noter la présence d'un état à la fois très peu observable et peu commandable.

Les modèles réduits à l'ordre $r = 17$ et $r = 16$ (pour $G_{sr}(p)$) vont être étudiés car les bornes supérieures associées sont de l'ordre du gain du système à la première résonance ($-32dB$).

Les modèles réduits de bief sont finalement d'ordre 17 et 18 après ajout de l'intégrateur.

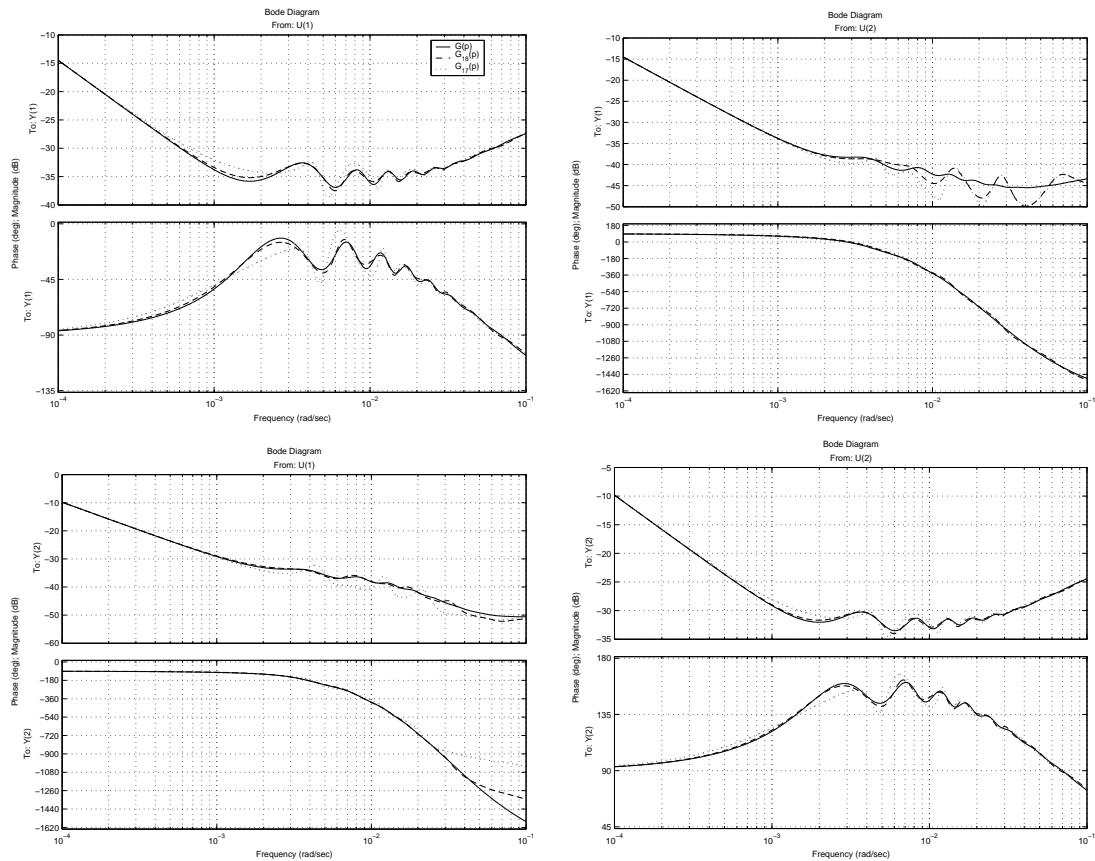


FIG. 3.12 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$, $G_{17}(j\omega)$ et $G_{18}(j\omega)$ obtenus par troncature équilibrée

A l'ordre 17, la détérioration du tracé fréquentiel est nette entre 0rad/s et 5.10^{-3}rad/s par rapport au modèle réduit à l'ordre 18. Les valeurs singulières des erreurs $G(j\omega) - G_r(j\omega)$, $r = 17, 18$ sont présentées sur la figure suivante.

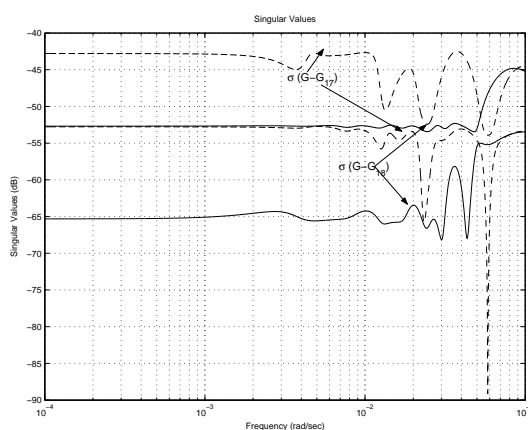


FIG. 3.13 – Valeurs singulières des erreurs $G(j\omega) - G_r(j\omega)$, $r = 17, 18$

Les valeurs singulières supérieures des erreurs atteignent leurs plus faibles valeurs sur la gamme de pulsations demandée même si on ne l'a pas optimisée. La norme H_∞ de l'erreur est $\|G(j\omega) - G_{18}(j\omega)\|_\infty = 5.7 \times 10^{-3}$.

Les indicateurs ρ_r^{ex3} et ρ_r^{ex3b} introduits page 25 sont présentés dans le tableau suivant.

r	18	17
ρ_r^{ex3}	0.206	0.337
ρ_r^{ex3b}	5.9×10^{-2}	0.324

3.3.5 Perturbation singulière pour la conservation du gain statique

Le modèle réduit obtenu par troncature équilibrée préserve le terme direct du système. Dès lors, les 2 transferts coïncident toujours en $\omega = +\infty$, mais ont des gains statiques différents ($\omega = 0$). Pour conserver le gain statique, il est possible de modifier la technique de troncature équilibrée de manière à ce que le modèle réduit soit égal au modèle initial à la pulsation nulle. L'idée n'est plus d'opérer une troncature sur les matrices d'état du système, mais d'introduire une perturbation singulière sur la partie de l'état du système à éliminer.

Historiquement, cette technique provient de la version linéaire du théorème de Tihonov [KOS76]. Dans le cas d'équations linéaires, où les composantes de l'état sont supposées être classées par leur rapidité décroissante, la pénalisation de la partie "rapide" amène à réinjecter la partie rapide de l'état (x_2) dans la partie lente :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \mu \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

Lorsque μ tend vers 0, l'équation d'évolution de l'état devient algèbro-différentielle. La partie algébrique correspondant à x_2 (la partie rapide) s'écrit $x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1 - A_{22}^{-1}B_2u$, si l'inverse de A_{22} existe. En réinjectant x_2 ainsi obtenu dans la relation différentielle (partie lente correspondant à x_1), le modèle de perturbation singulière est donné par :

$$\begin{aligned} A_r &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ B_r &= B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ C_r &= C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \\ D_r &= D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{aligned}$$

D'une manière générale, le modèle réduit obtenu ne donne pas lieu à des propriétés concernant la norme H_∞ de l'erreur. Cependant, le modèle réduit ainsi obtenu conserve le gain statique du modèle initial : $G(0) = G_r(0)$.

3.3.5.1 Perturbation singulière dans une représentation équilibrée

Lorsque la perturbation singulière s'opère dans une représentation équilibrée [SA95b, Pra94, CCA94, LA89], la borne de la troncature équilibrée demeure valable. L'idée originale de la perturbation singulière n'est plus valable : la représentation du vecteur d'état de G dans une base équilibrée ne fait pas apparaître forcément les modes propres du système dans la matrice A (remarque 3.2.4 page 59).

Cette approche conserve le critère de stabilité de G_r (remarque 3.3.2) ainsi que la borne H_∞ du théorème 3.3.1.

Illustration sur l'exemple de Safonov

La figure suivante compare les tracés fréquentiels de 2 modèles réduits à l'ordre 4 obtenus par troncature équilibrée classique et troncature équilibrée conservant le gain statique.

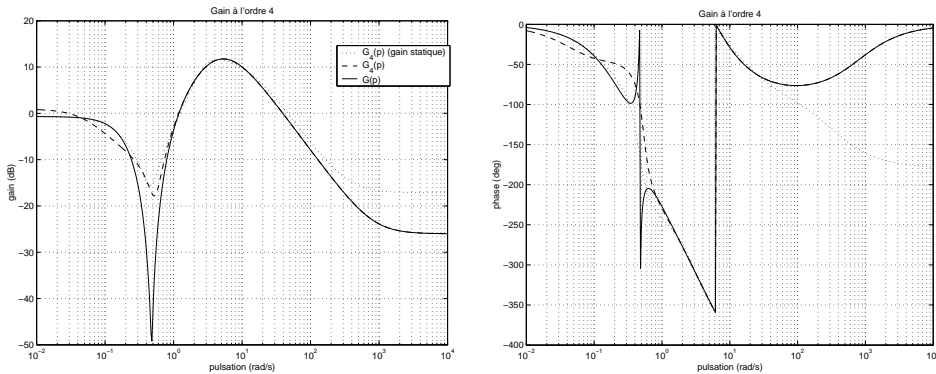


FIG. 3.14 – Comparaison de la troncature équilibrée avec et sans conservation du gain statique

Quelques mots sur la perturbation singulière généralisée

Le fait que la technique de perturbation singulière conserve le gain statique c'est-à-dire $G(0) = G_r(0)$, a mené certains auteurs [FN82, LA89, CCA94] à développer des techniques permettant d'obtenir un modèle réduit qui égale le modèle initial à une pulsation ω_c donnée : $G(j\omega_c) = G_r(j\omega_c)$. De façon générale, la méthode des perturbations singulières généralisée prend en compte un facteur $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $G_r(\lambda) = G(\lambda)$. Néanmoins, pour satisfaire cette contrainte, le modèle réduit obtenu n'est pas toujours réalisable, car possède des matrices d'états complexes. Lorsque λ est pris réel, le modèle réduit est toujours réalisable, mais il n'existe pas de garantie sur les tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_r(j\omega)$. Notons simplement que dans deux cas particuliers [Pra94, BMS98] où le modèle $G(j\omega)$ est sous forme équilibrée, cette technique mène soit à la perturbation singulière classique $\lambda = 0$ ou à la troncature équilibrée $\lambda = +\infty$.

3.3.5.2 Résumé

Cette section a mis en valeur l'intérêt de se placer dans une représentation (strictement) équilibrée pour faire apparaître des composantes de l'état négligeables d'un point de vue entrée/sortie. Les techniques présentées (troncature équilibrée et perturbation singulière) fournissent des modèles réduits sous-optimaux pour la minimisation de l'erreur absolue.

Au vu des ellipsoïdes caractérisant la commandabilité et l'observabilité dans une représentation d'état équilibrée, une autre approche visant à trouver un modèle réduit est de considérer plus directement l'erreur $\Delta_{abs}(p) = G(p) - G_r(p)$. Vouloir $G_r(p)$ qui approche bien $G(p)$, revient aussi à souhaiter que l'erreur résultante soit une fonction de transfert peu observable et commandable. Ceci revient à rendre "petites" les ellipsoïdes ε_P et ε_{Q-1} de $\Delta_{abs}(p)$. Une manière connue de quantifier la taille de ces ellipsoïdes dans une base équilibrée est de considérer la plus grande taille de demi-axe de ces ellipsoïdes, c'est à dire la plus grande valeur singulière de Hankel de l'erreur $\Delta_{abs}(p)$. Celle-ci définit une norme : la norme de Hankel.

3.4 Réduction par la norme de Hankel

Cette section propose une approche simple basée sur le lemme réel borné et l'algèbre linéaire pour rechercher un modèle réduit optimal au sens de la norme de Hankel. Les résultats bien connus de la littérature s'appuient habituellement sur des démonstrations basées sur la théorie des opérateurs. Celles-là sont d'une grande complexité par rapport à l'approche par représentation d'état que nous allons emprunter. Du reste, cette constatation s'est vérifiée dans le contexte de la commande, puisque la solution générale du problème H_∞ donnée en 1989 [DGKF89] voit le succès de l'approche par représentation d'état sur les approches par opérateurs [GL95].

Cette section présente les propriétés essentielles de la norme de Hankel d'un système en relation avec la norme H_∞ . L'intérêt de cette norme facilement calculable est mise en valeur dans un théorème présentant l'approximation \mathcal{L}_∞ optimale d'un transfert stable $G(p)$ par un transfert possédant r pôles stables et m pôles anticausaux. Ce théorème déjà formulé dans [Glo84, Glo89] est ici démontré à l'aide des outils du formalisme *LMI*.

3.4.1 Définitions et propriétés principales de la norme de Hankel

La section précédente a mis en valeur les valeurs singulières de Hankel qui jouent le rôle de classificateurs de directions de l'espace d'état autant commandables qu'observables. La plus grande valeur singulière de Hankel correspond alors à la direction de l'espace la plus prépondérante pour la commandabilité et l'observabilité. Elle définit la norme de Hankel. La recherche d'un modèle réduit G_r minimisant la norme de Hankel de l'erreur $G(j\omega) - G_r(j\omega)$, revient donc à rendre cette erreur faiblement commandable et observable et dans un sens faible d'un point de vue entrée/sortie.

Compte tenu de la remarque (3.2.4), page 59, la norme de Hankel d'un système peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \|G(p)\|_H &= \bar{\sigma}^{1/2}(PQ) \\ &= \sup_{\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(\frac{\bar{x}_0^T Q^{T/2} P Q^{1/2} \bar{x}_0}{\bar{x}_0^T \bar{x}_0} \right)^{1/2} \\ &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(\frac{x_0^T P x_0}{x_0^T Q^{-1} x_0} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

La caractérisation (3.15) de la norme de Hankel peut être interprétée en terme d'énergie. D'après l'interprétation du grammien d'observabilité, l'énergie issue d'une condition initiale $x(0) = x_0$ est donnée par

$$\int_0^{+\infty} y(t)^T y(t) dt = x_0^T P x_0.$$

De plus, la commande $u(t)$ d'énergie minimale amenant l'état $x(t)$ d'une valeur arbitraire en $-\infty$ à l'état $x(0) = x_0$ est donnée par le lemme 3.2.3 (page 53) :

$$\int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt = x_0^T Q^{-1} x_0.$$

La relation (3.15) donne alors lieu à la caractérisation suivante de la norme de Hankel comme une norme induite :

$$\|G(p)\|_H = \sup_{u \in L_2[-\infty, 0]} \frac{\|y\|_{2[0, \infty]}}{\|u\|_{2[-\infty, 0]}}$$

Ainsi, la norme de Hankel quantifie le rapport entre l'énergie de la sortie $y(t)$ observée pour $t \geq 0$ et l'énergie de la commande $u(t)$, $t \leq 0$ et $u(t) = 0$, $t > 0$.

La définition suivante résume ces 2 caractérisations possibles de la norme de Hankel.

DÉFINITION 3.4.1

(i) La norme de Hankel d'un transfert $G(p)$ décrit par (3.1) est définie par :

$$\|G(s)\|_H = \bar{\sigma}^{1/2}(PQ)$$

où P et Q sont les grammians définis par (3.11) et (3.8).

(ii) La norme de Hankel est aussi la norme induite par l'opérateur de Hankel³ :

$$\|G(p)\|_H = \sup_{u \in L_2[-\infty, 0]} \frac{\|y\|_{2[0, \infty]}}{\|u\|_{2[-\infty, 0]}}$$

D'autres caractérisations basées sur l'opérateur de Hankel sont possibles [Glo84, OA00, Glo89, SCL90, ZDG96].

De la définition précédente découlent les propriétés suivantes concernant la norme de Hankel.

PROPRIÉTÉS 3.4.1

- (i) $\forall G(p) \in \mathcal{RH}_\infty, \forall Q(p) \in \mathcal{RH}_{\infty, -}, \|G(p) + Q(p)\|_H = \|G(p)\|_H.$
- (ii) $\forall G(p) \in \mathcal{RH}_\infty, \|G(p)\|_H \leq \|G(p)\|_\infty.$
- (iii) $\forall G(p) \in \mathcal{RH}_\infty, \forall Q(p) \in \mathcal{RH}_{\infty, -}, \|G(p)\|_H \leq \|G(p) + Q(p)\|_\infty.$

Démonstration : La proposition (i) se déduit directement de la définition (ii).

La proposition (ii) provient des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|G\|_H &\leq \sup_{u \in L_2[-\infty, 0]} \frac{\|y\|_{2[-\infty, \infty]}}{\|u\|_{2[-\infty, 0]}} \\ &\leq \sup_{u \in L_2[-\infty, \infty]} \frac{\|y\|_{2[-\infty, \infty]}}{\|u\|_{2[-\infty, \infty]}} \\ &= \|G\|_\infty \end{aligned} \tag{3.16}$$

Enfin la proposition (iii) est la conséquence des propositions (i) et (ii). \square

Des propriétés précédentes, il apparaît que la mise en parallèle d'un transfert causal $G(p)$ avec tout transfert anticausal $Q(p)$ possède la même norme de Hankel que $G(p)$. De plus, cette norme est toujours plus petite que la norme \mathcal{L}_∞ de la somme de $G(p)$ avec tout transfert anticausal $Q(p)$.

³cf. page 243

3.4.2 Norme de Hankel et approximation optimale \mathcal{L}_∞ d'un transfert stable

La propriété (iii) de propriétés 3.4.1 laisse envisager que le minimum atteignable par $\|G(p) + Q(p)\|_\infty$ où $Q(p)$ est anticausal, est la norme de Hankel de $G(p)$. Avant de prouver ce résultat connu sous le nom de théorème de Nehari, un théorème plus général considère que $Q(p)$ possède une partie causale de degré r notée $G_r(p)$ (le modèle réduit), et une partie anticausale $F(p)$ dont l'ordre m est à déterminer.

THÉORÈME 3.4.2

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty^n$ décrit par (3.1). $\sigma_j(G)$ désigne la j -ième valeur singulière de Hankel de $G(p)$. Alors

$$\min_{\substack{G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r \\ F(p) \in \mathcal{RH}_{\infty,-}^m}} \|G(p) - G_r(p) + F(p)\|_\infty = \sigma_{r+1}(G)$$

De plus, les degrés respectifs r et m d'une solution $G_r(p)$ et d'une solution $F(p)$ sont reliés par

$$m = \text{rang}(P_{eq} - \sigma_{r+1}^2(G)Q_{eq}^{-1}) - r$$

où P_{eq} et Q_{eq} sont respectivement les grammians d'observabilité et de commandabilité de $G(p)$.

Démonstration : La démonstration se compose de 2 parties. La première consiste à formuler un problème d'optimisation de type LMI associé à une contrainte portant sur l'inertie d'une variable recherchée. Bien que cette contrainte soit non-convexe, la seconde étape de la démonstration donne une solution optimale, du reste particulière à ce problème.

Soit $Q(p) = G_r(p) - F(p)$, avec $Q(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline C & D \end{array} \right]$. $Q(p)$ possède donc un nombre de pôles à partie réelle strictement négative égal à r (pôles de $G_r(p)$) et un nombre de pôles à partie réelle strictement positive (pôles de $F(p)$) noté m . La valeur de m sera discutée dans la suite.

Exprimons d'abord des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de $Q(p)$ tel que $\|G(p) - Q(p)\|_\infty \leq \gamma$, $\gamma > 0$.

Notons

$$E(p) \triangleq G(p) - Q(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & \bar{A} & \bar{B} \\ \hline C & -C & D - D \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array} \right]$$

En appliquant le lemme réel borné sur $E(p)$, il vient

$$\|E(p)\|_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow \exists \tilde{P} = \tilde{P}^T \in \mathbb{R}^{(n+r+m) \times (n+r+m)}$$

$$\begin{bmatrix} A_e^T \tilde{P} + \tilde{P} A_e + C_e^T C_e & \tilde{P} B_e + C_e^T D_e \\ B_e^T \tilde{P} + D_e^T C_e & D_e^T D_e - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.17)$$

Cette dernière inégalité peut se réécrire de la manière suivante (lemme de Schur) :

$$\begin{bmatrix} A_e^T \tilde{P} + \tilde{P} A_e & \tilde{P} B_e & C_e^T \\ B_e^T \tilde{P} & -\gamma^2 I & D_e^T \\ C_e & D_e & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.18)$$

Dans un premier temps, examinons les propriétés de \tilde{P} .

L'inégalité (3.17) implique que

$$A_e^T \tilde{P} + \tilde{P} A_e + C_e^T C_e \triangleq -M^T M \leq 0$$

on a alors , $A_e^T \tilde{P} + \tilde{P} A_e + \begin{bmatrix} C_e^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_e \\ M \end{bmatrix} = 0$.

D'après le lemme B.6.3, (page 232), nous avons alors

$$\begin{aligned} \delta_0(\tilde{P}) &= \delta_0(A_e) = 0 \\ \delta_+(\tilde{P}) &= \delta_-(A_e) = n + r \\ \delta_-(\tilde{P}) &= \delta_+(A_e) = m \end{aligned} \tag{3.19}$$

où nous rappelons que $\delta_0(M)$ désigne le nombre de valeurs propres de M situées sur l'axe imaginaire, $\delta_+(M)$ le nombre de valeurs propres de M à partie réelle strictement positive et $\delta_-(M)$ le nombre de valeurs propres de M à partie réelle strictement négative.

La matrice \tilde{P} possède donc un nombre de valeurs propres strictement positives égal au nombre de valeurs propres strictement négatives de A_e .

Dans un second temps, il s'agit de développer l'inégalité du lemme réel borné.

Exprimons A_e, B_e, C_e, D_e comme des fonctions affines de la matrice

$K = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_e &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}K\mathcal{C} \\ B_e &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}K\mathcal{D}_1 \\ C_e &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{C}_0 + \mathcal{D}_2K\mathcal{C} \\ D_e &= D + \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_2K\mathcal{D}_1 \end{aligned}$$

L'inégalité (3.18) issue du lemme réel borné peut alors se réécrire de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 \tilde{P} + \tilde{P} \mathcal{A}_0 & \tilde{P} \mathcal{B}_0 & \mathcal{C}_0^T \\ \mathcal{B}_0^T \tilde{P} & -\gamma I & D^T \\ \mathcal{C}_0 & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{D}_1^T \\ 0 \end{bmatrix} K^T \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T \tilde{P} & 0 & \mathcal{D}_2^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} \mathcal{B} \\ 0 \\ \mathcal{D}_2 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D}_1 & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.20}$$

Pour simplifier, écrivons cette inégalité sous la forme

$$\mathcal{G} + \mathcal{U}K\mathcal{V} + \mathcal{V}^T K^T \mathcal{U}^T \leq 0$$

Étant données 3 matrices \mathcal{G}, \mathcal{U} et \mathcal{V} , le problème est donc de trouver K vérifiant l'inégalité précédente. L'application du lemme d'élimination (lemme B.3, page 230) garantie l'existence d'une solution K d'ordre $m + r$ si et seulement si :

$$\mathcal{U}^{T^\perp} \mathcal{G} \mathcal{U}^{T^\perp} \leq 0 \tag{3.21}$$

$$\mathcal{V}^{\perp T} \mathcal{G} \mathcal{V}^{\perp} \leq 0 \tag{3.22}$$

Il s'agit donc de chercher \tilde{P} symétrique telle que (3.21) et (3.22) soient vérifiées. Développons ces conditions.

$$\mathcal{U}^T = [\mathcal{B}^T \tilde{P} \quad 0 \quad \mathcal{D}_2^T] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I & \\ \hline 0 & 0 & \end{array} \right] \tilde{P} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \quad -I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \tilde{P} \quad 0 \\ \hline 0 \quad I \end{array} \right].$$

L'orthogonal de \mathcal{U}^T s'écrit

$$\mathcal{U}^{T\perp} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{P}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad I \\ \hline 0 \quad 0 \end{array} \right]$$

Considérons maintenant l'orthogonal de $\mathcal{V} = [\mathcal{C} \quad \mathcal{D}_1 \quad 0] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array} \right]$, qui s'exprime comme suit

$$\mathcal{V}^\perp = \left[\begin{array}{c} I \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad I \end{array} \right]$$

Les conditions (3.21) et (3.22) deviennent après développement :

$$\left[\begin{array}{cc} AQ' + Q'A^T & B \\ B^T & -\gamma^2 I \end{array} \right] \leq 0 \quad (3.23)$$

$$Q' \text{ tel que } \tilde{P}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} Q' & * \\ * & * \end{array} \right] \quad (3.24)$$

$$\left[\begin{array}{cc} A^T P + PA & C^T \\ C & -I \end{array} \right] \leq 0 \quad (3.25)$$

$$P \text{ tel que } \tilde{P} = \left[\begin{array}{cc} P & * \\ * & * \end{array} \right] \quad (3.26)$$

En opérant le changement de variable $Q' = \gamma^{-2}Q$ et en utilisant le lemme de Schur sur les inégalités (3.23) et (3.25), il vient :

$$AQ + QA^T + BB^T \leq 0 \quad (3.27)$$

$$A^T P + PA + C^T C \leq 0 \quad (3.28)$$

où P et Q interviennent de la manière suivante dans $\tilde{P} = \tilde{P}^T$:

$$\tilde{P}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \gamma^{-2}Q & * \\ * & * \end{array} \right], \quad \tilde{P} = \left[\begin{array}{cc} P & * \\ * & * \end{array} \right] \quad (3.29)$$

Notons à ce stade que P et Q sont définies positives. En effet, en introduisant les gramiens d'observabilité et de commandabilité P_{ep} et Q_{eq} , nous avons ⁴ :

$$A^T(P - P_{eq}) + (P - P_{eq})A \leq 0$$

Comme A a toutes ses valeurs propres strictement négatives, alors $P - P_{eq} \geq 0$ d'où $P \geq P_{eq} > 0$.

⁴Par simplicité nous ne traitons que le cas de P_{eq} , le cas de Q_{eq} étant identique.

Le problème se ramène à trouver P et Q vérifiant (3.28) et (3.27) et telles que \tilde{P} donnée par (3.29) vérifie la contrainte d'inertie (3.19).

En utilisant le lemme B.5.1, page 230, la contrainte d'inertie sur \tilde{P} devient une contrainte d'inertie sur la matrice $P - \gamma^2 Q^{-1}$. Il est montré dans ce lemme que le nombre de valeurs propres à partie réelle positive de \tilde{P} est la somme du nombre de valeurs propres à partie réelle positive de P et $P - \gamma^2 Q^{-1}$. Or $P > 0$ possède n valeurs propres strictement positives. Les r autres valeurs propres strictement positives, correspondant aux pôles à partie réelle strictement négative de $G_r(p)$, sont celles de $\delta_+(P - \gamma^2 Q^{-1}) = r$. Donc,

$$\delta_+(P - \gamma^2 Q^{-1}) = r$$

L'approche précédente est maintenant résumée.

$\exists Q(p) = G_r(p) - F(p)$, $G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r$, $F(p) \in \mathcal{RH}_{\infty,-}^m / \|G(p) - Q(p)\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists P = P^T > 0, \text{ vérifiant (3.27)} \\ \exists Q = Q^T > 0, \text{ vérifiant (3.28)} \\ \delta_+(P - \gamma^2 Q^{-1}) = r \end{aligned}$$

Déterminons une borne inférieure de γ .

Nous avons

$$P - \gamma^2 Q^{-1} \geq P_{eq} - \gamma^2 Q_{eq}^{-1} = T^T \mathbf{diag} \left(\frac{\sigma_1^2 - \gamma^2}{\sigma_1}, \dots, \frac{\sigma_n^2 - \gamma^2}{\sigma_n} \right) T \quad (3.30)$$

où T est la matrice de changement de base menant à la forme équilibrée, où les VSH sont classées par ordre décroissant.

De l'inégalité (3.30), une borne inférieure sur γ peut être calculée.

Soient $X_{P_{eq+}}$ et X_{P+} les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres strictement positives de $P_{eq} - \gamma^2 Q_{eq}^{-1}$ et $P - \gamma^2 Q^{-1}$. D'après (3.30), $\forall x \in X_{P_{eq+}}$, $x^T (P - \gamma^2 Q^{-1}) x \geq 0$, donc $X_{P_{eq+}} \subset X_{P+}$ et par suite $\delta_+(P_{eq} - \gamma^2 Q_{eq}^{-1}) \leq r$.

Il s'ensuit d'après (3.30) que $\gamma \geq \sigma_{r+1}$.

La solution optimale peut être maintenant facilement construite. $\gamma = \sigma_{r+1}$ correspond au coût optimal avec $P = P_{eq}$ qui vérifie (3.28) et $Q = Q_{eq}$ qui vérifie (3.27). \square

REMARQUE 3.4.1

Étant donné \tilde{P} , trouver une solution $G_r(p) + F(p)$ optimale ou sous-optimale, c'est-à-dire $\|G(p) - G_r(p) + F(p)\|_\infty \leq \gamma$, $\sigma_{r+1}(G) < \gamma < \sigma_r(G)$, revient par exemple à considérer le cas égalité de l'inégalité (3.17).

Par ailleurs, la matrice \tilde{P} n'est pas définie de manière unique. La démonstration du lemme B.5.1 employé pour démontrer le théorème 3.4.2 donne une construction possible de \tilde{P} en fonction de γ et de P et Q vérifiant (3.27) et (3.28). A un changement de base près M dans l'espace des solutions, \tilde{P} peut être aussi exprimée de la manière suivante :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & U \\ U^T & \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

où $U = U^T$ est donnée par $P - \gamma^2 Q^{-1} = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} U^T$ et P, Q vérifiant (3.27), (3.28).

Un choix de M s'avère intéressant. $M = (\gamma^2 I - PQ)U^{-1}$ aboutit à :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & -(PQ - \gamma^2 I) \\ -(PQ - \gamma^2 I)^T & Q(PQ - \gamma^2 I) \end{bmatrix}$$

Cette dernière forme est, comme nous allons le présenter plus loin, celle utilisée dans l'approche classique.

REMARQUE 3.4.2

Pour $r = n - 1$, le résultat du lemme 2.3.5, page 34, est retrouvé. Un transfert d'ordre n peut être approché de manière optimale par un transfert d'ordre $n - 1$. En effet, dans ce cas, $\gamma = \sigma_n$, et $m = \mathbf{rang}(P_{eq} - \sigma_{r+1}^2(G)Q_{eq}^{-1}) - (n - 1) = 0$; en d'autres termes la partie anticausale disparaît.

Le théorème 3.4.2 est mis en œuvre pour l'approximation optimale d'un transfert causal par un transfert anticausal.

COROLLAIRE 3.4.3 (NEHARI 1957)

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ de degré n . Alors

$$\|G(p)\|_H = \mathbf{min}_{Q \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|G(p) + Q(p)\|_\infty \quad (3.31)$$

Le degré de $Q(p)$ est $n - l$ où l est la multiplicité de $\sigma_1(G)$.

Démonstration : D'après le théorème précédent, en prenant $r = 0$, la relation (3.31) est immédiate.

De plus, $m = \mathbf{rang}(P_{eq} - \sigma_1(G)^2 Q_{eq}^{-1}) = n - l$. □

De ce résultat découle directement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.4.4

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ de degré n . Alors,

$$\mathbf{min}_{\substack{G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r \\ F(p) \in \mathcal{RH}_{\infty,-}^m}} \|G(p) - G_r(p) + F(p)\|_\infty = \mathbf{min}_{G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|G(p) - G_r(p)\|_H$$

Démonstration : D'après le corollaire précédent, en remplaçant $G(p)$ par $G(p) - G_r(p)$, il suffit de minimiser les deux membres de l'égalité par rapport à $G_r(p)$. □

COROLLAIRE 3.4.5

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ de degré n . Alors,

$$\mathbf{min}_{G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|G(p) - G_r(p)\|_H = \sigma_{r+1}(G)$$

Démonstration : ce corollaire est immédiat compte tenu du corollaire précédent et du théorème 3.4.2. □

3.4.3 Principe de la démonstration classique

La motivation de l'approche classique provient du fait que s'il existe 2 transferts $G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r$ et $F(p) \in \mathcal{RH}_{\infty,-}$ tels que

$$\|G(p) - G_r(p) + F(p)\|_\infty \leq \gamma \quad (3.32)$$

alors $\|G(p) - G_r(p)\|_H \leq \gamma$ (propriétés 3.4.1). Dans cette section nous allons présenter le cas sous-optimal et le cas optimal.

Dans le cas sous-optimal, pour r fixé (ordre du modèle réduit $G_r(p)$), le corollaire 3.4.5 assure que γ vérifie forcément $\gamma > \sigma_{r+1}(G)$. De plus $\gamma < \sigma_r(G)$, sans quoi l'inertie de \tilde{P} amènerait à chercher une solution $G_r(p)$ possédant moins de r pôles stables. Le cas optimal va, quant à lui, consister à traiter $\gamma = \sigma_{r+1}(G)$.

3.4.3.1 Le "All-pass embedding"

Dans les explications qui suivent, la propriété de matrice de transfert carré all-pass est une idée centrale. Comme l'indique la définition suivante, une telle matrice de transfert est caractérisée par des valeurs singulières unitaires sur l'ensemble des pulsations.

DÉFINITION 3.4.2 (TRANSFERT ALL-PASS)

Soit $G(p)$ un système carré (pas nécessairement stable) décrit par (3.1). $G(p)$ est dit all-pass si et seulement si $G(j\omega)$ vérifie l'une des propriétés suivantes $\forall \omega \in \mathbb{R}$:

(i) $G(j\omega)^*G(j\omega) = I$

(ii) $G(j\omega)G(j\omega)^* = I$

La remarque 3.4.1 établit la construction d'une matrice \tilde{P} telle qu'une solution optimale $Q(p) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right]$ vérifie l'inégalité (3.17). Une solution explicite et simple peut être calculée en considérant le cas égalité de (3.17). Dans ce cas, la recherche du modèle réduit est ramenée à la résolution d'égalités linéaires. L'approche classique, appelée *all-pass embedding* [Glo84, Glo89, GL95, OA00, ZDG96] se ramène de manière équivalente à la résolution d'un système linéaire. Ceci tient du fait de l'intime relation qu'il existe entre l'égalité (3.17) issue du lemme réel borné et la caractérisation des transferts all-pass en représentation d'état. Dans ce qui suit, les motivations et la mise en œuvre du all-pass embedding sont présentées.

La recherche d'une solution $Q(p) \triangleq G_r(p) - F(p)$ vérifiant l'inégalité (3.32) se réalise en "plongeant" ⁵ le transfert $G(p) - Q(p)$ dans un transfert γ^2 -all-pass, noté $E_a(p)$ dans la suite. De cette manière, le problème revient à calculer un transfert carré $E_a(p)$ γ^2 -all-pass, dont le bloc (1, 1) est $G(p) - Q(p)$. Ainsi, la propriété $\|G(p) - Q(p)\|_\infty \leq \gamma$ sera assurée (le cas égalité apparaissant lorsque $G(p)$ est carré). $G_r(p)$ correspond ainsi à la partie stable (de degré r) de $Q(p)$.

Une paramétrisation de l'ensemble des transferts $Q(p)$ vérifiant l'inégalité (3.32) est ensuite établie.

Pour réaliser une telle approche, une caractérisation dans l'espace d'état des transferts all-pass est nécessaire.

⁵du terme anglais "embedding"

3.4.3.2 Caractérisation des transferts "all-pass"

THÉORÈME 3.4.6

Soit $G(p)$ un transfert carré minimal décrit par (3.1). Alors $G(j\omega)^*G(j\omega) = \sigma^2 I$ si et seulement si $\exists P = P^T$ inversible telle que :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ D^T C + B^T P & D^T D - \sigma^2 I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

Démonstration : Montrons d'abord \Leftarrow .

La condition (3.33) entraîne :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} (A - j\omega I)^* P + P(A - j\omega I) + C^T C & PB + C^T D \\ D^T C + B^T P & D^T D - \sigma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} (A - j\omega I)^* P(j\omega I - A)^{-1} B - PB + C^T C(j\omega I - A)^{-1} B + PBC^T D \\ B^T P(j\omega I - A)^{-1} B + D^T C(j\omega I - A)^{-1} B + D^T D - \sigma^2 I \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & -B^T P(j\omega I - A)^{-1} B + B^T(j\omega I - A)^{-*} C^T C(j\omega I - A)^{-1} B + B^T(j\omega I - A)^{-*} C^T D + \dots \\ & \dots + B^T P(j\omega I - A)^{-1} B + D^T C(j\omega I - A)^{-1} B + D^T D - \sigma^2 I = 0 \\ \Leftrightarrow & (D + C(j\omega I - A)^{-1} B)^* (D + C(j\omega I - A)^{-1} B) - \sigma^2 I = 0 \end{aligned}$$

d'où $G(j\omega)^*G(j\omega) = \sigma^2 I$.

Montrons maintenant \Rightarrow .

Nous avons par hypothèse $G(j\omega)^* = \sigma^2 G(j\omega)^{-1}$. Par suite,

$$\sigma^2 G(p)^{-1} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & \sigma BD^{-1} \\ \hline -\sigma D^{-1}C & \sigma^2 D^{-1} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad G(p)^* \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} -A^T & -C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right]$$

$\exists T$ inversible /

$$T^{-1}(A - BD^{-1}C)T = -A^T \quad (3.34)$$

$$\sigma T^{-1}BD^{-1} = -C^T \quad (3.35)$$

$$-\sigma D^{-1}CT = B^T \quad (3.36)$$

$$\sigma^2 D^{-1} = D^T \quad (3.37)$$

(3.37) implique que $DD^T = \sigma^2 I$.

(3.36) donne $B = -\sigma T^T C^T D^{-T} = -\sigma^{-1} T^T C^T D$ et (3.35) implique $B = -\sigma^{-1} T C^T D$. Il en découle $T = T^T$.

Les relations (3.34) et (3.35) donnent $(T^{-1}A + C^T C)T = -A^T$, donc $T^{-1}A + A^T T^{-1} + \sigma^{-1} C^T C = 0$.

En prenant $P = \sigma T^{-1}$, nous avons bien : $\exists P = P^T$ telle que :

$$A^T P + PA + C^T C = 0$$

$$\text{d'après (3.35), } PB + C^T D = 0$$

$$D^T D - \sigma^2 I = 0$$

□

LEMME 3.4.7

Soit $G(p)$ un transfert carré minimal décrit par (3.1). Alors $G(j\omega)G^*(j\omega) = \sigma^2 I$ si et seulement si $\exists Q = Q^T$ tel que :

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + BB^T & QC^T + BD^T \\ CQ + DB^T & DD^T - \sigma^2 I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.38)$$

De plus $PQ = \sigma^2 I$ où P est définie dans le théorème précédent.

Démonstration : En post et pré-multipliant l'égalité (3.33) par $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, (3.33) est équivalente à :

$$P^{-1}A^T + AP^{-1} + P^{-1}C^T C P^{-1} = 0 \quad (3.39)$$

$$B + P^{-1}C^T D = 0 \quad (3.40)$$

$$DD^T - \sigma^2 I = 0 \quad (3.41)$$

(3.40) donne $C^T = -PBD^{-1}$. Donc, (3.39) devient $P^{-1}A^T + AP^{-1} + BD^{-1}D^{-T}B^T = 0$ ou encore avec (3.41) $P^{-1}A^T + AP^{-1} + \sigma^{-2}BB^T = 0$.

Posons alors, $Q = \sigma^2 P^{-1}$. (3.40) devient $D^{-1}B + \sigma^{-2}QC^T = 0$ d'où via (3.41), $D^T B + QC^T = 0$. \square

Les 2 lemmes précédents sont maintenant utilisés pour caractériser le transfert "all-pass" $E_a(p)$ et ainsi exprimer les équations linéaires vérifiées par $Q(p)$.

3.4.3.3 Application au cas sous-optimal

Rappelons que $G(p)$ possède n_u entrées et n_y sorties. Dans un premier temps, le "all-pass embedding" consiste à rajouter n_y entrées et n_u sorties. Ainsi, ce système augmenté $G_a(p)$ est toujours carré même si $G(p)$ ne l'est pas.

Introduisons donc :

$$G_a(p) \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B & 0 \\ \hline C & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B_a \\ \hline C_a & D_a \end{array} \right] \quad (3.42)$$

$G_a(p) \in \mathbb{R}^{(n_u+n_y) \times (n_y+n_u)}$ est appelé la dilatation de $G(p)$.

Dans un second temps, la construction consiste à trouver un transfert $Q_a(p)$ en utilisant le théorème 3.4.6, afin de rendre l'erreur $E_a(p) \triangleq G_a(p) - Q_a(p)$ γ^2 -all-pass, c'est-à-dire :

$$E_a(p)^* E_a(p) = \gamma^2 I$$

Le bloc (1,1) de l'égalité précédente implique que $G(p) - Q_{a11}(p)$ vérifie $\|G(p) - Q_{a11}(p)\|_\infty \leq \gamma$ (le cas égalité étant obtenu si $G(p)$ est un transfert carré). $Q_{a11}(p)$ est dès lors la solution $Q(p)$ recherchée :

$$Q(p) = Q_{a11}(p)$$

Le transfert $G_r(p)$ est obtenu en prenant la partie stable et causale de $Q(p)$.

En notant :

$$Q_a(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right]$$

$E_a(p)$ est donné par :

$$E_a(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B_a \\ 0 & \hat{A} & \hat{B} \\ \hline C_a & -\hat{C} & D_a - \hat{D} \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array} \right]$$

D'après le théorème 3.4.6, $E_a(p)$ est γ^2 -all-pass si et seulement si $\exists P_e$ inversible telle que :

$$\begin{bmatrix} A_e^T P_e + P_e A_e + C_e^T C_e & P_e B_e + C_e^T D_e \\ D_e^T C_e + B_e^T P_e & D_e^T D_e - \gamma^2 I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

P_e est donc le grammien d'observabilité de $E_a(p)$.

L'objectif est de construire P_e , \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} telles que (3.43) soit vérifiée.

La matrice D_e est calculée immédiatement : $D_e \in \mathbb{R}^{(n_u+n_y) \times (n_u+n_y)}$. D'après le bloc (2, 2) de (3.43), un choix naturel pour \hat{D} est alors :

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} D & \gamma I_{n_y} \\ \gamma I_{n_u} & 0 \end{bmatrix}$$

En notant Q_e le grammien de commandabilité de $E_a(p)$, d'après le lemme 3.4.7 l'égalité $P_e Q_e = \gamma^2 I$ est vérifiée. D'après la structure des matrices A_e , B_e , C_e et D_e , les matrices P_e et Q_e ont la forme suivante :

$$P_e = \begin{bmatrix} P & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad Q_e = \begin{bmatrix} Q & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

P et Q étant les grammiens d'observabilité et de commandabilité de $G(p)$. De plus, P_e et Q_e possèdent chacune une contrainte sur leur inertie car A_e possède r pôles à partie réelle strictement négative et $n - r$ pôles à partie réelle strictement positive. Une forme possible de P_e est celle donnée dans la remarque 3.4.1, page 76 :

$$P_e = \begin{bmatrix} P & -(PQ - \gamma^2 I) \\ -(PQ - \gamma^2 I)^T & Q(PQ - \gamma^2 I) \end{bmatrix}$$

ou encore notée :

$$P_e = \begin{bmatrix} P & -E \\ -E^T & QE \end{bmatrix}$$

avec $E = PQ - \gamma^2 I$.

Dès lors, \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} se déduisent de l'égalité (3.43) [GL95] :

$$\begin{aligned} \hat{B} &= E^{-1}(QB_a + C_a^T D_e) \\ \hat{C} &= D_e B_a^T + C_a P \\ \hat{A} &= -E^{-1}(A^T E + C_a^T \hat{C}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

La construction d'une solution $Q_a(p)$ est ainsi achevée. Notons que pour parvenir à cette solution, le seul calcul des grammiens P et Q est requis. Avant de passer à la paramétrisation de toutes les solutions optimales, nous pouvons noter [GL95] que $E_a(p)$ et $Q_a(p)$ sont des transferts minimaux. En effet, P_e et Q_e étant inversibles, il suffit de montrer que A_e ne possède pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. Ceci est démontré par l'absurde dans [GL95]. La structure des matrices d'état de $E_a(p)$ amène directement à conclure sur la minimalité de $Q_a(p)$ qui est donc de degré n et possède r pôles à partie réelle strictement négative et $n - r$ pôles à partie réelle strictement positive.

3.4.3.4 Paramétrisation des solutions sous-optimales

La partie précédente a eu pour but de montrer l'existence d'une solution particulière $Q(p)$. L'ensemble des transferts $Q(p)$ de degré n et possédant r pôles à partie réelle strictement négative et $n - r$ pôles à partie réelle strictement positive, vérifiant

$$\|G(p) - Q(p)\|_\infty \leq \gamma, \quad \gamma \in]\sigma_{r+1}(G(p)), \sigma_r(G(p))[\quad (3.45)$$

est donné par

$$Q = Q_a \star U, \quad U \in \mathcal{RH}_\infty^-, \quad \|U\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma} \quad (3.46)$$

où \star désigne le produit de Redheffer introduit dans les notations 5.

Cette paramétrisation provient du fait que pour tout $Q(p)$ vérifiant (3.45)⁶, alors $Q(p)$ peut s'écrire $Q(p) = Q_a(p) \star U(p)$, $U(p) \in \mathcal{RL}_\infty$, où $Q_a(p)$ est le transfert calculé dans la partie précédente. En effet, une telle paramétrisation est techniquement rendue possible [GL95, OA00] ($Q_{a12}(p)$ est inversible sur l'axe imaginaire, $Q_{a21}(p)$ est inversible sur l'axe imaginaire, $Q_{a22}(p)(\infty) = 0$).

Dès lors, $G - Q = \mathcal{F}_l(G_a - Q_a, U) = E_a \star U$. Comme $E_a(p)$ est γ^2 -all-pass et vérifie donc $E_a(j\omega)^* E_a(j\omega) = \gamma^2 I$, le bouclage par un transfert $U(j\omega)$, assure que $\|E_a(j\omega) \star U(j\omega)\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si $\|U(j\omega)\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ [GL95, ZDG96, Glo89]. Notons alors que le bouclage de $Q_a(p)$ par $U(p)$ anticausal ne modifie par le nombre de pôles à partie réelle strictement négative (similaire à une condition de type petit gain) de $Q_a(p)$ donné dans la partie précédente, et valant r . Finalement, pour tout $U(p)$ anticausal, $Q(p)$ donné par (3.46) possède exactement r pôles à partie réelle strictement négative.

3.4.3.5 Mise en œuvre dans le cas sous-optimal

Reprenons sous forme algorithmique toute la démarche amenant à l'obtention d'un $G_r(p)$ sous-optimal.

1. Calcul des grammien P et Q de $G(p)$ ainsi que des VSH (voir section 3.3.3, page 62). Déterminer r tel que $\gamma \in]\sigma_{r+1}(G(p)), \sigma_r(G(p))[\$
2. Calcul de $D_e = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{ny} I \\ \gamma_{nu} I & 0 \end{bmatrix}$
3. Calculer \hat{A} , \hat{B}_1 et \hat{C}_1 (égalités (3.44)) :

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= E^{-1}(QB + C^T D) \\ \hat{C}_1 &= DB^T + CP \\ \hat{A} &= -E^{-1}(A^T E + C^T \hat{C}_1) \end{aligned}$$

où P et Q sont les grammien d'observabilité et de commandabilité de $G(p)$ et $E = PQ - \gamma^2 I$.

4. $G_r(p)$ est donné par la partie stable de $Q(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_1 & D \end{array} \right]$

⁶Une solution particulière est donnée dans la partie précédente grâce au "all-pass embedding".

3.4.3.6 Démarche dans le cas optimal

Dans le cas optimal, un transfert $G_r(p)$ stable de degré r est cherché de manière à minimiser $\|G(p) - G_r(p)\|_H$. Le théorème 3.4.2 et le corollaire 3.4.5 impliquent qu'il est équivalent de chercher un transfert $Q(p)$ possédant r pôles à partie réelle strictement négative et m pôles⁷ à partie réelle strictement positive, vérifiant $\|G(p) - Q(p)\|_\infty = \gamma = \sigma_{r+1}(G(p))$ (dans le cas optimal γ est une VSH de $G(p)$).

Dans la suite, quand nous supposons que $\sigma_{r+1}(G(p))$ est de multiplicité l , il est alors possible de choisir une représentation d'état de $G(p)$ pour laquelle les grammien peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$P = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \sigma_{r+1}I_l \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \sigma_{r+1}I_l \end{bmatrix}$$

où $\Sigma = \mathbf{diag}(\sigma_i)$, $i \neq r+1$.

Notons ici que $P - \sigma_{r+1}^2 Q^{-1}$ possède l valeurs propres nulles, ce qui est la différence majeure avec le cas sous-optimal. L'application du théorème 3.4.2 implique donc que $m = n - l - r$, où m correspond au nombre de pôles anticausaux de $Q(p)$. Par suite, $Q(p)$ est de degré $n - l$.

Dès lors, la technique du "all-pass embedding" peut de nouveau s'appliquer en notant que $P_e \in \mathbb{R}^{(2n-l) \times (2n-l)}$. Comme précédemment, $P_e = P_e^T$ doit vérifier

$$P_e = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \sigma_{r+1}I_l \end{bmatrix} & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad P_e^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{r+1}^{-2} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \sigma_{r+1}I_l \end{bmatrix} & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

De nouveau, un problème de complétion de matrice est à résoudre. Le lemme B.5.1 permet de construire une matrice P_e à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières. A un changement de base près dans l'espace des solutions (remarque page 76), la matrice P_e utilisée dans la littérature est la suivante :

$$P_e = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & -\Gamma \\ 0 & \sigma_{r+1}I & 0 \\ -\Gamma^T & 0 & \Sigma\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

où $\Gamma = \Sigma^2 - \gamma^2 I_{n-l}$.

Comme pour le cas sous-optimal, la résolution des équations (3.33) et (3.38) aboutit aux matrices d'état \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} et \bar{D} de $Q(p)$ recherché. Le modèle réduit $G_r(p)$ est obtenu en prenant la partie causale de $Q(p)$.

Le théorème suivant présente une réalisation d'état possible pour un transfert $Q(p)$.

THÉORÈME 3.4.8 (ADAPTÉ DE [GLO84])

Soit $G(p)$ un transfert stable décrit par (3.1). Soient P , Q les grammien de commandabilité et d'observabilité de $G(p)$ et $\gamma \triangleq \sigma_{r+1}(G(p))$ tels que :

$$AQ + QA^T + BB^T = 0 \quad (3.48)$$

$$A^T P + PA + C^T C = 0 \quad (3.49)$$

$$P = P^T = \mathbf{diag}(\Sigma, \gamma I_l)$$

$$Q = Q^T = \mathbf{diag}(\Sigma, \gamma I_l)$$

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{(n-l) \times (n-l)}$$

⁷La valeur de m est discutée dans la suite grâce au théorème 3.4.2.

avec Σ diagonale.

Partitionnons les matrices A , B et C en accord avec P :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2]$$

Alors $Q(p) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline C & D \end{array} \right]$ défini par

$$\bar{A} = \Gamma^{-1}(\gamma^2 A_{11}^T + \Sigma A_{11} \Sigma - \gamma C_1^T U B_1^T) \quad (3.50)$$

$$\bar{B} = \Gamma^{-1}(\Sigma B_1 + \gamma C_1^T U) \quad (3.51)$$

$$\bar{C} = C_1 \Sigma + \gamma U B_1^T \quad (3.52)$$

$$\bar{D} = D - \gamma U \quad (3.53)$$

où U est une matrice unitaire satisfaisant

$$B_2 = -C_2^T U$$

et

$$\Gamma \triangleq \Sigma^2 - \gamma^2 I$$

est telle que :

1. $\|G(p) - Q(p)\|_\infty = \gamma$
2. $Q(p)$ possède exactement r pôles à partie réelle strictement négative et $n - r - l$ pôles à partie réelle strictement positive.
3. $G_r(p) = [Q(p)]_+$ est une approximation optimale d'ordre r au sens de la norme de Hankel :

$$\|G(p) - G_r(p)\|_H = \gamma = \sigma_{r+1}(G(p))$$

Démonstration : $\delta_0(\Sigma^2 - \gamma^2 I) = 0$ (la matrice $\Sigma^2 - \sigma^2 I$ est inversible).

La complétion de la matrice P_e donnée par (3.47) se réalise directement dans la base équilibrée :

$$P_e = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & -\Gamma \\ 0 & \gamma I & 0 \\ -\Gamma^T & 0 & \Sigma \Gamma \end{bmatrix}$$

La technique du "all-pass embedding", présentée page 81 permet de construire $Q_a(p)$ telle que $E_a(p) = G_a(p) - Q_a(p)$ soit une fonction γ^2 -all-pass. La matrice U apparaît lors de cette étape [GL95]. Les matrices d'état de $Q(p)$ sont obtenues directement à partir de celles de $Q_a(p)$ ($Q(p) = Q_{a11}(p)$).

Ainsi, $Q(p)$ vérifie $\|G(p) - Q(p)\|_\infty \leq \gamma$ (égalité lorsque $G(p)$ est carré). Dès lors en décomposant $Q(p)$ sous la forme $Q(p) = G_r(p) + F(p)$ ($G_r(p)$ est stable et possède exactement r pôles), il vient $\|G(p) - G_r(p)\|_H \leq \|G(p) - Q(p)\|_\infty \leq \gamma$. Or, $\|G(p) - G_r(p)\|_H \geq \sigma_{r+1}(G(p))$ et $\gamma = \sigma_{r+1}(G(p))$. Donc, la borne inférieure est atteinte : $\|G(p) - G_r(p)\|_H = \sigma_{r+1}(G(p))$. \square

REMARQUE 3.4.3

Il est à noter que si $G_r(p)$ est une approximation optimale au sens de la norme de Hankel, alors $G_r(p) + D$ l'est aussi pour toute matrice constante D .

3.4.3.7 Paramétrisation et mise en œuvre dans le cas optimal

Comme dans le cas sous-optimal (page 82), une paramétrisation de l'ensemble des solutions optimales au sens de la norme de Hankel est rendue possible par interconnexion avec un transfert anticausal $U(p)$ tel que $\|U(p)\|_\infty \leq \sigma_{r+1}(G(p))^{-1}$. Les détails techniques se trouvent dans [GL95, OA00].

Reprenons sous forme algorithmique toute la démarche amenant à l'obtention d'un $G_r(p)$ sous-optimal.

1. Calcul des grammians P et Q de $G(p)$ ainsi que des VSH (voir section 3.3.3, page 62). Déterminer r et γ tels que $\gamma = \sigma_{r+1}(G(p))$.
2. Permutation dans l'espace d'état. Opérer le changement de base :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ (0) & & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

qui permet de permuter $\sigma_{r+1}(G(p))$ avec $\sigma_n(G(p))$.

3. Calculer \bar{A} , \bar{B} et \bar{C} et \bar{D} données par les relations (3.50)-(3.53).
4. $G_r(p)$, approximation optimale d'ordre r au sens de la norme de Hankel est donnée par la partie causale de :

$$Q(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right]$$

3.4.4 Réduction pas à pas par la norme de Hankel

La réduction optimale au sens de la norme de Hankel peut être utilisée pour retirer un état à la fois. La remarque 3.4.2, page 77, garantit qu'il est possible de retirer un état de façon optimale au sens des normes de Hankel et H_∞ . Dès lors, un modèle réduit à l'ordre r peut être obtenu en procédant par $n - r$ éliminations successives d'un état.

Nous considérons dans cette partie des matrices carrées de fonctions de transferts. Considérons à l'étape i , $i \leq n - r$, le modèle réduit G_{n-i} du modèle G_{n-i+1} au sens de la norme de Hankel (théorème 3.4.8). Il vient alors :

$$G_{n-i+1}(p) = G_{n-i}(p) + \sigma_{n-i+1}(G(p))E_{n-i+1}(p) \quad (3.54)$$

Le théorème 3.4.8 assure que $E_k(p)$ est un transfert all-pass (partie anticausale nulle) et que les ordres de $G_{n-i}(p)$ et $G_{n-i+1}(p)$ sont respectivement $n - i$ et $n - i + 1$ pour $1 \leq i \leq n$. L'intérêt de cette approche est qu'à chaque étape l'erreur est homogène sur toutes les fréquences.

Cette approche n'est pas équivalente à l'obtention directe d'un modèle réduit d'ordre r par l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel. Par ailleurs, la réduction Hankel pas à pas fournit une borne H_∞ sur la norme de l'erreur plus petite que dans le cas de l'approximation optimale. De plus, la technique pas à pas sert à prouver que toutes

les matrices carrées de fonctions de transfert stables peuvent se décomposer comme une somme de transferts all-pass pondérés par une VSH. Le théorème suivant précise cette idée.

THÉORÈME 3.4.9

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ de valeurs singulières de Hankel $\sigma_1 > \sigma_2 \cdots > \sigma_N$, où σ_i est de multiplicité r_i et $r_1 + r_2 + \cdots + r_N = n$.

Alors, il existe une représentation de $G(p)$ telle que :

$$G(p) = D_0 + \sigma_1 E_1(p) + \sigma_2 E_2(p) + \cdots + \sigma_N E_N(p) \quad (3.55)$$

où

- (1) $E_k(p)$ sont all-pass et stables pour tout k .
- (2) Pour $k = 1, 2, \dots, N$

$$\hat{G}_k(p) := D_0 + \sum_{i=1}^k \sigma_i E_i(p)$$

- (3) est le modèle réduit pas à pas d'ordre $r_1 + r_2 + \cdots + r_k$

$$\|G(p) - \hat{G}_k(p)\|_\infty \leq \sum_{i=k+1}^N \sigma_i$$

Démonstration : (3.55) s'obtient en sommant membre à membre les égalités (3.54) pour i allant de 1 à n , en notant $G_0(p) = D_0$.

Les all-pass sont stables par construction car à chaque étape le modèle réduit est stable. L'ordre de $\hat{G}_k(p)$ est déductible par une simple récurrence.

Enfin, la borne (3) s'obtient en utilisant l'inégalité triangulaire sur $\|G(p) - \hat{G}_k(p)\|_\infty$. \square

De ce théorème découle un corollaire valable dans le cas de transferts strictement propres et pas nécessairement carrés. La norme H_∞ d'un transfert est plus petite que le double de la somme de ses VSH.

COROLLAIRE 3.4.10

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times m}$ de valeurs singulières de Hankel $\sigma_1 > \sigma_2 \cdots > \sigma_N$, où chaque σ_i est de multiplicité r_i et $G(\infty) = 0$. Alors,

- (i) $\|G(p)\|_\infty \leq 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_N)$
- (ii) il existe une matrice constante D_0 telle que $\|G(p) - D_0\|_\infty \leq \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_N$

Démonstration : Si $G(p)$ est carré l'application du théorème précédent assure la majoration. Si $G(p)$ n'est pas carré, une dilatation carrée de $G(p)$, $G_a(p)$ conserve les VSH. Comme $G(p)$ est un sous transfert de $G_a(p)$, l'inégalité est immédiate. \square

3.4.5 Borne supérieure H_∞ sur l'erreur Hankel-optimale

Une borne H_∞ a priori sur l'erreur de réduction peut être déduite des propriétés précédentes.

L'erreur optimale $G(p) - G_r(p)$ au sens de la norme de Hankel a été vue comme la partie causale d'un transfert all-pass $E(p) = G(p) - G_r(p) + F(p)$, avec $F(p)$ anticausal. A travers un résultat liant les VSH de $F^*(p)$ aux VSH de $G(p) - G_r(p)$ [GL95, OA00, ZDG96], nous pouvons obtenir la borne supérieure suivante.

THÉORÈME 3.4.11

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ ayant pour VSH $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{r+l} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$. Soit $G_r(p)$ une approximation optimale de $G(p)$ au sens de la norme de Hankel. Alors il existe une matrice D_0 telle que :

$$\sigma_{r+1}(G) \leq \|G(p) - G_r(p) - D_0\|_\infty \leq \sigma_{r+1}(G) + \sum_{i=1}^{n-r-l} \sigma_{i+r+l}(G) \quad (3.56)$$

REMARQUE 3.4.4

La matrice D_0 peut être calculée pour minimiser $\|G(p) - G_r(p) - D_0\|_\infty$. Ce problème se formule comme un problème d'optimisation convexe car il revient à chercher un gain constant (D_0) qui minimise une erreur absolue (voir lemme 2.3.4, page 34). Une formulation générale de ce problème, avec pondérations d'entrée et de sortie, est présentée dans le lemme 4.2.3, page 113.

Dans les exemples qui suivent, les modèles réduits obtenus sont implicitement optimisés de la sorte.

REMARQUE 3.4.5

Notons que la borne précédente diffère de la borne du théorème 3.4.9 issue de l'approximation de Hankel pas à pas. La borne de l'approximation optimale compte chaque VSH multiplicité comprise, alors que la borne de l'approximation pas à pas ne somme que les VSH distinctes.

3.4.6 Etude des exemples

Dans cette section, nous étudions l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel à travers les 3 exemples de modèles introduits dans la section 1.3, page 21. L'approximation pas à pas au sens de la norme de Hankel est comparée à l'approximation optimale dans l'étude du modèle de Safonov et du modèle de bief.

3.4.6.1 L'exemple de Safonov et al.

L'exemple est étudié de la même manière que pour la troncature équilibrée page 63. La figure suivante représente les bornes inférieure et supérieure sur la norme H_∞ de l'erreur absolue en fonction de r .

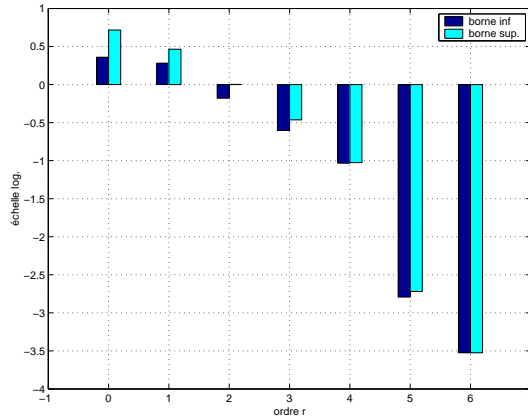


FIG. 3.15 – Bornes inférieure (lemme 2.3.1, page 32) et supérieure (3.56) sur l'erreur absolue en fonction de r

Comme dans le cas de la troncature équilibrée, les ordres 6, 5 et 4 sont étudiés. Les modèles réduits aux ordres $r = 6$ et $r = 5$ sont représentés en annexe page 256.

L'approximation optimale au sens de la norme de Hankel à l'ordre 4 est :

$$G_4(p) = \frac{43.43(p + 0.5663)(p^2 - 0.1629p + 0.2345)}{(p + 9.103)(p + 0.09925)(p^2 + 3.985s + 6.276)}$$

Ce transfert minimise la norme de Hankel de l'erreur de modèle qui vaut ici $\|G(j\omega) - G_4(j\omega)\|_H = \sigma_5(G) = 0.093$.

L'approximation pas à pas au sens de la norme de Hankel à l'ordre 4 est :

$$G_4(p) = \frac{43.51(p + 0.5698)(p^2 - 0.1616p + 0.2339)}{(p + 9.153)(p + 0.09883)(p^2 + 3.97p + 6.287)}$$

qui donne $\|G(j\omega) - G_4(j\omega)\|_H = 0.094$.

Les tracés fréquentiels de ces 2 modèles réduits sont représentés ci-dessous.

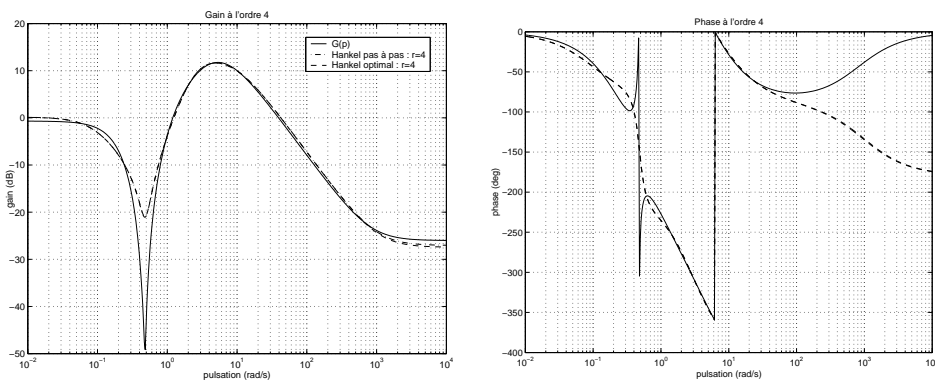


FIG. 3.16 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_4(j\omega)$ obtenu par réduction optimale au sens de la norme de Hankel et réduction pas à pas au sens de la norme de Hankel

L'anti-résonance est mal reproduite. Le module de l'erreur est présenté sur la figure 3.18. Plus précisément, les figures suivantes représentent l'erreur en gain et en phase à l'ordre 4.

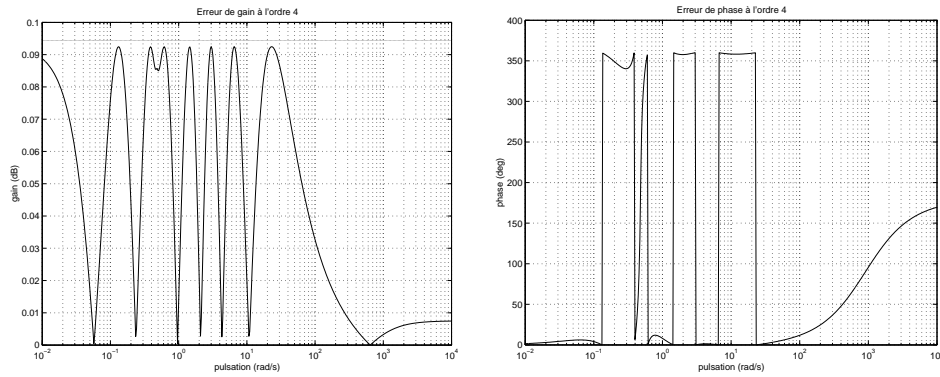


FIG. 3.17 – Erreur sur le gain $||G(j\omega) - |G_4(j\omega)|$ et sur la phase $\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_4(j\omega))$

Comme dans le cas de la troncature équilibrée, le modèle $G_4(p)$ ne peut pas conserver l'anti-résonance et possède aussi des zéros instables.

Hankel optimal				Hankel pas à pas			
r	6	5	4	r	6	5	4
ρ_r^{ex1}	0.09	0.48	27.72	ρ_r^{ex1}	0.09	0.39	27.46

Comparaison entre troncature équilibrée et réduction optimale en norme de Hankel

Le tracé du module de l'erreur absolue pour les 2 méthodes révèle sur la figure 3.18, que l'approximation en norme de Hankel est homogène sur l'ensemble des pulsations (sans être une fonction all-pass). La troncature équilibrée, du fait de la conservation du terme direct dans le modèle réduit, possède une erreur décroissante. La troncature équilibrée avec conservation du gain statique possède une erreur nulle pour $\omega = 0$.

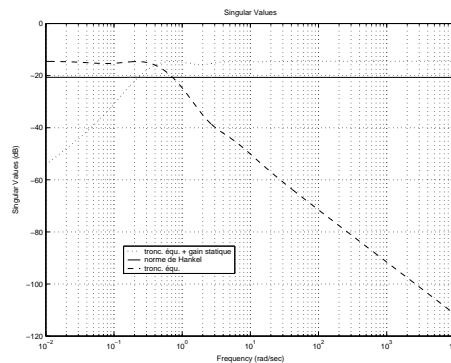


FIG. 3.18 – Module de l'erreur $G(j\omega) - G_4(j\omega)$ pour la troncature équilibrée (avec sans conservation du gain statique) et l'approximation optimale de Hankel

Les tableaux suivants permettent de comparer les performances des méthodes en terme de norme de l'erreur de réduction ⁸. Nous pouvons aussi remarquer le conservatisme des bornes supérieures.

⁸Sur cet exemple, la troncature équilibrée avec et sans conservation du gain statique donne les mêmes normes $||G(j\omega) - G_r(j\omega)||_\infty$

Troncature équilibrée avec et sans conservation du gain statique				Approximation Hankel-optimale			
r	$\ G - G_r\ _\infty$	$2 \sum_{i=r+1}^7 \sigma_i$	σ_{r+1}	r	$\ G - G_r\ _\infty$	$\sum_{i=r+1}^7 \sigma_i$	σ_{r+1}
6	5.97×10^{-4}	5.97×10^{-4}	2.99×10^{-4}	6	2.98×10^{-4}	2.98×10^{-4}	2.98×10^{-4}
5	3.8×10^{-3}	3.8×10^{-3}	1.6×10^{-3}	5	1.6×10^{-3}	1.9×10^{-3}	1.6×10^{-3}
4	1.88×10^{-1}	1.88×10^{-1}	9.25×10^{-2}	4	9.26×10^{-2}	9.4×10^{-1}	9.25×10^{-2}

L'approximation optimale en sens de la norme de Hankel fournit les meilleurs résultats au sens de la norme de l'erreur mais aussi au sens de l'indicateur ρ_r^{ex1} . A l'inverse de la troncature équilibrée, nous rappelons que cette approche optimise à travers le terme direct D_r , la norme H_∞ de l'erreur.

L'approximation au sens de la norme de Hankel fournit à chaque ordre des solutions optimales au sens de la norme H_∞ , voire très proches de l'optimalité pour $r = 4$. Les parties anticausales $F(j\omega)$ de $Q(j\omega) = G_r(j\omega) + F(j\omega)$ associées à l'approximation \mathcal{L}_∞ sont ici très faibles ce qui permet de faire l'approximation $G_r(j\omega) \simeq Q(j\omega)$.

3.4.6.2 L'exemple du TGEN

Nous comparons dans cette partie les modèles réduits issus de la troncature équilibrée et ceux calculés par optimisation de l'erreur en norme de Hankel. Nous n'avons pas jugé nécessaire de présenter l'approximation Hankel pas à pas sur cet exemple. Les bornes supérieure et inférieure sur la norme H_∞ de l'erreur donnée par l'approximation optimale de Hankel sont représentées sur la figure suivante.

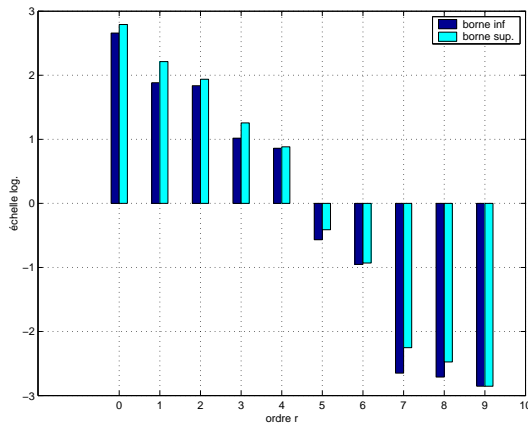


FIG. 3.19 – Bornes inférieure (lemme 2.3.1, page 32) et supérieure (3.56) sur l'erreur absolue en fonction de r

D'après la figure précédente, les modèles réduits aux ordres 7 et 6 sont à considérer pour des raisons identiques à celles développées lors de la mise œuvre de la troncature équilibrée 65, les bornes étant sensiblement les mêmes. Comme pour la troncature équilibrée à l'ordre 6, le modèle réduit au sens de la minimisation de la norme de Hankel ne mène pas à de résultats satisfaisants pour $r \leq 6$.

Le modèle $G_7(p)$ optimal au sens de la norme de Hankel conduit à $\|G(j\omega) - G_7(j\omega)\|_H = \sigma_8(G) = 2.2 \times 10^{-3}$. Comparons les valeurs singulières des erreurs issues des méthodes par troncature équilibrée et approximation optimale de Hankel.

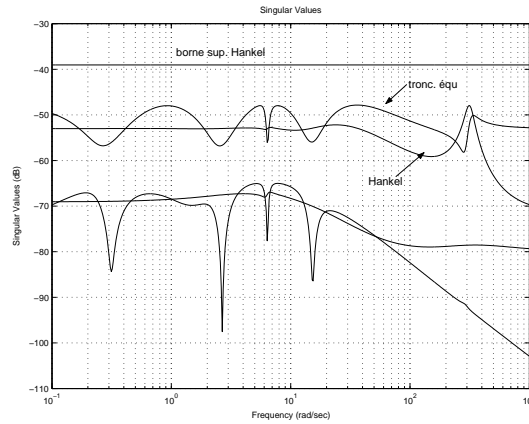


FIG. 3.20 – Valeurs singulières de $G(j\omega) - G_7(j\omega)$ et borne supérieure (3.56)

D'après la figure précédente, les valeurs singulières supérieures des erreurs données par les 2 méthodes sont proches pour $r = 7$. La norme H_∞ de l'erreur obtenue par le modèle réduit optimal au sens de la norme de Hankel est plus faible que celle obtenue par troncature équilibrée. Ces normes ainsi que les indicateurs $\rho_r^{\text{ex}2}$ et $\rho_r^{\text{ex}2b}$ définis respectivement par (1.10) et (1.11) dans la section 1.3.2 page 24, sont présentés dans les tableaux suivants.

Troncature équilibrée					
r	$\ G - G_r\ _\infty$	$2 \sum_{i=r+1}^7 \sigma_i$	σ_{r+1}	$\rho_r^{\text{ex}2}$	$\rho_r^{\text{ex}2b}$
7	4.3×10^{-3}	1.12×10^{-2}	2.2×10^{-3}	2.3×10^{-2}	0.25
6	2.19×10^{-1}	2.34×10^{-1}	1.11×10^{-1}	0.3	74.3

Approximation Hankel-optimale					
r	$\ G - G_r\ _\infty$	$\sum_{i=r+1}^7 \sigma_i$	σ_{r+1}	$\rho_r^{\text{ex}2}$	$\rho_r^{\text{ex}2b}$
7	4×10^{-3}	5.6×10^{-3}	2.2×10^{-3}	1.04	51.6
6	1.5×10^{-1}	1.15×10^{-1}	1.11×10^{-1}	1.3	536.6

Les indicateurs relatifs à l'approximation au sens de la norme de Hankel sont de moins bonne qualité que ceux donnés par troncature équilibrée. A l'ordre 6 la détérioration du transfert (2, 1) est significative.

3.4.6.3 Exemple du bief de type 1

Les techniques de l'approximation par la norme de Hankel pas à pas et l'approximation optimale sont mises en œuvre.

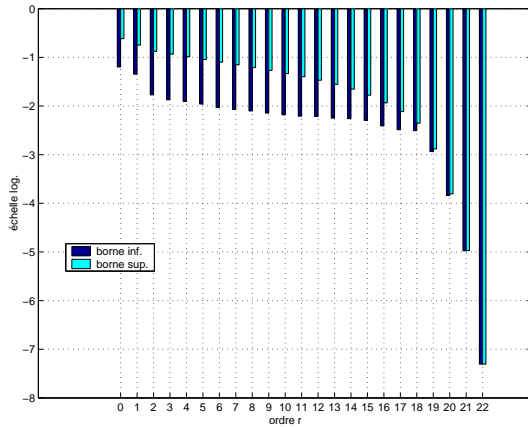


FIG. 3.21 – Bornes inférieure (lemme 2.3.1, page 32) et supérieure (3.56) sur l’erreur absolue en fonction de r

Les ordres 17 et 18 sont étudiés comme pour la troncature équilibrée page 67. L’approximation optimale en norme de Hankel donne lieu à $\|G(j\omega) - G_{18}(j\omega)\|_H = \sigma_{19}(G) = 3.1 \times 10^{-3}$. L’approximation pas à pas au sens de la norme de Hankel mène à $\|G(j\omega) - G_{18}(j\omega)\|_H = 4.9 \times 10^{-3}$. Des modèles réduits à l’ordre 18 sont comparés au modèle initial sur la figure 3.22. Les ordres 17 et inférieurs entraînent, comme dans le cas de la troncature équilibrée, une détérioration importante des transferts croisés.

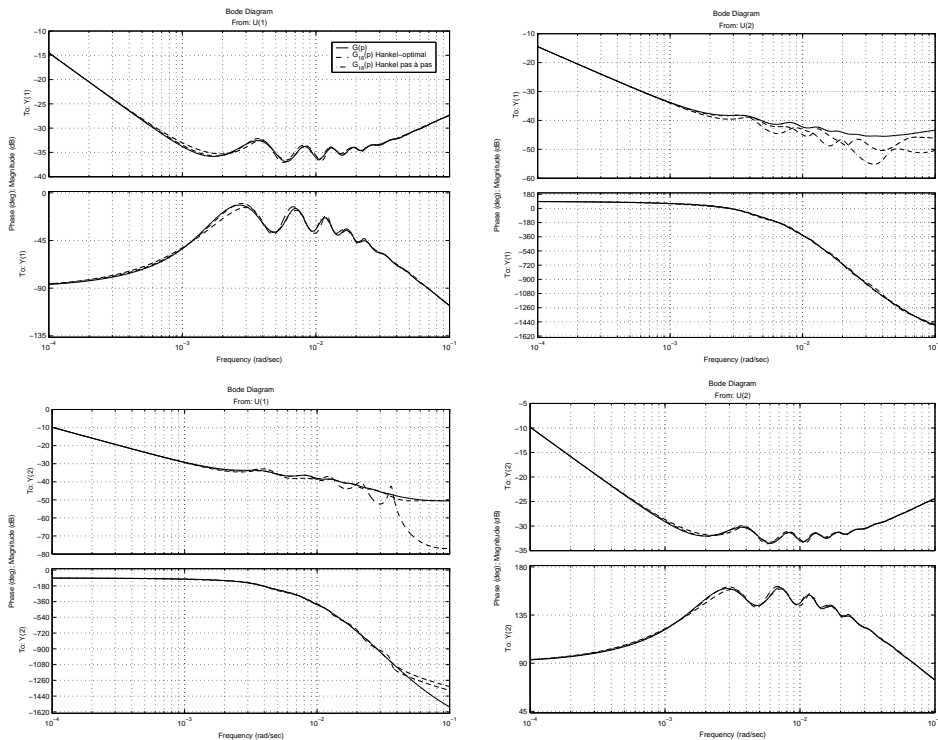


FIG. 3.22 – Modèles réduits à l’ordre 18 obtenus par réduction optimale au sens de la norme de Hankel et Hankel pas à pas

La figure 3.23 compare les valeurs singulières des erreurs pour les 2 modèles réduits.

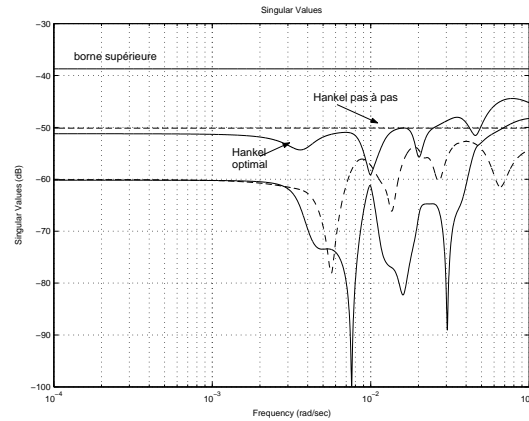


FIG. 3.23 – Valeurs singulières de $G(j\omega) - G_{18}(j\omega)$ et borne supérieure (3.56)

Les indicateurs (1.12) et (1.13), introduits page 25, sont présentés dans les tableaux suivants.

Hankel optimal			Hankel pas à pas		
r	18	17	r	18	17
$\rho_r^{\text{ex}3}$	0.227	0.176	$\rho_r^{\text{ex}3}$	0.177	0.375
$\rho_r^{\text{ex}3b}$	0.182	0.196	$\rho_r^{\text{ex}3b}$	0.112	0.227

Ces résultats montrent que pour $r = 18$ la technique pas à pas donne un meilleur résultat que la technique Hankel-optimale (avec le terme direct optimisé). A l'ordre $r = 17$, nous observons le contraire. Nous pouvons noter aussi que dans le cas de la réduction Hankel-optimale $\rho_{18}^{\text{ex}3} > \rho_{17}^{\text{ex}3}$ ce qui signifie que l'erreur relative maximale sur la gamme de pulsations allant de 0rad/s à $5 \cdot 10^{-3}\text{rad/s}$ est plus faible à l'ordre 17 qu'à l'ordre 18.

Comparaison entre réduction optimale au sens de la norme de Hankel et troncature équilibrée

Sur la figure suivante, les valeurs singulières de l'erreur $G(j\omega) - G_{18}(j\omega)$ sont représentées pour $G_{18}(j\omega)$ obtenu par troncature équilibrée et approximation optimale au sens de la norme de Hankel.

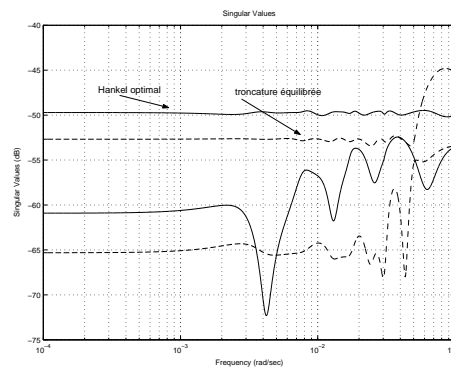


FIG. 3.24 – Comparaison des solutions obtenues par troncature équilibrée et approximation optimale au sens de la norme de Hankel pour $r = 18$

Les tableaux suivants présentent la norme de l'erreur et précisent la finesse des bornes supérieures.

Troncature équilibrée				Approximation Hankel-optimale			
r	$\ G - G_r\ _\infty$	$2 \sum_{i=r+1}^l \sigma_i$	σ_{r+1}	r	$\ G - G_r\ _\infty$	$\sum_{i=r+1}^l \sigma_i$	σ_{r+1}
18	5.7×10^{-3}	1.54×10^{-2}	3.1×10^{-3}	18	3.5×10^{-3}	7.7×10^{-3}	3.1×10^{-3}

La norme H_∞ de l'erreur issue de l'approximation optimale au sens de la norme Hankel est plus faible que celle issue de la troncature équilibrée.

L'approximation Hankel pas à pas donne une erreur H_∞ plus grande qui vaut 6×10^{-3} . Cependant les indicateurs $\rho_{18}^{\text{ex}3}$ et $\rho_{18}^{\text{ex}3b}$ obtenus par cette méthode sont inférieurs à ceux obtenus par les autres méthodes.

En conclusion, la troncature équilibrée ou l'approximation de Hankel permettent d'aboutir à un modèle réduit d'ordre $r = 18$ qui conserve le comportement fréquentiel jusqu'à la première résonance et même jusqu'à plusieurs décades après. L'approximation pas à pas aboutit à de meilleurs résultats dans la gamme de fréquences qui nous intéresse. L'utilisation seule d'une erreur absolue conduit à des modèles réduits de taille encore élevée. L'ajout de pondérations va permettre de concentrer la réduction dans un domaine précis de pulsations.

CHAPITRE 4

Réduction au sens de l'erreur absolue pondérée

Nous proposons dans ce chapitre de présenter les techniques associées à la réduction de modèles avec pondérations. L'introduction des pondérations est justifiée, comme le présente le chapitre 1, par la prise en compte de la nature des signaux susceptibles d'agir sur le système. Pour de plus amples justifications nous revoyons le lecteur au chapitre 1 d'introduction et plus exactement à la page 16.

Une conséquence de l'ajout de pondérations est de privilégier certains domaines de fréquences par rapport à d'autres. Dans ce cadre, certaines méthodes ont été proposées pour rendre faible $\|W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty$. La question de l'obtention d'un modèle réduit optimal reste, comme dans le cas de l'erreur absolue, un problème ouvert.

Trois grandes familles de méthodes ont été développées pour fournir des modèles réduits tenant compte d'une gamme de pulsations privilégiée. Le principe fondamental commun à toutes ces méthodes est de se ramener à un problème d'erreur absolue, c'est-à-dire à des techniques classiques telles que la troncature équilibrée et l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel. Afin de s'y ramener, les 3 familles de méthodes considèrent des point de vue différents que nous pouvons brièvement résumer comme suit :

- L'approche 1 [SA95a, ASF88] s'intéresse à une décomposition modale partielle du système augmenté des pondérations, c'est-à-dire d'écrire W_oGW_i sous la forme $Z + Z_{io}$. Une telle décomposition permet de rassembler tous les pôles de G dans le transfert Z et d'écarter les dynamiques qui ont trait aux pondérations, celles-ci se retrouvant dans Z_{io} . La réduction en erreur absolue s'opère alors sur Z .
- La troncature équilibrée classique peut être étendue au cas pondéré à partir de l'interprétation géométrique des grammiens. L'approche 2 [Enn84, LC92, WVL99, KAM95a] contient un ensemble de techniques visant à se ramener à une troncature équilibrée du système G dans une base bien spécifique.
- L'approche 3 [LA85, GL95, Zho93c, Zho95a, Zho93b, Zho95b] concerne l'utilisation d'une norme de Hankel pondérée. Dans ce cadre, la minimisation du critère pondéré au sens de cette norme peut se ramener à l'approximation optimale étudiée dans le

cas de l'erreur absolue.

Dans la suite, le système $G(p)$ ainsi que les pondérations $W_i(p)$ et $W_o(p)$ ont les représentations d'état définies page 28. Ces matrices de fonctions de transfert sont supposées stables et minimales.

4.1 Approche par décomposition modale

4.1.1 Principe

Cette approche consiste à ramener un problème de réduction pondérée à un problème d'erreur absolue en utilisant une décomposition modale partielle du système augmenté W_oGW_i . En effet, l'erreur pondérée $E = W_o(G - G_r)W_i$ peut être considérée sous une forme parallèle $E = \underbrace{W_oGW_i}_{Z+Z_{io}} - \underbrace{W_iG_rW_o}_{Z_r+Z'_{io}}$ où Z_{io} et Z'_{io} ne contiennent que des modes venant

de W_i et W_o . Dans l'expression précédente, Z_r désigne un modèle réduit issu de Z par une technique d'erreur absolue, troncature équilibrée [SA95a] ou minimisation selon la norme de Hankel.

Pour réaliser cette opération et se ramener à la réduction de Z puis au calcul de G_r , une démarche consiste à suivre les 3 étapes présentées sur la figure suivante.

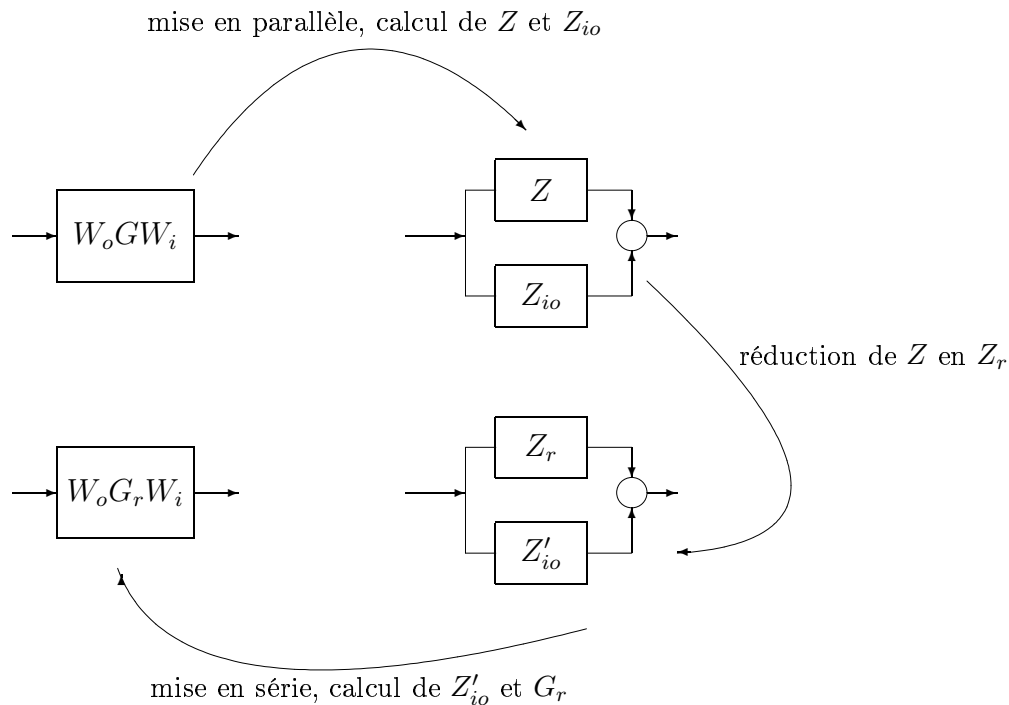


FIG. 4.1 – Principe de réduction par décomposition modale partielle

4.1.2 Mise en œuvre

Les 3 étapes constituant l'approche de la figure 4.1 sont présentées de façon systématique.

La première étape considère la décomposition du système augmenté W_oGW_i sous la forme :

$$W_oGW_i = Z + Z_{io} \quad (4.1)$$

où Z_{io} est un terme contenant les pôles de W_i et W_o mais pas ceux de G . Une telle décomposition est rendue possible si G n'a pas de pôles en commun avec W_i et W_o .

Supposons $D = 0$ et introduisons le changement de base

$$T' = \begin{bmatrix} I & -Y' & * \\ 0 & I & X' \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

que l'on va opérer sur :

$$W_oGW_i \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0 & 0 \\ 0 & A & BC_{wi} & BD_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} & B_{wi} \\ \hline C_{wo} & D_{wo}C & 0 & D_{wo}DD_{wi} \end{array} \right]$$

Si les pôles de G sont distincts de ceux de W_i et W_o , alors il existe 2 matrices X' et Y' qui vérifient (lemme B.6.5, page 233) :

$$\begin{aligned} AX' - X'A_{wi} + BC_{wi} &= 0 \\ Y'A - A_{wo}Y' + B_{wo}C &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le changement de base T' aboutit ainsi à la représentation d'état suivante :

$$W_oGW_i \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} A_{wo} & 0 & * & * \\ 0 & A & 0 & -X'B_{wi} + BD_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} & * \\ \hline * & -C_{wo}Y' + D_{wo}C & * & D_{wo}DD_{wi} \end{array} \right]$$

ce qui permet d'exprimer $Z(p)$ de la façon suivante :

$$Z(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & -X'B_{wi} + BD_{wi} \\ \hline -C_{wo}Y' + D_{wo}C & 0 \end{array} \right] \quad (4.3)$$

La deuxième étape consiste à réduire le transfert $Z(p)$ par une méthode quelconque (troncature équilibrée dans [SA95a]) pour obtenir $Z_r(p) = \left[\begin{array}{c|c} A_{Z_r} & B_{Z_r} \\ \hline C_{Z_r} & 0 \end{array} \right]$.

Dans la troisième étape, connaissant $Z_r(p)$, un modèle réduit final $G_r(p)$ est cherché pour satisfaire :

$$W_oG_rW_i = Z_r + Z'_{io} \quad (4.4)$$

où Z'_{io} est un terme contenant les pôles de W_i et W_o mais pas ceux de G_r .

$$W_oG_rW_i \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} A_{wo} & B_{wo}C_r & 0 & 0 \\ 0 & A_r & B_rC_{wi} & B_rD_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} & B_{wi} \\ \hline C_{wo} & D_{wo}C_r & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.5)$$

Par l'intermédiaire d'un nouveau changement de base T :

$$T = \begin{bmatrix} I & -Y & * \\ 0 & I & X \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

la représentation d'état (4.5) peut se réécrire :

$$W_o G_r W_i \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} A_{wo} & 0 & * & * \\ 0 & A_r & 0 & -XB_{wi} + B_r D_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} & * \\ \hline * & -C_{wo}Y + D_{wo}C_r & * & 0 \end{array} \right]$$

Cette dernière représentation d'état fait clairement apparaître ¹ la mise en parallèle d'un système $Z_r(p)$ et d'un système $Z'_{io}(p)$.

L'existence de G_r tel que l'égalité $W_o G_r W_i = Z_r + Z'_{io}$ soit vérifiée, est donc équivalente à :

$$\exists X, Y, A_r, B_r, C_r /$$

$$A_r = A_{Z_r}$$

$$A_{Z_r} X - X A_{wi} + B_r C_{wi} = 0 \quad (4.6)$$

$$-X B_{wi} + B_r D_{wi} = B_{Z_r} \quad (4.7)$$

$$Y A_{Z_r} - A_{wo} Y + B_{wo} C_r = 0 \quad (4.8)$$

$$-C_{wo} Y + D_{wo} C_r = C_{Z_r} \quad (4.9)$$

REMARQUE 4.1.1

Les équations (4.6) et (4.7) donnent lieu à une condition ne faisant intervenir que la matrice X . De même, les équations (4.8) et (4.9) impliquent une condition ne faisant intervenir que la matrice Y :

$$\begin{aligned} A_{Z_r} X + X(B_{wi} D_{wi}^{-1} C_{wi} - A_{wi}) + B_{Z_r} D_{wi}^{-1} C_{wi} &= 0 \\ Y A_{Z_r} + (B_{wo} D_{wo}^{-1} C_{wo} - A_{wo}) Y + B_{wo} D_{wo}^{-1} C_{Z_r} &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

En vertu du lemme B.6.5, page 233, l'existence d'une solution X (ou Y) est alors équivalente à ce que les pôles de Z_r soient distincts des zéros de W_i et W_o .

Le calcul de B_r (respectivement C_r) est alors direct à partir de X (respectivement Y) et de la relation (4.7) (respectivement (4.9)).

De cette manière l'erreur pondérée peut s'écrire :

$$W_o(G - G_r)W_i = Z - Z_r + R$$

où $R = Z_{io} - Z'_{io}$ est un terme ne contenant que des pôles de W_i et W_o .

L'approche permettant de construire G_r à partir de Z_r apporte naturellement la stabilité de G_r . Néanmoins, la borne H_∞ demeure imprécise dans le cas général. Par exemple, si $Z_r(p)$ est obtenu par troncature équilibrée, une borne immédiate est :

$$\|W_o(G - G_r)W_i\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i(Z(p)) + \alpha$$

où α dépend de la norme de $R(p)$.

¹à une permutation près dans l'espace d'état

4.1.3 Connexion avec la méthode d'Al-Saggaf et al.

Cette technique [ASF88] antérieure à l'approche précédente constitue un cas particulier dans lequel $R(p) = 0$. Dans ce cas, les pôles de $W_i(p)$ compensent les zéros de $G(p) - G_r(p)$. La technique est restreinte à une seule pondération W_i , ayant une dimension du vecteur d'état égal au nombre d'entrées du système.

La borne sur l'erreur pondérée devient alors intéressante, mais toute la démarche est rendue possible par le choix très spécifique de la pondération $W_i(p)$. C'est pourquoi nous ne développerons pas cette approche en détails.

L'approche par décomposition modale partielle possède l'avantage de se ramener à la réduction d'un système en erreur absolue. Cependant, l'utilisation d'une méthode classique comme la troncature équilibrée n'est pas vraiment fondée dans le sens où celle-ci ne considère pas l'état du système mais l'état d'un système fictif contenant les pôles du système.

La deuxième classe de méthodes s'intéresse à l'extension possible de la troncature équilibrée classique au cas pondéré.

4.2 Troncature équilibrée pondérée

Enns [Enn84] propose l'extension naturelle de la troncature équilibrée au cas pondéré. Les propriétés d'observabilité et de commandabilité du système G sont étudiées en considérant G comme un sous-système du système W_oGW_i , voir figure 4.2. Cette extension, bien que cohérente avec les concepts de commandabilité et d'observabilité du chapitre précédent (page 50 et page 54), souffre pourtant de peu de garanties a priori sur la solution obtenue : stabilité du modèle réduit, bornes H_∞ de l'erreur difficilement calculables [KAM95a]. C'est pourquoi des variantes ont été proposées de telle manière à améliorer certaines lacunes de la méthode de Enns [LC92, WVL99, SAM95], mais en détournant quelque peu les idées motrices de la troncature équilibrée.

En reprenant les concepts de base de la commandabilité page 50 et de l'observabilité page 54, la transposition de la troncature équilibrée classique au cas pondéré peut se faire à travers deux questions duales :

- Quel domaine de l'espace d'état serait décrit par le vecteur d'état $x(t)$ de $G(p)$ pour une condition initiale nulle, une entrée $d(t)$ du système augmenté d'énergie bornée par 1 ($\|d(t)\|_2 \leq 1$) et des conditions initiales nulles pour les pondérations ?
- Quel ensemble de conditions initiales $x(0)$ observables, de l'espace d'état, pourrait produire une sortie pondérée $\eta(t)$ d'énergie supérieure à 1 ($\|\eta(t)\|_2 \geq 1$), avec des conditions initiales nulles pour les pondérations ?

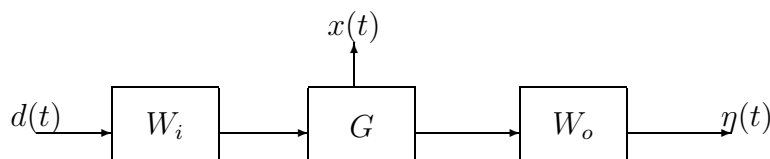


FIG. 4.2 – Système augmenté des pondérations

La différence fondamentale avec le cas classique développé pour l'erreur absolue est que l'on étudie l'influence de l'entrée $d(t)$ sur une partie de l'espace d'état du système augmenté $x(t)$, et l'influence d'une partie de l'espace d'état (conditions initiales $x(0)$) sur la sortie $\eta(t)$.

La figure suivante illustre plus précisément les relations mises en jeu.

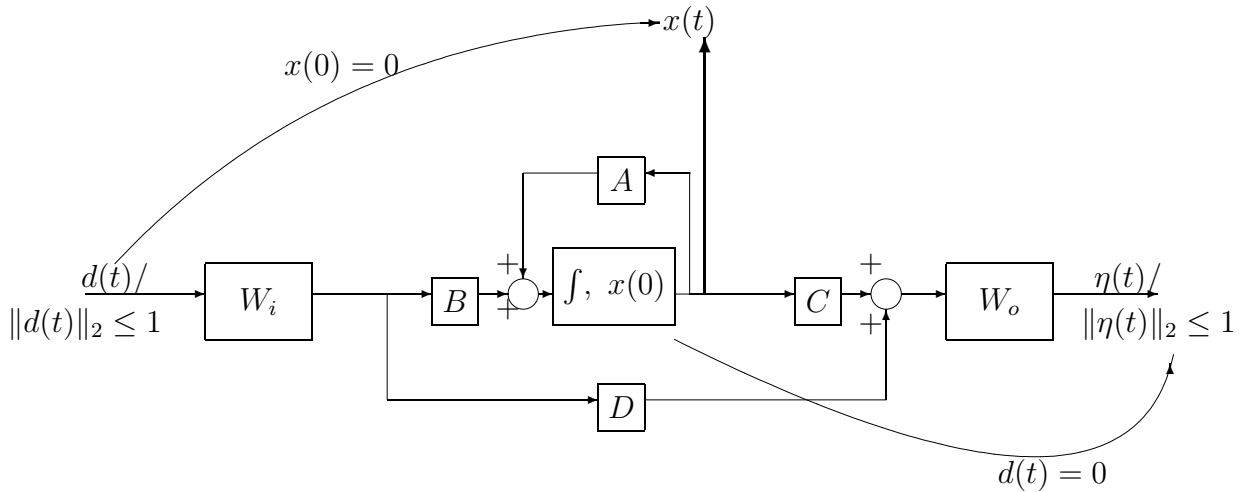


FIG. 4.3 – Commandabilité et observabilité pondérées

Pour la première question, correspondant à la commandabilité, seule la pondération en entrée intervient. Introduisons le transfert reliant l'entrée d au vecteur d'état x . Pour étudier l'ensemble décrit par le vecteur $\begin{bmatrix} x(t) \\ x_{W_i}(t) \end{bmatrix}$, seules les matrices A_c et B_c de la représentation d'état définie ci-dessous interviennent.

$$H_{d \rightarrow x} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline * & * \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & BC_{wi} & BD_{wi} \\ 0 & A_{wi} & B_{wi} \\ \hline * & & * \end{array} \right] \quad (4.11)$$

Définissons l'ellipsoïde $\varepsilon_{Q_c^{-1}}$ où $Q_c \in \mathbb{R}^{(n+n_i) \times (n+n_i)}$ est le grammien de commandabilité de $H_{d \rightarrow x}$ défini par :

$$A_c Q_c + Q_c A_c^T + B_c B_c^T = 0 \quad (4.12)$$

$\varepsilon_{Q_c^{-1}}$ représente alors l'ensemble de l'espace d'état décrit par le vecteur $\begin{bmatrix} x(t) \\ x_{W_i}(t) \end{bmatrix}$, lorsque $d(t)$ est d'énergie bornée par 1.

De façon similaire, intéressons nous à l'observabilité d'une condition initiale $x(0)$.

La seconde question fait intervenir la relation entre la condition initiale $x_0 = x(0)$ de $G(p)$ et la sortie η . Introduisons donc le système reliant x_0 à η :

$$H_{x_0 \rightarrow \eta} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_o & * \\ \hline C_o & * \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & * \\ B_{wo}C & A_{wo} & * \\ \hline D_{wo}C & C_{wo} & * \end{array} \right] \quad (4.13)$$

L'ensemble des conditions initiales $\begin{bmatrix} x(0) \\ x_{W_o}(0) \end{bmatrix}$ amenant à une sortie η d'énergie supérieure à 1 est le complémentaire dans $\mathbb{R}^{(n+n_o)}$ de l'ellipsoïde ε_{P_o} où $P_o \in \mathbb{R}^{(n+n_o) \times (n+n_o)}$ est le grammien d'observabilité de $H_{x_0 \rightarrow \eta}$ défini par :

$$A_o^T P_o + P_o A_o + C_o^T C_o = 0 \quad (4.14)$$

A ce stade, nous avons donc caractérisé l'ensemble des conditions initiales $\begin{bmatrix} x(0) \\ x_{W_o}(0) \end{bmatrix}$ les plus observables : $\mathbb{R}^{(n+n_o)} \setminus \varepsilon_{P_o}$.

Les grammiens P_o et Q_c définis précédemment ne sont pas généralement de même taille. Les ellipsoïdes associés sont par conséquent définis dans des espaces de dimension différente.

Cette étude préliminaire a permis de mettre en évidence des ensembles qui ont trait à l'état x augmenté de x_{W_i} ou x_{W_o} . Or, pour réduire $G(p)$, seules les informations sur x sont pertinentes. Les différentes méthodes proposées ci-dessous proposent chacune une description de la partie de l'espace décrite par $x(t)$.

4.2.1 La méthode de Enns

L'ellipsoïde défini par $\varepsilon_{Q_c^{-1}}$ caractérise les états x de G et x_{W_i} de W_i comme suit :

$$\begin{bmatrix} x \\ x_{W_i} \end{bmatrix} \in \varepsilon_{Q_c^{-1}} \triangleq \{v \in \mathbb{R}^{(n+n_i)} / v^T Q_c^{-1} v \leq 1\} \quad (4.15)$$

Cet ellipsoïde contient l'ensemble des états $[x \ x_{W_i}]^T$ atteignables pour $\|d(t)\|_2 \leq 1$. Dès lors, l'ensemble atteignable par l'état $x(t)$ du système peut être défini comme la projection, notée $\mathcal{P}(\varepsilon_{Q_c^{-1}})$, de $\varepsilon_{Q_c^{-1}}$ sur le domaine d'équation $x_{W_i} = 0$. La figure 4.4 illustre ceci en prenant G un système de dimension 2, avec $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ l'état partitioné du système. L'intersection de $\varepsilon_{Q_c^{-1}}$ avec le domaine d'équation $x_{W_i} = 0$ est notée $\mathcal{I}(\varepsilon_{Q_c^{-1}})$.

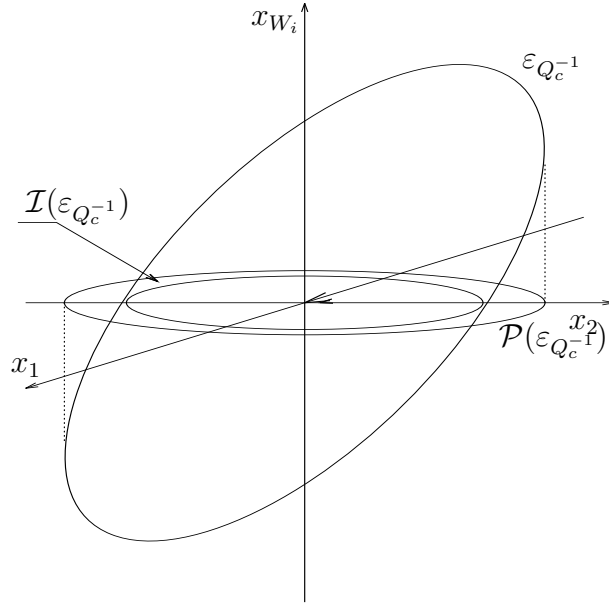


FIG. 4.4 – Ellipsoïdes de commandabilité

D'après le lemme B.6.4 page 232, la projection $\mathcal{P}(\varepsilon_{Q_c^{-1}})$ est l'ellipsoïde d'équation

$$\mathcal{P}(\varepsilon_{Q_c^{-1}}) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n / x^T Q^{-1} x \leq 1\}$$

où Q est la sous-matrice extraite de $Q_c = \begin{bmatrix} Q & * \\ * & * \end{bmatrix}$

De façon duale, nous étudions l'observabilité. Introduisons $\mathcal{I}(\varepsilon_{P_o})$, l'intersection de l'ellipsoïde ε_{P_o} avec le domaine d'équation $x_{W_o} = 0$, (voir figure 4.5). Les conditions initiales les plus observables, c'est-à-dire celles donnant une sortie $\|\eta(t)\|_2 > 1$, sont à l'extérieur de l'ellipsoïde d'observabilité ε_{P_o} , c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x_{W_o}(0) \end{bmatrix} \in \overline{\varepsilon_{P_o}} \triangleq \mathbb{R}^{(n+n_o)} \setminus \{v \in \mathbb{R}^{(n+n_o)} / v^T P_o v \leq 1\} \quad (4.16)$$

La condition initiale de la pondération $x_{W_o}(0)$ étant supposée nulle, les conditions initiales $x(0)$ de $G(p)$ les plus observables sont données par l'intersection (voir figure 4.5) de $\overline{\varepsilon_{P_o}}$ avec le domaine d'équation $x_{W_o} = 0$, notée $\mathcal{I}(\overline{\varepsilon_{P_o}})$ et qui s'écrit donc :

$$\mathcal{I}(\overline{\varepsilon_{P_o}}) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}(\varepsilon_{P_o})$$

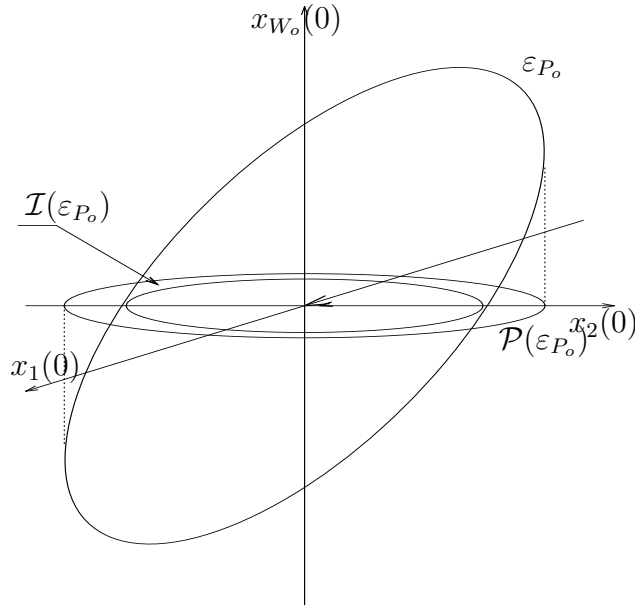


FIG. 4.5 – Ellipsoïdes d’observabilité

Or, $\mathcal{I}(\varepsilon_{P_o})$ est de domaine d’équation :

$$\mathcal{I}(\varepsilon_{P_o}) = \{x \in \mathbb{R}^n / x^T P x \leq 1\}$$

où $P = P^T > 0$ est la sous matrice extraite de $P_o = \begin{bmatrix} P & * \\ * & * \end{bmatrix}$. $\mathcal{I}(\overline{\varepsilon_{P_o}})$ est donc décrit par :

$$\mathcal{I}(\overline{\varepsilon_{P_o}}) = \{x \in \mathbb{R}^n / x^T P x > 1\}$$

Q et P sont finalement les sous-matrices $n \times n$ supérieures gauches extraites respectivement de Q_c et P_o . Il est naturel de vouloir équilibrer, à la manière des représentations équilibrées classiques, les ensembles $\mathcal{P}(\varepsilon_{Q_c^{-1}})$ et $\mathcal{I}(\overline{\varepsilon_{P_o}})$. C’est ce que propose la méthode de Enns.

L’idée consiste alors à opérer une transformation équilibrée sur P et Q , puis de réaliser, comme dans le cas de la troncature équilibrée pour l’erreur absolue, la troncature des matrices d’état de $G(p)$ pour obtenir $G_r(p)$.

DÉFINITION 4.2.1

Soient $G(p)$, $W_i(p)$ et $W_o(p)$ des matrices de fonctions de transfert stables et minimales. Introduisons les grammiens d’observabilité P_o et de commandabilité Q_c définis respectivement par (4.14) et (4.12). Appelons P et Q les sous matrices carrées de dimension n i.e.

$$P_o = \begin{bmatrix} P & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad Q_c = \begin{bmatrix} Q & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

(i) Alors, la représentation d’état de $G(p)$ est équilibrée pondérée si

$$P = Q = \mathbf{diag}(\sigma_i)$$

et $\sigma_i \geq \sigma_{i+1} > 0, \forall i \in [1, n]$.

(ii) En partitionnant $G(p)$ à l'ordre r dans une réalisation équilibrée pondérée, c'est à dire avec $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$:

$$G(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

alors, le modèle

$$G_r(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$$

est appelé modèle réduit à l'ordre r par troncature équilibrée pondérée.

Garanties de la méthode de Enns

- La stabilité du système réduit est démontrée dans le cas d'une seule pondération, soit en entrée, soit en sortie [Enn84, Woe94].
- Dans le cas où $G(p)$, $W_i(p)$ et $W_o(p)$ sont stables, Kim et al. [KAM95a] calculent une borne supérieure sur $\|W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty$ (en supposant la stabilité de $G_r(p)$), celle-ci se calculant de façon itérative est beaucoup plus complexe à calculer que le modèle réduit lui-même. Elle présente peu d'intérêt pratique.

Pour pallier le problème de l'absence de garantie de la stabilité de la méthode de Enns, la variante suivante a été proposée.

4.2.2 Méthode de Lin et Chiu

Initiée par Lin et Chiu [LC92], puis généralisée dans [SAM95], cette approche peut, comme précédemment, s'interpréter à partir des ellipsoïdes $\varepsilon_{Q_c^{-1}}$ et ε_{P_o} . L'idée majeure qui motive cette approche est de garantir la stabilité du modèle réduit ; lacune importante de la méthode de Enns. Dans l'approche première proposée par Lin et Chiu, les pondérations doivent être représentées dans une base d'état particulière, et le système augmenté W_oGW_i doit être supposé minimal. Dans ce qui suit, nous présentons directement la généralisation proposée dans [SAM95] qui s'affranchit de l'hypothèse sur la représentation d'état spécifique des pondérations.

A l'opposé de la technique de Enns, cette méthode consiste à considérer l'intersection de l'ellipsoïde $\varepsilon_{Q_c^{-1}}$ avec le domaine d'équation $x_{W_i} = 0$ et la projection de ε_{P_o} sur le domaine d'équation $x_{W_o} = 0$.

Pour la commandabilité, la relation (4.15) définit $\varepsilon_{Q_c^{-1}}$. L'intersection de $\varepsilon_{Q_c^{-1}}$ avec $x_{W_i} = 0$ se calcule en remarquant que $Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} (Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T)^{-1} & * \\ * & * \end{bmatrix}$. Cet ellipsoïde noté $\mathcal{I}(\varepsilon_{Q_c^{-1}})$ a donc pour équation :

$$\mathcal{I}(\varepsilon_{Q_c^{-1}}) = \{x/x^T(Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T)^{-1}x \leq 1\}$$

Cette approche sous estime l'ensemble des vecteurs d'état x commandables puisque l'intersection $\mathcal{I}(\varepsilon_{Q_c^{-1}})$ est contenue dans la projection $\mathcal{P}(\varepsilon_{Q_c^{-1}})$ utilisée par la méthode Enns.

Dans le cas de l'observabilité, la démarche consiste à considérer le complémentaire de la projection de l'ellipsoïde ε_{P_o} (défini par la relation (4.16)) sur le domaine d'équation $x_{W_o} = 0$. Ce domaine est noté $\mathcal{P}(\varepsilon_{P_o})$.

D'après le lemme B.6.4, en notant que $P_o^{-1} = \begin{bmatrix} (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T)^{-1} & * \\ * & * \end{bmatrix}$, cette projection notée $\mathcal{P}(\varepsilon_{P_o})$ a pour équation :

$$\mathcal{P}(\varepsilon_{P_o}) = \{x/x^T(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T)x > 1\}$$

Cette approche conduit à une sous estimation de l'ensemble des conditions initiales observables car $\mathcal{I}(\varepsilon_{P_o}) \subset \mathcal{P}(\varepsilon_{P_o})$.

L'opération de mise sous forme équilibrée et de troncature est la même que précédemment en posant $Q = Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T$ et $P = P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T$. L'apport majeur de cette technique est que P et Q ainsi calculées correspondent aux grammien d'un système ayant la même matrice d'état A que celle de $G(p)$ [LC92]. En effet [OA00], P et Q vérifient respectivement $A^T P + P A + Y^T Y = 0$ et $A Q + Q A^T + X X^T = 0$. Ceci entraîne [PS82] que A_r est forcément stable.

Garanties de la méthode de Lin et Chiu

- La stabilité du modèle réduit est assurée (théorème 3.3.1, page 61).
- Une borne supérieure, aussi difficilement calculable que celle de la méthode de Enns est disponible dans le cas où l'une des 2 pondérations est prise égale à l'identité [SAM95].

Une autre variante basée sur les équations des grammien P_o et Q_c permet d'assurer la stabilité et d'avoir une borne supérieure simple sur l'erreur pondérée.

4.2.3 Méthode de Wang et al.

Cette méthode [WVL99, WVL98] est fondée sur une manipulation des équations (4.14) et (4.12). Elle consiste à modifier les équations issues des blocs (1, 1) pour en construire des équations de Lyapunov.

Pour comprendre l'approche, examinons les grammien pondérés Q_c défini par (4.12) et P_o défini par (4.14). Le développement du bloc (1, 1) de (4.12) pour la commandabilité donne :

$$A Q_{11} + Q_{11} A^T + \underbrace{B C_{wi} Q_{12}^T + Q_{12} C_{wi}^T B^T + B D_{wi} D_{wi}^T B^T}_X = 0$$

L'égalité précédente est proche d'une équation de Lyapunov de type grammien de commandabilité, à ceci près que la matrice symétrique $X \triangleq B C_{wi} Q_{12}^T + Q_{12} C_{wi}^T B^T + B D_{wi} D_{wi}^T B^T$ n'est pas définie positive. L'idée principale de cette méthode est de la remplacer par une matrice positive. La démarche consiste à décomposer X sous la forme [HJ85b] :

$$X = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix}$$

En posant

$$X' = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix}$$

X' est définie positive et peut se factoriser sous la forme $\bar{B}\bar{B}^T$.

La même démarche est réalisée pour l'égalité (4.14) en P_o , pour l'observabilité. Une matrice \bar{C} est calculée pour se ramener à une égalité de Lyapunov de type observabilité.

Dès lors, la démarche consiste à se ramener au système fictif :

$$G_f(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & \bar{B} \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

qui possède pour grammiens Q' et P' solutions des équations de Lyapunov précédemment considérées pour construire \bar{B} et \bar{C} :

$$A^T P' + P' A + \bar{C}^T \bar{C} = 0 \quad (4.17)$$

$$A Q' + Q' A^T + \bar{B} \bar{B}^T = 0 \quad (4.18)$$

Il est à noter que $G_f(p)$ ne possède pas forcément le même nombre d'entrées et de sorties que $G(p)$.

La suite de la méthode est classique : P' et Q' sont équilibrées, à travers un changement de base T qui est ensuite appliqué sur $G(p)$. $G_r(p)$ est obtenu par troncature des matrices d'état de $G(p)$ dans la nouvelle base. Notons que $G_f(p)$ et $G(p)$ ont la même matrice d'état A . Il s'ensuit [PS82] que la troncature A_r de A , dans la base équilibrée de $G_f(p)$, est stable.

REMARQUE 4.2.1

Bien que cette approche ne semble pas rationnelle par rapport aux interprétations géométriques vues précédemment, nous pouvons tout de même relier Q' à la matrice Q donnée par la méthode de Enns. Q' et Q vérifient : $AQ' + Q'A^T + \bar{B}\bar{B}^T = 0$ ou encore $AQ' + Q'A^T + U_1 U_1^T + U_2 U_2^T = 0$ et $AQ + QA^T + U_1 U_1^T - U_2 U_2^T = 0$. Il s'ensuit que $Q' \geq Q$ et donc que $\varepsilon_{Q^{-1}} \subset \varepsilon_{Q'^{-1}}$.

En effet, $Q' \geq Q \Rightarrow \exists J = J^T \geq 0 / Q' = Q + J. \forall x \in \varepsilon_{Q^{-1}}, x^T Q^{-1} x \leq 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^T & Q \end{bmatrix} \geq 0$.

Nous avons alors $\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^T & Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^T & Q' \end{bmatrix} \geq 0$. D'où $x^T Q'^{-1} x \leq 1$.

Cette approche surestime ($\varepsilon_{Q^{-1}} \subset \varepsilon_{Q'^{-1}}$) l'ensemble atteignable par l'état x du système pour une entrée de $W_i(p)$ inférieure à 1. De façon duale, il est possible de montrer que cette méthode surestime l'ensemble des conditions initiales du système donnant en sortie de la pondération $W_o(p)$ une énergie supérieure à 1.

Garanties de la méthode de Wang et al.

- La garantie de stabilité du modèle réduit est la même que pour la troncature équilibrée. Elle est garantie si la troncature ne sépare pas 2 VSH identiques.
- Une borne H_∞ sur l'erreur pondérée est facilement déductible. Supposons qu'il existe 2 matrices K et L telles que $B = \bar{B}K$ et $C = L\bar{C}$. Alors [WVL99],

$$\|W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty \leq k \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les VSH de $G_f(p)$ et $k = \|W_o(p)L\|_\infty \|KW_i(p)\|_\infty$.

4.2.4 A propos des 3 méthodes précédentes

Les différentes approches expliquées ci-dessus ont récemment été discutées [GMAO01b, GMAO01a]. Il a été souligné qu'à l'inverse de la troncature équilibrée classique, la troncature équilibrée pondérée ne présente pas de quantificateurs traduisant la qualité du modèle réduit. En effet, les VSH dites pondérées, correspondant aux valeurs propres de $(PQ)^{1/2}$ pour la méthode de Enns et la méthode de Lin et al., ne peuvent pas être considérées comme des indicateurs du choix de r ou de la finesse de l'approximation. A ce titre, des contre-exemples révélateurs se trouvent dans [GMAO01b].

Par ailleurs, il est à noter que dans le cas monovariante, l'utilisation de la méthode Enns ou de Lin laisse indifférent le choix du placement de la pondération, qui peut être située soit en entrée soit en sortie. Il n'en est pas de même lorsque la méthode de Wang est employée.

Dissymétrie de la méthode de Wang et al.

Dans le cas monovariante, la méthode de Wang ne donne pas le même résultat selon que l'on considère la pondération en entrée ou en sortie. La figure suivante compare les 2 solutions fournies pour le choix de pondération :

$$W_{i,o}(p) = \frac{0.0589(p + 15.2)(p + 0.2713)}{(p^2 + 0.02572p + 0.224)}$$

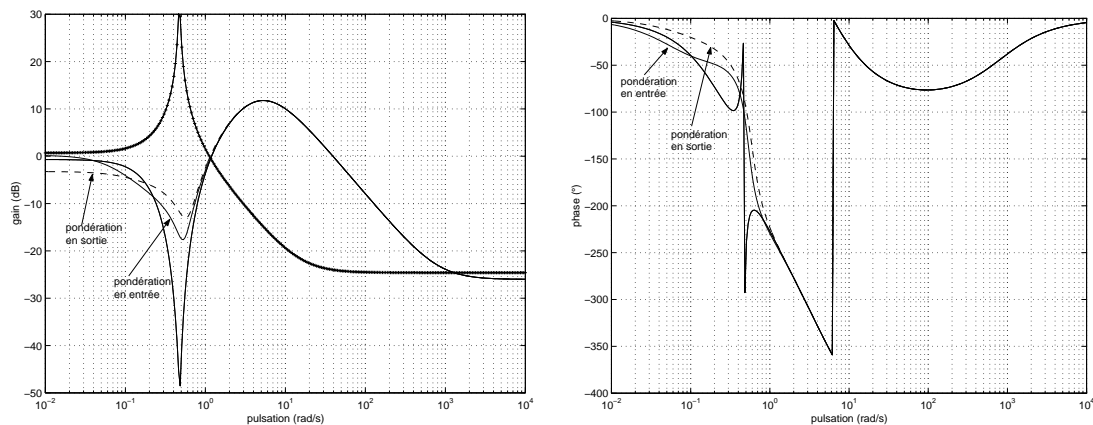


FIG. 4.6 – Tracés fréquentiels de $G(p)$, $G_4(p)$, $W_{i,o}(p)$

Il s'avère que la solution fournie en plaçant la pondération en entrée est meilleure. Aucun indice a priori ne pouvait nous laisser supposer une telle remarque.

La dernière approche de réduction absolue pondérée consiste à introduire la norme de Hankel de l'erreur pondérée et de se ramener, si possible, à une approximation optimale étudiée dans le chapitre précédent.

4.2.5 Approximation optimale au sens de la norme de Hankel

Cette partie propose d'étudier le problème de réduction pondérée, au sens de la norme de Hankel. Dans tous les cas recensés dans la littérature, ce problème a été formulé de

manière à pouvoir ramener la recherche d'une solution optimale à l'approximation d'une erreur absolue, étudiée page 83. Une telle démarche impose des hypothèses sur la position des pôles et zéros des pondérations.

Cette approche a d'abord été employée dans le cas monovarié avec une seule pondération propre anticausale et inversement anticausale dans [LA85]. L'extension multivarié ainsi que les résultats généraux sont développés dans [Zho93c, KLH92, GL95, Zho95b, OA00], sans changement sur la nature des pondérations. Dans [Zho95a, Zho95b], des pondérations anticausales mais pas forcément inversement anticausales sont considérées. Enfin, pour des pondérations anticausales du premier ordre, des résultats [Ans86, Zho95b, Zho93b] ont abouti à des bornes supérieures sur la norme H_∞ l'erreur de réduction.

4.2.5.1 Discussion générale

L'approximation au sens de la norme de Hankel pondérée s'intéresse au problème de minimisation suivant, appelé *problème 1* :

$$\gamma_{pb1} = \mathbf{min}_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_H \quad (4.19)$$

où W_o et W_i sont des pondérations fréquentielles dont la nature fera l'objet d'une discussion. En effet, les méthodes de résolution du problème sont intimement liées à la nature des pondérations.

Afin de mieux saisir l'approche adoptée dans cette partie, nous allons rappeler les motivations de l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel développée dans le cadre de l'erreur absolue. L'approche sous jacente à la norme de Hankel était de ramener le problème d'optimisation en norme de Hankel à un problème d'optimisation équivalent en norme \mathcal{L}_∞ . Ce dernier problème pouvant se résoudre de façon optimale assez aisément. Dans le même esprit, le *problème 1* de réduction pondérée au sens de la norme de Hankel peut être résolu de façon similaire en faisant intervenir le *problème 1b* \mathcal{L}_∞ sous jacent :

$$\gamma_{pb1b} = \mathbf{min}_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r, Q \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega) + Q(j\omega)\|_\infty \quad (4.20)$$

Le problème *problème 1b* sera montré équivalent au *problème 1*.

Par ailleurs, un problème voisin, fréquemment considéré dans la littérature, est le suivant : *problème 2* :

$$\gamma_{pb2} = \mathbf{min}_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r, Q \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - (G_r(j\omega) + Q(j\omega)))W_i(j\omega)\|_\infty \quad (4.21)$$

L'équivalence entre le *problème 1b* et le *problème 2* sera établie moyennant l'utilisation de pondérations anticausales et inversement anticausales. Une telle propriété sur les pondérations n'est pas innocente. L'introduction de telles pondérations permet d'établir une équivalence avec le problème *problème 1*. De plus, dans ce cas, le calcul d'une solution Hankel-optimale sera ramené à un problème d'erreur absolue.

Enfin, le *problème 2* peut se voir aussi comme une relaxation du problème initialement posé dans ce rapport :

$$\text{problème 3 : } \gamma_{pb3} = \mathbf{min}_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty \quad (4.22)$$

Quelle que soit la nature des pondérations, nous avons : $\gamma_{pb2} \leq \gamma_{pb3}$.

Les problèmes présentés précédemment vont être comparés en fonction de la nature des pondérations.

4.2.5.2 Cas de pondérations anticausales et inversement anticausales

Ce premier cas particulier de choix des pondérations est très attractif puisqu'il permet d'établir l'équivalence des *problèmes 1, 1b* et *2*.

REMARQUE 4.2.2

Interrogeons nous si un tel choix de pondérations est limitatif. Pour le *problème 2* et le *problème 3*, il ne l'est pas. En effet, on peut toujours introduire les transferts $M_i(p)$ et $M_o(p)$, facteurs spectraux stables, carrés et inversement stables vérifiant :

$$W_o(p)^*W_o(p) = M_o(p)M_o(p)^* \quad W_i(p)W_i(p)^* = M_i(p)^*M_i(p) \quad (4.23)$$

Les outils nécessaires à ce calcul sont en annexe page 252.

Dès lors, les transferts $M_o(p)^*W_o^{-1}(p)$ et $W_i^{-1}(p)M_i(p)^*$ sont all-pass. En post et pré-multipliant (4.21) par ces transferts all-pass, le critère à minimiser fait apparaître des pondérations anticausales et inversement anticausales :

$$\gamma_{pb2} = \min_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r, Q \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|M_o(j\omega)^*(G(j\omega) - (G_r(j\omega) + Q(j\omega))M_i(j\omega)^*)\|_\infty$$

Cette expression souligne le fait que les pondérations $W_i(p)$ et $W_o(p)$ peuvent être prise carrées, anticausales et inversement anticausales dans la définition du *problème 2*. Il en est exactement de même pour le *problème 3*.

Relions dans ce cas γ_{pb1} , γ_{pb1b} , γ_{pb2} et γ_{pb3} .

COROLLAIRE 4.2.1

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ décrit par (3.1), $W_i(p)$ et $W_o(p)$ des transferts anticausaux et inversement anticausaux.

γ_{pb1} , γ_{pb1b} , γ_{pb2} et γ_{pb3} sont respectivement définis par (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22). Alors :

$$\gamma_{pb3} \geq \gamma_{pb1} = \gamma_{pb1b} = \gamma_{pb2} = \sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+)$$

Démonstration : Montrons d'abord $\gamma_{pb2} = \gamma_{pb1b} = \gamma_{pb1}$.

D'après (4.21), γ_{pb2} s'écrit :

$$\gamma_{pb2} = \min_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r, Q \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega) - W_o(j\omega)Q(j\omega)W_i(j\omega)\|_\infty$$

Faisons le changement de variable bijectif suivant ² : $F = -W_o^*QW_i^*$. Nous avons alors :

$$\gamma_{pb2} = \min_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r, F \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega) + F(j\omega)\|_\infty$$

ce qui fait apparaître le *problème 1b*.

D'après le corollaire 3.4.3 page 77 :

$$\gamma_{pb1b} = \min_{G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_H = \gamma_{pb1}$$

Montrons à présent que $\gamma_{pb2} = \sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+)$.

D'après le théorème 3.4.2, page 73, nous avons :

$$\sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+) = \min_{H(p) \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|[W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+ - H(p)\|_\infty \quad (4.24)$$

² W_o et W_i sont anticausales et inversement anticausales

Posons $Q(p) = W_o(p)^{-1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_- - H(p))W_i(p)^{-1}$. Ce changement de variable est bijectif et permet d'écrire de manière équivalente le problème d'optimisation. Finalement,

$$\sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+) = \mathbf{min}_{Q(p) \in \mathcal{RH}_{\infty,-}^r} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - Q(j\omega))W_i(j\omega)\|_{\infty} = \gamma_{pb2}.$$

Finalement, l'inégalité $\gamma_{pb3} \geq \gamma_{pb2}$ est triviale puisque le *problème 2* est une relaxation du *problème 3*. \square

Au vu de la précédente démonstration, l'utilisation de pondérations anticausales et inversement anticausales permet de ramener le problème de réduction pondérée à un problème de réduction de l'erreur absolue sur $[W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+$. De plus, une borne inférieure sur γ_{pb3} est $\gamma_{pb1} = \sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+)$.

Une solution Hankel-optimale peut désormais être proposée.

Approximation optimale de Hankel et algorithme

Deux variantes pour la mise en œuvre d'une solution sont proposées [OA00, ZDG96, AL89, K LH92].

1. Résoudre le problème d'optimisation (4.24) pour une solution optimale $H(p)$ ayant r pôles stables, à l'aide de l'approximation \mathcal{L}_{∞} . Utiliser l'algorithme de la section 3.4.3.7, page 85.
2. Deux variantes possibles :
 - **variante 1** : [LA85] poser :

$$\hat{Q}(p) = W_o(p)^{-1}H(p)W_i(p)^{-1} \quad (4.25)$$

- **variante 2** : [GL95, K LH92] introduire :

$$\hat{Q}(p) = W_o(p)^{-1}(H(p) + [W_o(p)G(p)W_i(p)]|_-)W_i(p)^{-1}$$

ce qui assure que $\|[W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+ - H(p)\|_{\infty} = \|W_o(p)(G(p) - \hat{Q}(p))W_i(p)\|_{\infty}$.

3. $G_r(p)$, solution optimale de l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel est donné par $G_r(p) = [\hat{Q}(p)]|_+$.

$G_r(p)$ est bien Hankel-optimal. Pour la variante 1, nous avons :

$$\gamma_{pb1} = \|[W_oGW_i]|_+ - H\|_H = \|W_oGW_i - W_o\hat{Q}W_i\|_H = \|W_o(G - G_r + F)W_i\|_H = \|W_o(G - G_r)W_i\|_H. \text{ Pour la variante 2, le calcul est identique.}$$

Connexion avec l'approche modale

Nous pouvons souligner dans la démarche précédente un lien fort avec l'approche modale, développée page 96. En effet, une décomposition parallèle de W_oGW_i est $W_oGW_i = \underbrace{[W_oGW_i]|_+}_Z + \underbrace{[W_oGW_i]|_-}_{Z_{io}}$, en profitant de l'anticausalité de W_o et W_i . Z est seule réduite.

Cas particulier d'une pondération d'ordre 1

Adoptons la démarche précédente pour une pondération du premier ordre. Considérons un cas monovariante avec $W(p) = \frac{p - \beta}{p - \alpha}$, $\alpha, \beta > 0$. La pondération est donc anticausale et inversement anticausale.

Exprimons la partie stable de WG :

$G_1(p) \triangleq [W(p)G(p)]_+ = \frac{(p - \beta)G(p) - (\alpha - \beta)G(\alpha)}{p - \alpha}$. Cette expression est évidente en partant d'une décomposition en éléments simples de WG .

Notons $H(p)$ l'approximation Hankel-optimale de $[WG]_+$. Posons alors [Zho93b, Zho95b]

$$G_r(p) = \left[\frac{p - \alpha}{p - \beta} H(p) \right] \Big|_+ - \frac{\alpha - \beta}{|\alpha| + \beta} (G_1(\beta) - H(\beta))$$

$G_r(p)$ est Hankel-optimal et se compose de 2 termes. Le premier correspond à la solution obtenue par la variante 1 exposée page 110. Une solution Hankel-optimale étant définie à une terme constant près, le second terme qui apparaît dans la définition de G_r est choisi pour obtenir une borne supérieure \mathcal{L}_∞ simple, facilement calculable. De plus, cette borne est plus petite que celle que l'on obtiendrait si ce terme constant était choisi nul, ce qui correspondrait à l'application pure et simple de la variante 1 de la page 110.

La borne calculée dans [Zho93b] est la suivante :

$$\begin{aligned} \|W(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty &\leq \left(1 + \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha| + \beta}\right) \|G_1(j\omega) - H(j\omega)\|_\infty \\ &\leq \left(1 + \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha| + \beta}\right) (\sigma_{r+1}(G_1) + \dots + \sigma_n(G_1)) \end{aligned}$$

Dans le cas général, une borne a été proposée dans [Ans86]. Dans [KLH92] une borne est calculée à partir de la formalisation sous forme d'un problème 4 blocs. Dans les 2 cas, ces bornes supérieures sont lourdes à calculer.

4.2.5.3 Pondérations anticausales à zéros stables

Dans [Zho95a, Zho93c, Zho93b], des pondérations qui ne sont pas forcément inversement anticausales sont considérées. Dans ce cadre, il y a une perte d'équivalence entre le *problème 1*, le *problème 1b* et le *problème 2*. Ceci se voit dans la démonstration du corollaire suivant qui étudie les nouvelles connexions entre les différents problèmes. Ce corollaire est l'extension du corollaire 4.2.1.

COROLLAIRE 4.2.2

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty^n$ décrit par (3.1), $W_i(p)$ et $W_o(p)$ des transferts anticausaux.

γ_{pb1} , γ_{pb1b} , γ_{pb2} et γ_{pb3} sont respectivement définis par (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22). Alors :

$$\gamma_{pb3} \geq \gamma_{pb2} \geq \gamma_{pb1b} = \gamma_{pb1} = \sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+)$$

Démonstration : L'inégalité $\gamma_{pb3} \geq \gamma_{pb2}$ est triviale.

Montrons que $\gamma_{pb1} = \gamma_{pb1b} = \sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+)$.

$$\sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+) = \min_{F_r \in \mathcal{RH}_\infty^r, Q' \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \| [W_oGW_i]|_+ - F_r - Q' \|_\infty \quad (4.26)$$

Sous l'hypothèse qu'il existe 2 matrices X et Y vérifiant les équations (4.10), alors il existe $G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r$ tel que $W_i G_r W_o = F_r + Z'_{io}$ où Z'_{io} contient les pôles de W_i et W_o .

Z'_{io} est donc anticausale. Introduisons aussi le changement de variable $Q = Q' - [W_oGW_i]|_- + Z'_{io}$. La relation (4.26) devient :

$$\begin{aligned} \sigma_{r+1}([W_o(p)G(p)W_i(p)]|_+) &= \min_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r, Q' \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|W_o(G - G_r)W_i - Q'\|_\infty (= \gamma_{pb1b} =) \dots \\ &= \min_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|W_o(G - G_r)W_i\|_H = \dots \\ &= \gamma_{pb1} \end{aligned}$$

Enfin, montrons que $\gamma_{pb1b} \leq \gamma_{pb2}$.

Partant de la définition de γ_{pb1b} (4.20), posons $Q' = W_o^{-1}QW_i^{-1}$. L'ensemble engendré par Q est alors contenu dans celui engendré par Q' car Q' est dorénavant susceptible d'avoir un nombre $p \geq 0$ de pôles stables provenant de W_o^{-1} ou W_i^{-1} . γ_{pb1b} vérifie donc :

$$\gamma_{pb1b} = \mathbf{min}_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r, Q' = W_o^{-1}QW_i^{-1}, Q \in \mathcal{RH}_{\infty,-}} \|W_o(p)(G(p) - G_r(p) + Q'(p))W_i(p)\|_\infty$$

Il vient donc $\gamma_{pb1b} \leq \gamma_{pb2}$. □

Notons ici que l'approche modale apparaît doublement. Tout d'abord, comme dans le cas de pondérations anticausales et inversement anticausales, considérer la partie stable $[W_o(p)G(p)W_i(p)]_+$ est une façon de choisir le transfert Z (relation (4.1)) de l'approche modale) ne contenant que des pôles de G . Ensuite, l'approche modale apparaît pour le calcul du modèle réduit final G_r à partir de l'approximation en erreur absolue notée F_r dans la démonstration précédente. Ceci correspond à la relation (4.4) page 97.

Calcul d'une solution optimale dans le cas de pondérations anticausales à zéros stables

Ce paragraphe présente la démarche pour le calcul d'une solution Hankel-optimale associée au critère $\gamma_{pb1} = \gamma_{pb1b}$ pour des pondérations $W_i(p)$ et $W_o(p)$ anticausales présentant des zéros stables.

Décomposons W_oGW_i sous la forme $W_oGW_i = \underbrace{[W_oGW_i]_+}_Z + \underbrace{[W_oGW_i]_-}_{Z'_{io}}$.

Soit $Z_r(p)$ l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel de $Z(p)$. Choisissons $D_{Z_r} = 0$ ($Z_r(p)$ demeure une approximation Hankel-optimale).

L'approche modale partielle développée page 96 est utilisée pour construire G_r . Le modèle réduit est déterminé de la façon suivante (d'après (4.4), page 97) : $W_oG_rW_i = Z_r + Z'_{io}$ où Z'_{io} ne contient que des pôles de W_o et W_i . L'étude menée dans la section page 96 montre qu'il existe une solution à condition que les pôles G_r sont différents des zéros de W_o et de W_i . Cette condition est équivalente à l'existence de 2 matrices Y et X solutions de (4.10). G_r s'obtient alors à partir des équations (4.8) et (4.9) :

$$\begin{aligned} A_r &= A_{Z_r} \\ B_r &= (B_{Z_r} + XB_{wi})D_{wi}^{-1} \\ C_r &= D_{wo}^{-1}(C_{Z_r} + C_{wo}Y) \end{aligned} \tag{4.27}$$

avec X et Y vérifiant (4.10) :

$$\begin{aligned} A_rX + X(B_{wi}D_{wi}^{-1}C_{wi} - A_{wi}) + B_{Z_r}D_{wi}^{-1}C_{wi} &= 0 \\ YA_r + (B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} - A_{wo})Y + B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{Z_r} &= 0 \end{aligned}$$

L'algorithme précédent est étendu pour les systèmes implicites dans [Var01].

4.2.5.4 Optimisation du terme direct D_r

Une approximation optimale au sens de la norme de Hankel est définie à un terme constant près D_r . Ce facteur de liberté peut être utilisé pour améliorer la solution au sens de la norme H_∞ . Ce problème a été mis en évidence dans la littérature [Zho95a, VP01,

Zho95b] et une solution a été donnée dans [VP01]. Une solution alternative est proposée dans la suite.

La formulation fréquentielle de la recherche de D_r minimisant $\|W_o(G - G_r)W_i\|_\infty$ est convexe en D_r mais de dimension infinie. La formulation issue du lemme réel borné est, dans le cas général de 2 pondérations, une BMI en \tilde{P} et D_r . En outre, dans le cas d'une pondération seule W_i , la relation (2.2) page 29 fait intervenir D_r uniquement dans les matrices \tilde{C} et \tilde{D} . De même, lorsque seule W_o est présente, D_r intervient seulement dans \tilde{B} et \mathcal{D} . Dans ces 2 cas, le lemme réel borné implique une LMI en \tilde{P} et D_r ce qui rend aisée l'obtention de la solution puisque le problème d'optimisation est convexe de dimension fini.

Dans [Zho95b] la nature convexe du problème d'optimisation est soulignée à une pulsation donnée, mais le caractère infini pour l'ensemble des pulsations n'est pas abordé. Il semble que l'auteur utilise un maillage fréquentiel afin de rendre fini le problème d'optimisation.

Le résultat qui suit formule la recherche de D_r dans le cas général de matrices de transfert carrées. L'obtention de D_r fait appel à un algorithme d'optimisation convexe de dimension finie. Formellement, le lemme suivant formule la recherche du terme constant D_r minimisant la norme $\|W_o(p)(G(p) - G_r(p) - D_r)W_i(p)\|_\infty$.

LEMME 4.2.3

Soit $G(p)$, $G_r(p)$, $W_i(p)$, $W_o(p)$ des matrices de fonctions de transfert carrées et inversibles sur l'axe imaginaire.

$$D_{opt} = \mathbf{argmin}_{D_r} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega)\|_\infty$$

est solution du problème d'optimisation convexe de dimension finie suivant :

$$\begin{aligned} D_{opt} &= \mathbf{argmin}_{D_r, P} \gamma \\ &P = P^T \\ &\mathcal{K}(\gamma, D_r, P) + \mathcal{K}(\gamma, D_r, P)^T \geq 0 \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{K}(\gamma, D_r, P) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|cc} P & & 0 \\ \hline 0 & \gamma^2 I & 0 \\ & & D_r \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \hline \mathcal{B} \\ \hline N \end{array} \right]$$

où :

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & -C_r & C_{Z_o} & D & D_{Z_o} \end{bmatrix}, & N &= \begin{bmatrix} C_{Z_i} & 0 & 0 & 0 & D_{Z_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ B_{Z_i} & 0 & & & & \\ B & 0 & & & & \\ B_r & 0 & & & & \\ 0 & B_{Z_o} & & & & \end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \mathbf{diag}(A_{Z_i}, A, A_r, A_{Z_o}), & \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} B_{Z_i} & 0 \\ B & 0 \\ B_r & 0 \\ 0 & B_{Z_o} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Z_o(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{Z_o} & B_{Z_o} \\ \hline C_{Z_o} & D_{Z_o} \end{array} \right] / W_o(p)^{-1} W_o(p)^{-*} = Z_o(p) + Z_o(p)^* \quad (4.28)$$

$$Z_i(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{Z_i} & B_{Z_i} \\ \hline C_{Z_i} & D_{Z_i} \end{array} \right] / W_i(p)^{-*} W_i(p)^{-1} = Z_i(p) + Z_i(p)^* \quad (4.29)$$

REMARQUE 4.2.3

Le calcul de $Z_i(p)$ et $Z_o(p)$ vérifiant respectivement (4.29) et (4.28) est explicité dans la section F.3, page 252.

Démonstration : La démonstration se rapporte à celle du lemme 6.1.1, page 155 qui est un résultat plus général. \square

4.3 Etude des exemples

Les 3 exemples de modèles introduits dans la section 1.3, page 21 sont étudiés avec les 3 méthodes basées sur la troncature pondérée (Enns, Lin et Wang) et l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel.

4.3.1 L'exemple de Safonov

Il est naturel de considérer une pondération qui met l'accent sur des pulsations allant de 0 jusqu'à l'anti-résonance. Au delà de ces pulsations, la pondération atteint un seuil qui permet de limiter l'erreur de modèle. Dans le cas présent :

$$W_i(p) = \frac{0.0589(p + 15.2)(p + 0.2713)}{(p^2 + 0.02572p + 0.224)}$$

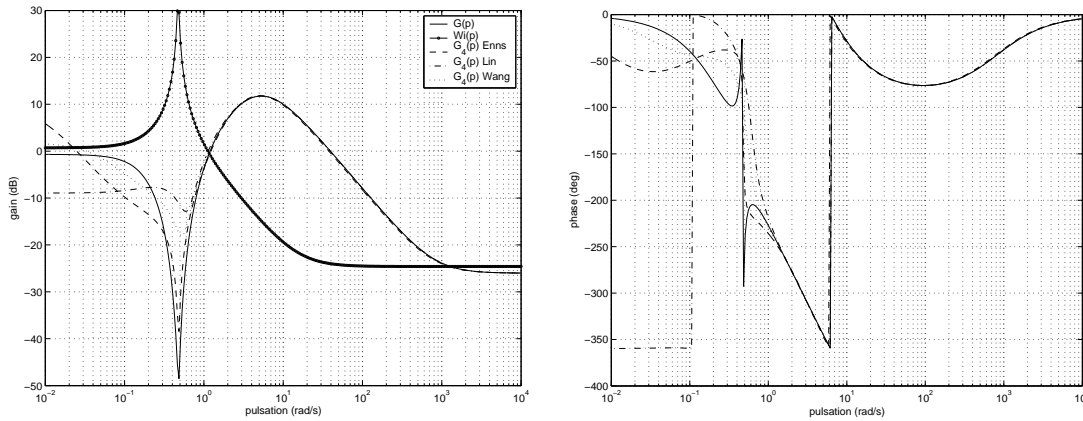


FIG. 4.7 – Tracés fréquentiels de $G(p)$ et $G_4(p)$ obtenu par les méthodes de Enns, Lin et Chiu et Wang et al.

Les tracés fréquentiels montrent que les 3 méthodes respectent de façon inégale l'anti-résonance. La méthode 1 (Enns) donne la solution la plus fidèle à l'anti-résonance mais dégrade fortement les basses pulsations. Contrairement à nos attentes, les 3 méthodes respectent les hautes pulsations. La méthode 3 (Wang) semble la plus efficace au niveau de la phase.

Un modèle réduit à l'ordre 4 est calculé par l'approximation de Hankel pondérée grâce à la variante 1 page 110 (sans optimisation du terme direct). A partir de cette solution

Hankel-optimale, un nouveau modèle réduit est calculé par optimisation du terme direct selon le lemme 4.2.3.

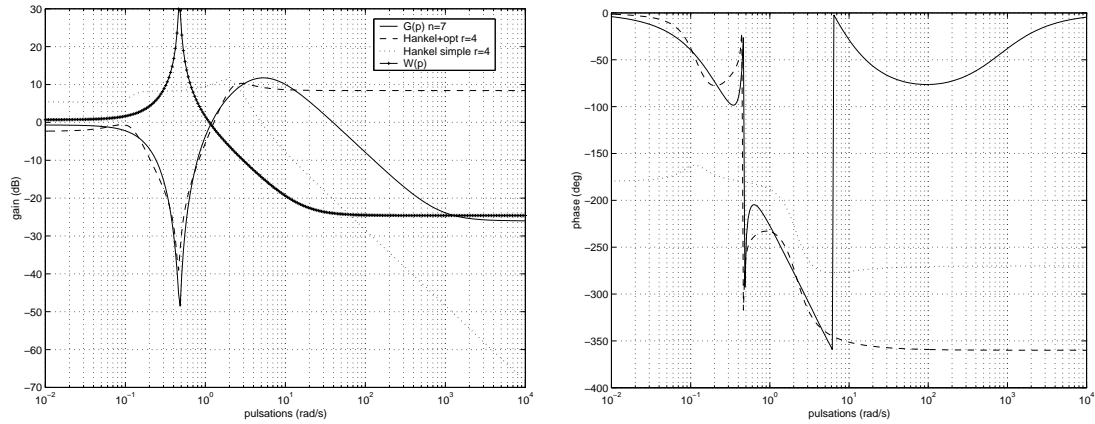


FIG. 4.8 – Tracés fréquentiels de $G(p)$, $G_4(p)$, $W_i(p)$

L'amélioration du modèle réduit sur la gamme de pulsation couvrant l'anti-résonance est flagrante par rapport à aux solutions obtenues en considérant une simple erreur absolue page 87. Le modèle réduit obtenu possède des zéros complexes conjugués mal-amortis stables et très proches de ceux du modèle initial.

$$G_4(p) = \frac{2.6329(p^2 + 0.532p + 0.09194)(p^2 + 0.03055p + 0.2111)}{(p^2 + 0.1116p + 0.01429)(p^2 + 1.895p + 4.685)}$$

Le tableau suivant présente la norme H_∞ pondéré ainsi que l'indicateur ρ^{ex1} pour les 4 modèles réduits calculés ci-dessus.

Méthode	$\ (G(j\omega) - G_4(j\omega))W_i(j\omega)\ _\infty$	ρ_4^{ex1}
Enns	2.25	2.98
Lin et Chiu	11.38	2.3
Wang et al.	5.65	2.21
Hankel pondéré	0.57	4.66

La solution optimale au sens de la norme de Hankel donnée dans le chapitre précédent est comparée à la solution précédente.

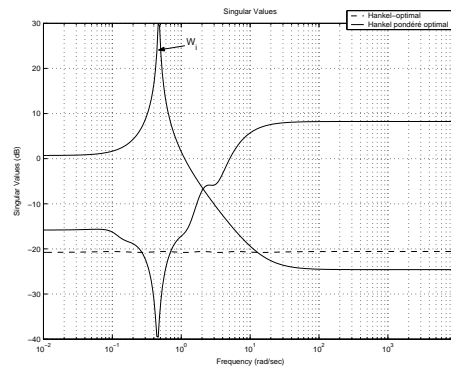


FIG. 4.9 – $|G(j\omega) - G_4(j\omega)|$ pour G_4 Hankel-optimal et G_4 Hankel-optimal pondéré

De la figure précédente, il apparaît clairement que la pondération joue son rôle au voisinage de l'anti-résonance.

4.3.2 L'exemple du TGEN

La pondération multivariable $W_i(p)$ reflète le domaine de pulsations désiré : de 0rad/s à 50rad/s et est constituée à partir du transfert du premier ordre suivant $w_i(p) = \frac{0.0625(p + 800)}{(p + 50)}$:

$$W_i(p) = \begin{bmatrix} 1000w_i(p)^3 & 0 \\ 0 & w_i(p)^3 \end{bmatrix}$$

Notons que le facteur 1000 permet de remettre à échelle les gains de l'entrée 1 par rapport à l'entrée 2.

L'étude d'un critère absolu sur cet exemple a révélé que pour conserver le premier mode résonnant, l'ordre du modèle réduit devait être supérieur à 7. Nous attendons de la pondération d'entrée qu'elle permette d'obtenir un ordre 6 sans détérioration de la qualité du modèle réduit.

L'application des méthodes de Enns, Lin et Chiu et Wang, pour $r = 6$ donne les modèles réduits représentés sur la figure suivante.

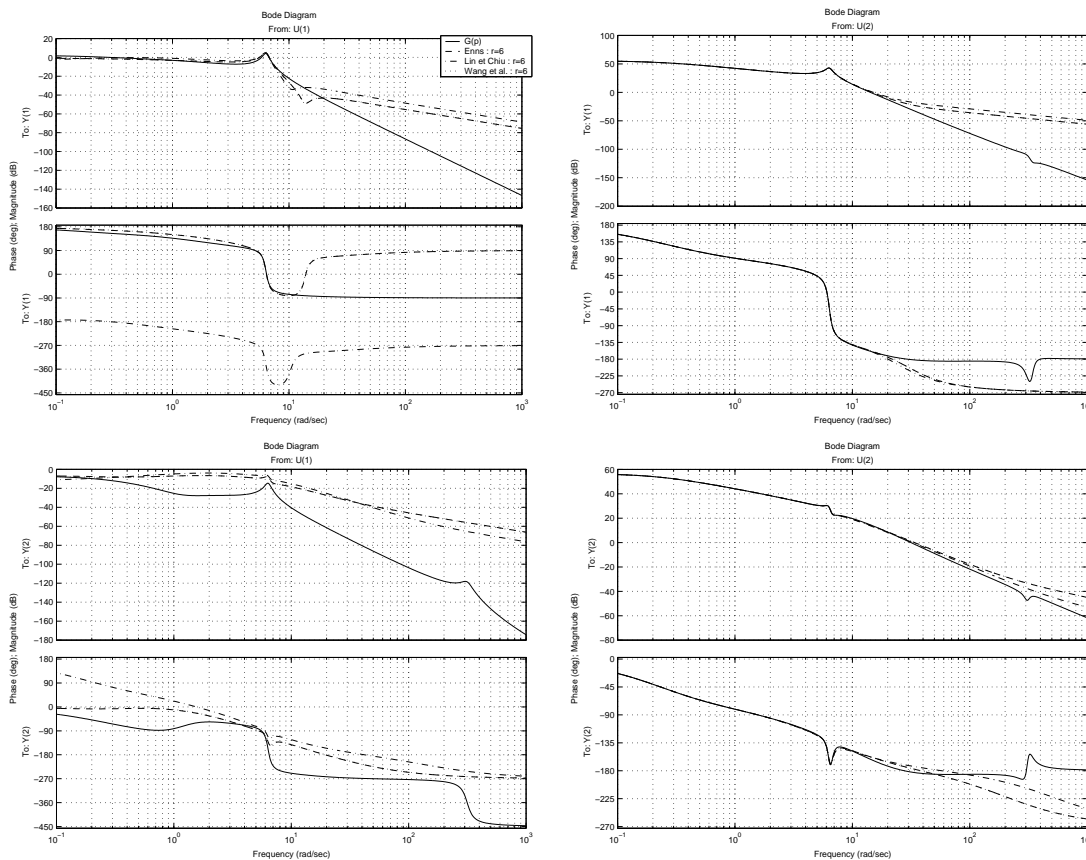


FIG. 4.10 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_6(j\omega)$ obtenu par les méthodes de Enns, Lin et Wang (tracé confondu avec la solution de Enns)

Les solutions ne semblent pas satisfaisantes en terme de qualité du tracé fréquentiel sur la gamme de pulsations privilégiée par la pondération $W_i(j\omega)$. L'approximation optimale au sens de la norme de Hankel pondérée donne le résultat suivant à l'ordre 6.

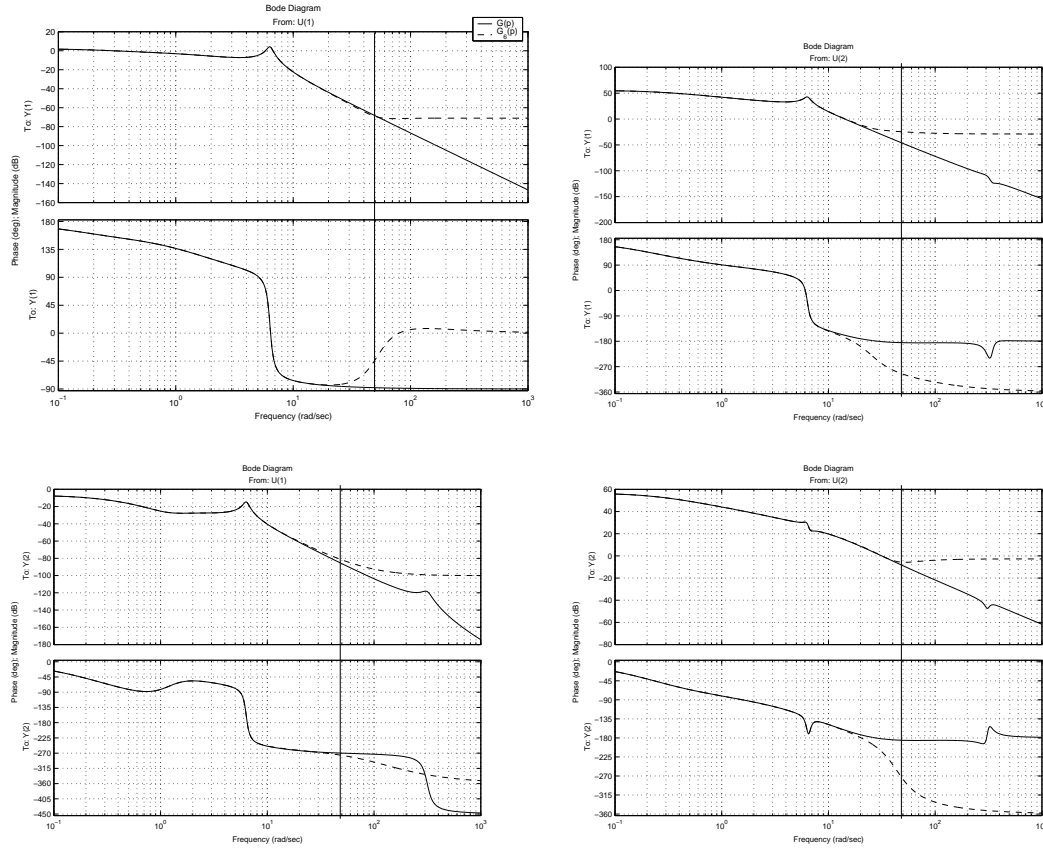


FIG. 4.11 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_6(j\omega)$ obtenu par approximation optimale au sens de la norme de Hankel pondérée

Les indicateurs (1.10) et (1.11) introduits dans la section 1.3.2 page 24 sont présentés dans le tableau suivant pour chacune des méthodes précédentes.

Méthode	$\ (G(j\omega) - G_6(j\omega))W_i(j\omega)\ _\infty$	$\rho_r^{\text{ex}2}$	$\rho_r^{\text{ex}2b}$
Enns	469	14.62	107.8
Lin et Chiu	902	17.6	115.9
Wang et al.	471	14.54	106.9
Hankel optimal	0.321	1.8	0.29

L'utilisation de l'approximation optimale en sens de la norme de Hankel avec optimisation du terme direct, bien que plus coûteuse en calculs, donne un résultat sans commune mesure avec les autres méthodes. Son indicateur $\rho_6^{\text{ex}2b}$ est sensiblement inférieur à tous ceux issus des autres méthodes.

4.3.3 Exemple du bief de type 1

Une pondération $W_i(p)$ est choisie de manière à privilégier le domaine de pulsations allant de 0rad/s à $5 \cdot 10^{-3}\text{rad/s}$.

$$W_i(p) = \begin{bmatrix} w_i(p)^3 & 0 \\ 0 & w_i(p)^3 \end{bmatrix}$$

avec $w_i = 5 \cdot 10^{-5} \frac{p + 100}{p + 0.006}$.

Les méthodes basées sur la troncature, à savoir les méthodes de Enns, Lin et Wang sont étudiées à l'ordre 18. Cet ordre avait été retenu lors de la mise en œuvre de la troncature équilibrée sur cet exemple. Les tracés fréquentiels des résultats sont représentés sur la figure suivante.

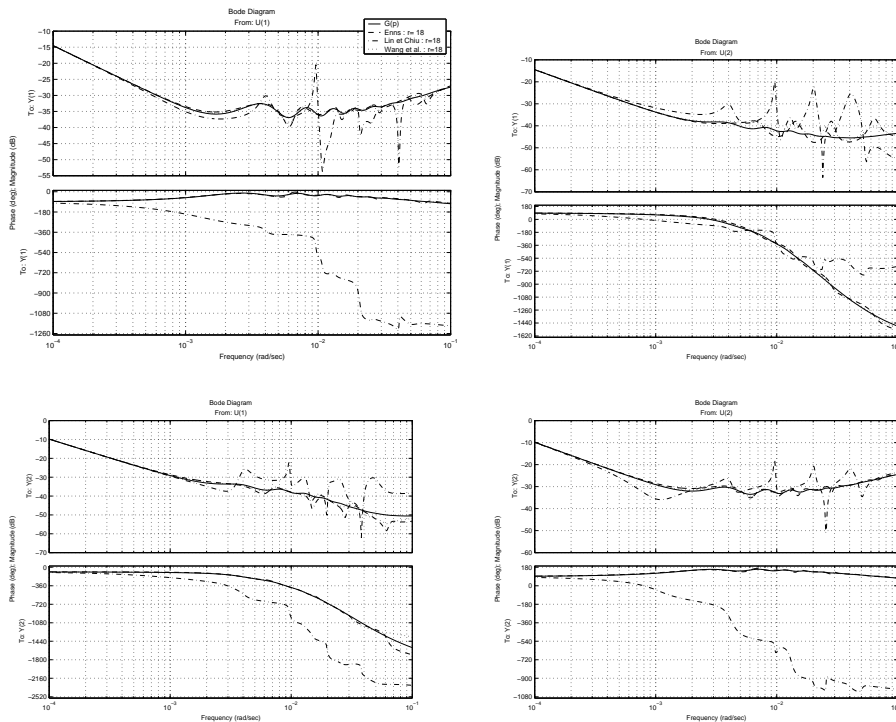


FIG. 4.12 – Tracé fréquentiel de $G(j\omega)$ et $G_{10}(j\omega)$ obtenu par les méthodes de Enns, Lin et Wang

Pour chacune des 3 méthodes, la figure suivante compare la valeur singulière supérieure de l'erreur $G(j\omega) - G_{18}(j\omega)$ à celle obtenue par troncature équilibrée.

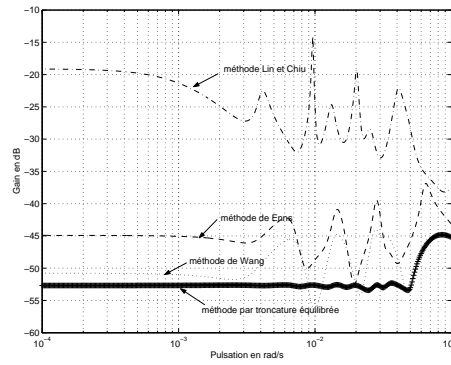


FIG. 4.13 – Valeur singulière supérieure de l’erreur $G(j\omega) - G_{18}(j\omega)$ pour G_{18} obtenu par les 3 méthodes pondérées (Enns, Lin et Wang) et par la troncature équilibrée

Par rapport à la troncature équilibrée, méthode à l’origine reliée à l’erreur absolue, les méthodes pondérées n’améliorent pas la valeur singulière de l’erreur sur une quelconque gamme de pulsations. Cet exemple met en perspective le manque de rationalité de la solution par rapport au choix de la pondération. En effet, la troncature équilibrée pouvant se voir comme la méthode de Enns avec des pondérations unitaires, un choix de pondération plus élaboré ($W_i(p)$ en l’occurrence) s’est avéré inopérant.

Une solution d’ordre 10 optimale au sens de la norme de Hankel pondérée est calculée. L’optimisation du terme direct donne lieu au modèle réduit représenté sur la figure suivante.

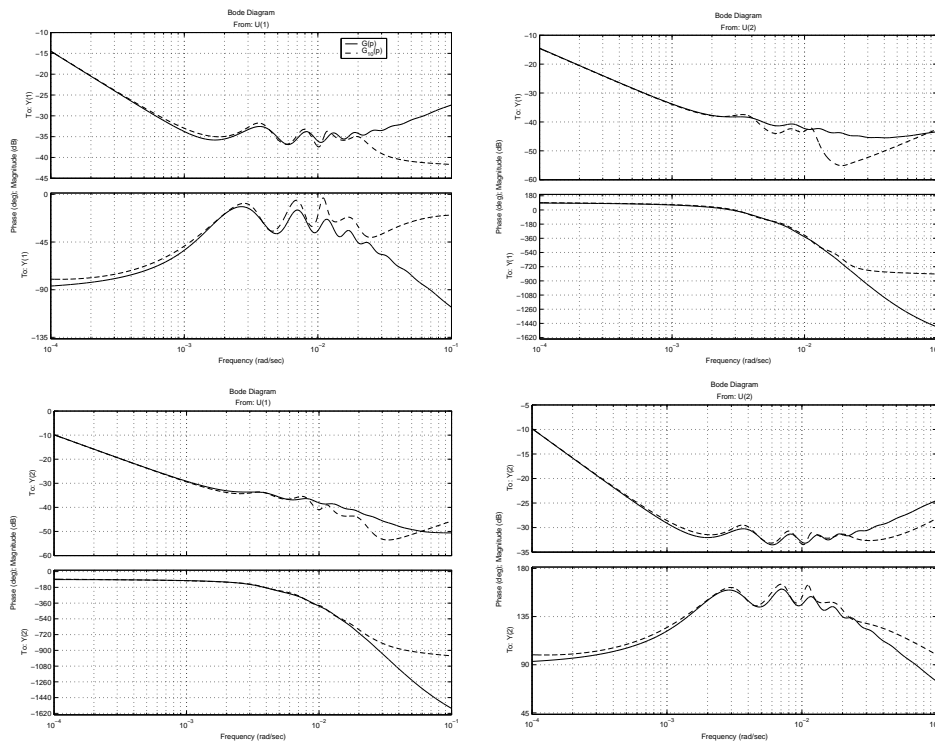


FIG. 4.14 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et de $G_{10}(j\omega)$ obtenu par approximation pondérée Hankel-optimale

Le modèle réduit obtenu est satisfaisant et permet d’obtenir un ordre plus intéressant

que celui de l'approximation de Hankel en erreur absolue qui donnait $r = 18$ page 91. L'ajout d'une pondération est significative comme le montre la figure 4.15. Cette figure présente les valeurs singulières de l'erreur absolue $G(j\omega) - G_{10}(j\omega)$ pour la solution calculée ci-dessus et pour G_{10} obtenu par approximation absolue en norme de Hankel (sans pondération).

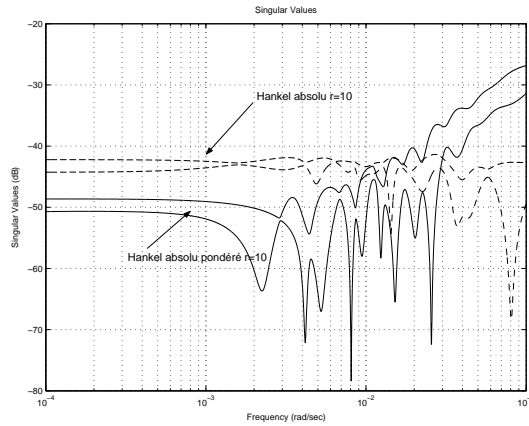


FIG. 4.15 – Valeurs singulières de l'erreur absolue pour G_{10} obtenu par réduction absolue Hankel-optimale et réduction absolue pondérée Hankel-optimale

Les indicateurs associés aux différentes méthodes par troncature pondérée sont présentés dans le tableau suivant.

Méthode	$\ (G(j\omega) - G_{18}(j\omega))W_i(j\omega)\ _\infty$	ρ_{18}^{ex3}	ρ_{18}^{ex3b}
Enns	5.7×10^{-3}	0.479	0.149
Lin et Chiu	0.11	3.19	1.78
Wang et al.	3.2×10^{-3}	0.307	0.107

Ces résultats peuvent être comparés, dans le tableau qui suit, à ceux issus de l'approximation en norme de Hankel pondérée à l'ordre 10 .

Méthode	$\ (G(j\omega) - G_{10}(j\omega))W_i(j\omega)\ _\infty$	ρ_{10}^{ex3}	ρ_{10}^{ex3b}
Hankel pondéré	3.7×10^{-3}	0.12	0.11

Pour un ordre sensiblement inférieur, l'approximation en norme de Hankel fournit une solution comparable à la méthode de Wang, qui elle-même donne les résultats les meilleurs parmi les approches basées sur la troncature.

CHAPITRE 5

L'erreur relative et l'approximation de la phase

Dans ce chapitre, une étude de la réduction de modèles au sens de l'erreur relative est menée. L'intérêt de l'erreur relative a été souligné dans la section 2.4.1, page 41. Étant donné une matrice de transfert $G(p)$ stable et inversible sur l'axe imaginaire (donc propre mais non strictement propre $D \neq 0$), l'approximation au sens de l'erreur relative $\Delta_{rel}(p)$ consiste à trouver un modèle stable d'ordre r $G_r(p)$ vérifiant :

$$G_r(p) = G(p)(I - \Delta_{rel}(p)) \quad (5.1)$$

avec $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty$ minimisée

Dans la suite de ce chapitre, sans perte de généralité, nous supposons que le modèle à réduire $G(p)$ est stable, inversible et possède plus d'entrées que de sorties ($n_u \geq n_y$). En effet, dans le cas contraire, l'existence de l'erreur $\Delta_{rel}(p)$ telle que $G_r(p) = G(p)(I - \Delta_{rel}(p))$ n'est pas forcément assurée. Si $n_u < n_y$, l'erreur relative se définit alors par $G_r(p) = (I - \Delta_{rel}(p))G(p)$.

Différentes approches ont été proposées pour obtenir des solutions sous-optimales. Certaines de ces approches se formulent comme des cas particuliers de réduction au sens d'une erreur absolue pondérée étudiée dans le chapitre précédent. De manière plus générale, tous les algorithmes proposés font partie d'une problématique plus générale qui est la réduction en phase ou plus communément appelée dans la littérature phase matching. L'objet de la section suivante est de présenter différentes formulations possibles du problème (5.1), selon la nature de $G(p)$.

5.1 Introduction

5.1.1 Formulations selon la nature de $G(p)$

La recherche de $G_r(p)$ vérifiant (5.1) peut se formuler de manières différentes selon la nature de $G(p)$.

Dans le cas où G est stable, carré et inversible, la formulation (5.1) s'écrit simplement comme la recherche d'un modèle réduit vérifiant :

$$\min_{G_r \in \mathcal{RH}_{\infty,r}} \|G(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty \quad (5.2)$$

Dans ce cas, l'erreur relative $G^{-1}(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))$ vaut simplement $\Delta_{rel}(j\omega)$. C'est du reste la formulation que nous avons adoptée par souci de clarté dans la section 2.4, page 41. Une telle formulation fait intervenir directement l'inverse du système comme pondération.

Lorsque $G(p)$ est stable avec $n_u \geq n_y$, le problème (5.1) est équivalent [Gre88b] à la recherche de $G_r(p)$ tel que

$$\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = \|V^{-*}(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty \text{ est minimisée} \quad (5.3)$$

où $V(j\omega)$ est un facteur spectral à gauche stable de $G(j\omega)$, carré et minimum de phase, c'est-à-dire

$$G(j\omega)G(j\omega)^* = V(j\omega)^*V(j\omega)$$

La section F.3.1 étudie la paramétrisation des $V(p)$ et la manière de les calculer. Il en existe toujours un qui vérifie les propriétés précédentes.

Une autre manière d'aborder le problème (5.1) lorsque $G(p)$ est stable mais non-carré est de considérer un pseudo-inverse de $G(p)$. L'erreur relative peut [CGZ95] alors se définir comme :

$$E_{rel}(j\omega) \triangleq G(j\omega)^+(G(j\omega) - G_r(j\omega)) \quad (5.4)$$

où G^+ vérifie $GG^+ = I_{n_y}$. Une telle définition est valide compte tenu que $E_{rel}(p)$ vérifie la définition d'une erreur relative¹ avec, de plus, $E_{rel}(j\omega) = G(j\omega)^+G(j\omega)\Delta_{rel}(j\omega)$. Dès lors, une erreur relative $\|E_{rel}\|_\infty$ minimale atteinte pour un modèle réduit $G_r(p)$ n'entraîne pas $\|\Delta_{rel}\|_\infty$ soit aussi minimale pour le même $G_r(p)$.

5.1.2 Présentation de l'approche

Ce chapitre propose d'aborder les méthodes de réduction de modèles associées à l'erreur relative et leur interprétation dans un contexte plus général appelé phase matching. La première partie consiste à introduire l'erreur relative comme un cas particulier d'erreur absolue pondérée. Dans ce contexte, les techniques du chapitre précédent sont particularisées et les propriétés qui en découlent sont présentées. Ainsi, la méthode de Enns et l'approximation en norme de Hankel pondérée seront étudiées pour le cas particulier de pondération mis en perspective dans les relations (5.2) et (5.3).

Comme le suggère la relation (5.3), une attention particulière sera donnée à la factorisation spectrale et plus particulièrement à la paramétrisation et aux techniques de calcul de facteurs spectraux. Par souci de clarté, les résultats théoriques et pratiques de factorisation spectrale sont placés en annexe F.

Le point commun de la plupart des approches réside dans la réduction d'un transfert all-pass particulier qui peut s'interpréter comme la phase du modèle à réduire². La réduction de ce transfert, appelé dans certains cas matrice de phase, s'opère grâce aux techniques de l'approximation en erreur absolue. Nous serons donc amenés à introduire un cadre plus général, le phase matching, qui contient toutes les techniques présentées dans ce chapitre. Introduit à l'origine pour la réduction des spectres rationnels [GA86, GA89,

¹C'est-à-dire vérifiant $G_r = G(I - E_{rel})$

²La phase se définit naturellement en monovariante et peut s'étendre au multivariante

HJ85a, JH85] par l'intermédiaire d'un transfert représentant la phase du système, cette approche sera l'objet d'une explication particulière car unificatrice. Elle permet d'interpréter aussi la notion de troncature stochastique équilibrée [DP84, Gre88a, WS90, WS92], l'équivalent de troncature équilibrée pour la réduction de l'erreur relative.

Tout d'abord, partant des formulations (5.2), (5.3) et (5.4), nous pouvons considérer l'erreur relative comme un cas particulier d'erreur pondérée.

5.2 L'erreur relative, un cas particulier d'erreur pondérée

Dans ce qui suit, les techniques par troncature et optimisation de la norme de Hankel, présentées dans le chapitre précédent, sont introduites dans le cas particulier de l'erreur relative [CGZ95, Zho93a, Zho95b].

5.2.1 Réduction de l'erreur relative par la méthode de Enns

5.2.1.1 Le cas carré minimum de phase

Considérons $G(p)$ un système dans un premier temps stable, carré et minimum de phase. La méthode de Enns présentée page 101 peut être introduite en considérant la pondération de sortie égale à l'inverse du système, c'est-à-dire $W_o(p) = G^{-1}(p)$. Une représentation d'état possible pour $W_o(p)$ est alors :

$$W_o(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & -BD^{-1} \\ \hline D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right]$$

Dès lors, en suivant la définition 4.2.1 page 103, intéressons nous au calcul des matrices Q_c et P_o . Dans ce cas spécifique de pondération, un calcul simple [Zho93a, Zho95b, CGZ95, Gu95] mène à $Q_c = Q$ où Q est le grammien de commandabilité de $G(p)$, et $P_o = \begin{bmatrix} P & P \\ P & P \end{bmatrix}$ où P est le grammien d'observabilité de $G^{-1}(p)$, c'est-à-dire :

$$(A - BD^{-1}C)^T P + P(A - BD^{-1}C) + C^T D^{-T} D^{-1} C = 0 \tag{5.5}$$

En suivant le principe décrit dans la définition 4.2.1, le modèle réduit $G_r(p)$ est obtenu par troncature des matrices d'état de $G(p)$ dans la base où P et Q sont égaux et diagonaux, c'est-à-dire $P = Q = \mathbf{diag}(\sigma_1 I_{r_1}, \dots, \sigma_n I_{r_n})$ avec $\sigma_1 > \dots > \sigma_n \geq 0$.

Contrairement au cas général de la méthode de Enns qui n'offre que peu de propriétés sur la solution, le cas particulier présentement développé a l'avantage d'assurer un certain nombre de propriétés intéressantes sur la solution $G_r(p)$.

PROPRIÉTÉS 5.2.1

Si $G(p)$ est une matrice de fonctions de transfert carrée, stable et minimum de phase alors la méthode de Enns appliquée à l'erreur relative ($W_o = G^{-1}$) aboutit à un modèle réduit stable ayant les propriétés supplémentaires suivantes :

- (i) $G_r(j\omega)$ est minimum de phase
- (ii) $\|G^{-1}(G - G_r)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i (\sqrt{1 + \sigma_i^2} + \sigma_i)$

Démonstration : Montrons que $G_r(j\omega)$ est minimum de phase.

Plaçons nous dans la base équilibrée pondérée où $P = Q = \mathbf{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Développons le bloc (1, 1) de l'égalité matricielle (5.5) :

$$(A_{11} - B_1 D^{-1} C_1)^T \Sigma_1 + \Sigma_1 (A_{11} - B_1 D^{-1} C_1) + C_1^T D^{-T} D^{-1} C_1 = 0 \quad (5.6)$$

En supposant que $A_{11} - B_1 D^{-1} C_1$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, le lemme B.6.3 page 232 implique que $(\Sigma_1 > 0 \Leftrightarrow (A_{11} - B_1 D^{-1} C_1) < 0)$.

Montrons par l'absurde que $A_{11} - B_1 D^{-1} C_1$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Supposons que $j\omega$ est valeur propre de $A_{11} - B_1 D^{-1} C_1$ associée au vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$: $(A_{11} - B_1 D^{-1} C_1)x = j\omega x$. En post et pré-multipliant (5.6) par x^* et x , il vient $D^{-1} C_1 x = 0$ ce qui implique que x est vecteur propre de A_{11} associé à la valeur propre $j\omega$. Ceci contredit la stabilité de $G_r(j\omega)$ assurée par la méthode de Enns.

La justification de la borne (ii) sera faite dans la section 5.3.3.4, page 134. En effet, la présente démarche est un cas particulier de la troncature stochastique équilibrée (BST) qui possède une borne a priori. \square

5.2.1.2 Le cas carré non-minimum de phase

La procédure précédente ne s'applique plus en raison de la présence de pôles instables dans la pondération $G(p)^{-1}$. Pour pallier cette difficulté, une idée consiste à introduire le facteur spectral $W(j\omega)$ à droite stable et minimum de phase vérifiant $W(j\omega)W(j\omega)^* = G(j\omega)G(j\omega)^*$. Le calcul de $W(p)$ à partir de $G(p)$ est mené dans la section F.3.2.

La méthode de Enns peut alors s'appliquer sur $W(p)^{-1}G(p)$ car $W(p)^{-1}G(p)$ est stable et que :

$$\|G(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty = \|W(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty$$

Il est facile de montrer dans ce cas [SM99] que P_o , le grammien d'observabilité de $W(p)^{-1}G(p)$ vaut :

$$P_o = \begin{bmatrix} P & -P \\ -P & P \end{bmatrix}$$

où P est le grammien d'observabilité de $W(p)^{-1}$. La démarche consiste ensuite à suivre la méthode de Enns : équilibrer P avec Q le grammien de commandabilité de $G(p)$.

Seule la garantie de stabilité de $G_r(p)$ est assurée. La borne de la propriété 5.2.1 ne peut être étendue au cas présent même si elle est conjecturée dans [SM99].

5.2.1.3 Le cas non-carré

Dans ce cas, la difficulté est de définir une inverse de la matrice de transfert $G(p)$. Dans [CGZ95, Zho93a], l'erreur relative est exprimée comme $E_{rel} = G(p)^+(G(p) - G_r(p))$. $G(p)^+$ représente une inverse à droite de $G(p)$, signifiant que $GG^+ = I$. Une inverse fréquemment considérée est la suivante :

$$G^+(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A - BD^+C & -BD^+ \\ \hline D^+C & D^+ \end{array} \right]$$

avec $D^+ = D^T(DD^T)^{-1}$. Cette inverse est limitée par le fait que $A - BD^+C$ doit être stable.

Dans [CGZ95], une paramétrisation possible de l'ensemble des inverses $G(p)^+$ permet d'obtenir un transfert $G(p)^+$ stable à condition que $G(p)$ soit minimum de phase.

Etant donnée $G(p)^+$ stable, la méthode de Enns peut être employée en considérant $Q_c = Q$ le grammien de commandabilité de $G(p)$ et $P_o = \begin{bmatrix} P & P \\ P & P \end{bmatrix}$ le grammien d'observabilité de $G(p)^+G(p)$.

PROPRIÉTÉS 5.2.2

Soit $G(p)$ une matrice de fonctions de transfert stable, minimum de phase et $G(p)^+$ une inverse à droite stable de $G(p)$. La méthode de Enns appliquée à l'erreur relative ($W_o = G^+$) aboutit à un modèle réduit stable ayant les propriétés supplémentaires suivantes :

- (i) $G_r(j\omega)$ est minimum de phase
- (ii) $\|G^+(G - G_r)\|_\infty \leq \prod_{i=r+1}^n (1 + 2\sigma_i \sqrt{1 + \sigma_i^2} + 2\sigma_i^2) - 1$

Dans [Zho93a], il est montré que la borne précédente est supérieure à la borne considérée dans le cas carré.

5.2.2 Réduction de l'erreur relative selon la norme de Hankel

Considérons dans cette partie un système $G(p)$ stable et carré. Les résultats du lemme 4.2.1, page 109 peuvent s'appliquer en considérant la relation (5.3), comme un cas particulier d'erreur pondérée. $V(j\omega)$ peut être toujours choisi stable et minimum de phase (paragraphe suivant). $V^{-*}(j\omega)$ est alors anticausal et inversement anticausal. Le lemme 4.2.1 s'applique alors :

LEMME 5.2.3

Soit $G(p)$ une matrice de fonctions de transfert stable.

$$\begin{aligned} \sigma_{r+1}([V^{-*}(j\omega)G(j\omega)]_+) &= \min_{G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|V^{-*}(p)(G(p) - G_r(p))\|_H \\ &\leq \min_{G_r(p) \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|V^{-*}(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le calcul d'un modèle réduit optimal au sens de la norme de Hankel se réalise comme dans le cas général du chapitre précédent. Nous ne revenons pas sur cet aspect dans ce qui suit. En revanche, la réduction en norme de Hankel propose une alternative présentée dans le chapitre sur l'erreur absolue : la réduction optimale ou la réduction pas à pas. Dans le cas de l'erreur relative la deuxième méthode est fréquemment employée car elle mène à des propriétés plus intéressantes : borne supérieure a priori sur l'erreur relative, possibilité d'interpréter la méthode comme cas un particulier de phase matching ; propriété que nous développerons plus en avant dans la section suivante consacrée au phase matching.

Intérêt de l'approximation Hankel pas à pas

La technique pas à pas est constituée d'une succession d'approximations optimales au sens de la norme de Hankel. A chaque étape, l'algorithme décrit page 110 peut s'appliquer. En suivant l'algorithme, la partie causale de la matrice de fonctions de transfert all-pass $F(p) = V^{-*}(p)G(p)$ apparaît ; les notations devenant $M_o(p)^{-1} = V(p)$ et $M_i(p) = I$. Ce transfert précédemment noté $F_c(p) \triangleq [F(p)]_+ + F(\infty)$ possède la représentation d'état (F.14) page 253. Les VSH de $F_c(p)$ notées μ_i sont toutes inférieures à 1 car F_c est la partie causale d'un transfert all-pass.

Détaillons l'obtention de $G_r(p)$ pour $r = n - k$, où k désigne la multiplicité de la plus petite VSH de $F_c(p)$, μ_n .

1. L'approximation Hankel-optimale de $F_c(p)$ à l'ordre r , notée $L(p)$ vérifie :

$$\|F_c(p) - L(p)\|_\infty \stackrel{\Delta}{=} \|E(p)\|_\infty = \mu_n$$

2. Dans [Glo86], $G_r(p)$ est pris égal à $G_r(p) = V(p)^*([F(p)]_- + L(p))$ (variante 2 de l'étape 1 de l'algorithme page 110).

$G_r(p)$ s'écrit plus simplement [Glo86, Gre88b, GA89] en fonction de l'erreur d'approximation $E(p)$ sur la matrice $F_c(p)$:

$$G_r(p) = G(p) - V(p)^*E(p) \quad (5.8)$$

G_r est stable de degré r et vérifie [Glo86] :

$$\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = \|V^{-*}(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty = \mu_n$$

Dans ce cas l'erreur relative $\Delta_{rel}(p)$ s'écrit d'après (5.8) : $\Delta_{rel}(p) = E(p)$. Une telle construction de $G_r(p)$ confère à l'erreur relative Δ_{rel} une propriété μ_n^2 -all-pass : $\Delta_{rel}(j\omega)^*\Delta_{rel}(j\omega) = \Delta_{rel}(j\omega)\Delta_{rel}(j\omega)^* = \mu_n^2 I$.

Comme dans la technique du Hankel pas à pas étudiée dans le chapitre concernant l'erreur absolue, la procédure de réduction mentionnée ci-dessus est répétée jusqu'à l'obtention d'un modèle $G_r(p)$ d'ordre r quelconque.

Dès lors, le modèle final $G_r(p)$ peut s'exprimer en fonction de $G(p)$ et des $\Delta_{rel}^i(p)$ qui désignent les erreurs relatives à l'étape i ($\Delta_{rel}^1 = \Delta_{rel}$ ci-dessus). Pour simplifier l'écriture considérons les VSH μ_k de $F_c(p)$ de multiplicité 1. Il vient par une simple récurrence :

$$\begin{aligned} G_r(p) &= G(p)(I - \Delta_{rel}^1(p))(I - \Delta_{rel}^2(p)) \dots (I - \Delta_{rel}^{n-r}(p)) \\ \Delta_{rel}^i(j\omega)^*\Delta_{rel}^i(j\omega) &= \Delta_{rel}^i(j\omega)\Delta_{rel}^i(j\omega)^* = \mu_{n-i+1}^2 I \end{aligned} \quad (5.9)$$

PROPRIÉTÉS 5.2.4

Soit $G(p)$ carré et stable. p désigne la multiplicité de la VSH unitaire de $F_c(p) = [V(p)^{-*}(p)G(p)]_+$ et $G_r(p)$ l'approximation relative pas à pas au sens de la norme de Hankel. Nous supposons $r > p$. Alors :

(i)

$$\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = \|V(j\omega)^{-*}(G(j\omega) - G_r(j\omega))\|_\infty \leq (1 + \mu_n)(1 + \mu_{n-1}) \dots (1 + \mu_{r+1}) - 1 \quad (5.10)$$

(ii) Les zéros à partie réelle positive de $G(p)$ et $G_r(p)$ sont les mêmes.

Démonstration : Montrons (i).

De la relation (5.9) une borne supérieure [Glo86] sur l'erreur relative définie donne (i). Montrons (ii).

A chaque pas, $\Delta_{rel}^i(p)$ est stable donc $(I - \Delta_{rel}^i(j\omega))$ à des pôles à partie réelle strictement négative. De plus, comme $r > p$, nous avons $\|\Delta_{rel}^i(j\omega)\|_\infty < 1$. D'après le théorème du petit gain, l'interconnexion de $\Delta_{rel}^i(j\omega)$ avec I est stable donc $(I - \Delta_{rel}^i(j\omega))^{-1}$ est stable ce qui entraîne que $(I - \Delta_{rel}^i(j\omega))$ a des zéros à partie réelle strictement négative. Les $(I - \Delta_{rel}^i(j\omega))$ étant stables et inversement stables, d'après la relation (5.9), un zéro à partie réelle strictement positive de $G(p)$ se retrouve dans $G_r(p)$. \square

Comme dans le Hankel pas à pas étudié dans le chapitre de l'erreur absolue, lorsque les μ_i sont de multiplicité quelconque, elles ne sont comptées qu'une seule fois dans la borne supérieure précédente.

Mise en œuvre

La première itération (le premier pas) de l'algorithme pas à pas est développé dans la suite.

1. Calcul de la partie causale $F_c(p)$ de $V(p)^{-*}G(p)$ en même temps que $V(p)$; voir section F.3.3, page 253.
2. Calcul de $L(p)$ approximation optimale de Hankel de $F_c(p)$ à l'ordre $r = n - k$ grâce à l'algorithme de la section 3.4.3.7 page 85.
3. De ce qui précède, nous avons G_r qui vaut $G - V^*(F_c - L)$. Or, ce dernier transfert n'est pas formulé de façon minimale et la simplification numérique des modes non observables et non commandables peut poser des problèmes. Remarquons que G_r vérifie aussi : $V^{-*}G_r = L + \underbrace{(V^{-*}G - F_c)}_{\text{anticausal}}$. Connaissant $L(p)$, les matrices A_r, B_r et

C_r de G_r se déduisent à partir des formules (4.27) montrées page 112 en prenant $M_o = V^{-1}$ et $M_i = I$. Finalement, $D_r = D(I + D_L)$ conclut le calcul de G_r pour pour $r = n - k$.

L'algorithme est ainsi répété en prenant $G = G_r$.

De ce qui précède, l'approximation au sens de l'erreur relative se ramène à la réduction en erreur additive d'un transfert particulier et central dans le développement qui suit. Reprenons succinctement les méthodes qui précèdent pour mettre en valeur ce transfert noté $F_c(p)$:

- Dans la section 5.2.1.1, la méthode de Enns s'appliquait à la représentation d'état du système augmenté $G(p)^{-1}G(p)$. Il s'avère que cette démarche est équivalente à réduire à l'aide de la troncature équilibrée la partie stable du transfert $F(p) \triangleq V(p)^{-*}G(p)$, noté $F_c(p)$ dans la suite (troncature stochastique équilibrée (BST) développée dans la suite). Nous rappelons que $V(p)$ désigne un facteur spectral à droite stable et minimum de phase de $G(p)G(p)^*$. A ce stade de la discussion, nous renvoyons le lecteur à la section 5.3.3.4 qui éclaire cette équivalence.
- Dans la section 5.2.2, la réduction pas à pas au sens de la norme de Hankel s'opérait aussi sur $F_c(p)$.

Le transfert $F_c(p)$, partie causale du transfert all-pass $F(p)$, apparaît comme un transfert central. Ceci motive l'étude d'un cadre plus général pour lequel les méthodes précédentes constituent un cas particulier intéressant du point de vue algorithmique.

5.3 Le cadre général du phase matching

Le phase matching, ou approximation de la phase, est apparu dans le contexte de la réduction de l'ordre d'un spectre de dimension élevée $\Phi(p)$ [JH85, HJ85a, GA89, GA86]. Plus exactement, au lieu de considérer directement le spectre, le phase matching ramène la réduction à un transfert all-pass particulier et riche de la propriété de contenir la phase d'un facteur spectral minimum de phase de $\Phi(p)$. Cette approche pleinement justifiée en

monovariante est étendue au cas multivariable. Avant d'expliciter le phase matching dans toutes ses étapes, nous résumons brièvement les étapes essentielles. Partant d'un spectre initial $G(p)G(p)^* = \Phi(p)$:

1. Un facteur spectral à droite $V(p)$ stable et minimum de phase de $G(p)G(p)^* = \Phi(p)$ est calculé de manière à former le transfert de phase $F(p) = V(p)^{-*}G(p)$.
2. La partie causale du transfert all-pass $F(p)$ est réduite à l'aide d'une méthode pour l'erreur absolue ayant la propriété de garantir que le modèle réduit possède une norme de Hankel inférieure à 1. Nous justifions plus loin cette nécessité sans laquelle l'étape suivante serait irréalisable.
3. Un spectre réduit $\Phi_r(p)$ peut être construit à partir de la réduction précédente.

Dans les 2 sections suivantes, des justifications concernant l'utilité de la phase pour la réduction d'un spectre sont données. La première explication concerne la relation de Bode. La seconde fait état de la démarche empruntée dans le contexte de l'identification de séries temporelles.

Par ailleurs, il s'agira bien évidemment d'éclaircir ensuite le lien qui existe avec la réduction de modèle au sens de l'erreur relative. Pour ce faire, nous exposerons les 2 techniques essentielles de réduction comme des cas particuliers de phase matching. La première de ces techniques est la troncature stochastique équilibrée [DP84, HJS84, Gre88a]. L'autre technique est l'approximation Hankel pas à pas présentées précédemment page 125.

5.3.1 Réduction d'un spectre, approximation en phase

5.3.1.1 Relation de Bode

Dans le cas monovariante, la relation de Bode [Bod45] permet de lier le module d'une fonction de transfert stable et minimum de phase à sa phase. Si la phase d'un tel transfert est connue, alors le module s'en déduit à une constante multiplicative près. Partant de cet argument, [JH85] a proposé d'utiliser la réduction en phase partant du principe que si 2 fonctions de transfert sont proches en phase, alors les modules associés sont proches. Par ailleurs, il est possible de souligner l'importance rattachée à l'approximation en phase lorsque nous nous penchons sur la signification des facteurs canoniques de corrélation qui sont des quantificateurs comparables aux valeurs singulières de Hankel.

5.3.1.2 Perspective historique : séries temporelles

En traitement du signal, l'étude de la modélisation d'un signal comme le passage d'un bruit blanc dans un filtre a révélé l'importance de facteurs statistiques appelés coefficients canoniques de corrélation. La démarche classiquement adoptée pour souligner l'importance de ces facteurs est établie en considérant la problématique de réalisation stochastique dans le cas monovariante et discret :

Étant donnée une série temporelle de sortie $y(k)$ générée par un bruit blanc $u(k)$, trouver les matrices A, B, C, D modélisant, au sens statistique, la sortie y comme la passage de u à travers un filtre :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

La démarche adoptée en traitement du signal considère en premier lieu la réalisation du spectre $\Phi(z)$ dont un facteur spectral minimum de phase $W(z)$ représente le modèle à déterminer, c'est-à-dire $W(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$ tel que $W(z)W(z^{-1}) = \Phi(z)$ et

$W(\infty) \neq 0$.

$$\Phi(z) = W(z)W(z^{-1}) = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(z^i + z^{-i})$$

où (c_0, c_1, \dots) est la séquence de covariance définie par $c_k = \mathbf{E}\{y(t+k)y(t)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. La décomposition de $\Phi(z)$ en partie causale et anticausale s'écrit $\Phi(z) = Z(z) + Z(z^{-1})$ avec $Z(z) = \frac{c_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i$.

Notons $Y_t^- = [y^T(t-1), y^T(t-2), \dots]$ la matrice des sorties passées et $Y_t^+ = [y^T(t), y^T(t+1), \dots]$ la matrices des sorties futures. Sous l'hypothèse de stationnarité, les matrices d'auto-corrélation des matrices Y_t^- et Y_t^+ sont les mêmes. Introduisons la décomposition Cholesky suivante :

$$\mathbf{E}(Y_t^+ Y_t^{+T}) = \mathbf{E}(Y_t^- Y_t^{-T}) = T_W^* T_W$$

La matrice de corrélation entre les sorties passées et futures est notée H_p et vaut [JH85] :

$$H_p \triangleq \mathbf{E}(Y_t^+ Y_t^{-T}) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ c_2 & c_3 & \dots & \dots \\ c_3 & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

L'opérateur de Hankel H du facteur spectral W normalisé $W(z^{-1})W(z)^{-1}$ s'exprime en fonction [JH85, HJ85a, DP84, LP96] de H_p :

$$H = (T_W^{-1})H_p(T_W)^{-1}$$

Les valeurs singulières de H sont appelées les *facteurs canoniques de corrélation*. Dans le cas continu, ces facteurs correspondent aux valeurs singulières de l'opérateur de Hankel du système $W(p)W(p)^{-*}$ [JH85, HJ85a]. Notons que dans le contexte de l'erreur absolue les valeurs singulières de Hankel désignent les valeurs singulières de l'opérateur de Hankel associé à $W(p)$. Les facteurs canoniques de corrélation désignent, quant à eux, les valeurs singulières de Hankel du transfert normalisé et all-pass $W(p)W(p)^{-*}$. Le transfert noté $F(p) \triangleq W(p)W(p)^{-*}$ est directement fonction de la phase de $W(j\omega)$:

$$F(j\omega) = e^{2j \mathbf{arg}(W(j\omega))}$$

Ce transfert all-pass contient toute l'information du système dans la phase; il est appelé transfert de phase.

5.3.1.3 Interprétation du transfert de phase

Le transfert all-pass monovariable $F(p) \triangleq W(p)W(p)^{-*}$ peut se réécrire directement en fonction de la phase de $W(p)$.

Intéressons nous à la signification d'un transfert all-pass réduit $F_r(p) \triangleq W_r(p)W_r(p)^{-*}$ approchant $F(j\omega)$. En d'autres termes, supposons qu'il existe F_r tel que :

$$\forall \omega, |F(j\omega) - F_r(j\omega)| \leq \epsilon \leq 2, \epsilon > 0$$

Développons $F(j\omega) - F_r(j\omega)$:

$$F(j\omega) - F_r(j\omega) = W(j\omega)W(j\omega)^{-*} - W_r(j\omega)W_r(j\omega)^{-*} = \cos(2\mathbf{arg}(W(j\omega))) - \cos(2\mathbf{arg}(W_r(j\omega))) + j(\sin(2\mathbf{arg}(W(j\omega))) - \sin(2\mathbf{arg}(W_r(j\omega))))$$

Le module de l'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned} |F(j\omega) - F_r(j\omega)|^2 &= 2 - 2\cos(2\arg(W(j\omega)))\cos(2\arg(W_r(j\omega))) - \dots \\ \dots - 2\sin(2\arg(W(j\omega)))\sin(2\arg(W_r(j\omega))) &= 2 - 2\cos(2\arg(W(j\omega)) - 2\arg(W_r(j\omega))) \\ &\leq \epsilon^2 \end{aligned}$$

En posant $\Delta\varphi(j\omega) = \arg(W(j\omega)) - \arg(W_r(j\omega))$ nous avons $\forall\omega$:

$$|\Delta\varphi(j\omega)| \in [0, \frac{1}{2}\arccos(1 - \frac{\epsilon^2}{2})] \quad (5.11)$$

De la dernière relation, il apparaît que plus F_r approche F (ϵ petit) plus la phase de W_r approche la phase de W .

La phase de $W(j\omega)$ est donc contenue explicitement dans $F(j\omega)$ et d'après la discussion de la section précédente, nous pouvons établir qu'éliminer les facteurs canoniques de corrélation les plus faibles peut conduire à une bonne approximation de la phase de $W(j\omega)$.

Comme nous venons de le souligner, une telle approximation implique une approximation de $W(j\omega)$ par $W_r(j\omega)$. Cette démarche n'est rendue possible que si $F_r(j\omega)$ est aussi un transfert all-pass (ou de phase). L'algorithme du phase matching, décrit précisément dans la suite, permet par construction de rendre cette propriété vraie. Le facteur spectral $W_r(j\omega)$ est alors un facteur spectral réduit et $\Phi_r(j\omega) \triangleq W_r(j\omega)W_r(j\omega)^*$ est le spectre réduit obtenu par phase matching.

La démarche générale du phase matching est reprise de manière plus détaillée dans ce qui suit. Celle-ci a initialement été introduite dans un contexte monovariante et discret [JH85]. L'extension aux systèmes continus est décrite dans [HJ85a]. En multivariable, les différentes interprétations ne sont plus valables. La justification précédente qui permet d'introduire le transfert de phase et les facteurs canoniques de corrélation est étendue. Tout simplement, la phase d'un système multivariable ne possède pas de définition naturelle. C'est pourquoi une extension multivariable est proposée [GA86, GA89]. Alors que dans le cas monovariante, le transfert de phase $F(j\omega)$ s'écrit $G(j\omega)^{-*}G(j\omega)$, $F(j\omega)$ s'écrit, en multivariable, $V(p)^{-*}G(p)$ ($V(p)$ facteur spectral stable et minimum de phase).

5.3.2 Démarche du phase matching

La figure 5.3.2 traduit précisément chaque étape du phase matching dans le cas multivariable.

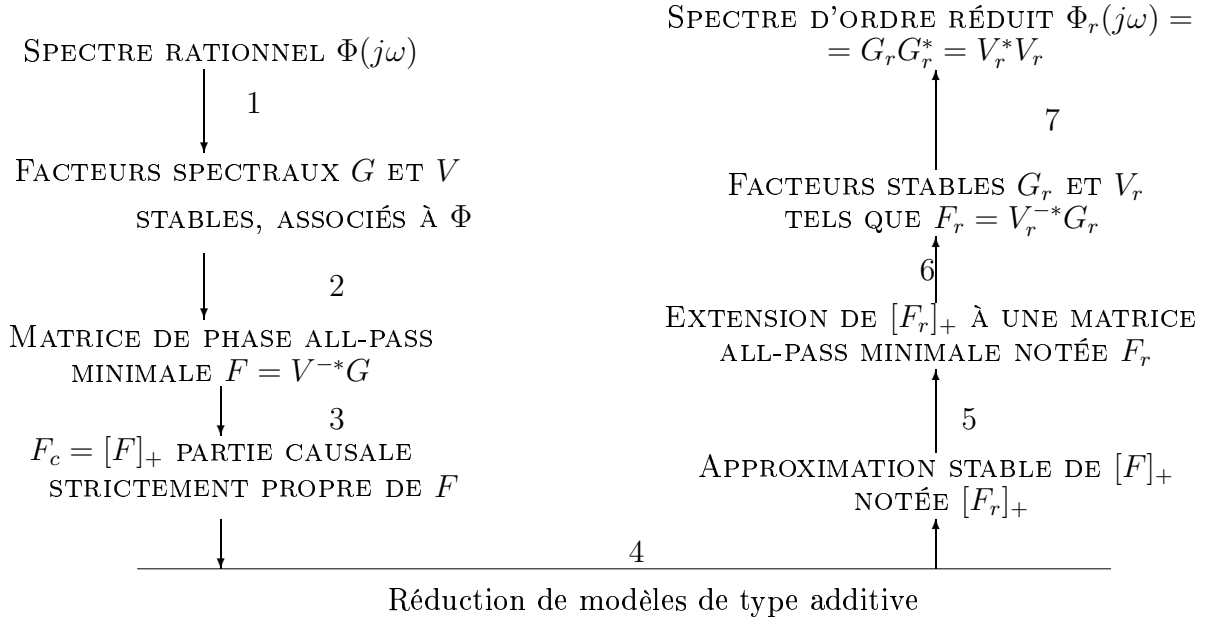


FIG. 5.1 – Le phase matching généralisé [Gre88a]

La démarche prend pour point de départ un spectre $\Phi(p)$ qui, dans le cas présent³ est égal à $G(p)G(p)^*$ où $G(p)$ est stable. L'étape 1 consiste à calculer $V(p)$ un facteur spectral à droite stable (annexe F). $V(p)$ est généralement choisi minimum de phase donc carré de dimension n_u , ce qui est le cas ici dans toutes les approches présentées. La matrice de phase peut alors être calculée (étape 2). Elle a les mêmes dimensions que $G(p)$. La matrice de phase $F(j\omega)$, possédant généralement des pôles causaux et anticausaux, sa partie stable $F_c = [F]_+$ est considérée (étape 3) de manière à pouvoir employer les outils classiques la réduction en erreur absolue. L'étape 4 consiste donc à réduire $F_c(p)$ en un transfert stable noté $[F_r(p)]_+$.

L'étape 5, plus technique, consiste à étendre $[F_r(p)]_+$ à une matrice all-pass. Plus précisément, il s'agit de chercher une partie anticausale $Q(p)$ qui rende $F_r(p) = [F_r(p)]_+ + Q(p)$ all-pass. Cette opération est rendue possible à condition que :

$$\|[F_r(p)]_+\|_H \leq 1$$

La construction de $Q(p)$ se fait sur la base du théorème 3.4.8, page 83 et du all-pass embedding (78) dans le cas où $G(p)$, (donc $[F_r(p)]_+$), n'est pas carré.

Les techniques employées pour réduire $F_c(p)$ doivent donc assurer que $\|[F_r(j\omega)]_+\|_H \leq 1$. C'est pourquoi la réduction s'opère classiquement par troncature équilibrée ou réduction pas à pas par la norme de Hankel. Dans les 2 cas, les $n - r$ premières VSH sont conservées. Les étapes 6 et 7 concernent la factorisation de $F_r(p)$ en $V_r(p)^{-*}G_r(p)$ et le calcul du spectre réduit $\Phi_r(p)$. Les détails de ces étapes se trouvent dans [GA86, GA89].

Hankel pas à pas et phase matching

L'approche de la réduction en erreur relative par l'approximation Hankel pas à pas (page 125) est un algorithme de phase matching [GA89, JL87] particulier. Lors de l'étape

³Dans le contexte de l'identification, $G(p)$ est calculé à partir du spectre identifié $\Phi(p)$.

4 de la figure 5.3.2, c'est l'approximation pas à pas en sens de la norme de Hankel qui assure que $\|[F_r(p)]_+\|_H \leq 1$.

Par ailleurs, nous pouvons écrire une relation utile [GA89] entre la matrice de phase initiale $F(p)$ et la matrice de phase $F_r(p)$ du modèle réduit $G_r(p)$:

$$\|F(p) - F_r(p)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \mu_i \quad (5.12)$$

Cette borne concernant les matrices de phase peut permettre d'accéder à une borne sur les phases elles-mêmes (en monovariante) par l'intermédiaire de la relation 5.11, page 130.

5.3.3 Troncature équilibrée stochastique (BST)

L'algorithme de phase matching le plus simple est la troncature équilibrée stochastique, notée BST pour Balanced Stochastic Truncation. Cette technique peut être considérée comme duale à la troncature équilibrée classique. Il permet de passer directement de l'étape 2 à l'étape 6 de la figure 5.3.2.

Le concept de troncature stochastique équilibrée a émergé dans le contexte de la réduction d'un spectre identifié de grande dimension [DP84].

5.3.3.1 Réalisations stochastiques équilibrées

Considérons les facteurs spectraux $G(p)$ et $V(p)$ associés respectivement aux solutions Q de (F.2) et P de (F.4). Une réalisation stochastique équilibrée au sens de Green [Gre88a] est obtenue en effectuant un changement de base dans lequel P et Q sont égaux et diagonaux. De façon équivalente, cette transformation équilibre le grammien de commandabilité de $G(p)$, facteur spectral à gauche, avec le grammien d'observabilité de $V(p)$, facteur spectral à droite stable et minimum de phase.

DÉFINITION 5.3.1 ([GRE88A, GRE88B, GA89])

Soit $G(p)$ une matrice de fonctions de transfert stable d'ordre n . Soit le spectre $\Phi(p) = G(p)G(p)^* = Z(p) + Z(p)^*$. Au facteur spectral $G(p)$ correspond le grammien Q . Introduisons $V(p)$ un facteur spectral à droite minimal stable et minimum de phase (donc carré) de $\Phi(p)$. $V(p)$ est associé à la matrice P_{min} (lemme F.2.1, page 250) qui est le grammien d'observabilité de $V(p)$ (relation (F.12, page 252).

Une réalisation d'état est dite stochastique équilibrée si :

$$P_{min} = Q = \Sigma = \mathbf{diag}(\mu_i), \quad (i = 1, \dots, n), \quad \mu_i \geq \mu_{i+1}$$

REMARQUE 5.3.1

Q vérifie $AQ + QA^T + BB^T = 0$ et d'après la relation (F.11), page 252, Q est solution de (F.10). Donc $Q \geq Q_{min}$. Par ailleurs, $P_{min}^{-1} = Q_{max}$ est la solution anti stabilisante de (F.10). Donc $P_{min}^{-1} \geq Q$. Ceci permet d'assurer que :

$$\Sigma \leq I$$

Étant donné $G(p)$ stable et carré, une réalisation stochastique équilibrée s'obtient donc directement en cherchant la transformation d'état pour laquelle le grammien de commandabilité Q égale le grammien d'observabilité de $V(p)$ choisi stable et minimum de phase. D'après la relation (F.13), page 253, une représentation d'état stochastique équilibrée peut s'obtenir en calculant une représentation équilibrée de $F_c(p)$.

5.3.3.2 Présentation de la troncature stochastique équilibrée

Cette méthode de réduction consiste à tronquer les matrices de la représentation d'état des facteurs spectraux dans une base stochastique équilibrée.

DÉFINITION 5.3.2

Soit l'expression concaténée (F.13) où $V(p)$ et $G(p)$ sont respectivement des facteurs spectraux à droite et à gauche de $\Phi(p) = Z(p) + Z(p)^*$:

$$\begin{bmatrix} Z(p) & G(p) \\ V(p) & F_c(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}DD^T & D \\ D^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ C_V \end{bmatrix} (pI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_V & B \end{bmatrix}$$

exprimée dans une base stochastique équilibrée, c'est-à-dire telle que :

$$\begin{aligned} A\Sigma + \Sigma A^T + BB^T &= 0 \\ A^T\Sigma + \Sigma A + C_V^T C_V &= 0 \end{aligned}$$

avec $\Sigma = \mathbf{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2) = \mathbf{diag}(\mu_i I_{r_i})$ où μ_i est de multiplicité r_i , $i = 1, \dots, m$, $1 \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n \geq 0$ et $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ avec $r = r_1 + \dots + r_h$, $h < m$.

Les matrices A , B , B_V , C et C_V partitionnées sont notées :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_V = \begin{bmatrix} B_{V1} \\ B_{V2} \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad C_2], \quad C_V = [C_{V1} \quad C_{V2}]$$

Les troncatures stochastiques équilibrées de $G(p)$, $V(p)$ et $Z(p)$ notées respectivement $G_r(p)$, $V_r(p)$ et $Z_r(p)$ sont :

$$G_r(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right] \quad (5.13)$$

$$V_r(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_{V1} \\ \hline C_{V1} & D^T \end{array} \right] \quad (5.14)$$

$$Z_r(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_{V1} \\ \hline C_1 & \frac{1}{2}DD^T \end{array} \right] \quad (5.15)$$

Le théorème suivant résume les principales propriétés du modèle réduit.

THÉORÈME 5.3.1

Soient $G(p)$ stable et $V(p)$ un facteur spectral à gauche stable et minimum de phase du spectre $\Phi(p) = G(p)G(p)^* = Z(p) + Z(p)^*$. Introduisons $G_r(p)$, $V_r(p)$ les troncatures stochastiques équilibrées de $G(p)$ et $V(p)$ et μ_i de multiplicité r_i , $i = 1, \dots, m$ (définition 5.3.2). Supposons que r , l'ordre de la réduction vérifie $r \geq p$ où p désigne le nombre de valeurs singulières μ_i unitaires. Alors :

(i) $V_r(p)$ et $G_r(p)$ sont asymptotiquement stables et minimaux.

(ii) Le spectre réduit $\Phi_r(p)$ vérifie :

$$\Phi_r(p) = Z_r(p) + Z_r(p)^* = G_r(p)^* G_r(p) = V_r(p) V_r(p)^*$$

(iii) Les matrices de phase $F(p) = V(p)^{-*}G(p)$ et $F_r(p) = V_r(p)^{-*}G_r(p)$ vérifient :

$$\|F(p) - F_r(p)\| \leq 4 \sum_{i=r+1}^n \mu_i \quad (5.16)$$

(iv) Les zéros à partie réelle positive de $G_r(p)$ sont les mêmes que ceux de $G(p)$.

(v)

$$\mu_{r+1} \leq \|V(p)^{-*}(G(p) - G_r(p))\|_\infty = \|\Delta_{rel}(p)\|_\infty \leq \prod_{i=r+1}^m \frac{1 + \mu_i}{1 - \mu_i} - 1 \quad (5.17)$$

(vi) De plus, si $G(p)$ est carré alors une borne ⁴ plus fine que la précédente est :

$$\mu_{r+1} \leq \|G(p)^{-1}(G(p) - G_r(p))\|_\infty = \|\Delta_{rel}(p)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^m \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \quad (5.18)$$

Démonstration : Toutes les démonstrations se trouvent dans [GA89, Gre88a, HJS84].
□

La BST constitue donc un algorithme simple et direct de phase matching dans le sens où toutes les opérations de la figure 5.3.2 se résument au calcul de $V(p)$ et à la troncature équilibrée de $F_c(p)$.

5.3.3.3 Mise en œuvre

La mise en œuvre de la BST est proche de celle de la troncature équilibrée à ceci près qu'au lieu d'équilibrer 2 solutions d'équations de Lyapunov, il s'agit de balancer la solution d'une équation de Lyapunov (grammien de commandabilité de F_c ou de G) avec la solution d'une équation de Riccati (grammien d'observabilité de F_c ou de V).

1. Calcul du grammien de commandabilité Q de $G(p)$
2. Calcul de P_{min} , solution stabilisante de l'équation de Riccati :

$$P_{min}A + A^T P_{min} + (C - B_Z^T P_{min})^T (DD^T)^{-1} (C - B_Z^T P_{min}) = 0$$

avec $B_Z = QC^T + BD^T$.

3. Suivre les étapes 2 à 5 de l'algorithme de la section 3.3.3, page 62, en prenant $P = P_{min}$. Σ_H contient finalement les μ_i (facteurs canoniques de corrélation dans le cas monovarié et minimum de phase).

5.3.3.4 Lien avec la méthode de Enns

Nous pouvons remarquer que lorsque $G(p)$ est stable, minimum de phase et carré, la BST est équivalente à la méthode de Enns présentée dans la section 5.2.1.1, page 123 [Zho93a, CGZ95]. Le processus calculatoire aboutissant à la solution s'avère être le même. En effet, dans ce cas particulier, le calcul de P_{min} peut être évité car :

$$P_{min} = P(I + QP)^{-1} \quad (5.19)$$

⁴Dans [CZ95], un contre-exemple mettant en défaut cette borne est donné. Néanmoins, elle est utilisée avec succès dans les exemples de ce mémoire.

où P est solution de l'équations (5.5), Q désignant le grammien de commandabilité de $G(p)$. L'égalité (5.19) provient directement des expressions (5.5), (F.9) et (F.11) définissant P_{min} . Dès lors, nous pouvons montrer facilement d'après (5.19) qu'un changement de base diagonalisant PQ diagonalise aussi $P_{min}Q$ et réciproquement. Le modèle réduit obtenu est donc le même, mais l'utilisation de la méthode de Enns permet d'éviter la résolution de l'équation de Riccati associée au facteur spectral pour la BST.

Dans le cas non-carré présenté dans la section 5.2.1.3, l'équivalence entre la BST et la méthode de Enns est vraie si l'on considère un inverse à droite $G^+(p)$ particulier de $G(p)$ donné dans [CGZ95].

De la relation (5.19), une relation entre les μ_i et les σ_i de la section 5.2.1.1 est :

$$\mu_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{1 + \sigma_i^2}} \tag{5.20}$$

La borne de la propriété 5.2.1 se déduit de la borne (5.18) en remarquant d'après (5.20) que :

$$\frac{\mu_i}{1 - \mu_i} = \sigma_i(\sqrt{1 + \sigma_i^2} + \sigma_i)$$

5.3.4 Bornes sur l'erreur de gain et de phase en monovariable

Une borne supérieure ϵ_{rel} sur le module d'une erreur relative implique des bornes sur les erreurs de modèle en module et en phase.

Concernant l'erreur de modèle en module $||G(j\omega)|_{dB} - |G_r(j\omega)|_{dB}||$, nous disposons de la borne (2.30) page 41 du chapitre 2 qui est une conséquence directe de la borne ϵ_{rel} . Nous disposons de 2 bornes supérieures possibles pour l'erreur en phase $|\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_r(j\omega))|$. La première est valable dans tous les cas et dépend directement de ϵ_{rel} par la relation (2.32) du chapitre 2. Par ailleurs, lorsque $G_r(p)$ est obtenu par phase matching, la relation (5.11) constitue une seconde borne. Nous considérons dans la suite la plus petite des 2 bornes.

Dans le cas de la BST et de la réduction pas à pas au sens de la norme de Hankel, la connaissance d'une borne ϵ_{rel} et d'une borne sur l'erreur de réduction de la matrice de phase aboutit aux relations suivantes.

Bornes pour la BST

Dans le cas de la BST, l'erreur sur la matrice de phase est (5.16), et ϵ_{rel} est donné par (5.18). Seule la plus petite des 2 est considérée, à savoir :

$$|\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_r(j\omega))| \leq \min \left(\frac{1}{2} \mathbf{acos} \left(1 - \frac{(4 \sum_{i=r+1}^n \mu_i)^2}{2} \right), \mathbf{atan} \left(2 \sum_{i=r+1}^n \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \right) \right)$$

De même, une borne a priori ⁵ sur l'erreur de module en décibels est donnée par la relation (2.30), :

$$||G(j\omega)|_{dB} - |G_r(j\omega)|_{dB}|| \leq 8.69 \max \left(\log \left(1 + 2 \sum_{i=r+1}^n \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \right), \left| \log \left(1 - 2 \sum_{i=r+1}^n \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \right) \right| \right)$$

⁵Borne valable si $2 \sum_{i=r+1}^n \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \leq 1$.

Bornes pour la méthode Hankel pas à pas

Compte tenu de la borne (5.12) sur la matrice de phase et de la borne (5.10) sur ϵ_{rel} , les bornes sur la phase et le module deviennent :

$$|\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_r(j\omega))| \leq \min \left(\frac{1}{2} \mathbf{acos} \left(1 - \frac{(2 \sum_{i=r+1}^n \mu_i)^2}{2} \right), \mathbf{atan} \left(\prod_{i=r+1}^n (1 + \mu_i) - 1 \right) \right)$$

De même, une borne a priori ⁶ sur l'erreur de module en décibels est donnée par la relation (2.30), page 41 du chapitre 2 :

$$| |G(j\omega)|_{dB} - |G_r(j\omega)|_{dB} | \leq 8.69 \max \left(\log \left(\prod_{i=r+1}^n (\mu_i + 1) \right), \left| \log \left(2 - \prod_{i=r+1}^n (\mu_i + 1) \right) \right| \right)$$

5.4 Etude des exemples

Dans cette section, nous étudions sur les exemples 1 et 3 des modèles introduits dans la section 1.3, page 21 la BST et l'approximation pas à pas au sens de la norme de Hankel de l'erreur relative. Ces 2 approches sont des algorithmes de phase matching ce qui n'est pas le cas, de façon générale, de l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel de l'erreur relative.

Nous rappelons que le modèle du TGEN (exemple 2) étant strictement propre, l'erreur relative ne peut être définie pour toutes les pulsations ; une inverse restreinte à une gamme de basses pulsations pourrait être considérée et intervenir lors d'une réduction absolue pondérée.

5.4.1 Exemple de Safonov

Nous rappelons que $G(p)$ est stable et minimum de phase. Dans ce cas, les valeurs singulières de Hankel de la matrice de phase $F = G^{-*}G$ (ou de sa partie causale notée F_c) sont les facteurs canoniques de corrélation :

$$\mu_i = [0.9997 \quad 0.9982 \quad 0.9734 \quad 0.7158 \quad 0.5592 \quad 0.0032 \quad 0.0005]$$

La BST et l'approximation pas à pas au sens de la norme de Hankel sont présentées dans la suite. Ces techniques assurent a priori que les modèles réduits obtenus seront stables et minimums de phase. Pour chacune des 2 méthodes, nous illustrons les bornes sur l'approximation en gain et phase, développées dans la section 5.3.4, à savoir $| |G(j\omega)|_{db} - |G_r(j\omega)|_{db} |$ et $\varphi(j\omega) = |\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_r(j\omega))|$.

BST

Les bornes inférieure et supérieure du théorème 5.3.1 sont représentées sur la figure suivante.

⁶Borne valable si $\prod_{i=r+1}^n (\mu_i + 1) - 1 \leq 2$.

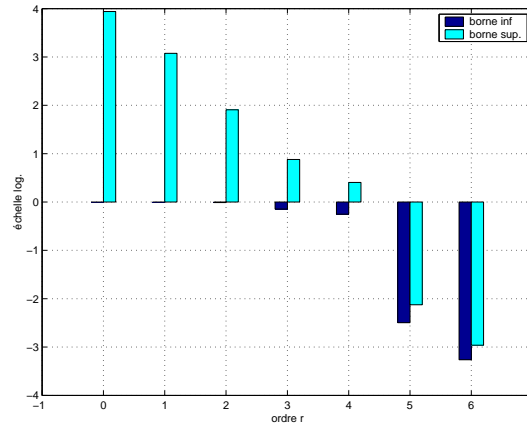


FIG. 5.2 – Bornes inférieure et supérieure sur $\|\Delta_{rel}\|_\infty$ en fonction de r .

Dans le cas présent, les bornes de réduction ne statuent pas sur l'éventuelle qualité d'un modèle réduit à l'ordre 4. Les modèles réduits aux ordres 5 et 6 sont représentés en annexe page 257. A l'ordre 4, nous avons :

$$G_4(p) = \frac{39.98(p + 0.1043)(p^2 + 0.00253p + 0.2294)}{(p + 6.48)(p + 0.00703)(p^2 + 4.967p + 6.367)}$$

Une telle solution donne $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = 2.543$.

Les figures suivantes représentent les tracés fréquentiels ainsi que les erreurs en module et en phase.

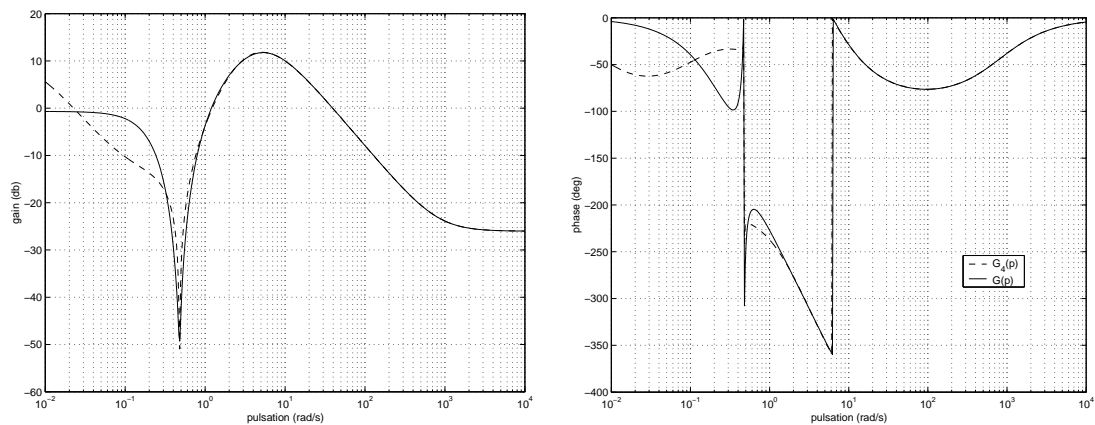


FIG. 5.3 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_4(j\omega)$

Le module de l'erreur relative $\Delta_{rel}(j\omega)$, représenté sur la figure 5.8 page 140, est comparé plus loin à celui obtenu par la méthode pas à pas au sens de la norme de Hankel. Les erreurs en module et en phase, accompagnées de leur borne respective, sont représentées ci dessous.

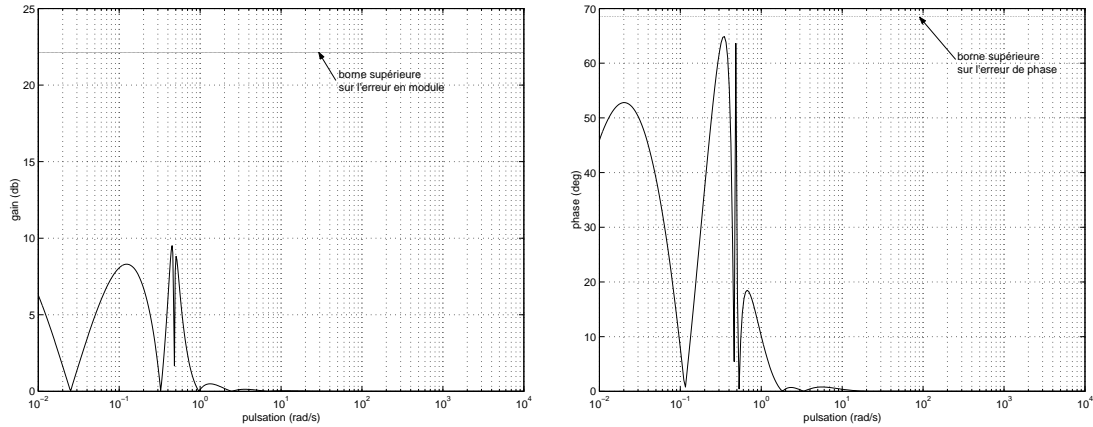


FIG. 5.4 – Erreurs de module $| |G(j\omega)|_{dB} - |G_4(j\omega)|_{dB} |$ et de phase $|\arg(G(j\omega)) - \arg(G_4(j\omega))|$ et bornes supérieures associées

Contrairement à la troncature équilibrée, la BST à l'ordre 4 conserve l'anti-résonance mais donne une moins bonne approximation à des pulsations inférieures.

Pour plus de clarté dans la comparaison entre les méthodes, les différents indicateurs de qualité du modèle réduit sont indiqués dans une section spécifique, la section page 139.

Hankel pas à pas

La borne supérieure assurée par cette méthode est donnée par (5.10). La borne inférieure demeure la même μ_{r+1} , quel que soit $G_r(p)$. Le tracé de ces bornes en fonction de r est représenté sur la figure suivante.

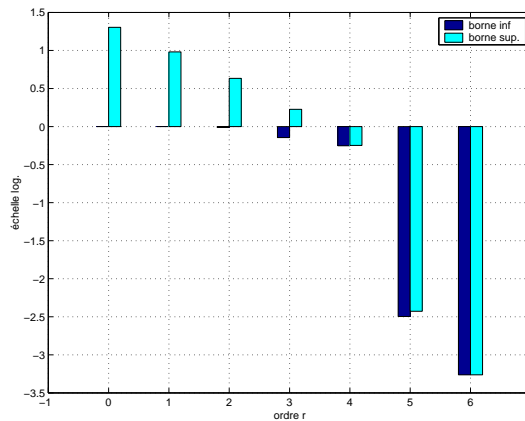


FIG. 5.5 – Bornes inférieure et supérieure sur $\|\Delta_{rel}\|_\infty$ en fonction de r

Nous remarquons que le modèle réduit à l'ordre 4 est quasi-optimal car la borne supérieure vaut approximativement la borne inférieure $\mu_5 = 0.559$. Comme dans la mise en œuvre de la BST, étudions le modèle réduit à l'ordre 4. Les modèles aux ordres 5 et 6 sont situés en annexe page 257.

La fonction de transfert de la solution à l'ordre 4 est :

$$G_4(p) = \frac{65.91(p + 0.8618)(p^2 + 0.006084p + 0.2275)}{(p + 45.25)(p + 0.03247)(p^2 + 0.8481p + 6.074)}$$

ce qui mène à une erreur de norme $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_{\infty} = 0.565$.

Les figures suivantes représentent les tracés fréquentiels ainsi que les erreurs en module et en phase.

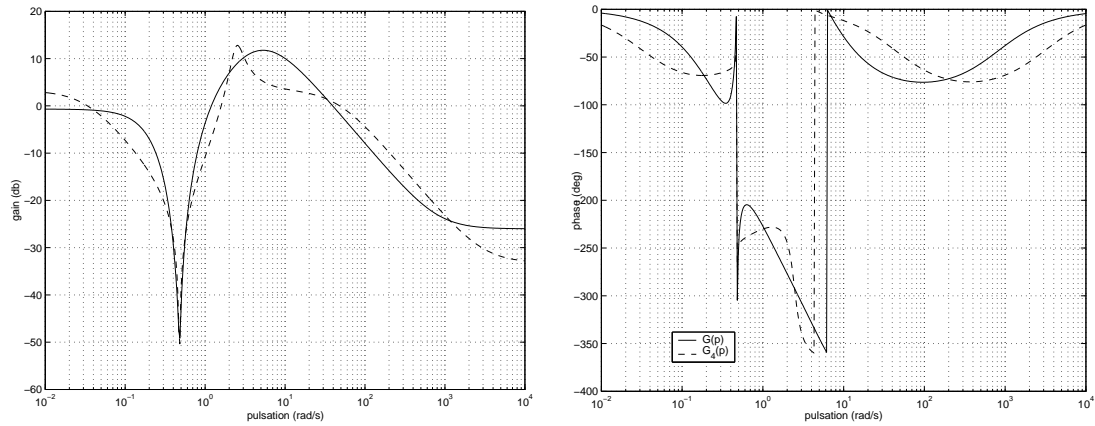


FIG. 5.6 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_4(j\omega)$ (BST)

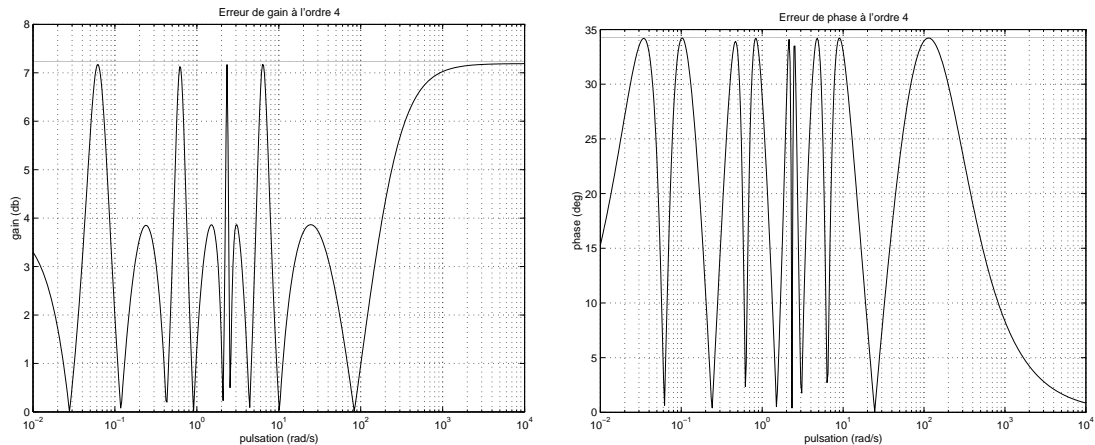


FIG. 5.7 – Erreurs de module $||G(j\omega)|_{dB} - |G_4(j\omega)|_{dB}||$ et de phase $|\arg(G(j\omega)) - \arg(G_4(j\omega))|$ et bornes supérieures associées

L'anti-résonance est conservée comme dans le cas de la BST mais la fiabilité du modèle réduit à des pulsations inférieures laisse encore à désirer.

Comparaison BST / Hankel relatif pas à pas

$G_4(p)$ obtenu par BST ou par Hankel pas à pas possède un pôle réel proche d'un intégrateur au lieu des pôles complexes conjugués à $0.3rad/s$ présents dans $G(p)$. De plus, $G_4(p)$ ne possède plus qu'une seule paire de zéros complexes conjugués mal amortis au lieu des 2 paires présentes dans $G(p)$. La figure suivante permet une comparaison entre les modules des erreurs relatives calculées à partir des solutions $G_4(p)$ précédentes : celle de la BST et celle du Hankel pas à pas.

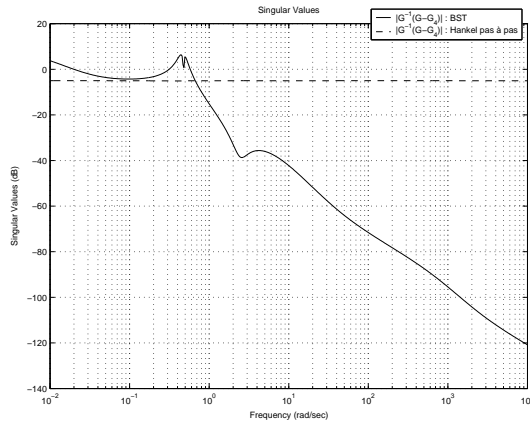


FIG. 5.8 – Modules des erreurs relatives pour $G_4(j\omega)$ obtenu par BST et Hankel pas à pas

Dans le cas de la réduction de Hankel pas à pas, l'erreur est quasiment all-pass. Ceci est justifié au vu des bornes supérieure et inférieure à l'ordre 4 qui sont presque identiques. Les 2 tableaux suivants représentent la performance des méthodes BST et Hankel relatif par l'intermédiaire du calcul de $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty$ et de l'indicateur ρ_r^{ex1} introduit page 23. Les bornes supérieure et inférieure associées aux 2 méthodes figurent respectivement en deuxième et troisième colonne.

BST				
r	$\ G^{-1}(G - G_r)\ _\infty$	$2 \sum_{i=r+1}^7 \mu_i$	μ_{r+1}	ρ_r^{ex1}
6	1×10^{-3}	1.1×10^{-3}	5.5×10^{-4}	1×10^{-3}
5	7.49×10^{-3}	7.5×10^{-3}	3.2×10^{-3}	7.49×10^{-3}
4	2.543	2.545	0.559	2.543

Hankel relatif pas à pas				
r	$\ G^{-1}(G - G_r)\ _\infty$	$\prod_{i=r+1}^7 (1 + \mu_i) - 1$	μ_{r+1}	ρ_r^{ex1}
6	5.46×10^{-4}	5.46×10^{-4}	5.46×10^{-4}	5.46×10^{-4}
5	3.7×10^{-3}	3.7×10^{-3}	3.2×10^{-3}	3.7×10^{-3}
4	0.565	0.565	0.559	0.565

Des résultats précédents, nous remarquons que l'approximation Hankel pas à pas fournit une borne supérieure fine et des modèles réduits au sens de l'erreur relative meilleurs que ceux obtenus par la BST. Le modèle réduit à l'ordre 4 par la norme de Hankel est de plus proche de l'optimalité compte tenu du faible écart (1%) entre la norme de l'erreur relative et la borne inférieure.

L'indicateur ρ_r^{ex1} vaut dans chaque cas la norme H_∞ de l'erreur relative. Ceci montre simplement que la valeur maximale du module de l'erreur relative est atteinte dans la gamme de pulsations pertinente : $[0, 2\text{rad/s}]$.

5.4.2 Exemple du bief de type 1

BST

Les bornes supérieure et inférieure associées à la BST sont tracées sur la figure ci-dessous.

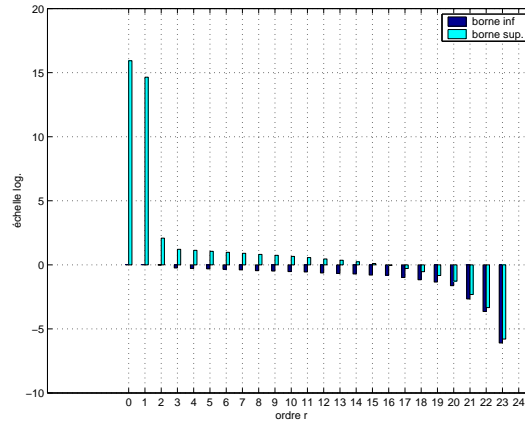


FIG. 5.9 – Bornes inférieure et supérieure sur $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty$ en fonction de r .

$$\mu_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.981 & 0.572 & 0.521 & 0.482 \dots \\ 0.449 & 0.401 & 0.349 & 0.327 & 0.294 & 0.278 \dots \\ 0.231 & 0.215 & 0.193 & 0.158 & 0.156 & 0.102 \dots \\ 0.0677 & 0.0453 & 0.023 & 2 \times 10^{-3} & 2.3 \times 10^{-4} & 8 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

Comme dans le cas de l'erreur absolue, les modèles réduits aux ordres $r = 17$ et $r = 18$ sont étudiés. Les solutions calculées donnent pour $r = 18$ $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = 8.7 \times 10^{-2}$ et pour $r = 17$ $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = 0.171$.

La figure suivante représente les tracés fréquentiels de $G(j\omega)$, $G_{17}(j\omega)$ et $G_{18}(j\omega)$.

Les valeurs singulières de l'erreur relative sont représentées ci-dessous.

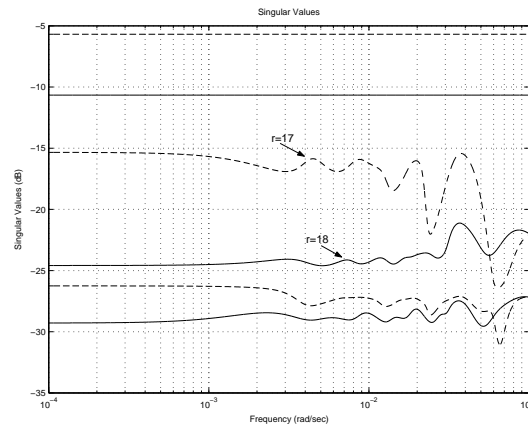


FIG. 5.11 – Valeurs singulières de l'erreur relative $\Delta_{rel}(j\omega)$ pour $r = 17$ et $r = 18$ et borne supérieure (5.18)

Afin d'établir une comparaison directe entre les méthodes, les indicateurs associés aux modèles réduits précédemment calculés sont situés à la fin de la section suivante.

Hankel pas à pas

Les bornes inférieure et supérieure sont représentées sur la figure suivante.

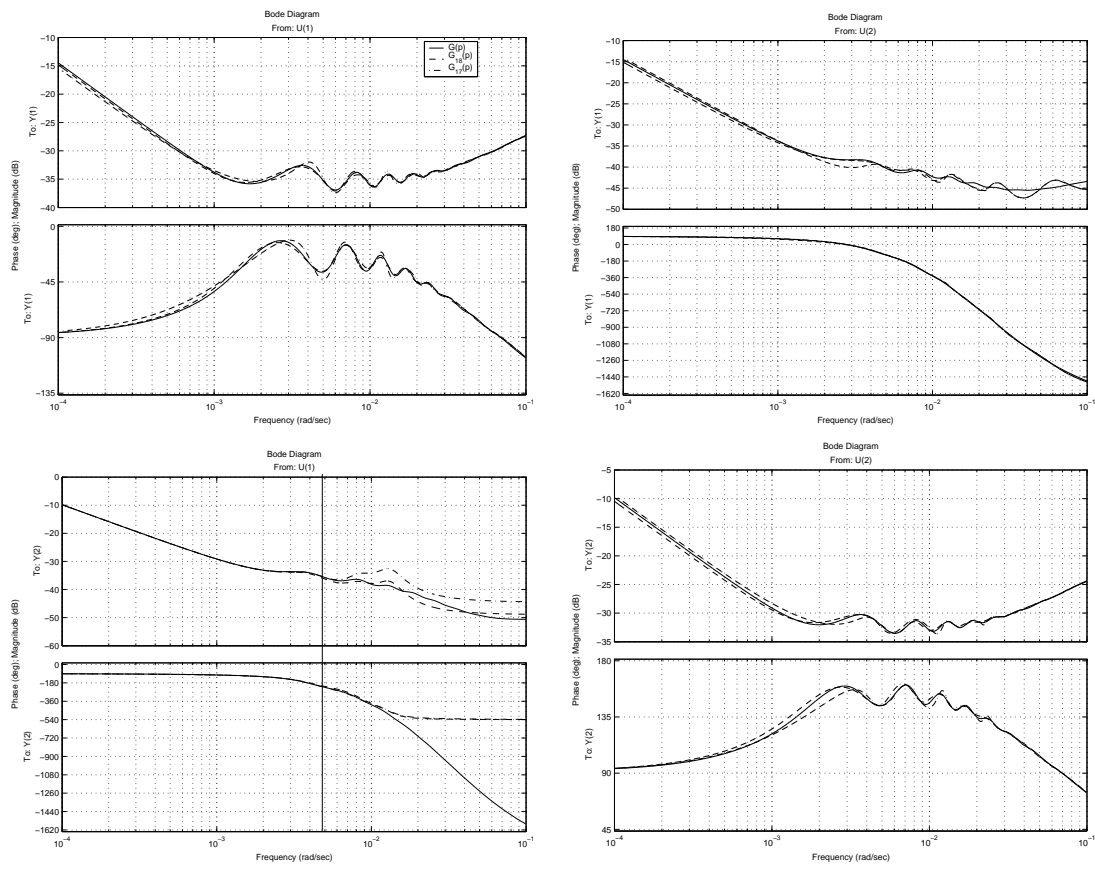


FIG. 5.10 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$, $G_{17}(j\omega)$ et $G_{18}(j\omega)$

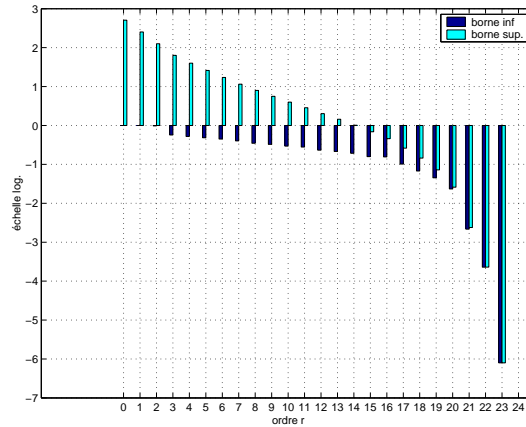


FIG. 5.12 – Bornes inférieure et supérieure sur $\|\Delta_{rel}\|_\infty$ en fonction de r

Dans le cas présent, nous étudions les modèles réduits à l'ordre $r = 17$ et $r = 18$ comme dans le cas de la BST. Comme l'indique la figure précédente, l'ordre 14 n'est pas dénué d'intérêt. Celui-ci fait aussi l'objet d'une étude.

Le calcul des modèles réduits mène à des solutions qui vérifient à l'ordre 18 $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = 0.115$, à l'ordre 17 $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = 0.15$ et à l'ordre 14 $\|\Delta_{rel}(j\omega)\|_\infty = 0.296$.

Les tracés fréquentiels des modèles réduits aux ordres 17 et 18 sont présentés sur la figure suivante.

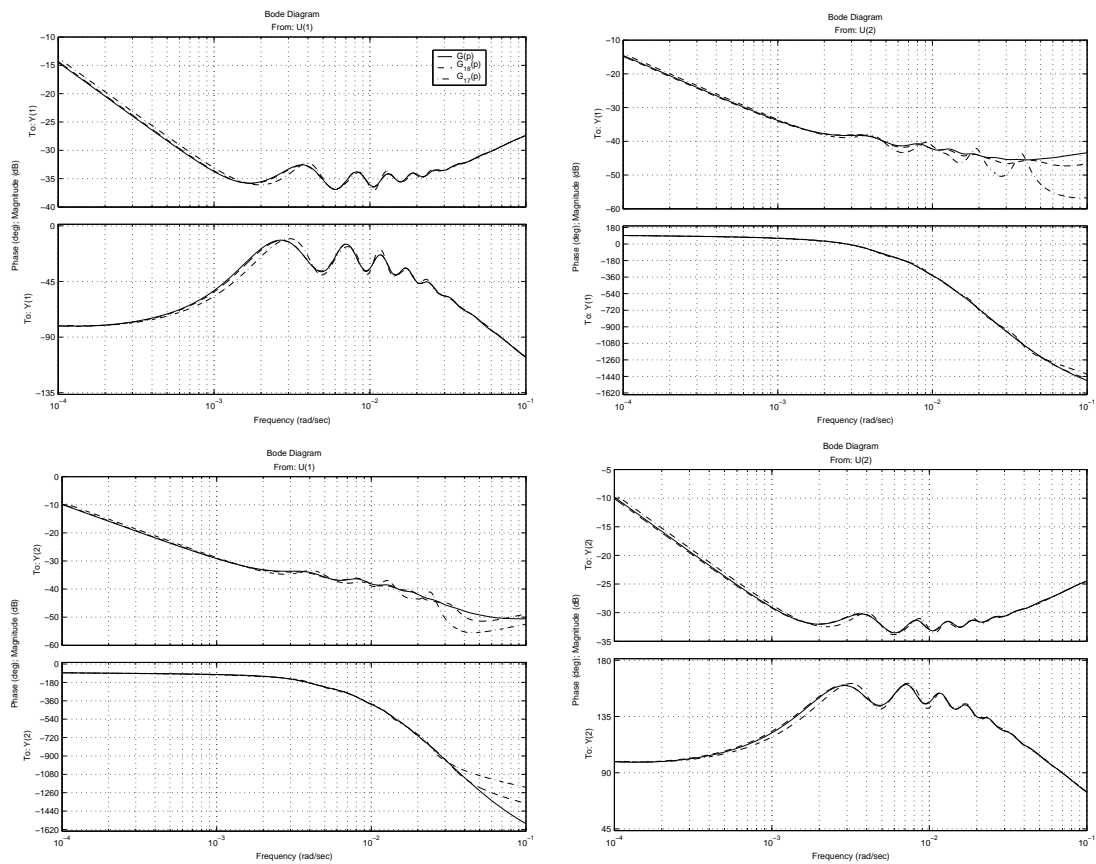


FIG. 5.13 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$, $G_{17}(j\omega)$ et $G_{18}(j\omega)$

Les valeurs singulières des erreurs relatives sont représentées ci-dessous.

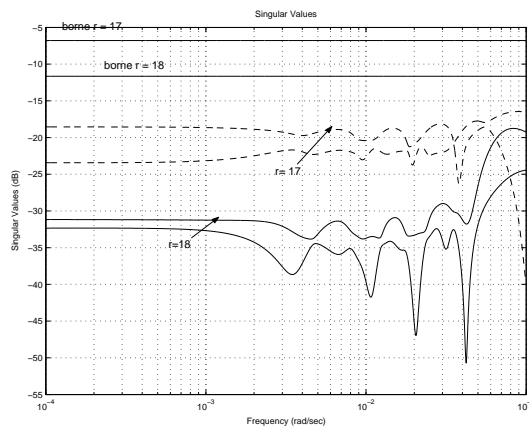


FIG. 5.14 – Valeurs singulières de l'erreur relative $\Delta_{rel}(j\omega)$ et borne supérieure (5.10) pour $r = 17$ et $r = 18$

La détérioration de la qualité du modèle réduit à l'ordre 14 n'est pas flagrante comme l'indique la figure suivante.

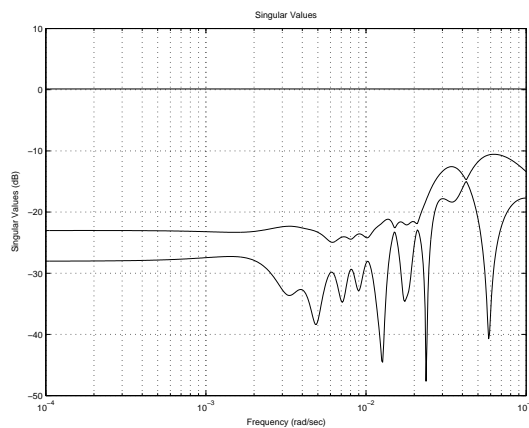


FIG. 5.15 – Valeurs singulières de l'erreur relative $\Delta_{rel}(j\omega)$ et borne supérieure (5.10) pour $r = 14$

A travers le tableau suivant, nous remarquons que le modèle réduit à l'ordre 14 conserve des indicateurs ρ^{ex3} et ρ^{ex3b} inférieurs à ceux du modèle d'ordre 17.

BST					
r	$\ G^{-1}(G - G_r)\ _\infty$	$2 \sum_{i=r+1}^{24} \frac{\mu_i}{1 - \mu_i}$	μ_{r+1}	ρ_r^{ex3}	ρ_r^{ex3b}
18	8.7×10^{-2}	0.29	6.7×10^{-2}	6.3×10^{-2}	8.2×10^{-2}
17	0.171	0.519	0.102	0.171	0.269
Hankel relatif pas à pas					
r	$\ G^{-1}(G - G_r)\ _\infty$	$\prod_{i=r+1}^{24} (1 + \mu_i) - 1$	μ_{r+1}	ρ_r^{ex3}	ρ_r^{ex3b}
18	0.115	0.261	6.7×10^{-2}	2.9×10^{-2}	3.3×10^{-2}
17	0.15	0.457	0.102	0.119	0.129
14	0.296	1.44	0.193	0.076	0.125

Le critère relatif abordé par la technique pas à pas au sens de la norme de Hankel amène à un ordre plus faible que pour la BST et l'ensemble des techniques en erreur absolue (Hankel absolu, troncature équilibrée).

5.5 Erreur relative pondérée

La motivation d'un critère relatif pondéré a été justifiée dans la section 2.4.4, page 45. Les deux algorithmes développés dans ce qui suit sont basés sur les outils déjà introduits pour l'erreur absolue pondérée et la BST. Le premier est la réduction optimale au sens d'une norme de Hankel pondérée. Le second est une extension de la BST [KAM95b].

5.5.1 Réduction relative pondérée Hankel-optimale

Le cas présent est un problème particulier de minimisation d'une norme de Hankel pondérée. Dans la section 4.2.5.2, page 109, une telle minimisation a été abordée dans le cas de pondérations anticausales et inversement anticausales. Cette hypothèse sur les pondérations rendait le calcul de la solution simple car permettait de se ramener facilement à la réduction optimale au sens de la norme de Hankel d'une erreur absolue. Par ailleurs, la remarque 4.2.2, page 109, montrait qu'un tel choix de pondération n'affecte pas l'erreur H_∞ .

Nous nous intéressons donc au critère suivant :

$$\gamma_H = \mathbf{min}_{G_r \in \mathcal{RH}_\infty^r} \|V^{-*}(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_H$$

où $W_i(p)$ est une pondération anticausale et inversement anticausale et $V(p)$ un facteur spectral à droite de $G(p)$ stable et minimum de phase.

Le calcul de la solution Hankel-optimale se décompose en 3 parties.

- le calcul de $V(p)$ à partir du théorème F.1.1, page 248,
- le calcul du modèle réduit $G_r(p)$ selon la démarche de l'algorithme page 110,
- un modèle réduit optimal $G_r(p)$ au sens d'une norme de Hankel étant défini à un terme direct près D_r .

Il est possible d'optimiser le terme direct D_r de façon à minimiser l'erreur H_∞ relative pondérée selon le résultat suivant.

LEMME 5.5.1

Soit $G(p), G_r(p), W_o(p)$ des matrices de fonctions de transfert carrées et inversibles sur l'axe imaginaire.

$$D_{opt} = \mathbf{argmin}_{D_r} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))G^{-1}(j\omega)\|_\infty$$

est solution du problème d'optimisation convexe de dimension finie suivant :

$$D_{opt} = \mathbf{argmin}_{D_r, P} \gamma$$

$$P = P^T$$

$$\mathcal{K}(\gamma, D_r, P) + \mathcal{K}(\gamma, D_r, P)^T \geq 0$$

avec

$$\mathcal{K}(\gamma, D_r, P) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|cc} P & 0 & \\ \hline 0 & \gamma^2 I & 0 \\ & 0 & D_r \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \ \mathcal{B} \\ \hline N \end{array} \right]$$

où :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_r & C_{Z_o} & I & D_{Z_o} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I/2 & 0 \\ D^{-1}C & 0 & 0 & -D^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 & 0 \\ -B_r D^{-1}C & A_r & 0 \\ 0 & 0 & A_{Z_o} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} BD^{-1} & 0 \\ B_r D^{-1} & 0 \\ 0 & B_{Z_o} \end{bmatrix}$$

$$Z_o(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{Z_o} & B_{Z_o} \\ \hline C_{Z_o} & D_{Z_o} \end{array} \right] / W_o(p)^{-1} W_o(p)^{-*} = Z_o(p) + Z_o(p)^* \quad (5.21)$$

REMARQUE 5.5.1

Le calcul $Z_o(p)$ vérifiant (5.21) est explicité dans la section F.3, page 252.

5.5.2 Extension de la BST au cas pondéré

Une extension de la BST permet de tenir compte de la présence d'une pondération. Considérons $W_i(p)$ une pondération fréquentielle stable placée en entrée du critère relatif pondéré $\|G(p)^{-1}(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty$.

L'extension proposée dans [KAM95b] s'inspire de la méthode de Enns. Le critère relatif pondéré pouvant se réécrire $\|V(p)^{-*}(G(p) - G_r(p))W_i(p)\|_\infty$, la démarche consiste à équilibrer le grammien d'observabilité de $F_c(p) = [V(p)^{-*}G(p)]_+$ noté P_{min} avec la matrice Q issue du grammien de commandabilité de $G(p)W_i(p)$ noté Q_c (définition 4.2.1, page 103) :

$$Q_c = \begin{bmatrix} Q & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Cette technique est très semblable à la méthode de Enns et à la BST car l'approche considère la partie stable de $F_c(p)$. Les garanties de la BST disparaissent. L'existence d'une borne supérieure a priori, le nombre de zéros non minimum de phase dans $G_r(p)$, et la stabilité de $G_r(p)$ sont des problèmes ouverts.

5.5.3 Exemple de Safonov

Réduction relative pondérée au sens de la norme de Hankel

L'application de la BST sur cet exemple (page 136) a révélé qu'un modèle réduit à l'ordre 4 conserve bien l'anti-résonance mais dégrade les basses pulsations. Introduisons donc une pondération simple $W_i(p)$ du premier ordre, stable et inversement stable qui privilégie les basses pulsations.

$$W_i(p) = 10^{-5} \frac{p + 1000}{p + 0.01}$$

La solution obtenue, après optimisation du terme direct, est :

$$G_4(p) = \frac{2.7923(p^2 + 0.1313p + 0.2195)(p^2 + 0.02454p + 0.2283)}{(p^2 + 0.4523p + 0.0672)(p^2 + 2.058p + 2.253)}$$

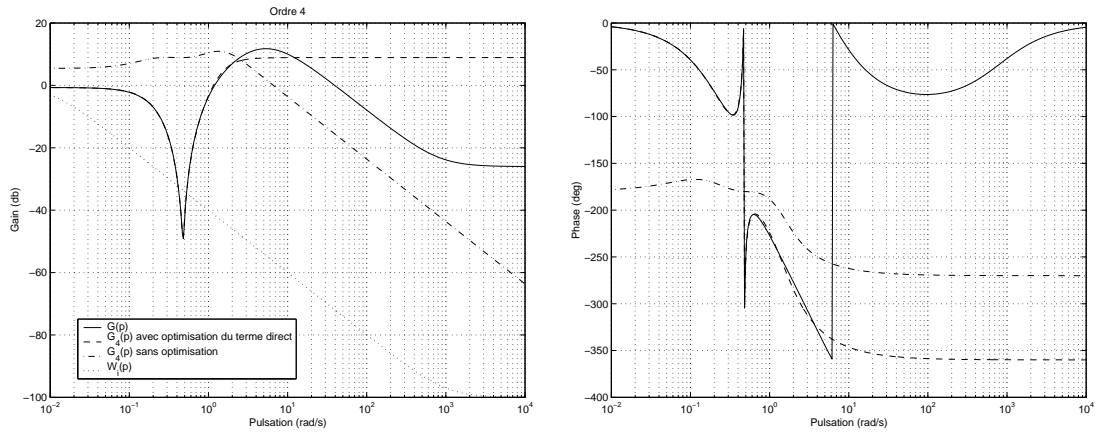


FIG. 5.16 – Réduction relative pondérée selon la norme de Hankel $r = 4$

Le résultat obtenu est bien en accord avec le choix de la pondération. Les basses pulsations sont respectées jusqu'à l'anti-résonance. Le modèle réduit obtenu est par ailleurs minimum de phase. Nous retrouvons approximativement dans $G_4(j\omega)$ les 2 paires de zéros complexes conjugués mal-amortis de $G(j\omega)$. Notons ici que grâce à l'optimisation du terme direct, les zéros de la solution ont presque repris leur position initiale. Comparons l'erreur relative issue du modèle réduit à l'ordre 4 obtenu par réduction relative pas à pas au sens de la norme de Hankel et réduction optimale relative pondérée au sens de la norme de Hankel.

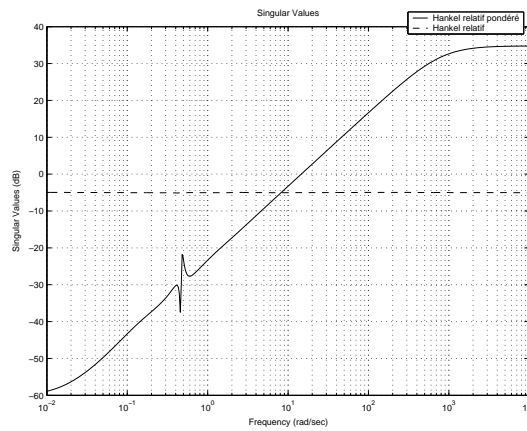


FIG. 5.17 – Comparaison des erreurs relatives $|G(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_4(j\omega))|$ pour $G_4(j\omega)$ obtenu par réduction relative et relative pondérée au sens de la norme de Hankel

La pondération joue un rôle notable en basses pulsations en entraînant une amélioration importante de l'erreur relative dans la gamme de pulsation privilégiée. Le modèle réduit obtenu par la réduction relative pondérée est minimum de phase. De plus, il tend à conserver les 2 paires de zéros complexes conjugués mal amortis, ce qui n'était pas le cas du modèle réduit obtenu par Hankel relatif pas à pas.

Méthode	$\ G(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_4(j\omega))W_i(j\omega)\ _\infty$	ρ_4^{ex1}
Hankel relatif pondéré	1.7×10^{-3}	0.136

Réduction par BST pondérée

La pondération considérée est la même que dans la section précédente. L'application de la BST pondérée aboutit au modèle réduit suivant :

$$G_4(p) = \frac{0.05(p + 1.352)(p + 2.27 \times 10^{-5})(p^2 - 0.6602p + 0.7541)}{(p + 0.1733)(p + 0.001307)(p^2 + 0.703p + 0.3183)}$$

Celui-ci présente une paire de zéros complexes conjugués instable. La figure suivante représente les tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_4(j\omega)$.

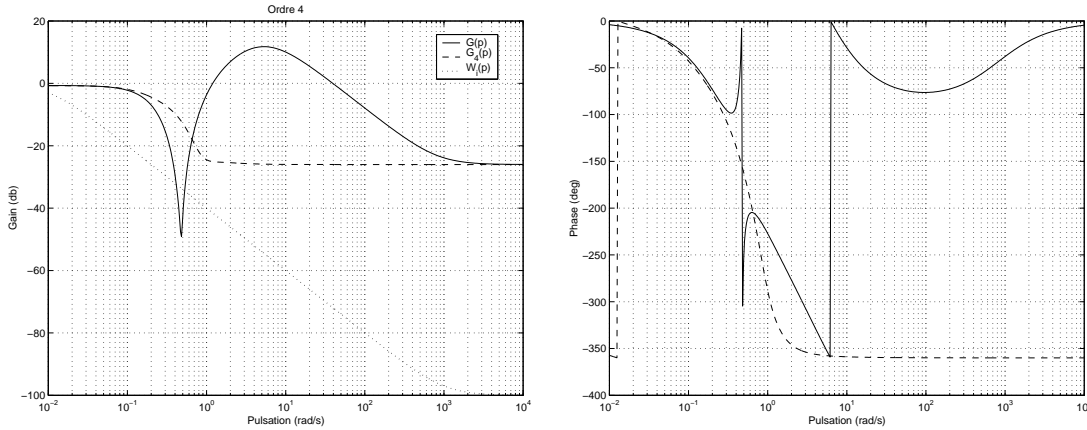


FIG. 5.18 – Réduction par BST pondérée $r = 4$

L'anti-résonance n'est pas retrouvée dans le modèle réduit. Une comparaison du module de l'erreur relative est faite entre le modèle réduit $G_4(p)$ obtenu par BST et $G_4(p)$ obtenu par BST pondérée.

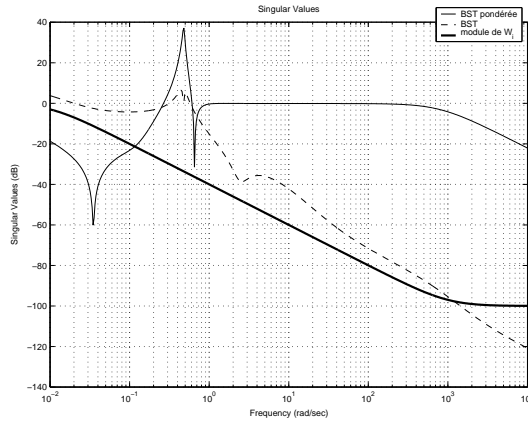


FIG. 5.19 – Comparaison des modules des erreur relatives $|G(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_4(j\omega))|$ pour $G_4(p)$ obtenu par BST et BST pondérée

L'amélioration de l'erreur relative en basses pulsations n'est pas aussi significative que dans la méthode précédente. Comme le montre le tableau suivant, la solution obtenue possède un indicateur ρ_4^{ex1} moins intéressant que celui obtenu précédemment avec la BST.

Méthode	$\ G(j\omega)^{-1}(G(j\omega) - G_4(j\omega))W_i(j\omega)\ _\infty$	ρ_4^{ex1}
BST pondérée	1.58	75.3

5.5.4 Exemple du bief de type 1

L'ajout d'une pondération est ici justifié par la nécessité de ne conserver que les basses pulsations allant jusqu'au premier mode oscillant, c'est-à-dire jusqu'à $5 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$. Introduisons la pondération d'entrée $W_i(p) = w_i(p)^3$ où $w_i(p)$ est donnée par :

$$w_i(p) = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-5} \frac{p + 100}{p + 0.005} & 0 \\ 0 & 5 \cdot 10^{-5} \frac{p + 100}{p + 0.005} \end{bmatrix}$$

Réduction par BST pondérée

Dans le cas présent, un ordre $r = 7$ est retenu. Ses caractéristiques fréquentielles sont représentées sur la figure suivante.

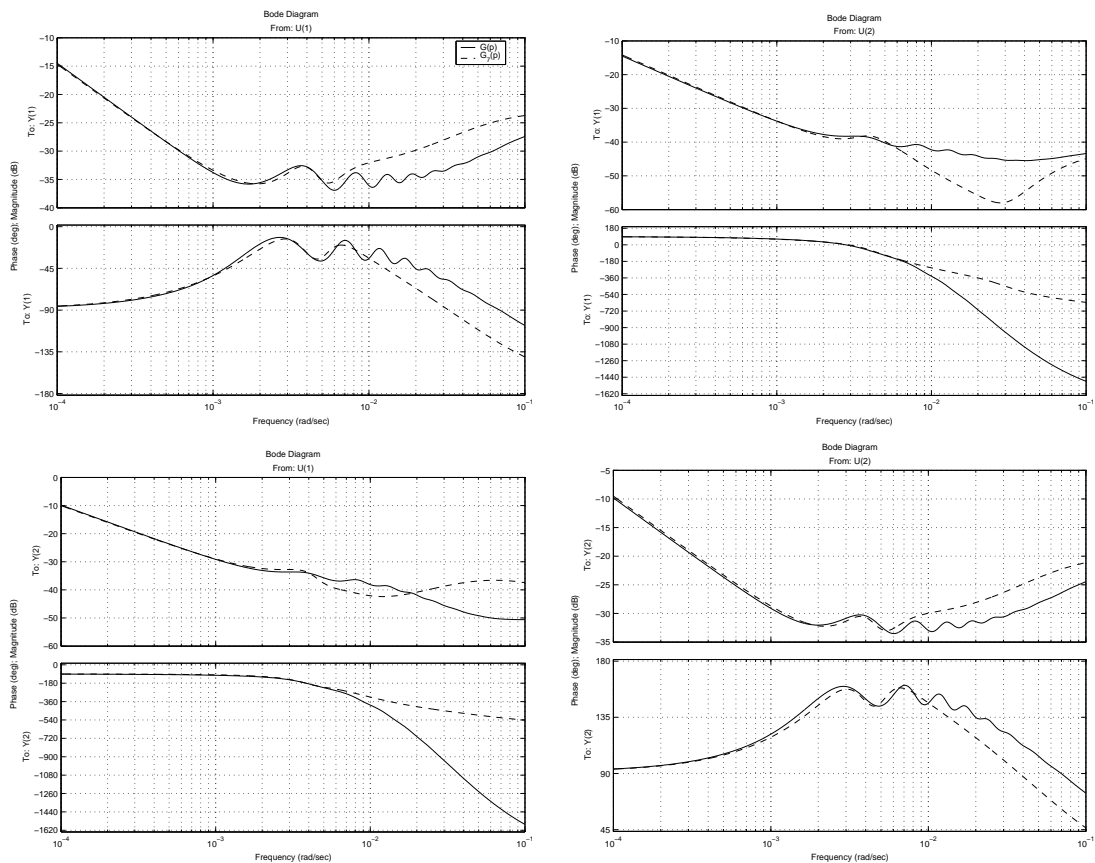


FIG. 5.20 – Tracés fréquentiels de $G_7(j\omega)$ et $G(j\omega)$

Comparons maintenant les erreurs relatives entre la BST à l'ordre 15 réalisée précédemment et le modèle réduit $G_7(p)$ issue de la BST pondérée.

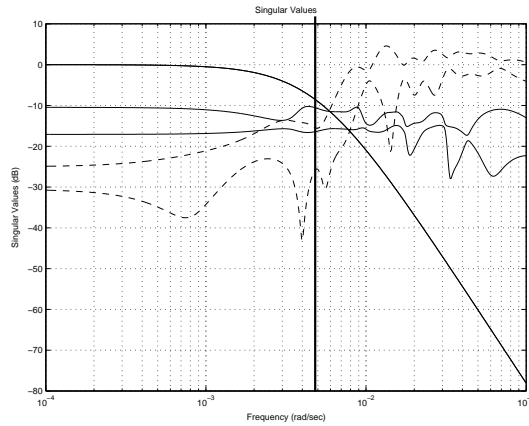


FIG. 5.21 – Valeurs singulières de l'erreur relative $\Delta_{rel}(j\omega)$ pour $G_{15}(p)$ issu de la BST et $G_7(p)$ issu de la BST pondérée (courbes en pointillés)

La pondération qui figure également sur la figure précédente joue un rôle notable en basses pulsations. Celle-ci a permis de privilégier une bande de pulsations mais aussi de réduire l'ordre jusqu'à 7 sans détériorer la fiabilité du tracé fréquentiel.

Les indicateurs relatifs à cette solution sont représentés à la fin de la section suivante.

Réduction optimale au sens de la norme de Hankel de l'erreur relative pondérée

De même, l'approximation optimale relative pondérée au sens de la norme de Hankel mène à un résultat satisfaisant à l'ordre 7 et comparable à celui obtenu précédemment par BST pondéré comme l'indique le tableau suivant.

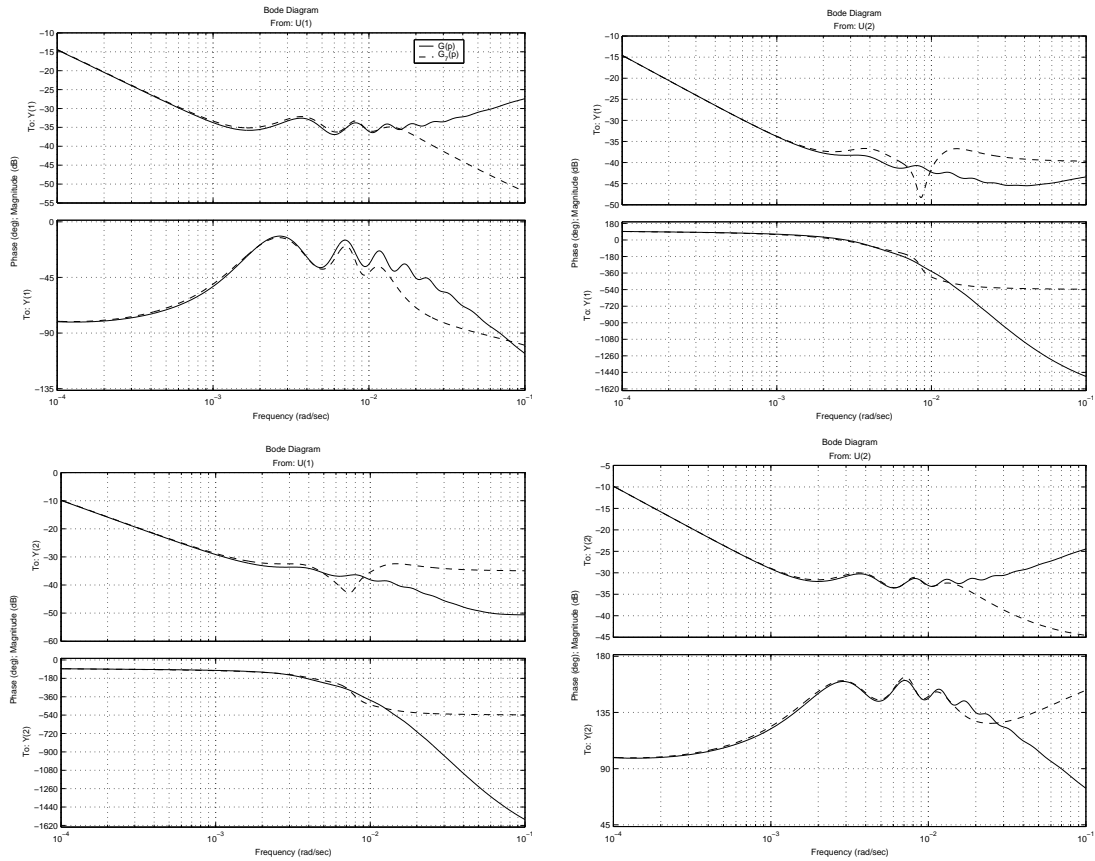


FIG. 5.22 – Diagrammes de Bode de $G_7(j\omega)$ et $G(j\omega)$

Les indicateurs des modèles réduits issus de la BST pondérée et de l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel relative pondérée sont présentés ci-dessous.

Méthode	$\ G^{-1}(j\omega)(G(j\omega) - G_7(j\omega))W_i(j\omega)\ _\infty$	$\rho_{10}^{\text{ex}3}$	$\rho_{10}^{\text{ex}3b}$
BST pondéré	1.7	0.27	0.11
Hankel relatif pondéré	0.9	0.643	0.638

L'ensemble des méthodes appliquées sur cette exemple conduit à conclure qu'un modèle réduit d'ordre 7 est le plus satisfaisant. Celui-ci conserve le comportement fréquentiel sur une gamme de pulsations relative aux phénomènes physiques prépondérants pour la commande, à savoir le premier mode résonnant, le déphasage du au retard sur les transferts croisés.

CHAPITRE 6

Réduction à pôles fixés

Dans ce chapitre, la réduction de modèles au sens de l'agrégation est introduite puis mise en valeur dans le contexte de l'approximation d'un modèle sur une gamme de pulsations.

Dans un premier temps, nous introduisons le principe des méthodes par agrégation. Ce principe impose que les pôles du modèle réduit sont sélectionnés parmi ceux du modèle à réduire. Plus précisément, un modèle réduit agrégé se distingue par ses matrices A_r et B_r qui sont fixées pour obtenir les modes considérés. Les matrices C_r et D_r , obtenues dans un second temps, représentent des degrés de liberté. Nous présenterons quelques façons connues de les optimiser pour approcher une caractéristique.

La recherche de C_r et D_r , qui vise à déterminer entièrement un modèle réduit agrégé, peut être formulée comme la minimisation de l'erreur absolue pondérée (problème (1.5), introduit page 19) dans laquelle A_r et B_r sont fixées. Une telle formulation s'avère nouvelle dans le sens où les résultats antérieurs ne considèrent, par commodité, qu'une seule pondération ; le cas de 2 pondérations étant plus délicat.

De plus, nous dériverons une formulation du problème de réduction au sens de l'erreur relative pondérée à pôles fixes.

La seconde partie de ce chapitre envisage de poser sous un autre angle le problème de la réduction de modèles sur des gammes de pulsations en tirant parti de l'agrégation. Cette nouvelle approche minimise directement l'erreur relative de modèle pour des pulsations appartenant à des intervalles ouverts de pulsations. Cette reformulation du problème a l'avantage de dispenser l'automaticien de choisir une pondération fréquentielle relatant une gamme de pulsations. Seuls des intervalles de pulsations sont à spécifier.

Nous comparons enfin sur des exemples la technique de réduction pondérée qui s'appuie sur la solution du problème (1.5), page 19, à l'approche directe sans pondération.

6.1 Principe de l'agrégation

Les approches par agrégation forment une famille ancienne de méthodes [Dav66] qui sont toutes caractérisées par la conservation de modes physiques dans le modèle réduit. En effet, les modes du modèle réduit sont sélectionnés parmi les modes du modèle initial. La

sélection des modes à conserver est basée sur une classification de ceux-ci. Cette opération forme l'étape la plus importante d'une méthode d'agrégation [BDM85].

De façon générale, l'agrégation consiste à imposer l'existence d'une application linéaire entre l'état $x(t)$ de G et l'état $x_r(t)$ de G_r , caractérisée par $x_r = Fx$, F étant de rang plein [Aok68]. L'existence de F implique alors que :

$$A_r F = F A, \quad B_r = F B$$

imposant la conservation de r valeurs propres de A dans A_r . Certains auteurs [Woe94] appellent aussi cette opération "projection des dynamiques".

En pratique, il est plus aisé de définir l'application F comme un changement de base T faisant apparaître explicitement les valeurs propres de A , suivi d'une troncature : $F = [I_r \ 0]T$. Plusieurs degrés de liberté apparaissent pour définir complètement le modèle réduit agrégé : le choix de la base T et les matrices de sortie C_r et D_r . C'est pourquoi un modèle réduit agrégé s'obtient habituellement en 2 étapes :

1. Le calcul de A_r et B_r en tronquant les matrices d'état A et B dans une base qui fait explicitement apparaître les valeurs propres de A selon un critère de sélection des modes physiques à retenir. Typiquement, A peut être :
 - diagonale ;
 - sous forme de Jordan ;
 - triangulaire (forme de Schur).
2. Le calcul de C_r et D_r visant, pour les approches les plus récentes, à minimiser une fonction de coût linéaire en C_r et D_r .

La variété des méthodes d'agrégation réside dans les degrés de liberté disponibles, à savoir dans un premier temps le critère de sélection des modes, le choix de T et dans un second temps l'obtention des matrices C_r et D_r . Nous distinguons dans ce qui suit plusieurs degrés de complexité dans le calcul de C_r et D_r .

6.1.1 Différents degrés de complexité

Le critère de sélection des modes le plus ancien repose sur une classification des modes par rapidité croissante. Ainsi, le modèle réduit conserve les dynamiques lentes du système [Dav66, BM82]. Cependant, ce classement peut se faire selon d'autres critères, en particulier d'ordre énergétique, qui peuvent prendre en compte la nature des entrées [SMB77, BDM85, VC98].

De même, la détermination de C_r et D_r peut être plus ou moins directe. Dans [Dav66], C_r est traitée au même titre que A_r et B_r : C_r est issue de la troncature de C et $D_r = D$. Certains auteurs [RH92] s'intéressent à la conservation du gain statique. Dans certains cas [SMB77, VC98], C_r et D_r sont déterminées par la minimisation d'un critère énergétique portant sur les erreurs entre les sorties du système et celles du modèle. Un éventail de variantes est décrit dans [SMB77, BM82].

Parmi les approches les plus récentes, il est aussi possible de déterminer C_r et D_r en souhaitant une bonne approximation de la réponse fréquentielle [VC98, Hel94] par l'intermédiaire de la minimisation de la norme H_∞ d'une erreur pondérée (voir le problème d'optimisation (1.5), introduit page 19) :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{min}_{C_r, D_r} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega)\|_\infty$$

Même lorsque A_r et B_r sont fixées, le problème d'optimisation (1.5), page 19 n'est pas linéaire en C_r et D_r , sauf si $W_o(p) = I$ ¹ [VC98]. Nous formulons dans la section suivante la recherche de C_r et D_r dans le cas général de 2 pondérations.

Enfin, nous présentons dans la section 6.2 une nouvelle approche de réduction de modèles sur des gammes de pulsations qui visent à minimiser directement l'erreur relative de modèle ϵ_0 sur un intervalle de pulsations Ω_0 tout en bornant l'erreur ϵ_i sur d'autres intervalles Ω_i :

$$\begin{aligned} \min \quad & \epsilon_0 \\ \epsilon_0, G_r(j\omega) \quad & \text{tels que} \\ & \forall \omega \in \Omega_i, \quad \bar{\sigma}((G_r(j\omega) - G(j\omega))G^{-1}(j\omega)) < \epsilon_i \end{aligned}$$

6.1.2 Agrégation et optimisation convexe

Nous formulons la recherche des matrices C_r et D_r dans le but de minimiser l'erreur absolue pondérée comme la solution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes *LMI*.

LEMME 6.1.1

Soit $G(p), G_r(p), W_i(p), W_o(p)$ des matrices de fonctions de transfert carrées et inversibles sur l'axe imaginaire.

$$[C_{opt}, D_{opt}] = \mathbf{argmin}_{C_r, D_r} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega)\|_\infty$$

est solution du problème d'optimisation convexe de dimension finie suivant :

$$\begin{aligned} [C_{opt}, D_{opt}] = \mathbf{argmin} \quad & \gamma \\ & C_r, D_r, P \\ & P = P^T \\ & \mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P) + \mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P)^T \geq 0 \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & [C_r \ D_r] \end{array} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \ \mathcal{B} \\ \hline N \end{array} \right]$$

où :

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & C_{Z_o} & D & D_{Z_o} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} C_{Z_i} & 0 & 0 & 0 & D_{Z_i} & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \mathbf{diag}(A_{Z_i}, A, A_r, A_{Z_o}), \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_{Z_i} & 0 \\ B & 0 \\ B_r & 0 \\ 0 & B_{Z_o} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Z_o(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{Z_o} & B_{Z_o} \\ \hline C_{Z_o} & D_{Z_o} \end{array} \right] / W_o(p)^{-1} W_o(p)^{-*} = Z_o(p) + Z_o(p)^* \quad (6.1)$$

$$Z_i(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{Z_i} & B_{Z_i} \\ \hline C_{Z_i} & D_{Z_i} \end{array} \right] / W_i(p)^{-*} W_i(p)^{-1} = Z_i(p) + Z_i(p)^* \quad (6.2)$$

¹Il en est de même lorsque la norme H_2 pondérée est considérée [VD97].

REMARQUE 6.1.1

Le calcul de $Z_i(p)$ et $Z_o(p)$ vérifiant respectivement (6.2) et (6.1) est explicité dans la section F.3, page 252.

Démonstration : $\|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))W_i(j\omega)\|_\infty \leq \gamma$
 $\Leftrightarrow \forall \omega, (G(j\omega) - G_r(j\omega))^*W_o(j\omega)^*W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega)) \leq \gamma^2W_i(j\omega)^{-*}W_i(j\omega)^{-1}$.
 Par application du lemme de Schur :

$$\begin{bmatrix} \gamma^2W_i^{-*}W_i^{-1} & (G - G_r)^* \\ G - G_r & W_o^{-1}W_o^{-*} \end{bmatrix} \geq 0$$

En introduisant Z_i et Z_o vérifiant (6.2) et (6.1), la dernière inégalité devient :

$$\begin{bmatrix} \gamma^2(Z_i + Z_i^*) & (G - G_r)^* \\ G - G_r & Z_o + Z_o^* \end{bmatrix} \geq 0$$

ou encore

$$\tilde{G} + \tilde{G}^* \geq 0 \quad (6.3)$$

avec

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \gamma^2Z_i & 0 \\ G - G_r & Z_o \end{bmatrix} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cccc|cc} A_{Z_i} & 0 & 0 & 0 & B_{Z_i} & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A_r & 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{Z_o} & 0 & B_{Z_o} \\ \hline \gamma^2C_{Z_i} & 0 & 0 & 0 & \gamma^2D_{Z_i} & 0 \\ 0 & C & -C_r & C_{Z_o} & D - D_r & D_{Z_o} \end{array} \right] = \dots$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline * & * \end{array} \right]$$

Par application du lemme réel positif, l'inégalité (6.3) devient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2C_{Z_i} & 0 & \gamma^2D_{Z_i} & 0 \\ 0 & [C \ -C_r \ C_{Z_o}] & D - D_r & D_{Z_o} \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P)} + \mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P)^T \geq 0$$

$$\exists P = P^T /$$

En isolant les variables P , γ^2 , C_r et D_r , $\mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P)$ peut s'écrire :

$$\mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P) = \left[\begin{array}{c|ccc} P & & & 0 \\ \hline 0 & \gamma^2I & & 0 \\ & 0 & [C_r \ D_r] & \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc|cc} \mathcal{A} & & & & \mathcal{B} & \\ \hline C_{Z_i} & 0 & 0 & 0 & D_{Z_i} & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \end{array} \right] + \dots$$

$$+ \left[\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & C & 0 & C_{Z_o} & D \ D_{Z_o} \end{array} \right]$$

$$\text{En notant } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & C_{Z_o} & D & D_{Z_o} \end{bmatrix} \text{ et } N = \begin{bmatrix} C_{Z_i} & 0 & 0 & 0 & D_{Z_i} & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|ccc} P & & & 0 \\ \hline 0 & \gamma^2I & & 0 \\ & 0 & [C_r \ D_r] & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline N & \end{array} \right] \text{ s'exprime de façon}$$

linéaire en P , γ^2 , C_r et D_r .

Minimiser γ sous les contraintes :

$$\begin{aligned} P &= P^T \\ \mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P) + \mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P)^T &\geq 0 \end{aligned}$$

est alors un problème d'optimisation convexe. \square

De la même façon que le lemme précédent, nous pouvons adapter la recherche de C_r et D_r comme minimisant une norme H_∞ relative pondérée. Cette minimisation fait l'objet d'un résultat spécifique car lorsque $W_i = G^{-1}$ la formulation du lemme précédent dégénère.

LEMME 6.1.2

Soit $G(p), G_r(p), W_o(p)$ des matrices de fonctions de transfert carrés et inversibles sur l'axe imaginaire.

$$[C_{opt}, D_{opt}] = \mathbf{argmin}_{C_r, D_r} \|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))G^{-1}(j\omega)\|_\infty$$

est solution du problème d'optimisation convexe de dimension finie suivant :

$$\begin{aligned} [C_{opt}, D_{opt}] &= \mathbf{argmin}_{C_r, D_r, P} \gamma \\ &P = P^T \\ &\mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P) + \mathcal{K}(\gamma, D_r, C_r, P)^T \geq 0 \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{K}(\gamma, D_r, P) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & [C_r \ D_r] \end{array} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \ \mathcal{B} \\ \hline N \end{array} \right]$$

où :

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Z_o} & I & D_{Z_o} \end{bmatrix}, & N &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I/2 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ D^{-1}C & 0 & 0 & -D^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 & 0 \\ -B_r D^{-1}C & A_r & 0 \\ 0 & 0 & A_{Z_o} \end{bmatrix}, & \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} BD^{-1} & 0 \\ B_r D^{-1} & 0 \\ 0 & B_{Z_o} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Z_o(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{Z_o} & B_{Z_o} \\ \hline C_{Z_o} & D_{Z_o} \end{array} \right] / W_o(p)^{-1} W_o(p)^{-*} = Z_o(p) + Z_o(p)^* \quad (6.4)$$

Démonstration : La démarche de la démonstration est similaire à celle du lemme 6.1.1. La dégénérescence lorsque $W_i = G^{-1}$ tient du fait que :

$$\|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))G^{-1}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow \forall \omega, \left[\begin{array}{cc} \gamma^2 I & (I - G_r G^{-1})^* \\ (I - G_r G^{-1}) & W_o^{-1} W_o^{-*} \end{array} \right] \geq 0.$$

En introduisant Z_o vérifiant et (6.4), la dernière inégalité devient :

$$\left[\begin{array}{cc} \gamma^2 I & (I - G_r G^{-1})^* \\ I - G_r G^{-1} & Z_o + Z_o^* \end{array} \right] \geq 0$$

ou encore

$$\tilde{G} + \tilde{G}^* \geq 0$$

avec

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \gamma^2 I/2 & 0 \\ (I - G_r G^{-1}) & Z_o \end{bmatrix} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{ccc|cc} A - BD^{-1}C & 0 & 0 & BD^{-1} & 0 \\ -B_r D^{-1}C & A_r & 0 & B_r D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{Z_o} & 0 & B_{Z_o} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I/2 & 0 \\ D_r D^{-1}C & -C_r & C_{Z_o} & I - D_r D^{-1} & D_{Z_o} \end{array} \right] = \dots$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline * & * \end{array} \right]$$

La suite de la démonstration est identique à celle du lemme 6.1.1. \square

6.2 Approche directe sur une gamme de pulsations

Dans la section 1.2, page 16, l'utilisation de pondérations fréquentielles a été introduite pour formuler la réduction de modèle comme la minimisation d'une norme H_∞ pondérée (voir le problème d'optimisation (1.5), introduit page 19). L'utilisation de pondérations fréquentielles permet de formaliser la règle d'automatique fréquentielle classique bien connue qui consiste à demander au modèle réduit d'être représentatif du modèle initial sur une gamme de pulsations, cette gamme de pulsations dépendant du cahier des charges (voir la discussion section 1.1, page 10).

Cependant, dans un certain nombre de cas, il est parfois nécessaire d'essayer plusieurs choix de pondérations fréquentielles avant d'obtenir un résultat satisfaisant. Il serait donc intéressant de minimiser directement une erreur entre le modèle réduit et le modèle initial sur la gamme de pulsations donnée, tout en garantissant pour les autres gammes de pulsations une borne sur l'erreur raisonnable². Enfin, comme cela a été discuté dans la sous section 2.4.1, dans l'optique de faire de la réduction de modèle pour la commande, l'erreur relative présente un intérêt tout particulier. Par suite, on peut proposer la formulation suivante [PGRGF01].

6.2.1 Réduction de modèles en erreur relative sur une gamme de pulsations

Soit $G(j\omega)$ un système carré inversible sur les intervalles de pulsations $\Omega_i =]\underline{\omega}_i, \bar{\omega}_i[$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$ et soit $n + 1$ scalaires strictement positifs ε_i . Dans le cas où l'on désire obtenir la meilleure approximation possible sur l'intervalle de pulsations Ω_0 tout en bornant a priori l'erreur sur Ω_i , $i \in \{1, n\}$, le problème à traiter est un problème de minimisation d'un coût linéaire sous contrainte :

$$\begin{aligned} \min \quad & \epsilon_0 \\ \epsilon_0, \quad & G_r(j\omega) \quad \text{tels que} \\ & \forall \omega \in \Omega_i, \quad \bar{\sigma}((G_r(j\omega) - G(j\omega))G^{-1}(j\omega)) < \varepsilon_i \end{aligned} \tag{6.5}$$

²L'objectif de la pondération fréquentielle introduite page 18 était celui-ci.

Discussion du problème

A chaque pulsation ω , les contraintes du problème d'optimisation (6.5) sont convexes en l'inconnue $G_r(j\omega)$. Pour tout $\omega \in \Omega_i$, le nombre de contraintes est infini. Cette difficulté est généralement résolue en effectuant un échantillonnage sur les intervalles de pulsations considérés. Cette solution ne présente aucune garantie pour les pulsations hors échantillonnage et génère un nombre très important de contraintes. L'expression du problème (6.5) sous forme d'une représentation d'état permet de rendre finie le nombre de variables, mais impose une contrainte non-convexe. Ceci est classique dans les problèmes avec contrainte d'ordre (voir le chapitre 2). Néanmoins, lorsque l'on fixe les matrices d'état A_r et B_r de la représentation d'état de $G_r(p)$, la formulation du problème (6.5) dans l'espace d'état est convexe. Cette propriété importante nous permettra de proposer une solution du problème sous la forme d'un problème d'optimisation convexe, sous contraintes LMIs.

6.2.2 Solution du problème “à pôles fixés”

Par souci de simplicité, nous présentons dans un premier temps nos résultats dans le cas d'une seule contrainte. Il est évident que ces résultats sont généralisables à plusieurs contraintes. Avant de présenter le résultat fondamental permettant de se ramener à un problème d'optimisation convexe de dimension finie, quelques définitions sont introduites.

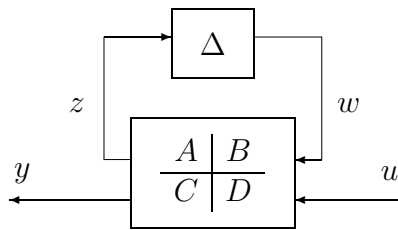


FIG. 6.1 – Transformation Linéaire Fractionnaire

DÉFINITION 6.2.1 (TRANSFORMATION LINÉAIRE FRACTIONNAIRE)

On appelle Transformation Linéaire Fractionnaire en Δ (LFT en anglais) une fonction de la forme $D + C\Delta(I - A\Delta)^{-1}B$ où A, B, C et D sont des matrices (voir la représentation sous forme de schéma-bloc définie figure 6.1). Une LFT en Δ peut être définie par :

$$\Delta \star \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

où \star est le produit de Redheffer [ZDG96]. Le PRODUIT DE REDHEFFER peut être défini comme

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \star \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + B_1 A_2 (I - D_1 A_2)^{-1} C_1 & B_1 (I - A_2 D_1)^{-1} B_2 \\ \hline C_2 (I - D_1 A_2)^{-1} C_1 & D_2 + C_2 D_1 (I - A_2 D_1)^{-1} B_2 \end{array} \right]$$

Cette opération est bien définie si $(I - D_1 A_2)$ et $(I - A_2 D_1)$ sont inversibles. Il est possible de définir différentes opérations sur les LFTs : la SOMME DE LFTS

$$\Delta \star \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] + \Delta \star \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{array} \right] \star \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right]$$

le PRODUIT DE LFTs

$$\Delta \star \left[\frac{A_1 \mid B_1}{C_1 \mid D_1} \right] \times \Delta \star \left[\frac{A_2 \mid B_2}{C_2 \mid D_2} \right] = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \star \left[\frac{A_1 \quad B_1 C_2 \mid B_1 D_2}{0 \quad A_2 \mid B_2}{C_1 \quad D_1 C_2 \mid D_1 D_2} \right]$$

ou encore la CONCATÉNATION DE LFTs

$$\begin{bmatrix} \Delta \star \left[\frac{A_1 \mid B_1}{C_1 \mid D_1} \right] \\ \Delta \star \left[\frac{A_2 \mid B_2}{C_2 \mid D_2} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \star \left[\frac{A_1 \quad 0 \mid B_1}{0 \quad A_2 \mid B_2}{C_1 \quad 0 \mid D_1}{0 \quad C_2 \mid D_2} \right]$$

THÉORÈME 6.2.1

Soit $G(p)$ une matrice carrée inversible sur $\Omega =]\underline{\omega}, \bar{\omega}[$ admettant pour représentation d'état (A, B, C, D) , et ε un réel positif. Soit $G_r(j\omega)$ de représentation d'état (A_r, B_r, C_r, D_r) , de dimension r .

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i)

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \bar{\sigma} \left((G_r(j\omega) - G(j\omega))G^{-1}(j\omega) \right) < \varepsilon \quad (6.6)$$

(ii)

$$\exists X \in \mathbb{C}^{n_A \times n_A} \quad X + X^* > 0,$$

$$\begin{bmatrix} M_{11}^* X^* + X M_{11} & X M_{12} & M_{21}^* \\ M_{12}^* X^* & -\varepsilon I & M_{22}^* \\ M_{21} & M_{22} & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.7)$$

où :

$$\delta I \star \left[\frac{M_{11} \mid M_{12}}{M_{21} \mid M_{22}} \right] = \left(\delta I \star T_\Omega \star \left[\frac{-jA_r \mid -jB_r}{C_r \mid D_r} \right] \right) \times \left(\delta I \star T_\Omega \star \left[\frac{-jA \mid -jB}{C \mid D} \right] \right)^{-1} - I, \quad (6.8)$$

$$\text{avec} \quad T_\Omega = \left[\frac{-\bar{\omega}I \mid (1 - \frac{\bar{\omega}}{\underline{\omega}})I}{I \mid (\frac{1}{\underline{\omega}})I} \right]$$

REMARQUE 6.2.1

L'expression (6.8) permet de déterminer les matrices M_{11} , M_{12} , M_{21} et M_{22} à l'aide des opérations définies sur les LFTs introduites dans la définition 6.2.1. Nous exprimons ces matrices ci-dessous.

$$M_{11} = \begin{bmatrix} M_{11}^{11} & M_{11}^{12} \\ M_{11}^{21} & M_{11}^{22} \end{bmatrix} \text{ avec :}$$

$$M_{11}^{11} = -\bar{\omega}I - j(1 - \frac{\bar{\omega}}{\underline{\omega}})A_r(I + \frac{j}{\underline{\omega}}A_r)^{-1}$$

$$M_{11}^{12} = -j(1 - \frac{\bar{\omega}}{\underline{\omega}})(I + \frac{j}{\underline{\omega}}A_r)^{-1}B_r(\frac{j}{\underline{\omega}}C(I + \frac{j}{\underline{\omega}}A)^{-1}B - D)^{-1}C(I + \frac{j}{\underline{\omega}}A)^{-1}$$

$$M_{11}^{21} = 0$$

$$M_{11}^{22} = -\bar{\omega}I - j(1 - \frac{\bar{\omega}}{\underline{\omega}})A(I + \frac{j}{\underline{\omega}}A)^{-1} + j(1 - \frac{\bar{\omega}}{\underline{\omega}})(I + \frac{j}{\underline{\omega}}A)^{-1}B(D - \frac{j}{\underline{\omega}}C(I + \frac{j}{\underline{\omega}}A)^{-1}B)^{-1}C(I + \frac{j}{\underline{\omega}}A)^{-1}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 \\ M_{12}^2 \end{bmatrix} \text{ avec :}$$

$$M_{12}^1 = -j(1 - \frac{\bar{\omega}}{\omega})(I + \frac{j}{\omega}A_r)^{-1}B_r(D - \frac{j}{\omega}C(I + \frac{j}{\omega}A)^{-1}B)^{-1}$$

$$M_{12}^2 = -j(1 - \frac{\bar{\omega}}{\omega})(I + \frac{j}{\omega}A)^{-1}B(D - \frac{j}{\omega}C(I + \frac{j}{\omega}A)^{-1}B)^{-1}$$

$$M_{21} = [M_{21}^1 \quad M_{21}^2] \text{ avec :}$$

$$M_{21}^1 = \mathbf{C}_r(I + \frac{j}{\omega}A_r)^{-1}$$

$$M_{21}^2 = (\mathbf{D}_r - \frac{j}{\omega}\mathbf{C}_r(I + \frac{j}{\omega}A_r)^{-1}B_r)((\frac{j}{\omega}C(I + \frac{j}{\omega}A)^{-1}B - D)^{-1}C(I + \frac{j}{\omega}A)^{-1})$$

$$M_{22} = (\mathbf{D}_r - \frac{j}{\omega}\mathbf{C}_r(I + \frac{j}{\omega}A_r)^{-1}B_r)(D - \frac{j}{\omega}C(I + \frac{j}{\omega}A)^{-1}B)^{-1} - I$$

L'expression (6.8) possède clairement plus de souplesse pour la manipulation algébrique et la programmation numérique.

Comme nous l'avons noté précédemment, la recherche d'un modèle d'ordre réduit "à pôles fixes" revient à fixer les matrices A_r et B_r de la représentation d'état de G_r . Les deux contraintes inégalités (6.7) sont alors affines en les variables de décision restantes soient X , C_r et D_r : par suite, leur recherche correspond à la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte LMIs.

Démonstration : La démonstration du théorème est basée sur une réécriture des différentes fonctions de transfert intervenant dans l'erreur relative comme des LFTs en $\Delta = \frac{1}{\omega}I$ avec $\omega \in]\underline{\omega}, \bar{\omega}[$:

$$(G_r(j\omega) - G(j\omega))G^{-1}(j\omega) = \left(\frac{1}{\omega}I \star \left[\begin{array}{c|c} -jA_r & -jB_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] \right) \times \left(\frac{1}{\omega}I \star \left[\begin{array}{c|c} -jA & -jB \\ \hline C & D \end{array} \right] \right)^{-1} - I.$$

On se ramène à introduire $\Delta = \delta I$ avec $\delta \in]0; +\infty[$ (changement de variable) par une opération de loop-shifting [DV75] qui consiste à utiliser l'égalité :

$$\frac{1}{\omega}I = \delta I \star T_\Omega \quad \text{avec} \quad T_\Omega = \left[\begin{array}{c|c} -\bar{\omega}I & (1 - \frac{\bar{\omega}}{\omega})I \\ \hline I & (\frac{1}{\omega})I \end{array} \right]$$

ce qui donne :

$$(G_r(j\omega) - G(j\omega))G^{-1}(j\omega) = \left(\delta I \star T_\Omega \star \left[\begin{array}{c|c} -jA_r & -jB_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] \right) \times \left(\delta I \star T_\Omega \star \left[\begin{array}{c|c} -jA & -jB \\ \hline C & D \end{array} \right] \right)^{-1} - I.$$

La réécriture de la condition (6.6) sous la forme d'un problème d'optimisation de dimension finie est basée sur le lemme suivant. Pour cela, on introduit les matrices M_{11} , M_{12} , M_{21} et M_{22} telles que (6.12).

LEMME 6.2.2

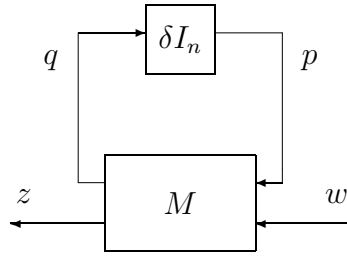
Soit M une matrice complexe appartenant à $\mathbb{C}^{(n_z+n) \times (n+n_w)}$ ³, $M = \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right]$ où M_{11}

n'a pas de valeurs propres sur l'axe réel.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

$$(i) \quad \forall \delta \in]0; +\infty[, \quad \bar{\sigma}(\delta I_n \star M) < \varepsilon$$

³ $n_p = n_q = n$



(ii) $\exists X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $X^* + X > 0$ et

$$\left[\begin{array}{c|c|c} M_{11}^* X^* + X M_{11} & X M_{12} & M_{21}^* \\ \hline M_{12}^* X^* & -\varepsilon I_{n_w} & M_{22}^* \\ \hline M_{21} & M_{22} & -\varepsilon I_{n_z} \end{array} \right] < 0 \quad (6.9)$$

Ce lemme est un cas particulier du lemme 3.2 de l'article [RSF01].

Le lemme 6.2.2 s'assimile à une extension du Bounded Real lemma (lemme borné réel) [Pop73]. Si $H(j\omega) = D + C(j\omega I - A)^{-1}B$ est un transfert stable, le lemme borné réel donne une condition nécessaire et suffisante pour que : $\forall \omega, \bar{\sigma}(H(j\omega)) \leq \varepsilon$. Cette condition porte sur l'existence d'une matrice $P = P^T$ telle que :

$$\left[\begin{array}{ccc} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\varepsilon I & D^T \\ C & D & -\varepsilon I \end{array} \right] \leq 0.$$

Notons que la fonction de transfert $H(j\omega)$ est une LFT particulière en $\Delta = \frac{1}{j\omega}$. Dans notre problème, la gamme de pulsations peut être exprimée comme une LFT en $\frac{1}{\omega}$ avec ω dans un intervalle *borné*. Le Bounded Real Lemma ne peut pas être appliqué : il est nécessaire d'appliquer le lemme 6.2.2.

REMARQUE 6.2.2

On peut relier ce problème à un problème de μ -analyse : la condition donnant la borne supérieure de μ pour une incertitude paramétrique et une incertitude dynamique est équivalente via la transformation bilinéaire à la condition du lemme 6.2.2. Il est connu que, dans ce cas, la borne supérieure de μ donne en fait la valeur exacte de μ [BYDM94].

L'application du lemme 6.2.2 permet alors d'obtenir le théorème 6.2.1. \square

La solution du problème de réduction de l'erreur relative "à pôles fixés" peut être maintenant énoncée.

THÉORÈME 6.2.3

Soit $G(p)$ une matrice carrée inversible sur les intervalles $\Omega_i =]\underline{\omega}_i, \bar{\omega}_i[$ admettant pour représentation d'état (A, B, C, D) . Soit $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et B_r deux matrices telles que les modes sont une partie des modes de G . Soit $G_r(j\omega)$ de représentation d'état (A_r, B_r, C_r, D_r) .

La solution du problème de réduction de l'erreur relative à "pôles fixes" :

$$\begin{aligned} \min \quad & \epsilon_0 \\ \epsilon_0, C_r, D_r \quad & \text{tels que} \\ & \forall \omega \in \Omega_i, \bar{\sigma}((G_r(j\omega) - G(j\omega))G^{-1}(j\omega)) < \epsilon_i \end{aligned} \quad (6.10)$$

est donnée par la résolution du problème de minimisation d'un coût linéaire sous contraintes LMIs suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & \epsilon_0 \\ C_r, D_r, X_i \in \mathbb{C}^{n_A \times n_A} \quad & \text{tels que} \\ & \forall i, X_i + X_i^* > 0, \begin{bmatrix} M_{i11}^* X_i^* + X_i M_{i11} & X_i M_{i12} & M_{i21}^* \\ M_{i12}^* X_i^* & -\epsilon_i I & M_{i22}^* \\ M_{i21} & M_{i22} & -\epsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

où :

$$\begin{aligned} \delta I \star \left[\begin{array}{c|c} M_{i11} & M_{i12} \\ \hline M_{i21} & M_{i22} \end{array} \right] &= \left(\delta I \star T_{\Omega_i} \star \left[\begin{array}{c|c} -jA_r & -jB_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] \right) \times \left(\delta I \star T_{\Omega_i} \star \left[\begin{array}{c|c} -jA & -jB \\ \hline C & D \end{array} \right] \right)^{-1} - I, \\ \text{avec} \quad T_{\Omega_i} &= \left[\begin{array}{c|c} -\bar{\omega}_i I & (1 - \frac{\bar{\omega}_i}{\omega_i}) I \\ \hline I & (\frac{1}{\omega_i}) I \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

REMARQUE 6.2.3

Les contraintes LMIs du problème d'optimisation (6.11) sont définies à partir de matrices complexes. Or, dans le chapitre 2, les contraintes LMIs ont été définies sur des matrices réelles, ce qui est cohérent avec les algorithmes de résolution numérique disponibles. En fait, toute contrainte LMI définie sur des matrices complexes peut être ramenée à une contrainte définie sur des matrices réelles à l'aide de la propriété suivante :

Soit une matrice $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ donnée telle que $A = A^*$ et $A = A_R + jA_I$ avec $A_R \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $A_I \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Alors on a

$$A > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_R & A_I \\ -A_I & A_R \end{bmatrix} > 0$$

6.3 Etude des exemples

Dans ce qui suit, la réduction de modèle par agrégation est appliquée sur le modèle de Safonov (exemple 1) et sur le modèle de bief. Pour A_r et B_r fixés, nous optimisons C_r et D_r selon les 2 approches suivantes :

– **méthode 1** : $\min_{C_r, D_r} \|W_o(j\omega)(j\omega)(G(j\omega) - G_r(j\omega))G^{-1}\|_\infty$ (lemme 6.1.2).

– **méthode 2** : $\forall \omega \in \Omega$, $\min_{C_r, D_r} \bar{\sigma}((G(j\omega) - G_r(j\omega))G^{-1}(j\omega))$ où Ω désigne un intervalle de pulsations qui est précisé dans chaque exemple. Ceci est équivalent à minimiser les indicateurs ρ_r^{ex1} , ρ_r^{ex3} définis dans la section 1.3, page 21.

Pour chaque méthode les matrices A_r et B_r sont issues de la troncature des matrices A et B où A est sous forme de Jordan avec les modes classés par pulsation propre croissante.

6.3.1 Exemple de Safonov

Dans cet exemple monovarié, les 2 méthodes s'emploient à optimiser la position des zéros du modèle réduit, ses pôles étant fixés.

La pondération $W_o(p)$ utilisée est la même que celle considérée lors de la réduction relative pondérée (section 5.5.3, page 146). Les 4 modes de plus basse pulsation sont retenus. La méthode 1 amène au résultat suivant :

$$G_4(p) = \frac{1.6741(p^2 + 0.1663p + 0.1949)(p^2 + 0.01443p + 0.2296)}{(p^2 + 0.5961p + 0.0898)(p^2 + 1.854p + 0.8985)}$$

L'intervalle de pulsations considéré dans l'approche directe est $\Omega =]0, 2\text{rad/s}[$; intervalle sur lequel la qualité du modèle réduit a été introduite page 23. La méthode 2 ou approche directe aboutit au modèle réduit suivant :

$$G_4(p) = \frac{2.3281(p^2 + 0.06201p + 0.185)(p^2 + 0.01451p + 0.2369)}{(p^2 + 0.5961p + 0.0898)(p^2 + 1.854p + 0.8985)}$$

Les tracés fréquentiels des solutions obtenues sont présentés sur la figure suivante.

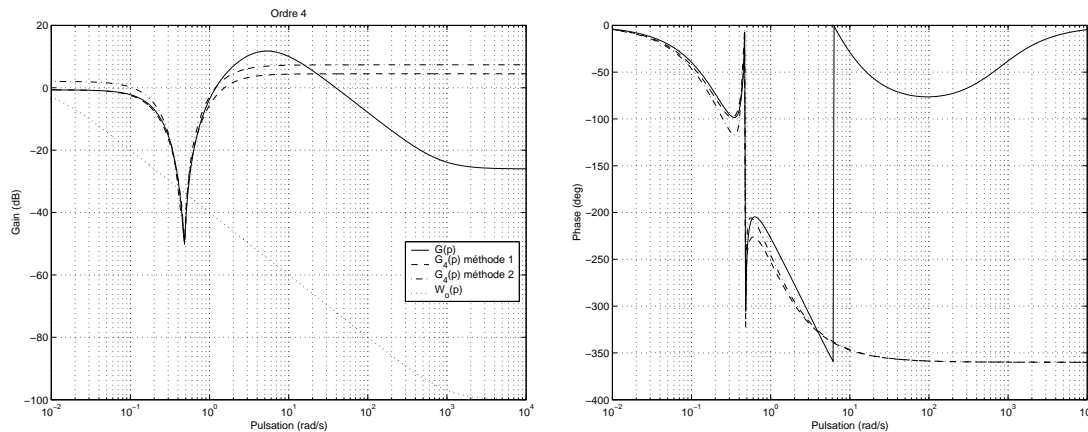


FIG. 6.2 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$, $G_4(j\omega)$, $W_o(j\omega)$

Les erreurs relatives de modèle des 2 modèles réduits calculés sont présentées ci-dessous.

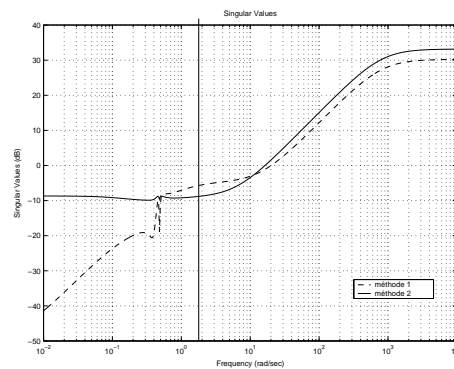


FIG. 6.3 – Comparaison des erreurs relatives associées aux 2 modèles réduits

L'erreur de modèle est significativement amoindrie dans la zone voulue. Par ailleurs, les zéros obtenus dans les 2 solutions sont stables.

Méthode	ρ_4^{ex1}	$\ W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_4(j\omega))G^{-1}(j\omega)\ _\infty$
agrégation+optimisation de l'erreur relative pondérée	0.45	0.168
approche directe	0.368	0.256

Les 2 méthodes étudiées optimisent les zéros du modèle réduit selon 2 critères différents : l'agrégation suivie de l'optimisation de l'erreur relative pondérée minimise $\|W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_4(j\omega))G^{-1}(j\omega)\|_\infty$ alors que l'approche directe minimise ρ_4^{ex1} .

L'approche directe introduite dans la section 6.2 peut aussi bien être considérée avec des pôles autres que ceux du système. On ne parlera alors plus d'agrégation. Au lieu d'utiliser l'approche directe (méthode 2) avec des pôles du système, nous fixons A_r et B_r grâce à la solution optimale au sens de la norme de Hankel relative pondérée (section 5.5.3, page 146) qui était satisfaisante : $\rho_4^{\text{ex1}} = 0.136$. Le modèle réduit obtenu est le suivant :

$$G_4(p) = \frac{2.815(p^2 + 0.1032p + 0.2166)(p^2 + 0.02794p + 0.2304)}{(p^2 + 0.4523p + 0.0672)(p^2 + 2.058p + 2.253)}$$

Nous pouvons noter sur la figure suivante, l'amélioration notable de l'approche directe lorsque de tels pôles sont retenus.

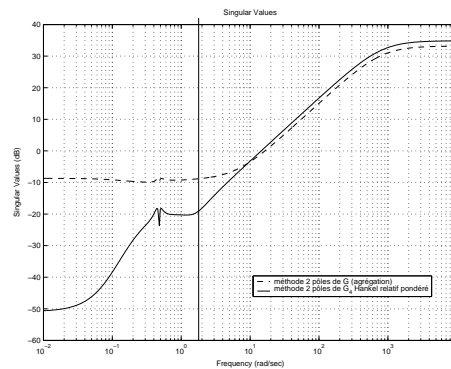


FIG. 6.4 – Comparaison des erreurs relatives associées à la méthode 2 avec des pôles différents

Enfin, le tableau suivant traduit bien l'amélioration de l'indice ρ_4^{ex1} lorsque A_r et B_r proviennent d'une solution déjà intéressante.

Méthode	ρ_4^{ex1}	$\ W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_4(j\omega))G^{-1}(j\omega)\ _\infty$
approche directe avec les pôles de $G_4(p)$ modèle réduit optimal au sens de $\ W_o(j\omega)(G(j\omega) - G_4(j\omega))G^{-1}(j\omega)\ _H$	0.124	2.7×10^{-3}

6.3.2 Exemple du bief de type 1

Dans cet exemple, la réduction du modèle de bief est menée en conservant les 7 premiers pôles de $G(p)$. Pour la méthode 1, la pondération $W_o(p)$ utilisée est la même que celle considérée lors de la réduction relative pondérée (section 5.5.4, page 149). Concernant l'approche directe, l'intervalle de pulsation est $]0, 5 \times 10^{-3} \text{rad/s}[$.

Les modèles réduits obtenus possèdent des tracés fréquentiels qui sont représentés sur la figure suivante. Le modèle réduit issu de l'approche directe est confondu avec le modèle initial sur la gamme de pulsations considérée : de 0 à $5 \times 10^{-3} \text{rad/s}$.

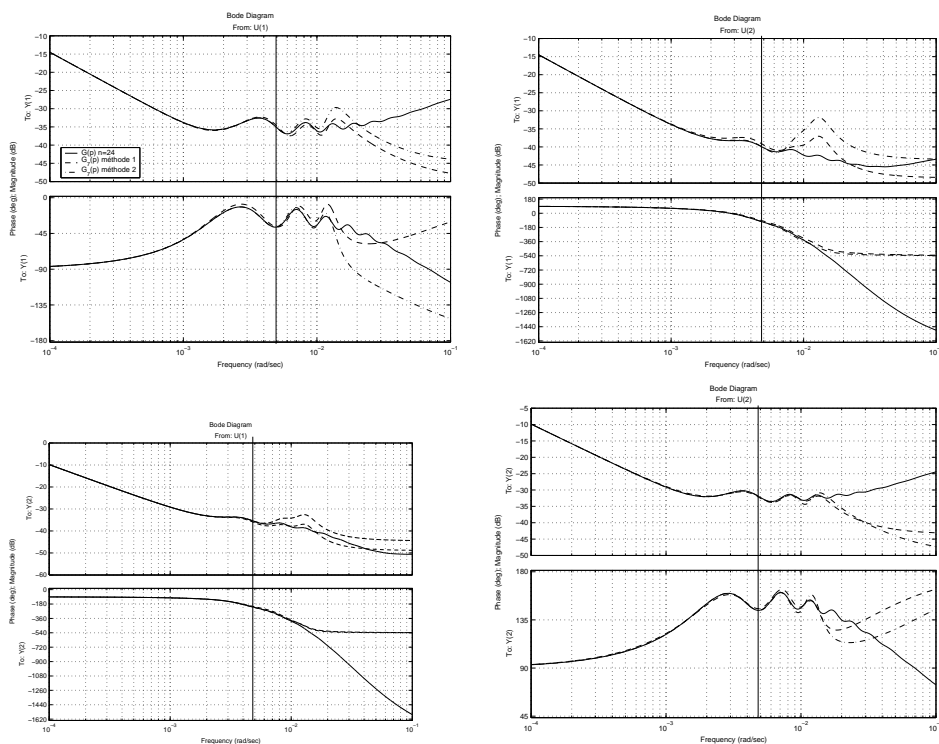


FIG. 6.5 – Tracés fréquentiels de $G(j\omega)$ et $G_7(j\omega)$ obtenu par agrégation et optimisation de l'erreur pondérée puis par l'approche directe

Les valeurs singulières des erreurs relatives, présentées ci-dessous, relatent bien la performance de l'approche directe par rapport à la minimisation de la norme H_∞ de l'erreur relative pondérée.

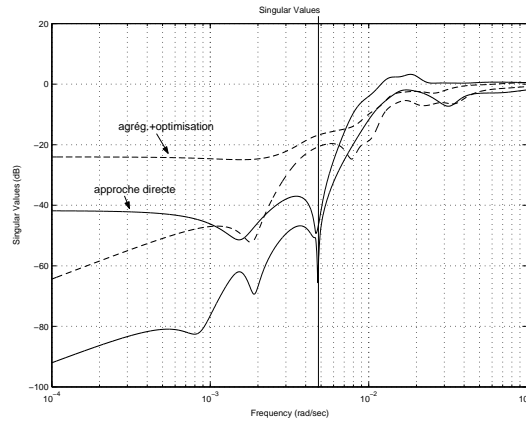


FIG. 6.6 – Valeurs singulières de l’erreur relative

La tableau suivant présente les différents indicateurs.

Méthode	ρ_7^{ex3}	ρ_7^{ex3b}	$\ G^{-1}(j\omega)(G(j\omega) - G_7(j\omega))W_i(j\omega)\ _\infty$
agrégation+optimisation de l’erreur relative pondérée	0.241	0.162	0.06
approche directe	0.038	0.015	0.13

6.4 Résumé

Ce chapitre a mis en valeur l’intérêt d’une méthode de réduction ancienne, l’agrégation, pour la mise en place d’un algorithme d’optimisation convexe : les matrices d’état A_r et B_r étant fixées, nous avons formulé le problème (1.5), introduit page 19, comme un problème d’optimisation convexe. De plus, nous dérivons une formulation dans le cas où $W_i(p) = G^{-1}(p)$, c’est-à-dire pour l’erreur relative pondérée.

Dans un second temps, nous avons formulé une nouvelle approche de réduction de modèles sur des gammes de pulsations sans avoir recours à des pondérations fréquentielles. Cette approche, basée sur des outils de la commande robuste, fournit un outil direct qui s’est avéré efficace sur les exemples que nous avons traités.

Deuxième partie

Commande des canaux d'irrigation

CHAPITRE 7

Introduction à la commande des canaux d'irrigation

7.1 Introduction

L'eau est ou devient une denrée sensible, qu'elle soit en quantité suffisante ou bien qu'elle doive être partagée entre des usages multiples. Les 235 millions d'hectares irrigués dans le monde fournissaient en 1990 près du tiers de la production agricole mondiale. La FAO estime que 80 % des besoins alimentaires des 8 milliards d'êtres humains attendus en 2025 seront couverts par l'agriculture irriguée. Il devient impératif d'envisager la modernisation de la gestion des ressources en eau qui, à ce jour est à 90% manuelle et empirique. Dans de nombreux cas, l'irrigation est réalisée à travers l'utilisation de canaux qui ont pour but de servir des volumes aux différents usagers. Une technique ancestrale consiste à définir des tours d'eau. Les tours d'eau impliquent que l'on impose à chaque usager le moment et la quantité maximale qu'il pourra prélever. La maîtrise du système repose alors sur la simple mise à disposition à l'amont du canal, du débit nécessaire à la consommation (cela est d'autant plus facile que ce débit est choisi constant). Actuellement, une stratégie plus moderne cherche à affranchir les usagers des fortes contraintes imposées par le tour d'eau. Il s'agit de laisser les usagers libres de l'utilisation de la ressource à tout instant. Cette modernisation du tour d'eau impose une gestion en "temps réel" du débit qu'il faut fournir à l'amont du canal pour couvrir les besoins. Il convient aussi d'élaborer une gestion équitable tout au long du canal car la non-maîtrise des divers prélèvements conduit, par une gestion naïve, à désavantager les usagers se trouvant à l'aval. Ce problème relève d'une problématique classique de l'automatique : il s'agit ici d'assurer des objectifs de performance sous la contrainte de la "non mesure" des perturbations agissant sur le système. De fait, l'automatique doit dans ce contexte permettre de concevoir des lois de commande permettant de réaliser un compromis entre l'équité, la performance locale (temps de perturbation de l'utilisateur) et globale (économie de la ressource en eau).

7.2 Un système de distribution d'eau

Les systèmes de transfert d'eau ont pour but de servir des volumes pour différents usages : agricoles, domestiques et industriels. La plupart des canaux d'irrigation sont des

systèmes de transfert et de distribution de l'eau à surface libre. Cela signifie que l'écoulement n'est pas confiné, comme celui rencontré dans des tuyaux. Nous nous intéressons à l'étude du réseau primaire de distribution (figure 7.1) qui doit assurer le partage du débit vers les réseaux secondaires.

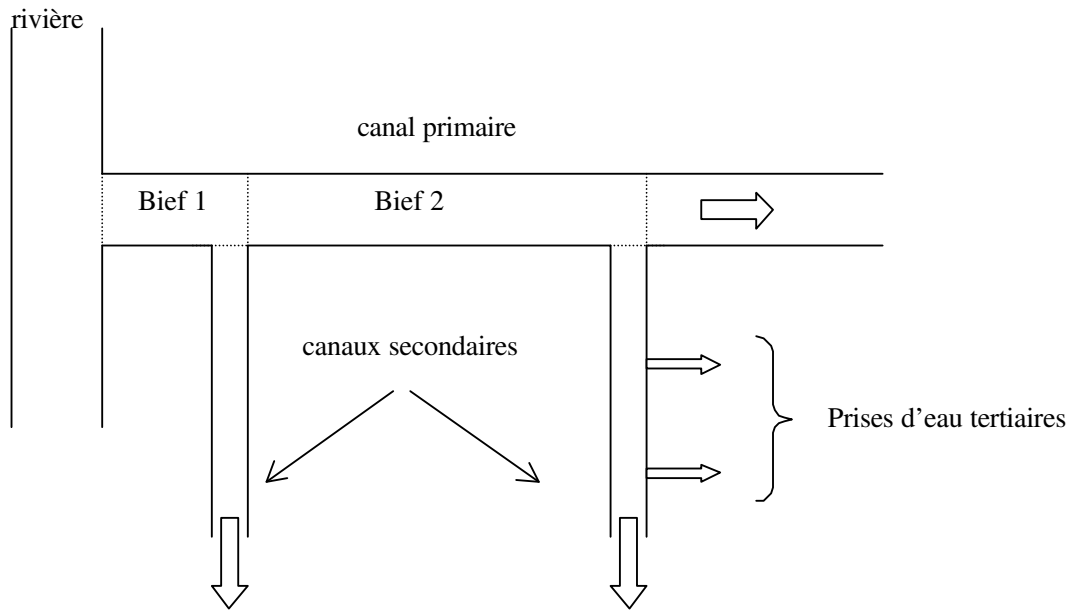


FIG. 7.1 – Réseau d'irrigation

Le contrôle des canaux d'irrigation est réalisé à travers l'utilisation d'ouvrages placés en travers du canal. Ceux-ci permettent d'agir localement sur l'écoulement et ainsi de moduler le débit qu'on laisse partir vers l'aval du canal. En pratique, la commande s'exerce en agissant sur une position de vanne ou de seuil. Les portions de canal comprises entre deux ouvrages (régulateurs) sont appelées des biefs. Les prélèvements de débit sont réalisés tout au long du canal par l'intermédiaire de prise d'eau.

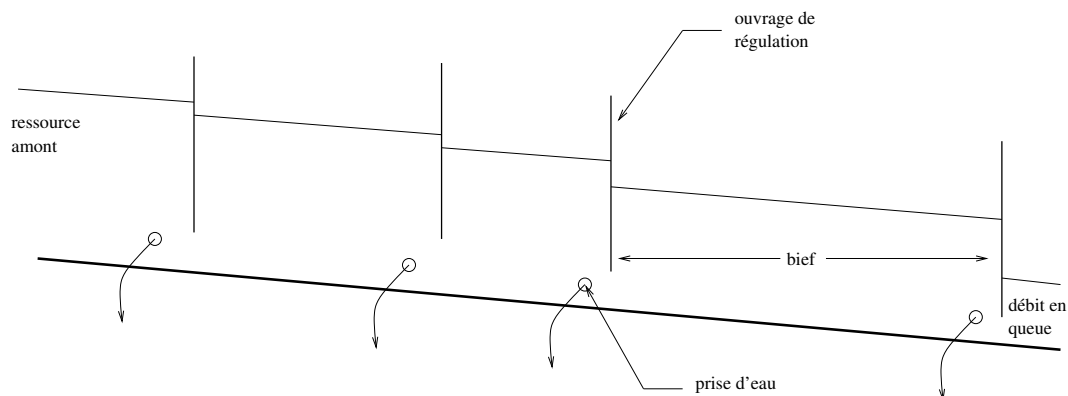


FIG. 7.2 – Schéma d'un canal primaire

Un canal d'irrigation correspond donc à la mise en série de sous-systèmes, les biefs, reliés entre eux par les lois hydrauliques des ouvrages. De façon usuelle (voir [Mal95, RG98, MB99]), et afin de simplifier le problème lié à la nature non linéaire des lois des

ouvrages, nous supposons ici que le canal dispose de «découpleurs locaux» ayant pour fonction d'éliminer le couplage non linéaire liant la position des ouvrages, les cotes aval et amont et les débits échangés entre les biefs. Sur cette base, le couplage entre les biefs se réduit à un couplage en débit.

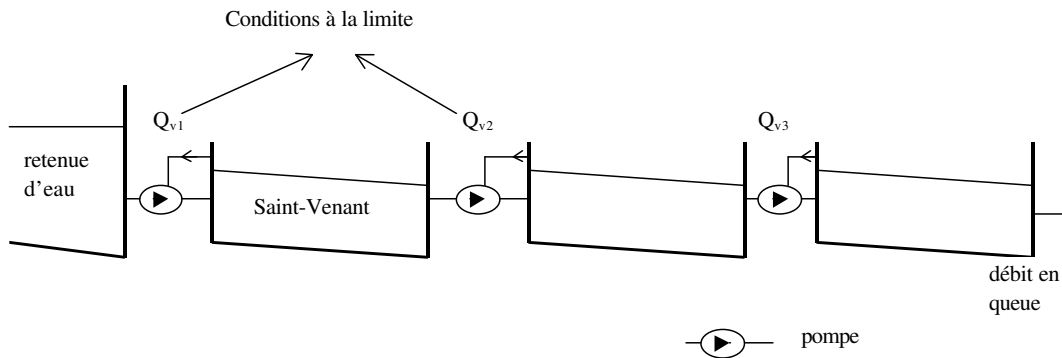


FIG. 7.3 – Canal représenté comme une série de biefs

La dynamique d'un canal est principalement déterminée par la dynamique de l'écoulement. Celui-ci est décrit par les équations de Saint-Venant.

7.3 Les équations de Saint-Venant

7.3.1 Modèle dynamique de l'écoulement

Nous présentons ici les équations de Saint-Venant qui traduisent les lois physiques qui régissent les écoulements de l'eau dans un bief [Mal94, CHV80].

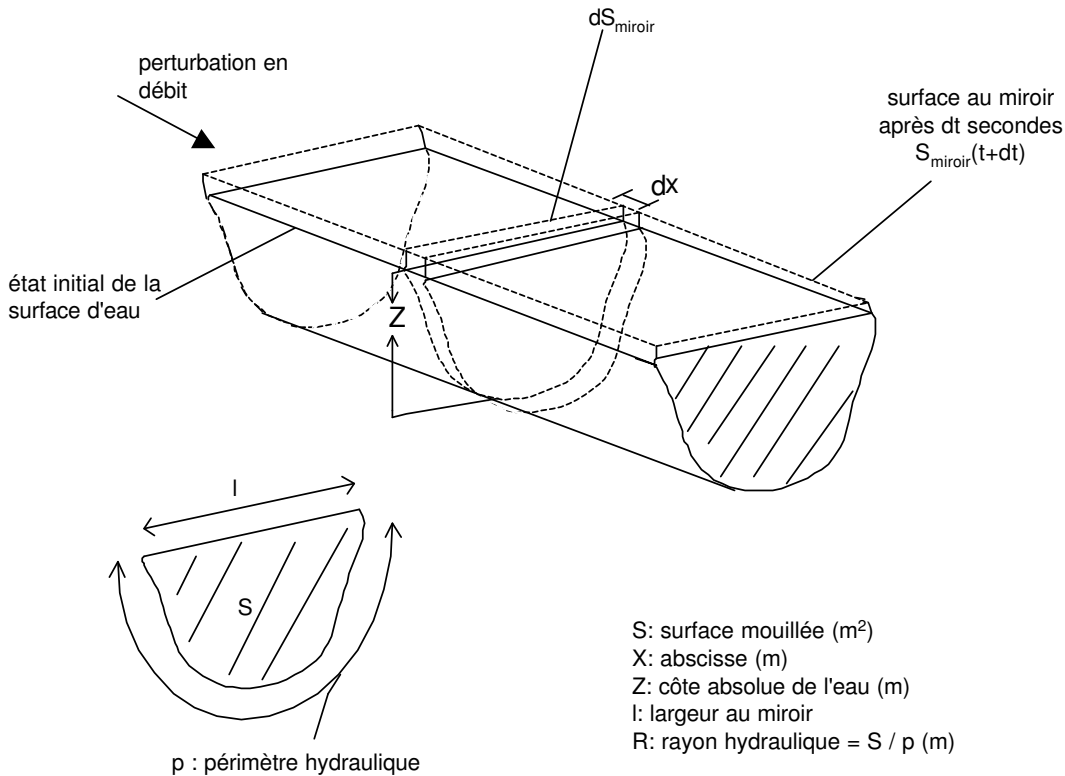


FIG. 7.4 – Représentation d'un tronçon de bief

Avant d'expliciter les équations, nous introduisons des notations attachées aux grandeurs hydrauliques¹ :

- x : abscisse d'un point dans le bief orienté dans le sens de la pente,
- $x = 0$: abscisse de l'amont du bief,
- $x = L$: abscisse de l'aval du bief,
- K : coefficient de Strickler,
- $V(x, t)$: vitesse d'écoulement en fonction de l'abscisse et du temps,
- $S(x, t)$: surface mouillée en fonction de l'abscisse et du temps,
- $Y(x, t)$: hauteur de l'eau en fonction de l'abscisse et du temps,
- $Q(x, t)$: débit de l'eau en fonction de l'abscisse et du temps.
- $I(x)$: pente du bief.

Les équations de Saint-Venant correspondent à l'écriture sous «forme distribuée» des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Nous avons :

Equation de continuité (conservation de la masse) :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7.1)$$

Equation dynamique (conservation de la quantité de mouvement) :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2/S}{\partial x} + g \cdot S \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + J - I \right) = 0 \quad (7.2)$$

¹D'autres grandeurs hydrauliques sont représentées sur la figure 7.4.

où g est la constante de gravité et J désigne la perte de charge linéaire (frottement). Une des formules expérimentales les plus utilisées pour calculer J est celle de Manning-Strickler :

$$J = \frac{Q^2}{K^2 S^2 R^{4/3}} \quad (7.3)$$

où R correspond au rayon hydraulique (voir figure 7.4) et où K est le coefficient de Strickler.

Ces équations aux dérivées partielles (7.1) et (7.2) doivent être complétées par les conditions initiales, c'est à dire le débit et la cote en tout point à l'instant initial $Q(x, 0)$ et $Y(x, 0)$, et par deux conditions aux limites, en l'occurrence les débits amont, $Q(0, t)$ et aval, $Q(L, t)$ pour tous les temps.

7.3.2 Les régimes d'équilibre : calcul des régimes permanents

Nous calculons dans cette section les « points d'équilibre » des équations de Saint-Venant. Il suffit pour cela de rechercher les solutions stationnaires des équations (7.1) et (7.2), c'est à dire les solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dQ_0(x)}{dx} = 0 \\ \frac{dY_0(x)}{dx} = \frac{I(x) - J(x)}{1 - F_0(x)^2} \end{cases}$$

où $C_0 = \sqrt{\frac{gS_0}{L_0}}$, $V_0 = \frac{Q_0}{S_0}$, le nombre de Froude $F_0 = \frac{V_0}{C_0}$ (le nombre de Froude est supposé inférieur à 1) et L_0 la largeur au miroir pour le régime stationnaire. Nous déduisons de la première équation que $Q_0(x)$ est constant. Ceci est tout a fait logique, car un bief en régime statique est identique à un réservoir (de géométrie complexe). Dans ce cadre, le système possède des points d'équilibre seulement si les débits entrant et sortant sont identiques. Pour la même raison, nous déduisons qu'on a un régime permanent pour toutes les valeurs de Y en L .

Remarques.

1. Lorsque la hauteur d'eau est constante, c'est à dire $I(x) - J(x) = 0$, on parle de régime uniforme. La valeur de Y_0 est alors directement déduite de la définition de la perte de charge linéaire.

2. Le simulateur de canaux d'irrigation *SIC* [MB97] permet de calculer le régime permanent par l'intermédiaire du module FLUVIA, pour une géométrie (section, longueur, forme d'un bief, ...) et des caractéristiques hydrauliques (coefficient de Strickler, ...) données.

7.4 Etapes préalables à la synthèse de contrôleur

Avant de détailler la méthodologie que nous proposons d'utiliser pour obtenir un contrôleur, il nous semble important d'explicitier les choix et les moyens que nous avons utilisés pour remplacer l'équation de Saint-Venant par des modèles linéaires d'ordre fini. Pour cela, il faut aborder trois points spécifiques :

- 1/ Traiter le caractère non linéaire de l'équation de Saint-Venant,
- 2/ Traiter les problèmes induits par le caractère distribué du système,
- 3/ Obtenir un modèle linéaire de dimension finie.

Nous développons ces différents points dans la suite de cette section.

Traiter un système non linéaire

Nous voudrions ici clarifier la démarche implicitement suivie lorsque des méthodes de synthèse linéaire sont utilisées dans le cadre de la commande des canaux. Comme nous le venons de le voir, le modèle d'un bief est loin de correspondre à un modèle linéaire stationnaire. Face à ce problème, deux grands types d'approches sont possibles. La première consiste à utiliser des méthodologies spécifiques [CdNBdH01] qui permettent de traiter certains aspects attachés à la commande des systèmes², mais qui malheureusement ne possèdent pas à ce jour, un degré d'applicabilité suffisant pour tenir compte a priori d'aspects essentiels de la commande des systèmes : par exemple garantir une bonne réjection des perturbations. La seconde démarche est celle des gains variables [Sco97b] qui est de loin la plus utilisée dans la pratique pour aborder la commande des systèmes non linéaires bien qu'elle soit de nature heuristique [FS02]. Elle consiste en fait à synthétiser un ou des contrôleurs linéaires stationnaires qui assurent que l'ensemble des linéarisations stationnaires du système est correctement commandé (en terme de robustesse et performance). Cette méthodologie trouve sa justification dans le fait qu'elle assure que les propriétés dynamiques associées aux linéarisations stationnaires du système seront reportées sur le système non linéaire au voisinage du régime du point d'équilibre considéré.

Traiter un système de dimension infinie

Malgré la simplification déjà faite, une difficulté majeure demeure : les modèles linéarisés sont de dimension infinie. Deux approches sont classiquement considérées. La première consiste à utiliser les méthodes graphiques appelant les tracés de Bode ou de Black-Nichols. Dans ce cas, il faut disposer des valeurs de la fonction de transfert sur l'axe imaginaire³. En fait, au delà des difficultés liées à l'obtention de la transformée de Laplace, cette approche trouve rapidement ses limites dans notre cas, non seulement car le système que nous désirons commander est un système multivariable mais aussi parce que nous désirons développer une méthodologie de commande qui devra pouvoir être transférée vers des "non-automaticiens". La seconde approche repose sur l'approximation du système de dimension infinie par un système de dimension finie. Cette approche est motivée par l'idée qu'en commande robuste, la synthèse d'une loi de commande s'opère sur un modèle nominal (ici le modèle de dimension finie) perturbé par un opérateur incertain mais borné. Dans ce cadre, le modèle de dimension infinie peut être représenté par un modèle tronqué de dimension finie, le modèle nominal, auquel nous associons une incertitude de modèle. Cette manière d'approcher un modèle est du reste dans le même esprit qu'en réduction de modèles. En effet, il s'agit bien ici d'obtenir un modèle dont la représentation mathématique est simplifiée mais où, du point de vue de la commande, rien n'a été perdu. La nécessaire limitation de la bande passante du système commandé⁴ implique qu'une telle approximation est toujours possible. De tout cela, nous concluons que nous devons disposer d'une méthode nous permettant d'approcher le système linéaire de dimension infinie par un système de dimension finie sur une bande de fréquences finie dont la longueur doit être compatible avec les objectifs de commande.

²par exemple de prouver la stabilité au sens de Lyapunov des régimes d'équilibre du système.

³Sous l'hypothèse que le système de dimension infinie appartient à la classe définie par Callier et Desoer et qu'on connaisse le nombre de pôles instables du système.

⁴Cela est soit la conséquence d'une limitation structurelle du système (due à la présence d'un retard ou de zéros instables) ou plus simplement aux limitations induites par les actionneurs, les capteurs ou le dispositif de commande (par exemple la période échantillonnage).

Obtenir un modèle de dimension finie

Cela étant admis, il reste à trouver un moyen d'approcher la linéarisation du système par un modèle de dimension finie. C'est ici qu'intervient une autre considération. En effet, en première approche, nous pourrions penser qu'il suffit de développer ici un algorithme d'approximation adéquat conduisant au modèle souhaité. En fait, la mise en œuvre informatique de cette étape se révélerait très coûteuse car elle nécessiterait l'intégration de l'ensemble des données nécessaires à la description de la topographie du canal. Ceci est d'autant plus stupide, que les données topographiques sont déjà utilisées dans le simulateur du canal (dans notre cas, le logiciel *SIC*). Sur cette base, il semble plus judicieux de privilégier, si cela est possible, une solution s'appuyant sur le simulateur. Nous expliquons cela dans la section suivante.

7.5 Vers un modèle de dimension finie

7.5.1 La linéarisation exacte

Pour obtenir les linéarisations autour d'un régime permanent, nous réécrivons les équations (7.1) et (7.2) en remplaçant $Q(x, t)$ par $Q_0 + q(x, t)$ et $Y(x, t)$ par $Y_0(x) + y(x, t)$. Après avoir négligé les termes d'ordre 2, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} L_0(x) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + 2V_0(x) \frac{\partial q}{\partial x} - \beta_0(x)q + (C_0(x)^2 - V_0(x)^2)L_0(x) \frac{\partial y}{\partial x} - \gamma_0(x)y &= 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

où $C_0 = \sqrt{\frac{gS_0}{L_0}}$ et $V_0 = \frac{Q_0}{S_0}$ et

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= gL_0 \left[(1 + \kappa)I - (1 + \kappa - F_0^2(\kappa - 2)) \frac{\partial Y_0}{\partial x} \right] \\ \beta_0 &= -\frac{2g}{V_0} \left(I - \frac{\partial Y_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

avec $F_0 = \frac{V_0}{C_0}$ (le nombre de Froude) et $\kappa = \frac{7}{3} - \frac{4S_0}{3L_0P_0} \frac{\partial P_0}{\partial Y}$ où P_0 est le périmètre mouillé. Il reste à ajouter à ces équations, les variations des conditions au bord qui sont données par $q(0, t) = q_0(t)$ et $q(X, t) = q_X(t)$.

7.5.2 Modèle linéaire de dimension finie

La première manière d'obtenir un modèle de dimension finie s'appuie sur une approximation de la réponse fréquentielle des équations linéarisées. A l'heure actuelle, une telle démarche s'avère faisable lorsque les équations de Saint-Venant sont linéarisées autour d'un régime uniforme (et que la géométrie du bief est uniforme). Pour une géométrie quelconque ou encore autour d'un régime permanent quelconque, des résultats récents [LF01b] permettent d'obtenir (numériquement) la valeur de la fonction de transfert pour toute valeur de la variable de Laplace. Dans ce mémoire, nous empruntons une autre approche qui consiste à exploiter le simulateur numérique *SIC*. Ce simulateur s'appuie sur la discrétisation en temps et espace des équations de Saint-Venant en tenant compte de la géométrie, parfois compliquée d'un canal. Lorsque les paramètres hydrauliques et la géométrie d'un canal sont connus, il nous est possible d'obtenir un modèle linéarisé autour d'un régime uniforme. L'approximation ainsi obtenue est conditionnée par le type de schéma numérique utilisé pour résoudre les équations de Saint-Venant : le schéma de Preissmann [SC90, CHV80, Mal94].

Le schéma implicite de Preissmann

La discrétisation spatiale est la méthode la plus adaptée à la simulation des systèmes distribués. Elle consiste à choisir une discrétisation de l'espace et à remplacer les dérivées partielles par rapport à x par des différences finies. Dans le cas présent, les dérivées partielles par rapport à t sont aussi remplacées par des différences finies.

Dans le cas d'un schéma implicite, la valeur d'une fonction ou de ses dérivées partielles d'espace au temps t dépendent des variables au pas suivant $t^+ : t + \Delta t$. Il est à noter qu'à l'inverse d'un schéma explicite, la stabilité numérique du schéma de Preissmann ne conduit pas à introduire la contrainte de stabilité de Courant :

$$C_r = \frac{\Delta t(v + c)}{\Delta x} \leq 1 \quad (7.6)$$

où Δt et Δx sont respectivement les pas d'échantillonnage temporel et spatial.

Néanmoins, il ressort des études de stabilité, convergence et consistance du schéma de Preissmann que celui-ci est soumis en pratique à certaines contraintes [Mal94]. L'une d'elle impose que C_r (relation (7.6)) soit proche de 1 pour des raisons de dispersion numérique. Cela contraint Δx à dépendre de la nature du bief et du pas de temps Δt .

En conclusion, le nombre d'états nécessaire à la simulation s'avère en pratique important.

Linéarisation basée sur le schéma de Preissmann

Sur la base du schéma de Preissmann, nous allons construire un modèle linéaire discret. Celui-ci correspond en fait au système linéaire discret qui serait obtenu si on appliquait le schéma de Preissmann sur les équations linéaires (7.4). L'annexe H, page 261, présente le schéma conduisant aux modèles discrets que nous utiliserons dans la suite. De façon plus pratique, et pour des raisons d'implémentation de la méthode de résolution des équations de Saint-Venant, les matrices des linéarisations sont déjà calculées dans *SIC*⁵. Cela implique qu'une petite modification du simulateur (qui consiste à récupérer des quantités déjà calculées) va nous permettre d'obtenir pour tous les régimes permanents et quelle que soit la géométrie du canal, les approximations des linéarisations du système. Nous proposons dans la section suivante de valider le modèle obtenu par cette méthode.

7.5.3 Analyse des modèles obtenus

L'objet de cette section est d'analyser les modèles linéarisés de dimension finie obtenus par la discrétisation selon le schéma de Preissmann des équations de Saint-Venant linéarisées. Pour mener à bien cette analyse, on suppose que la géométrie du canal est uniforme et que la linéarisation est calculée autour d'un régime uniforme. Dans ce cas particulier, il est possible d'obtenir, par intégration des équations de Saint-Venant linéarisées (7.4), une fonction de transfert irrationnelle explicite en la variable de Laplace [BS97]. Pour 2 catégories de bief, ces tracés fréquentiels sont comparés aux tracés fréquentiels des modèles de dimension finie issus de la discrétisation.

Comme le montre la discrétisation des équations de Saint-Venant menée dans l'annexe H page 261, la taille du vecteur d'état est directement reliée au pas de discrétisation Δx et à la longueur L du bief. La taille n du vecteur d'état est inversement proportionnelle au pas Δx : $n = \frac{2L}{\Delta x}$.

⁵Cela vient du fait que l'algorithme de résolution de l'équation de Saint-Venant est itératif et qu'à chaque itération, on a besoin de calculer la première variation de Saint-Venant autour de la solution courante. Cela conduit à calculer des quantités nécessaires au calcul de la linéarisation.

Les biefs considérés représentent 2 classes d'écoulements possibles [BSM98]. Tous deux sont prismatiques et de même section trapézoïdale. Les paramètres hydrauliques en régime uniforme sont présentés dans le tableau suivant.

type	l	I	L	K	$Q(x, 0)$	$Y(L, 0)$
1	7	0.0001	3000	50	14	2.12
3	8	0.0002	3000	20	10	2.27

Nous rappelons que les entrées u_1 et u_2 représentent respectivement les débits amont et aval. Les sorties y_1 et y_2 sont respectivement les cotes amont et aval.

• bief de type 1

Le premier type de bief est celui de type 1 considéré dans la première partie de ce mémoire (page 25). Ce bief possède la particularité de posséder des résonances. Dans ce cas, les périodes d'échantillonnage temporelle et spatiale ont été choisies égales à $\Delta t = 120s$ et $\Delta x = 250m$ pour une longueur de bief $L = 3000m$. Les figures suivantes comparent les tracés fréquentiels du modèle de dimension infinie à ceux du modèle de dimension finie avec $n = 24$.

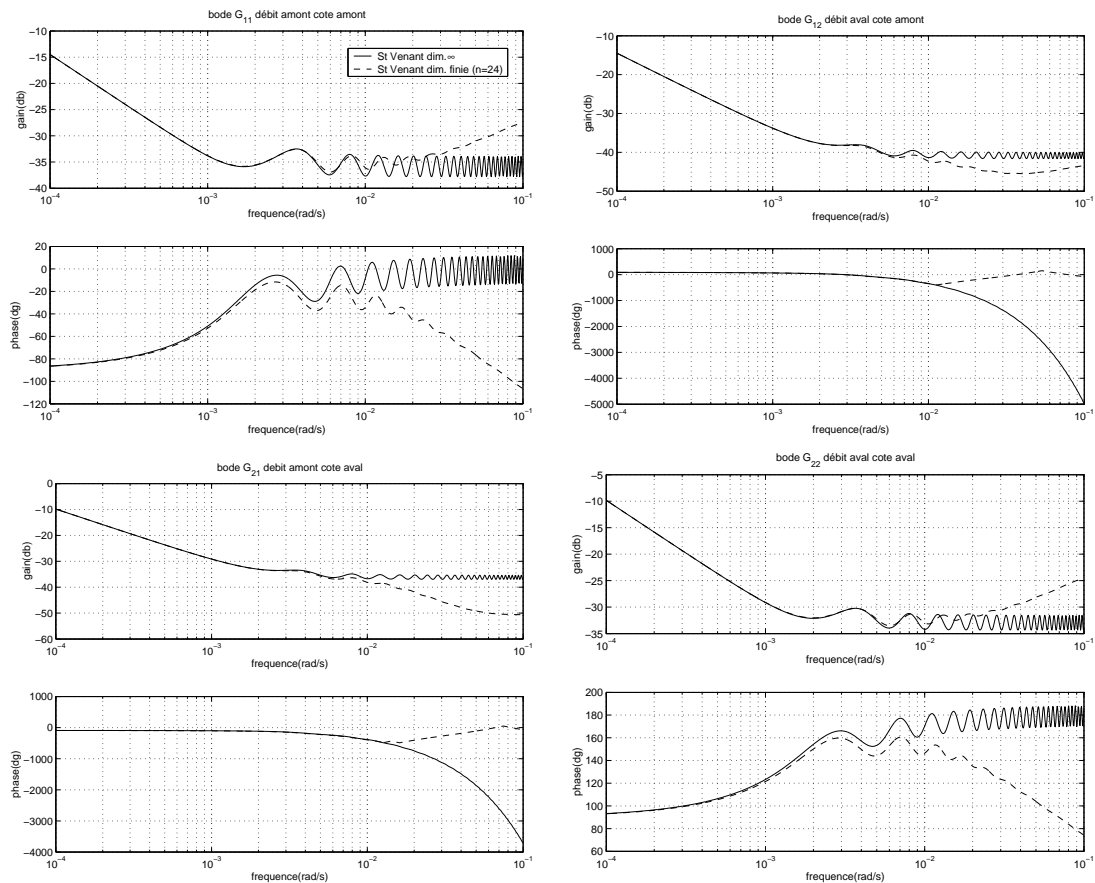


FIG. 7.5 – Comparaison des tracés fréquentiels issus du modèle de dimension infinie et du modèle obtenu par le schéma de Preissmann pour un bief de type 1

Dans ce cas, $C_r \simeq 3$ ce qui induit un comportement erroné des transferts de dimension finie en hautes pulsations (le gain augmente sur les transferts (1, 1) et (2, 2)).

• bief de type 3

Le bief de type 3 fait partie des biefs dont le caractère retardé est la propriété physique

prépondérante. Comme pour le bief de type 1, nous représentons les tracés fréquentiels du modèle de dimension infinie et du modèle de dimension finie avec $n = 24$. Dans ce cas, les périodes d'échantillonnage temporelle et spatiale ont été choisies égales à $\Delta t = 60s$ et $\Delta x = 250m$, la longueur du bief étant $L = 3000m$.

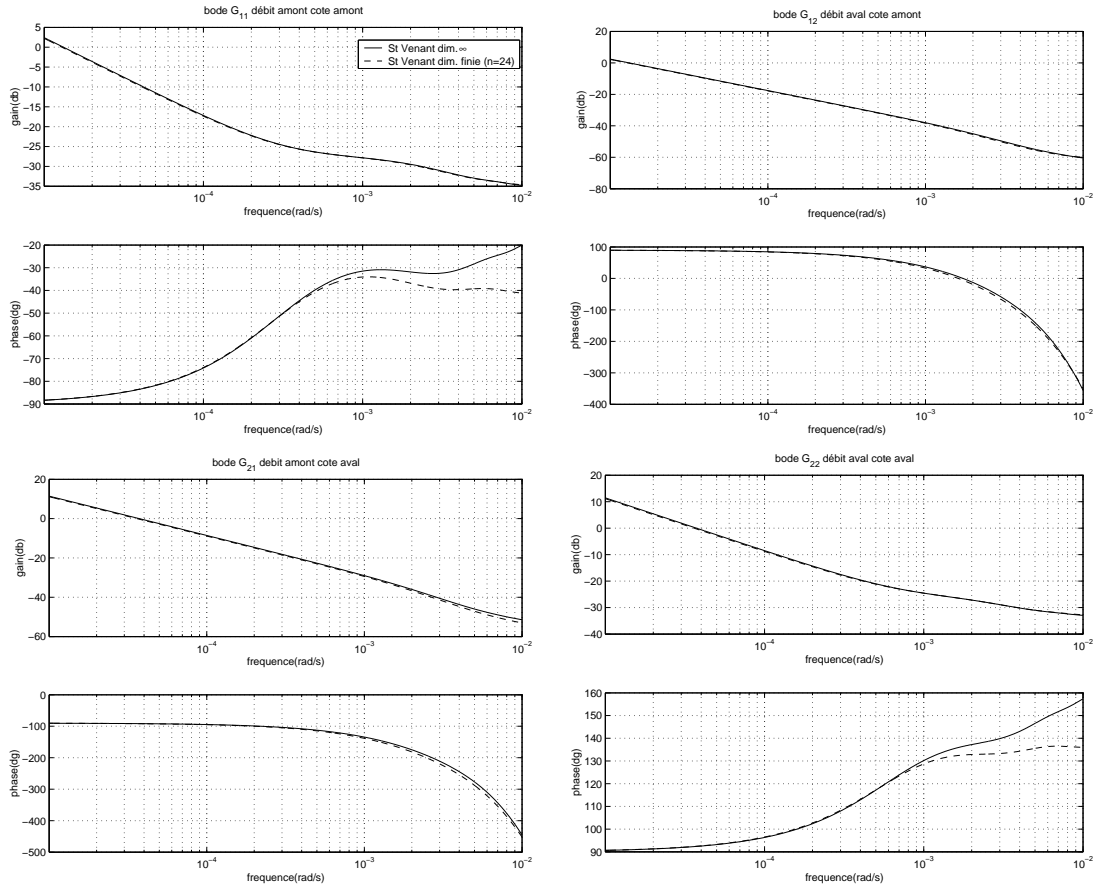


FIG. 7.6 – Comparaison des tracés fréquentiels issus du modèle de dimension infinie et du modèle obtenu par le schéma de Preissmann pour un bief de type 3

Pour le bief de type 3, le nombre de courant C_r est proche de 1. Les transferts de dimension finie ne subissent qu'une détérioration sur la phase des transferts diagonaux.

7.6 De la commande d'un bief à la commande multivariable d'un canal

Avant de s'intéresser à la commande d'un canal, nous introduisons dans le chapitre 8 le problème de la commande d'un unique bief. Dans ce cas monovarié, nous mettons en évidence le compromis de réglage d'un simple correcteur PI . Dans un second temps, nous formulons les diverses spécifications rattachées à la commande d'un bief. Il est possible dans ce contexte de proposer un schéma de synthèse reposant sur la minimisation d'un critère H_∞ pondéré prenant en compte de façon simultanée les objectifs de performance et de robustesse. La solution obtenue n'est autre qu'un " PI optimisé" pour les objectifs requis.

Le problème multivariable d'un canal composé de 3 biefs est abordé dans le chapitre 9. Nous montrerons alors que le critère H_∞ considéré dans le cas de la commande d'un bief peut s'étendre de façon quasi-immédiate au problème multivariable. Seules les spécifications se rapportant au découplage entre les biefs (problème de l'équité de la répartition de l'eau) et celles associées à l'obtention de marges de robustesse multivariées doivent être "ajoutées". Ceci constitue un aspect nouveau par rapport aux méthodes de synthèse multivariées existantes : la commande LQG [Mal98], la commande GPC [ABM⁺98, ABM⁺99] et commande l_1 [MK01] qui ne permettent pas de prendre en compte *a priori* (ou plus exactement d'intégrer facilement) de façon simultanée les objectifs se rapportant à la performance et ceux qui touchent à la robustesse.

Certains éléments des chapitres 8 et 9 ont été utilisés dans la rédaction du chapitre "commande de dimension finie" du livre [GL02].

CHAPITRE 8

Commande d'un bief

Ce chapitre aborde la commande d'un unique bief et nous permet de formuler les objectifs usuellement attachés à la "commande aval distante" [Mal94, RCCS98] comme un problème de minimisation d'un critère H_∞ pondéré de type "4 blocs". Nous indiquerons ici comment ce critère prend en compte chacune des spécifications attachées à la commande d'un bief : poursuite de signaux de référence, réjection de perturbations inconnues, limitation des efforts d'actionneur, marges de gain/phase assurées [PG99, PGFB01a, PGFB01b]. La synthèse H_∞ sera ainsi menée sur le modèle d'ordre complet (ordre 24) présenté dans le chapitre précédent. Pour montrer l'apport de la commande H_∞ par rapport à une méthode de réglage classique, nous proposons dans un premier temps une synthèse de type *PI* basée sur les règles de l'automatique classique.

La synthèse sur le modèle d'ordre complet mène naturellement à un correcteur d'ordre trop important. Pour remédier à cela, nous procédons en plusieurs étapes. Le modèle de synthèse utilisé est en fait inutilement complexe par rapport au cahier des charges. Les méthodes de réduction de modèles vues dans la première partie vont être mises en œuvre pour obtenir un modèle réduit tenant compte du cahier des charges. Le nouveau correcteur calculé à partir de ce nouveau modèle de synthèse, peut être encore d'ordre inutilement important. Une réduction de ce correcteur peut alors être faite à l'aide des outils de la partie précédente. Pour valider l'approche, nous comparerons les performances obtenues par les différents correcteurs avec celles du correcteur d'ordre complet synthétisé sur le modèle d'ordre 24. L'ensemble de l'approche est résumée sur la figure 8.1.

8.1 Régulation aval distante par un correcteur de type PI

L'objectif de cette partie est d'étudier les performances et limitations de la loi de commande basée sur une structure aval distante. Le prélèvement de l'eau (perturbation d) par l'usager est de type gravitaire. Afin de satisfaire les débits d de prélèvement, la cote y au niveau de la prise gravitaire doit être maintenue constante. Ainsi, l'enjeu principal de cette régulation est de maintenir la cote aval du bief y la plus proche possible de la consigne souhaitée en agissant sur le débit entrant u , malgré la présence de perturbations

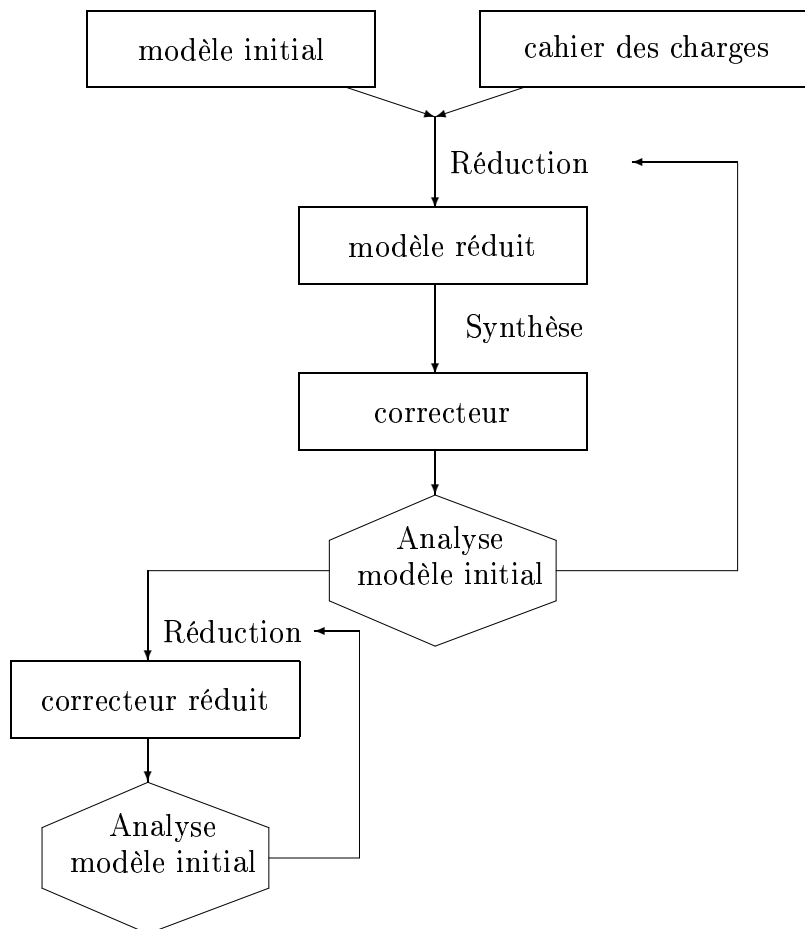


FIG. 8.1 – Démarche pour l'obtention d'une loi de commande d'ordre faible

non mesurées de débit d (figure 8.2).

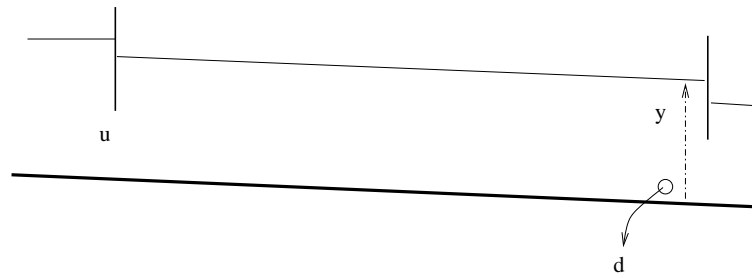


FIG. 8.2 – Commande aval distante

Nous considérons dans la suite de ce chapitre qu'un bief est décrit par une famille de systèmes linéaires stationnaires ayant la structure suivante

$$y(p) = G(p)u(p) - \tilde{G}(p)d(p)$$

Le bief étudié est un type 1 (voir section 7.5.3). Le diagramme de Bode du système $[G(j\omega) \tilde{G}(j\omega)]$ correspond à la seconde ligne du tracé de la figure 7.5, page 179.

Nous supposons par ailleurs que le correcteur utilisé pour réguler le bief est de type PI, c'est à dire un correcteur ayant la forme suivante :

$$K(p) = K_I \frac{1 + \tau_1 p}{p} \quad (8.1)$$

La boucle fermée associée à ce contrôleur est donc régie par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} e(p) = r(p) - y(p) \\ u(p) = K(p)e(p) \\ y(p) = G(p)u - \tilde{G}(p)d(p) \end{cases}$$

où r est la consigne de cote associée au bief, et e l'erreur de poursuite de l'asservissement. On déduit de cela que l'erreur de poursuite est liée à la consigne et à la perturbation de débit par

$$e(p) = \frac{1}{1 + G(p)K(p)}r(p) + \frac{\tilde{G}(p)}{1 + G(p)K(p)}d(p)$$

De façon plus détaillée, on souhaite que le régulateur assure d'une part que la consigne de cote, en l'absence de perturbations de débit, soit correctement asservie (erreur statique nulle, réponse à l'échelon rapide et ayant un dépassement inférieur à 20%). Il doit d'autre part assurer la meilleure réjection possible des perturbations de débit tout en conservant des marges de stabilité satisfaisantes.

La présence de l'intégrateur assure que l'erreur de poursuite face aux perturbations constantes (d'amplitude D) de débit retourne asymptotiquement vers zéro quand le temps tend vers l'infini. En effet, on peut réécrire, du fait de la structure particulière du correcteur PI, la fonction de transfert liant la perturbation de débit à l'erreur de poursuite comme :

$$H(p) = \frac{\tilde{G}(p)}{1 + G(p)K(p)} = p \frac{\tilde{G}(p)}{p + G(p)K_I(1 + \tau_1 p)}$$

ce qui assure que $H(0) = 0$ ¹. L'utilisation du théorème de la valeur finale permet de conclure que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p H(p) \frac{D}{p} = 0$$

On peut démontrer de la même façon que l'erreur de poursuite face à des consignes constantes de cote est également asymptotiquement éliminée.

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'un des enjeux majeur de la régulation des biefs est de s'affranchir des perturbations de débit générées par les prélèvements. On peut en fait montrer que cette demande est équivalente à chercher à maximiser la bande passante du système, c'est à dire la bande de pulsations où le gain de la boucle ouverte est supérieur à 1 : $|G(j\omega)K(j\omega)| > 1$. Pour s'en convaincre, il suffit ici d'utiliser la transformation de Fourier, c'est à dire considérer la perturbation de débit comme la superposition d'une somme infinie de sinusoïdes. Sur cette base, en utilisant les propriétés spécifiques de la transformation de Fourier, on ramène l'étude des effets des perturbations de débit à la caractérisation des propriétés de la fonction de transfert liant la perturbation de débit à l'erreur de poursuite :

$$e(j\omega) = H(j\omega)d(j\omega)$$

Cette composante de la perturbation est atténuée/rejetée si $|H(j\omega)| \ll 1$ ce qui est équivalent à demander que :

$$\left| \frac{\tilde{G}(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \ll 1$$

Cela explique pourquoi nous avons donc tout intérêt à chercher à maximiser la bande de pulsations où :

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$$

c'est à dire la bande passante du système.

Dans le contexte particulier des biefs, on peut caractériser simplement la bande passante maximale atteignable par un PI. En fait, il est possible de démontrer que c'est la nature retardée du système qui limite intrinsèquement la bande passante et non la structure limitée du PI [LF01a].

Nous indiquons dans la suite de cette section, la méthode conduisant au réglage du PI assurant la maximisation de la bande passante. Afin de simplifier l'exposé² et afin de rentrer dans un cadre déjà bien connu, nous supposons que le transfert liant la commande amont à la cote aval est modélisé par un terme de transport (un retard) et un stock d'eau (un intégrateur) :

$$G(p) = \frac{K_z e^{-\tau_r p}}{p}$$

où τ_r est la valeur du retard et K_z la sensibilité de la cote au débit.

Pour comprendre en quoi le retard restreint la bande passante du PI, considérons d'abord le système sans retard pur (figure 8.3). Dans ce cadre, la boucle ouverte corrigée par le PI déphase au moins de -90° (en hautes fréquences).

¹Du fait que $\frac{\tilde{G}(p)}{p+G(p)K_I(1+\tau_1 p)}$ n'a pas de pôle en 0.

²Le même raisonnement peut être fait sur la fonction de transfert irrationnel en la factorisant en partie interne et externe (inner outer) [LF01b].

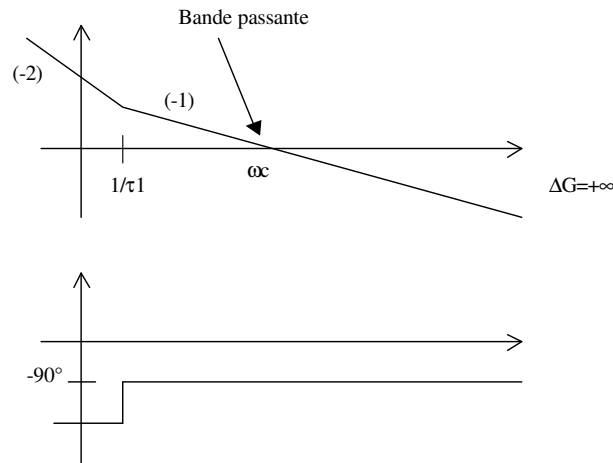


FIG. 8.3 – PID et système sans retard

L'introduction du retard pur (figure 8.4) ajoute à chaque pulsation le déphasage suivant :

$$\Delta\phi_r = \omega\tau_r \frac{180^\circ}{\pi}$$

Comme le déphasage minimal apporté en hautes fréquences par la partie sans retard est de -90° , cela implique, dès lors qu'on ajoute le retard, que la pulsation $\omega_{\Delta G}$ où la marge de gain va être obtenue, est la solution de l'équation suivante :

$$-\omega_{\Delta G}\tau_r \frac{180^\circ}{\pi} - 90^\circ = -180^\circ$$

On obtient alors un lien entre la marge de gain et le gain du système à une pulsation particulière :

$$\Delta G|_{dB} = 20\log_{10}(|K(j\omega_{\Delta G})G(j\omega_{\Delta G})|)$$

ce qui permet, en notant qu'asymptotiquement la pente du Bode est de -20dB par décade entre la pulsation de la bande passante et celle de la marge de gain, d'écrire que :

$$\omega_c \approx e^{-\ln(10)\frac{\Delta G}{20}} \omega_{\Delta G}$$

où ΔG est la marge de gain (en dB) souhaitée et donc finalement :

$$\omega_c \approx e^{-\ln(10)\frac{\Delta G}{20}} \frac{\pi}{2\tau_r}$$

Après avoir déterminé la bande passante du système, il reste à positionner le zéro du PI (même si on sait qu'il se trouve évidemment avant ω_c). La position de ce zéro est importante ici puisqu'elle détermine non seulement de façon directe la marge de phase du système (ce qui est classique) mais aussi et de façon plus complexe, elle influe fortement sur la position du pôle le plus lent de la boucle fermée³. Dans le cas où ce zéro est lent, on peut montrer qu'il est très proche du pôle le plus lent de la boucle fermée. Dans ce cas, le pôle lent n'influencera que très faiblement le comportement du système face au échelon de consigne puisque le zéro du PI «cache» le pôle de la boucle fermée (vis à vis

³Pour s'en convaincre, il suffit de faire un lieu des pôles (lieu d'Evans) après avoir remplacé le retard par une approximation de Padé.

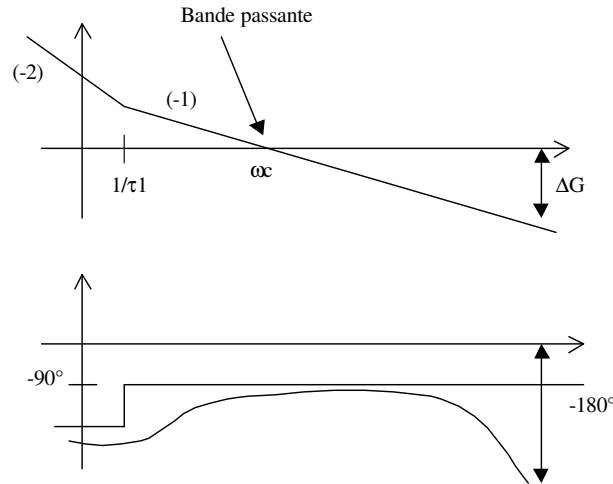


FIG. 8.4 – PID et système

de la sortie). Par contre, cette annihilation pôle/zéro n'a pas lieu sur le transfert qui lie la perturbation de débit à la cote. Cela implique que la rapidité de réjection d'un échelon de perturbation est principalement liée aux caractéristiques de ce pôle lent.

En résumé, il est nécessaire de chercher à mettre le zéro du système le plus proche possible de la bande passante. Le compromis de réglage doit assurer que la dynamique du système face aux échelons de consigne ou de perturbation sont proches.

8.2 Analyse d'une solution possible

Analyse de la boucle ouverte

Pour régler le PI, nous avons cherché des paramètres nous garantissant une marge de gain de l'ordre de $10dB$, par ailleurs en adéquation avec la volonté d'atténuer les résonances du modèle (voir figure 8.5). Le réglage a conduit au correcteur suivant :

$$K(p) = 15 \frac{p + 2 \times 10^{-4}}{p} \quad (8.2)$$

Comme on peut le voir sur la figure 8.5, ce correcteur appliqué sur le modèle de dimension finie nous assure une marge de gain supérieure à $10dB$ et une marge de phase supérieure à 60° . La forte valeur de la marge de phase est suffisante pour, qu'en dépit du retard, le dépassement face à un échelon de consigne soit inférieur à 20% .

Comme le montre la figure suivante, le correcteur PI précédent satisfait les mêmes propriétés de robustesse en stabilité sur le modèle de dimension infinie, introduit dans la section 7.5.3.

Simulations

Nous présentons dans ce paragraphe les simulations du système face à une modification de la consigne de cote d'une valeur de 1 (figure 8.7), puis les courbes associées à l'envoi d'une perturbation de débit d'une valeur de -1 en aval du bief (figure 8.8).

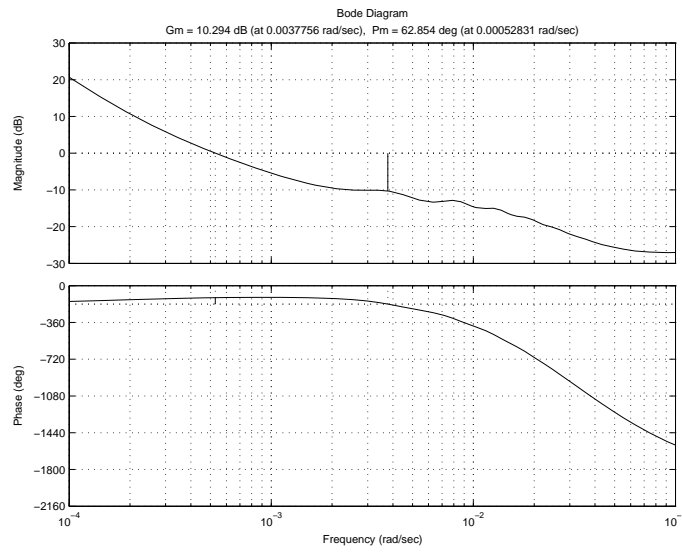


FIG. 8.5 – Bode de la boucle ouverte corrigée par un PI

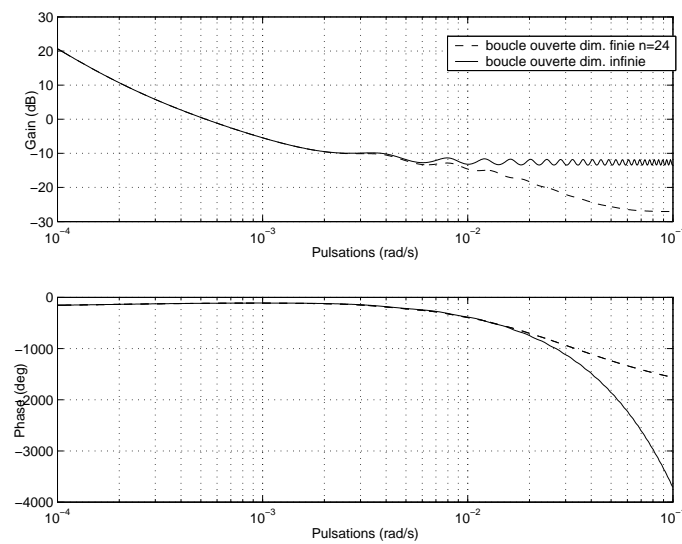
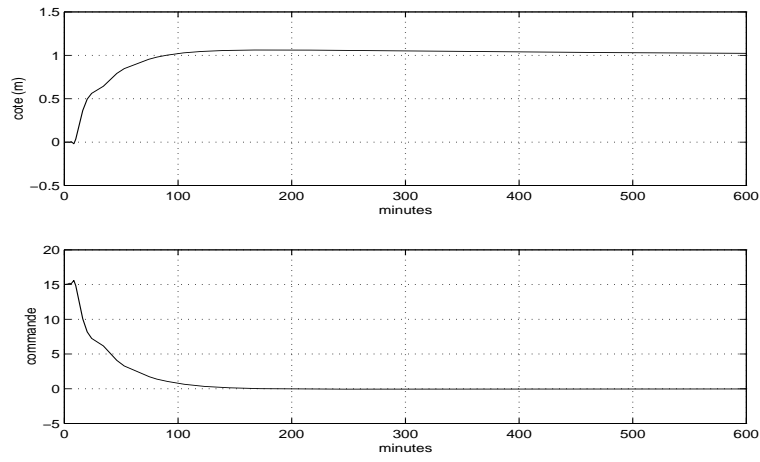
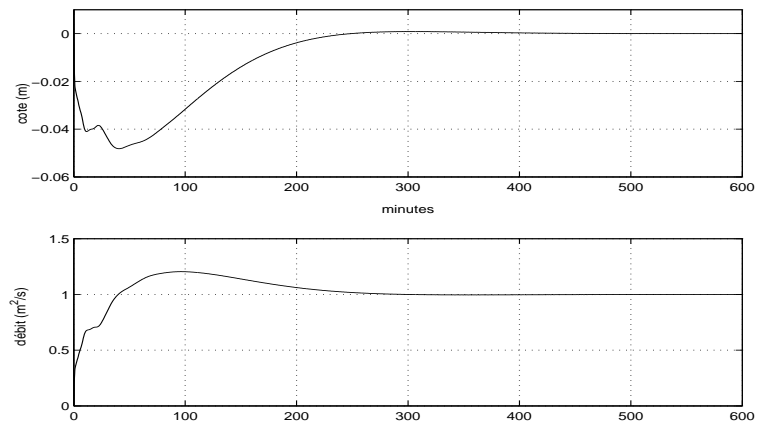


FIG. 8.6 – Bode de la boucle ouverte corrigée par un PI

FIG. 8.7 – Réponse du système à un échelon unitaire de consigne à $t = 0$ FIG. 8.8 – Réponse du système à un échelon unitaire de perturbation à $t = 0$

8.3 Correcteur H_∞ d'un bief

Cette section propose la synthèse monovariante d'un correcteur H_∞ régulant la cote aval d'un bief. La synthèse du correcteur H_∞ passe par deux étapes. La première étape consiste à exprimer le cahier des charges en terme de contraintes H_∞ sur les divers transferts du système bouclé. La seconde étape consiste alors à formaliser l'ensemble de ces contraintes sous la forme de la minimisation de la norme H_∞ d'un problème sous la forme standard.

Dans notre cas, nous montrerons qu'il est possible de ramener le problème initial à un critère de type «4 blocs».

La seconde partie de cette section sera consacrée à la comparaison des correcteurs PI et H_∞ . Cette étude permettra de montrer «l'équivalence attendue» de ces deux solutions face à ce problème de commande spécifique. Bien que finalement bien proches, il reste à mettre en avant que la différence majeure existant entre ces deux approches réside non pas dans la solution mais dans le fait que le correcteur H_∞ est lui la solution d'un problème d'optimisation (convexe et de dimension finie). Une autre différence réside dans le fait qu'il est facile d'intégrer des contraintes supplémentaires dans la conception du correcteur (nous le montrerons en spécifiant dans la synthèse H_∞ une décroissance du gain du correcteur en hautes fréquences).

8.3.1 Synthèse d'un correcteur H_∞

8.3.1.1 Expression du cahier des charges en terme de contraintes H_∞

L'expression du cahier des charges en termes de contraintes sur les différents transferts du système est le suivant :

	Erreur de poursuite	Commande
Consigne de cote	Erreur statique	Effort de commande limité
Perturbation en débit	Rejet des perturbations de débit	Effort de commande

Nous ajoutons à ces spécifications une contrainte relative à la robustesse du système, en imposant, comme dans le cas du PI, l'obtention d'une marge de gain (et de phase) minimale garantie.

La traduction du cahier des charges en terme de «critère H_∞ » passe par une (re)formulation des objectifs de commande en terme de contraintes sur les transferts de la boucle fermée du système. Le reste de cette section est consacrée à cette (re)formulation.

Objectifs de régulation : erreur statique

L'expression des contraintes attachées à la régulation de la cote concerne la fonction de transfert liant la consigne à l'erreur de poursuite : $S = (I + GK)^{-1}$.

De façon plus générale, l'erreur de poursuite attachée à un signal sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude a est donnée par

$$|e(j\omega)| = a|S(j\omega)|$$

La spécification concernant l'erreur statique se traduit par la contrainte en boucle fermée suivante :

$$|S(j0)| \leq g_s.$$

Dans le cadre H_∞ , une telle contrainte est formulée à travers l'utilisation d'une pondération fréquentielle stable et d'inverse stable (usuellement notée W_1 dans la littérature) agissant sur S . Dans ce cadre, la résolution du problème H_∞ associé conduit à chercher le plus petit $\gamma > 0$ et le correcteur K stabilisant qui soit tel que

$$\|W_1 S\|_\infty \leq \gamma$$

Dans ce contexte, si nous supposons que la valeur du critère est inférieur ou égal à 1, alors nous avons

$$\|W_1 S\|_\infty \leq 1$$

qui, par définition de la norme H_∞ , assure que pour tout $\omega \in \bar{\mathbb{R}}$, on a :

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| \leq 1$$

et donc que :

$$|S(j\omega)| \leq |W_1(j\omega)|^{-1}$$

si $|W_1(j\omega)|$ n'est pas nulle.

L'erreur de poursuite, à une pulsation donnée, est donc directement proportionnelle à l'inverse du module de W_1 en cette pulsation. L'erreur statique est, par exemple, spécifiée par l'inverse du gain statique de W_1 (on notera ici que pour des raisons liées à l'algorithme de résolution du critère H_∞ – par résolution de deux équations de Riccati [DGKF89] – nous devons prendre $g_s \neq 0$). Les propriétés que doit satisfaire W_1 pour l'objectif de régulation sont qualitativement identifiées.

Objectifs de réjection des perturbations de débit

Comme nous l'avons noté, la spécification relative aux rejets des perturbations de débit concerne d'une part les basses fréquences ainsi que des fréquences spécifiques qui correspondent aux premières harmoniques des perturbations agissant sur le système.

De façon plus générale, il s'agit principalement de rejeter une perturbation inconnue.

La réjection «optimale» de perturbation non mesurée conduit à chercher à maximiser la bande passante du système afin d'assurer la meilleure «désensibilisation» possible [Bla34].

Dans le cadre H_∞ , nous allons définir une pondération qui nous assure que l'effet de la perturbation sur l'erreur de poursuite, spécifié par le transfert $\tilde{G}S$, vérifie la relation suivante :

$$|\tilde{G}(j\omega)S(j\omega)| \ll 1$$

dans la bande de fréquences où les perturbations agissent.

A cette fin, il suffit de définir une pondération, W_p , qui soit telle qu'aux pulsations où les perturbations agissent, on ait $|W_p(j\omega)| \gg 1$ (voir [Zam81]).

Dans le cas où il existe un correcteur K tel que :

$$\|GSW_p\|_\infty \leq 1$$

alors pour tout $\omega \in \bar{\mathbb{R}}$, on a :

$$|\tilde{G}(j\omega)S(j\omega)W_p(j\omega)| \leq 1$$

et donc

$$|\tilde{G}(j\omega)S(j\omega)| \leq |W_p(j\omega)^{-1}| \ll 1$$

aux fréquences qui nous intéressent.

De façon typique, nous minimiserons les perturbations constantes (pas d'effet de la valeur moyenne des perturbations de débit sur la cote) en prenant $|W_p(j0)^{-1}| \ll 1$. On peut faire la même chose pour minimiser l'effet des perturbations de débit agissant à des fréquences spécifiques (typiquement les perturbations liées aux prélèvements effectués à 8h, 12h et 24h d'intervalle).

Contraintes de robustesse : marge de gain (de phase) minimale

Il suffit de rappeler que la marge de gain (de phase) du système peut être spécifiée à travers une contrainte sur $S = (I + GK)^{-1}$ et/ou $T = GK(I + GK)^{-1}$ (voir [SA78]). En effet, on peut garantir, au moins que nous avons les marges de gain et de phase suivantes⁴ :

$$\begin{aligned} \Delta k &\in [\mathbf{min}(1 - \alpha_T, (1 + \alpha_S)^{-1}), \mathbf{max}(1 + \alpha_T, (1 - \alpha_S)^{-1})] \\ \Delta\Phi &\in [-2\mathbf{max}(\arcsin(\frac{\alpha_S}{2}), \arcsin(\frac{\alpha_T}{2})), 2\mathbf{max}(\arcsin(\frac{\alpha_S}{2}), \arcsin(\frac{\alpha_T}{2}))] \end{aligned} \quad (8.3)$$

où $\alpha_S = \|S\|_\infty^{-1}$ et $\alpha_T = \|T\|_\infty^{-1}$.

Une fois de plus, il suffit pour garantir la marge en entrée de contraindre la valeur de la norme H_∞ de S ou/et de T .

Dans notre cas, nous contraignons S à travers la valeur minimale de $|W_1(j\omega)|$. En effet, si on prend $\mathbf{min}_{\omega \in \mathbb{R}} |W_1(j\omega)| \geq 1 - \Delta G$ et que $\|W_1 S\|_\infty \leq 1$ alors $|S(j\omega)| \leq |W_1(j\omega)|^{-1} \leq (1 - \Delta G)^{-1}$ qui par application de la formule présentée ci-dessus garantit au moins une marge ΔG .

Contraintes sur la commande : modeler les hautes pulsations

Nous cherchons principalement ici à limiter les effets des bruits de mesure sur la commande du système. Une telle contrainte peut être spécifiée en contraignant le transfert entre le bruit de mesure et la commande : KS . La contrainte habituellement utilisée est notée W_2 . De façon plus générale, cette pondération permet de modeler le correcteur en hautes pulsations. En effet, en hautes pulsations, $|S(j\omega)| \approx 1$ ce qui implique, dès lors que $\|W_2 KS\|_\infty \leq 1$ que

$$|K(j\omega)| \leq |W_2(j\omega)|^{-1}$$

8.3.1.2 Un critère 4 blocs comme solution

L'utilisation des propriétés de la norme H_∞ d'une matrice de transfert va permettre de formaliser l'ensemble des contraintes exprimées dans la section précédente à l'aide d'un critère de "type 4 blocs". De façon plus précise, rappelons le résultat suivant :

Proposition [Fon95]

Soit $M(p) = [m_{ij}(p)] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$ telle que $\|M\|_\infty \leq \gamma$. Alors pour tout $i \in [1, n]$ et $j \in [1, m]$, on a

$$\|m_{ij}\|_\infty \leq \gamma.$$

⁴Elles sont une conséquence directe du théorème du faible gain. En effet, considérons que le système nominal est soumis soit à une erreur multiplicative en entrée, *i.e.* $G_p = G(I + \Delta)$ où Δ est l'incertitude de modèle, soit à une erreur multiplicative inverse en entrée, *i.e.* $G_p = G(I + \Delta)^{-1}$ où Δ est l'incertitude de modèle [DWS82]. Nous pouvons alors garantir par application du théorème du faible gain (*cf.* [Zam66]), que la boucle fermée associée au système perturbé reste stable dès lors que l'erreur multiplicative directe (resp. inverse) agissant sur G est telle que $\|\Delta\|_\infty \|S\|_\infty < 1$ (resp. $\|\Delta\|_\infty \|T\|_\infty < 1$).

Soit $H(p)$ la matrice de transfert associée au système qui admet pour entrées la consigne $r(p)$, la perturbation de débit $d(p)$, et comme sorties l'erreur de poursuite $e(p)$ et la commande $u(p)$ (voir figure 8.9). $H(p)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} H(p) &= \begin{pmatrix} (I + G(p)K(p))^{-1} & \tilde{G}(p)(I + G(p)K(p))^{-1} \\ K(p)(I + G(p)K(p))^{-1} & \tilde{G}(p)K(p)(I + G(p)K(p))^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} S(p) & \tilde{G}(p)S(p) \\ K(p)S(p) & \tilde{G}(p)K(p)S(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

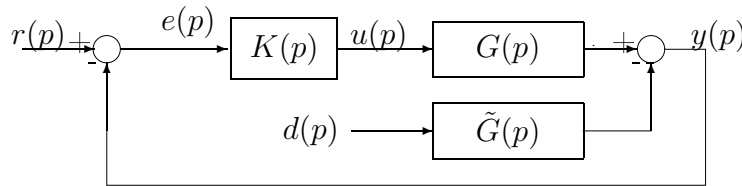


FIG. 8.9 – Schéma du système bouclé

Nous associons à $H(p)$ le système augmenté des pondérations qui admet comme matrice de transfert :

$$M(p) = W_s(p)H(p)W_e(p)$$

où W_e et W_s sont respectivement les pondérations en entrée et en sortie associées au critère H_∞ . La section précédente, conduit naturellement à considérer que les pondérations possèdent la structure suivantes :

$$W_e(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_p(p) \end{pmatrix} \quad W_s(p) = \begin{pmatrix} W_1(p) & 0 \\ 0 & W_2(p) \end{pmatrix}$$

où W_1, W_2 et W_p sont des fonctions de transfert monovariabiles stables et d'inverse stables. En effet, dans ce cas, la résolution du problème H_∞ conduit à chercher le plus petit $\gamma > 0$ et le correcteur K stabilisant qui soit tel que :

$$\|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} W_1(I + GK)^{-1} & W_1\tilde{G}(I + GK)^{-1}W_p \\ W_2K(I + GK)^{-1} & W_2\tilde{G}K(I + GK)^{-1}W_p \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma$$

Si maintenant la valeur de γ est proche de 1, alors la proposition rappelée ci-dessus, garantit que les diverses spécifications H_∞ faites à la section précédente sont satisfaites.

Remarque sur le critère

Comme nous le voyons, ce critère n'est pas tout a fait celui que nous avons spécifié dans la section précédente. En effet, nous voyons apparaître, d'une part, une double contrainte sur le transfert liant la perturbation de débit à l'erreur de poursuite, c'est à dire $\tilde{G}S$ et d'autre part, une contrainte que nous n'avons pas spécifiée sur $\tilde{G}KS$.

Une analyse rapide des contraintes nous montre que la contrainte que nous souhaitons faire apparaître sur $\tilde{G}S$ peut être aussi bien spécifiée par W_1 et que, dans ce cas, W_p peut être prise égale à une constante. Cela a pour avantage de faire disparaître la contrainte

basses pulsations sur $\tilde{G}KS$. Il ne reste dès lors sur le bloc contraignant $\tilde{G}KS$ que la contrainte fréquentielle introduite par W_2 et W_p . Celle-ci, comme nous le verrons, n'introduit pas de contrainte sur $\tilde{G}KS$; cela est lié au fait que W_2 contraint d'abord KS et donc agit plutôt aux hautes pulsations.

Remarquons par ailleurs que dans le cas conventionnel d'une perturbation agissant en entrée du système, le transfert liant la perturbation à la commande est la fonction de sensibilité complémentaire $T = GKS$, alors que dans notre cas ce transfert est $\tilde{G}KS$. La propriété usuelle $T \approx I$ en basses pulsations peut être en partie reconduite ici car le tracé de bode de $G(j\omega)$ et $\tilde{G}(j\omega)$ sont identiques aux basses pulsations.

$$|\tilde{G}KS| \approx |T| \approx 1 \text{ en basses pulsations} \tag{8.4}$$

8.3.2 Mise en oeuvre et analyse d'une solution possible

Les contraintes qualitatives décrites au paragraphe précédent ont été transcrites à travers l'utilisation de pondérations du premier ordre. Afin de faciliter la phase d'ajustement des pondérations, nous utilisons des fonctions de transfert proposées dans [Fon95] qui ont la forme particulière suivante :

$$W(p) = \frac{G_\infty \sqrt{|G_0^2 - 1|} s + G_0 \omega_c \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}}{\sqrt{|G_0^2 - 1|} s + \omega_c \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}} \tag{8.5}$$

avec

$$\begin{cases} (G_0 - 1)(G_\infty - 1) < 0 \\ \omega_c > 0 \end{cases}$$

et qui vérifient (voir [Fon95]) :

$$\begin{cases} |W(j0)| & = G_0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W(j\omega)| & = G_\infty \\ |W(j\omega_c)| & = 1 \end{cases}$$

Dans le cas de la pondération W_1 , qui agit sur l'erreur de poursuite et sur la réjection des perturbations de débit, G_0^{-1} spécifie l'erreur statique de poursuite, ω_c permet d'ajuster la bande passante associée à GK et G_∞^{-1} correspond à une contrainte sur la valeur maximale la fonction de sensibilité qui, comme nous l'avons déjà indiqué, nous permettra de contraindre les marges en entrée du système.

La pondération W_2 est elle aussi une pondération du premier ordre décrit par (8.5). Dans ce cas, G_0 est pris de telle sorte que W_2 soit compatible avec la contrainte asymptotique aux pulsations faibles (voir [Fon95]).

Les pondérations utilisées

Après une phase d'ajustement, nous avons pris $W_p = 6$ et spécifié W_1 et W_2 (voir figure 8.10) à travers le choix des paramètres suivants :

	W_1	W_2
G_0	1000	4×10^{-2}
G_∞	0.5	30
ω_c	4.5×10^{-4}	5×10^{-2}

qui conduit à une valeur du critère de $\gamma = 1.02$.

Dans la suite, nous analysons les sous blocs de $H(j\omega)$. La figure 8.11 correspond aux tracés des valeurs singulières maximales des transferts de $H(p) : S, \tilde{G}S, KS$ et $\tilde{G}KS$, et des contraintes que le critère leur a imposées.

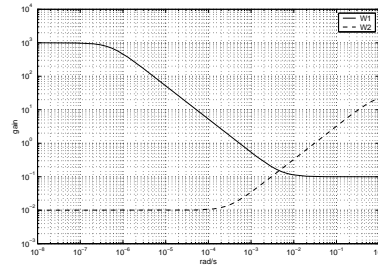


FIG. 8.10 – Les pondérations W_1 et W_2

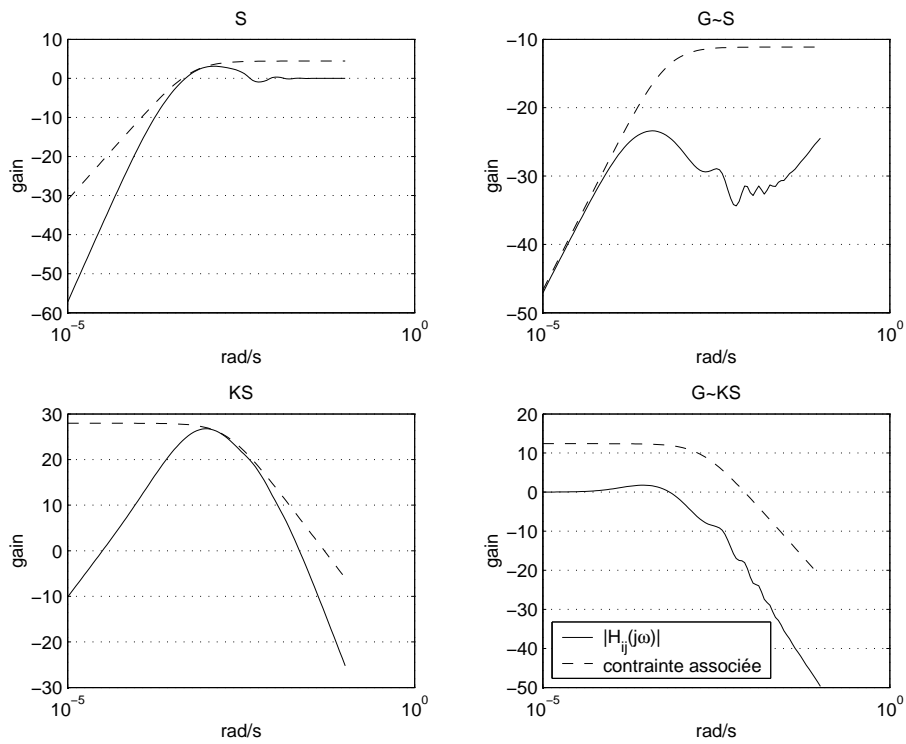


FIG. 8.11 – Tracé des 4 blocs et des contraintes associées

Le correcteur H_∞

Nous présentons sur la figure 8.12 le tracé de Bode du correcteur H_∞ . Le tracé montre que ce correcteur contient une action intégrale en basses pulsations. Au niveau de la bande passante, se place une avance de phase suivie d'un pôle de filtrage assurant la décroissance à -20dB/décade de $K(jw)$ en hautes pulsations (contrainte spécifiée par W_2).

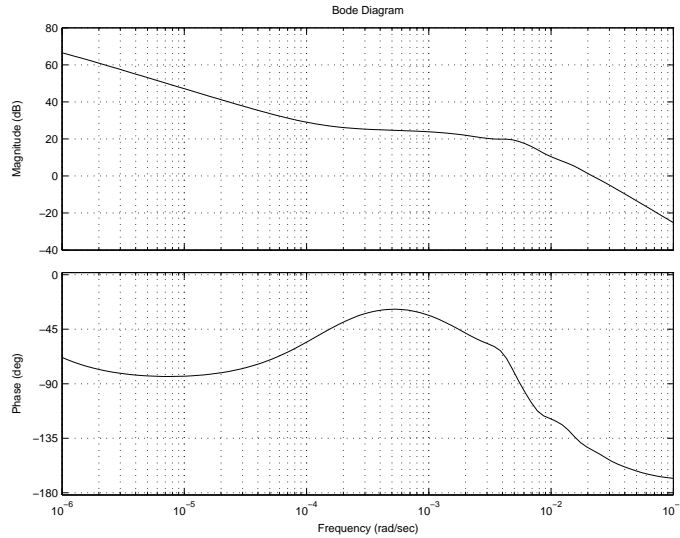


FIG. 8.12 – Bode du correcteur H_∞

Analyse de la boucle ouverte

Le calcul de la marge sur la base des valeurs maximales de S et T assure que $\Delta G \geq 10.67 \text{ dB}$ alors que son calcul direct (voir la figure 8.13) conduit à $\Delta G = 12.3 \text{ dB}$. Cet écart s'explique par le fait que la marge calculée sur le Bode est une marge réelle alors que le calcul basé sur S et T conduit à une marge de gain complexe (marge de module).

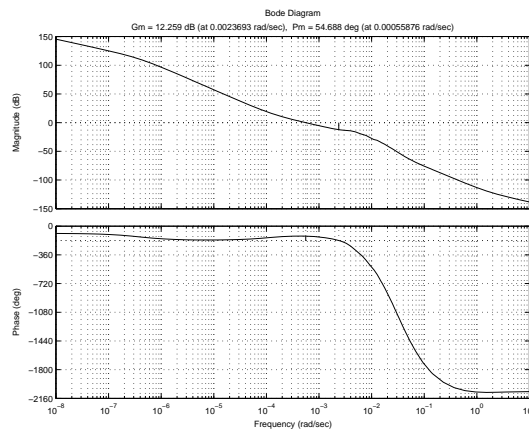


FIG. 8.13 – Bode de la boucle ouverte corrigée par le correcteur H_∞

Correcteur et simulations : comparaison PI - H_∞

Nous comparons tout d'abord les transferts des boucles ouvertes corrigées (voir figure

8.14). La différence majeure est liée à la contrainte supplémentaire que nous avons ajoutée avec W_2 . Cette contrainte a permis de modéliser K en assurant que $|K(j\omega)| \approx |\omega|^{-1}$ en hautes pulsations. Cela implique non seulement une meilleure atténuation de l'effet des perturbations de mesures sur la commande mais aussi un effort de commande moindre (voir figure 8.15).

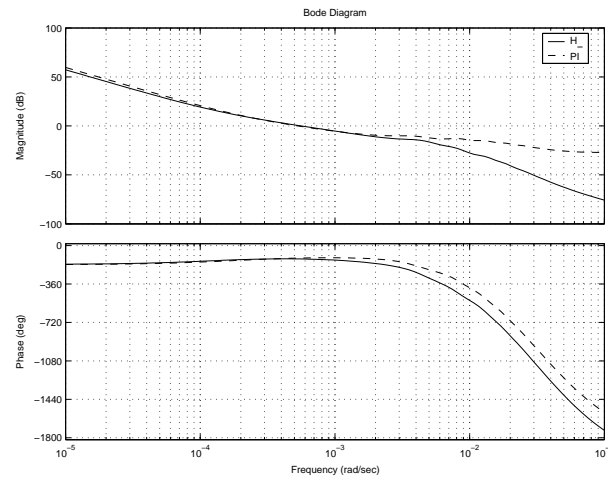


FIG. 8.14 – Comparaison des boucles ouvertes corrigées par un PI et par le correcteur H_∞

La figure 8.14 montre que le correcteur PI s'apparente fortement au correcteur H_∞ à ceci près que ce dernier satisfait automatiquement les spécifications demandées. Enfin, comme le montrent les figures 8.15 et 8.16, les comportements transitoire et asymptotique des cotes associées respectivement aux correcteurs PI et H_∞ sont qualitativement identiques.

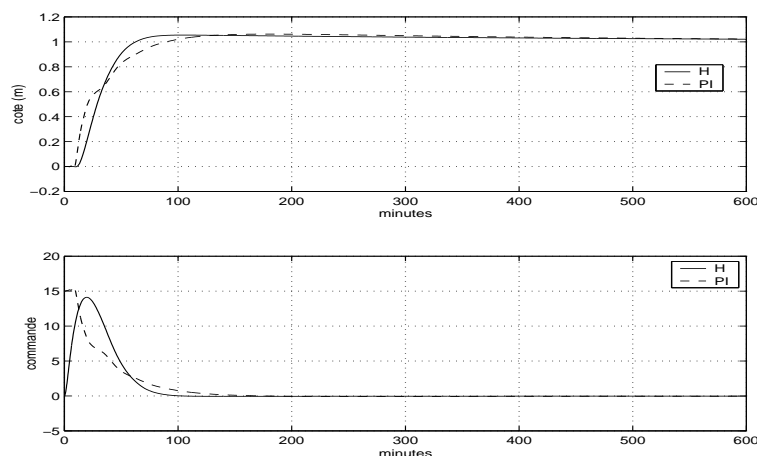


FIG. 8.15 – Comparaison des réponses des systèmes corrigés par un PI et par le correcteur H_∞ face à un échelon de consigne

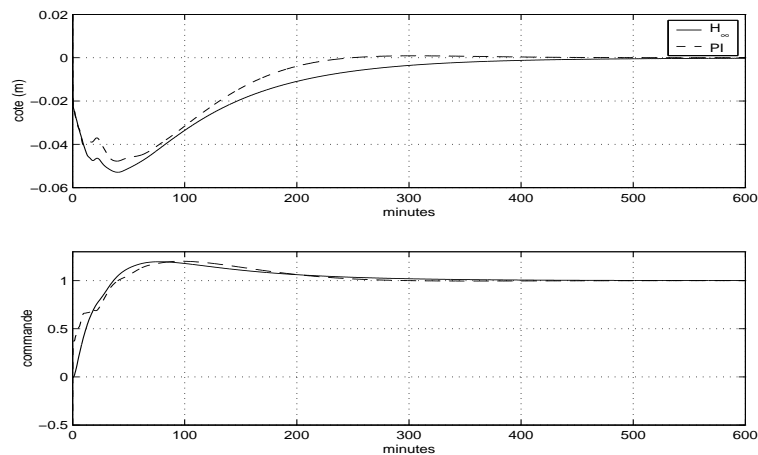


FIG. 8.16 – Comparaison des réponses des systèmes corrigée par un PI et par le correcteur H_∞ face à un échelon de perturbation

8.4 Obtention d'un correcteur d'ordre faible

Le correcteur H_∞ précédemment calculé possède une taille $n = 26$ (provenant de la taille du modèle de synthèse $n = 24$ et des 2 pondérations d'ordre 1). La figure 8.12 qui représente son tracé fréquentiel met en évidence une grande similitude avec un correcteur de type PI filtré. Cette ressemblance est appuyée par la figure 8.14 qui compare les boucles ouvertes du PI et du H_∞ . Il est donc sans doute possible d'obtenir un correcteur d'ordre plus faible qui assure des performances similaires.

En se basant sur les outils présentés dans la première partie, nous pouvons donner un autre argument qui conforte l'idée qu'un correcteur plus faible peut assurer les mêmes performances que le correcteur d'ordre 26. En effet, nous savons qu'une erreur relative faible entre un correcteur complet et un correcteur réduit garanti des bornes supérieures sur l'erreur de gain et de phase (voir les discussions de la section 2.4, page 41 et de la section 5.3.4, page 135). Or, pour un correcteur réduit obtenu par une méthode de réduction de type BST (page 133) ou Hankel pas à pas (page 125), une borne supérieure et inférieure sur la norme H_∞ de l'erreur relative peut être tracée en fonction de l'ordre du correcteur réduit (figure 8.17).

Il apparaît donc que l'on pourrait approcher facilement ce correcteur par un correcteur réduit en assurant à chaque pulsation une erreur relative faible. Cette étude révèle que l'ordre 26 imposé par l'algorithme de synthèse H_∞ est trop important. Ceci vient du fait que pour le cahier des charges spécifié, un modèle de synthèse de taille trop importante induit la présence d'états qui interviennent peu sur la relation entrée/sortie du correcteur.

Rappel de la démarche

La démarche pour l'obtention d'un correcteur réduit est présentée sur la figure 8.1 page 184. Deux grandes étapes la constituent :

Etape 1 : Réduction du modèle d'ordre 24 en tenant compte du cahier des charges. Le cahier des charges à satisfaire nous a permis, par l'intermédiaire de la pondération W_1 , de dimensionner la bande passante à $5.5 \times 10^{-4} rad/s$ (voir figure 8.13). Par ailleurs, comme l'indique la figure 7.5, page 179, le modèle complet d'ordre

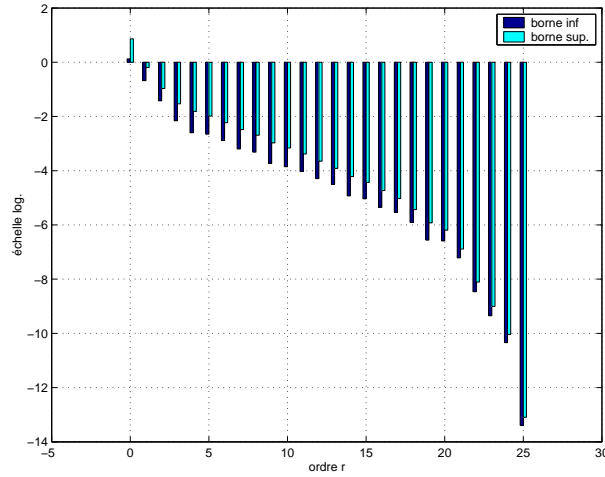


FIG. 8.17 – Bornes supérieure et inférieures sur la norme de l’erreur relative entre $K_{26}(j\omega)$ et $K_r(j\omega)$ obtenu par BST

24 ne peut être considéré comme valide au delà de la pulsation de $5 \times 10^{-3} \text{rad/s}$. Il semble donc naturel d’utiliser un modèle de synthèse qui réalise un bon compromis entre sa validité avec le modèle d’ordre 24 dans l’intervalle $[0 \text{rad/s}; 5 \times 10^{-3} \text{rad/s}]$ et un ordre faible. Un nouveau correcteur sera synthétisé sur ce modèle réduit et ses performances seront comparées à celles du correcteur complet d’ordre 26.

Étape 2 : Réduction du correcteur synthétisé sur le modèle réduit. Pour obtenir un correcteur final d’ordre réduit, une réduction du correcteur obtenu à l’issue de l’étape 1 est réalisée. Les performances du correcteur final seront comparées à celle du correcteur complet qui est considéré comme le correcteur de référence.

8.4.1 Synthèse sur le modèle réduit

La partie 1 de ce mémoire nous a permis d’obtenir différents modèles réduits de bief optimisés sur l’intervalle de pulsations $[0 \text{rad/s}; 5 \times 10^{-3} \text{rad/s}]$. Parmi tous les modèles réduits obtenus, nous considérons le modèle obtenu dans la section 5.5.4, page 150 qui possède un ordre 7.

Une nouvelle synthèse H_∞ menée sur ce modèle réduit $G_7(p)$ avec les mêmes pondérations que celles définies dans la section 8.3.2, nous permet d’obtenir un correcteur d’ordre 9 : $K_9(p)$. Nous pouvons remarquer que le choix de W_2 implique a priori que $K_9(p)$ stabilise $G(p)$ car $G(p)$ peut se voir comme $G_7(p)$ associé à une incertitude additive directe $\Delta(p) = G(p) - G_7(p)$. En effet, comme le montre la figure 8.18 : $|G(j\omega) - G_7(j\omega)| < |W_2(j\omega)|$. Ceci entraîne⁵ que $|K_9(j\omega)S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_2(j\omega)|} < |G(j\omega) - G_7(j\omega)|^{-1}$ et donc :

$$\|(G(j\omega) - G_7(j\omega))K_9(j\omega)S(j\omega)\|_\infty < 1$$

ce qui traduit, par le théorème du petit gain, une condition de robustesse en stabilité de G rebouclé sur K_9 .

La valeur de γ obtenue à l’issue de la synthèse est $\gamma = 1.04$. Les gabarits fréquentiels traduisant les spécifications sont donc bien satisfaits.

⁵Si $\gamma \simeq 1$. $S(j\omega)$ désigne ici le transfert en boucle fermée relatif à K_9 et G_7 .

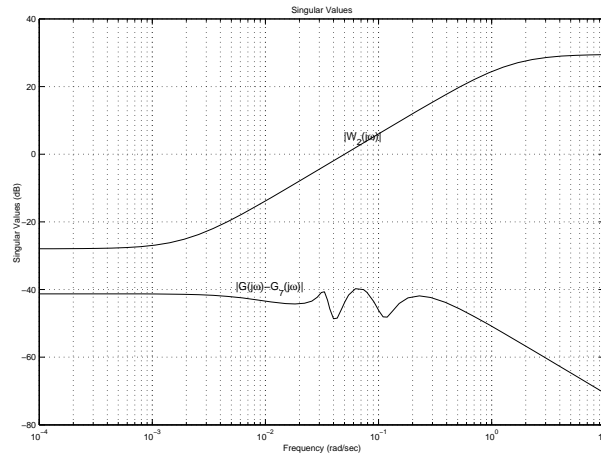


FIG. 8.18 – Bornes inférieure et supérieure sur la norme de l’erreur relative entre $K_9(j\omega)$ et $K_r(j\omega)$

Par souci de clarté, le tracé fréquentiel de ce correcteur, le tracé du 4-blocs comparé à celui du correcteur initial $K_{26}(p)$ ainsi que d’autres indicateurs se trouvent dans la section suivante.

8.4.2 Réduction du correcteur

Nous remarquons par l’intermédiaire de la figure 8.19 que $K_9(p)$ ne possède pas, à l’inverse de $K_{26}(p)$, des états ayant peu d’influence sur la relation entrée/sortie.

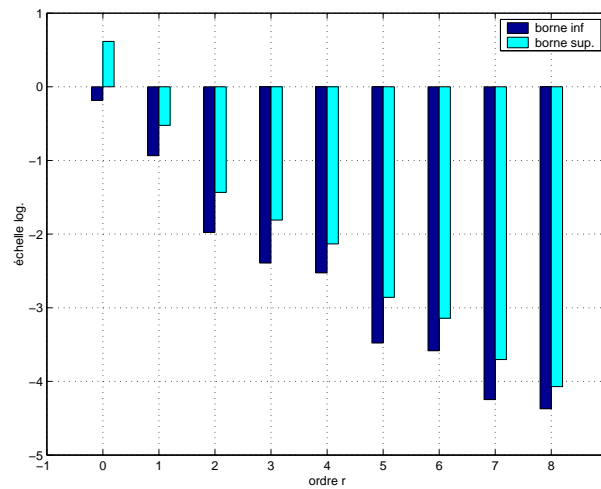


FIG. 8.19 – Bornes inférieure et supérieure sur la norme de l’erreur relative entre $K_9(j\omega)$ et $K_r(j\omega)$

D’après la figure 8.19, nous ne pouvons pas discerner d’états plus facilement éliminables que d’autres, au sens d’une simple erreur relative. L’ajout d’une pondération semble d’autant plus adéquate que nous désirons avant tout réduire le correcteur sur une gamme de pulsations.

Le correcteur $K_9(p)$ est réduit à l’aide de l’approximation optimale au sens d’une norme

de Hankel relative pondérée. La pondération $W_i(p)$ choisie couvre une gamme de pulsations allant de 0 à une décade après la bande passante, c'est à dire $5.10^{-3}rad/s$. Cette pondération est la même que celle utilisée pour réduire le modèle de bief d'ordre 24, page 118 :

$$W_i(p) = w_i(p)^3$$

avec $w_i(p) = 5.10^{-5} \frac{p+100}{p+0.006}$.

Une réduction à l'ordre 4 mène au correcteur suivant que nous pouvons décomposer comme une partie PI qui comporte l'intégrateur et le zéro basse pulsation, en série avec un transfert.

$$K_4(p) = \underbrace{16.63 \frac{p + 1.5 \times 10^{-4}}{p}}_{\text{PI}} \times R(p)$$

$$R(p) = 1.1 \times 10^{-3} \frac{(p + 0.013)(p + 3.8 \times 10^{-3})}{(p + 1.4 \times 10^{-3})(p^2 + 6.3 \times 10^{-3}p + 3.47 \times 10^{-5})}$$

Ce correcteur vérifie :

$$\|K_9(j\omega)^{-1}(K_9(j\omega) - K_4(j\omega))W_i(j\omega)\|_{\infty} = 0.02$$

La partie de $K_4(p)$ qui correspond à un PI est très proche du PI "régulé à la main", donné par l'équation (8.2), page 188.

La figure 8.20 montre que les marges de stabilité sont guère détériorées par rapport à celles de K_{26} (page 197).

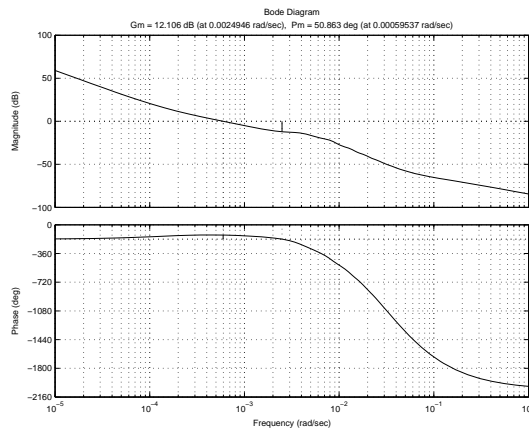


FIG. 8.20 – Boucle ouverte corrigée par K_4

Sur la figure 8.21, les tracés fréquentiels des 3 correcteurs K_{26} , K_9 et K_4 sont représentés.

Le correcteur $K_4(p)$ appliqué sur le critère 4-blocs mène à $\gamma = 1.04$. Les différentes spécifications sur les transferts en boucle fermée demeurent vérifiées par ce correcteur. La figure 8.22 présente le critère 4-blocs pour chacun des 3 correcteurs ainsi que les contraintes associées.

Pour plus clarté, la figure 8.23 compare les différences de module entre les transferts contraints issus de K_{26} (S , GS et KS) et les nouveaux transferts issus de K_r (S_r , GS_r et KS_r).

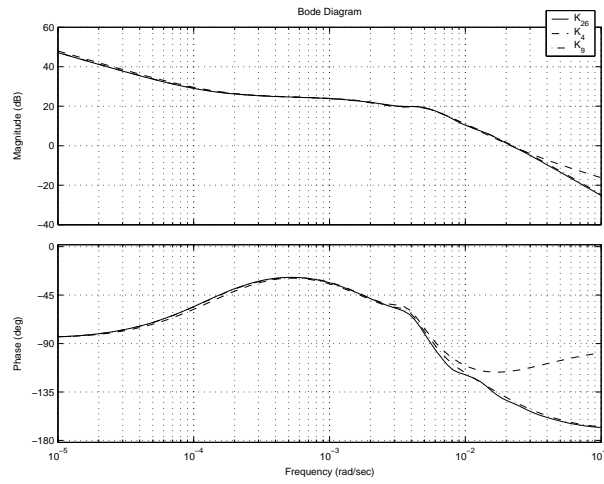


FIG. 8.21 – Diagrammes de Bode des correcteurs K_{26} , K_9 et K_4

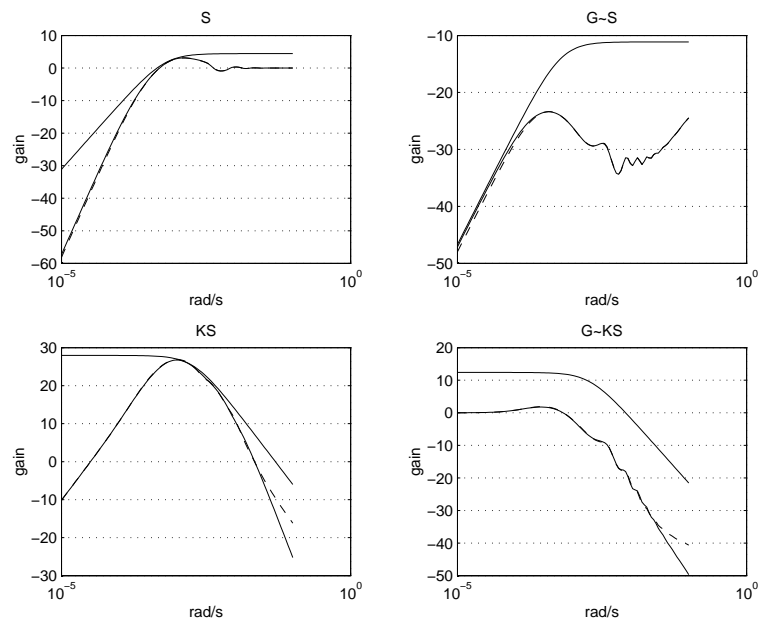


FIG. 8.22 – Tracé du critère 4-blocs pour le correcteur initial ($n = 26$) et le correcteur réduit ($r = 4$) en pointillés

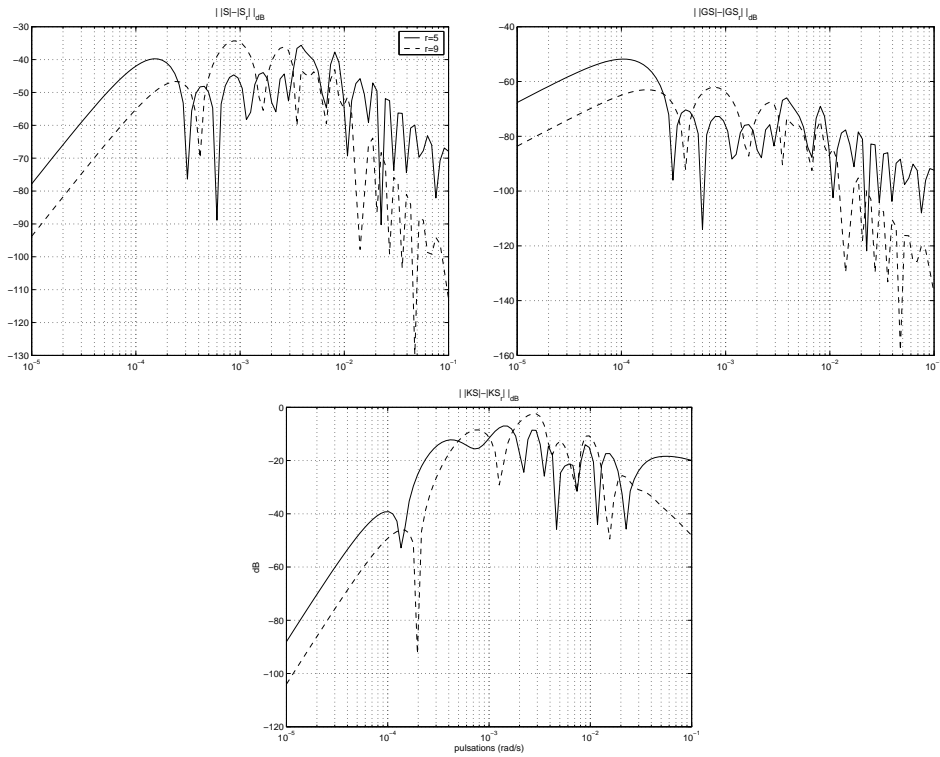


FIG. 8.23 – Erreurs de module entre les transferts contraints pour K_{26} et K_r , $r = \{4, 9\}$

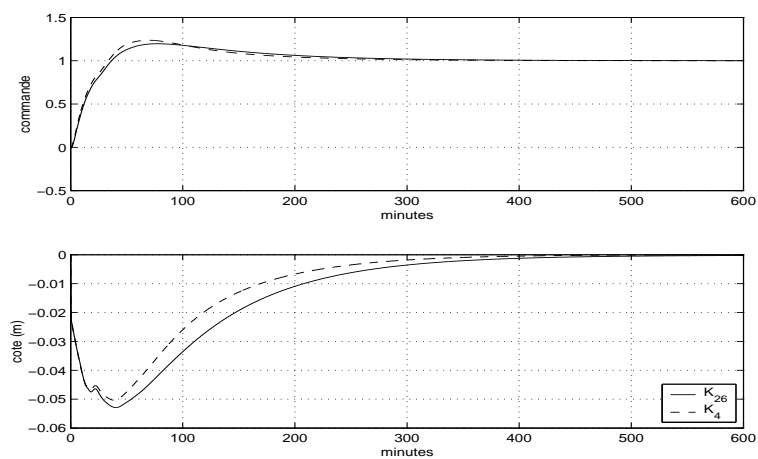


FIG. 8.24 – Comparaison des réponses des systèmes corrigés par le correcteur H_∞ ($n = 26$) et le correcteur réduit ($r = 4$)

Les indices fréquentiels de K_4 étant satisfaisants, intéressons nous, à l'aspect temporel de ce correcteur face au rejet de perturbation (figure 8.24).

Le correcteur réduit à l'ordre 4 offre des performances temporelles légèrement supérieures à celles du correcteur H_∞ d'ordre 26, tout en conservant des marges de stabilité équivalentes. En effet, K_4 possède un effet de filtrage en hautes pulsations moins important (du fait de la réduction plutôt concentrée en basses pulsations) que celui de K_{26} .

8.5 Résumé

Dans ce chapitre nous avons détaillé la démarche permettant de passer du cahier des charges (simplifié) attaché au contrôle d'un bief au problème de minimisation de la norme H_∞ d'une matrice de transfert pondérée.

Cette démarche a consisté dans un premier temps à (re)formuler chaque contrainte du cahier des charges en terme d'une contrainte H_∞ pondérée sur un ou des transfert(s) spécifique(s) de la boucle fermée. Cette étape achevée, nous avons expliqué comment l'ensemble de ces spécifications peut être ramené à un critère H_∞ de forme standard.

La seconde partie du chapitre s'est employée à analyser la solution H_∞ obtenue et à la comparer à un correcteur classique de type PI. Cette analyse a en fait montré la similitude entre le correcteur classique et le correcteur H_∞ synthétisé et par la même, validé la démarche que nous avons suivie pour formaliser le problème. Cette conclusion est importante alors que nous allons passer au cas multivariable.

Enfin, l'obtention d'un correcteur d'ordre réduit a montré d'une part que la complexité d'un modèle de synthèse doit dépendre des spécifications attendues, et d'autre part qu'un correcteur d'ordre faible (ordre 5 au lieu de 26) peut satisfaire les spécifications de commande d'un bief.

CHAPITRE 9

Synthèse d'un correcteur H_∞ pour le canal d'irrigation

Dans le chapitre précédent, le problème monovarié de la commande d'un bief par la technique aval distante a été formalisé par l'intermédiaire de la minimisation d'une norme H_∞ pondérée. Nous montrons dans ce chapitre que la même démarche peut être étendue dans le cadre multivariable.

La démarche pour l'obtention d'un correcteur réduit est la même que celle présentée page 183.

9.1 Expression des transferts multivariables

9.1.1 Le modèle du canal

Le canal étudié se compose de 3 biefs identiques (voir figure 9.1). Chaque bief correspond à celui étudié dans le chapitre précédent.

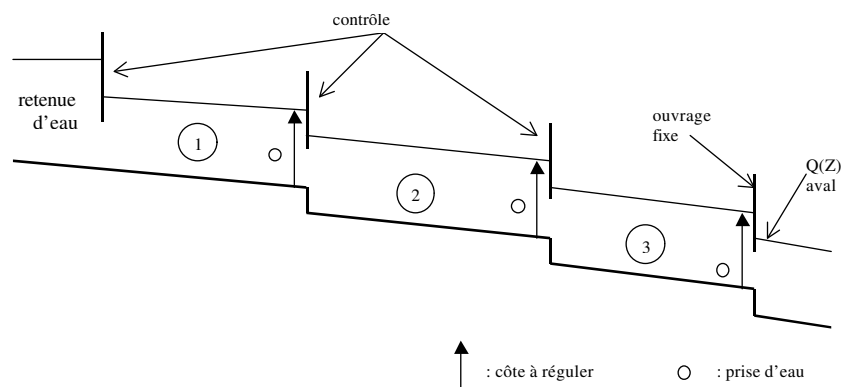


FIG. 9.1 – Schéma d'un canal à 3 biefs

Nous rappelons (voir section 7.2) que dans le contexte de la commande en débit des canaux d'irrigation, un canal peut être assimilé à la mise en cascade de biefs tel que l'indique la figure 9.2.

Chaque bief possède 2 entrées correspondant aux débits amont et aval et une sortie qui est la cote aval en l'occurrence la grandeur à commander ¹. Un bief est ainsi décrit par une matrice de transfert 1×2 :

$$y_i(p) = \underbrace{\begin{bmatrix} g_i(p) & \tilde{g}_i(p) \end{bmatrix}}_{G_i(p)} \left(\begin{bmatrix} u_i(p) \\ u_{i+1}(p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ d_i(p) \end{bmatrix} \right) \quad (9.1)$$

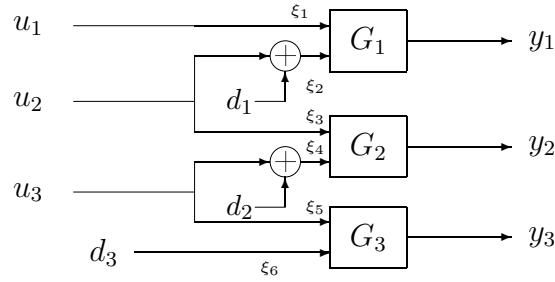


FIG. 9.2 – Mise en cascade de biefs

Le vecteur des sorties mesurées y_i s'exprime comme suit :

$$y(p) = \begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \\ y_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(p) & 0 & 0 \\ 0 & G_2(p) & 0 \\ 0 & 0 & G_3(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(p) \\ \xi_2(p) \\ \vdots \\ \xi_6(p) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{diag}(G_i(p))\xi(p) \quad (9.2)$$

Plus précisément,

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Omega_1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Omega_2} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Le vecteur ξ s'exprime donc aisément en fonction des vecteurs u et d en introduisant des matrices constantes Ω_1 et Ω_2 .

$$\xi = \Omega_1 u - \Omega_2 d$$

Finalement d'après la relation (9.2), la sortie y du canal s'exprime de la façon suivante en fonction des commandes u et du vecteur de perturbations d :

$$y(p) = \mathbf{diag}(G_i(p))\xi(p) \triangleq \mathcal{G}(p)\xi(p) = \mathcal{G}(p) \begin{bmatrix} \Omega_1 & -\Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(p) \\ d(p) \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

¹Par rapport aux modèles obtenus dans la section 7.5.3, les modèles pour la commande considérés ici ne possèdent qu'une seule sortie : la cote aval (ligne 2 du transfert 2×2 d'un bief).

Le modèle multivariable est enfin noté $G(p)$ où :

$$G(p) = \mathcal{G}(p) \begin{bmatrix} \Omega_1 & -\Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1(p) & -\mathcal{G}_2(p) \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

La dimension de la représentation d'état du modèle de canal est clairement égale à celle de $\mathcal{G}(p)$ à savoir 3 fois la dimension du modèle d'un bief : 72. Le "canal réduit", vu comme la mise en série de 3 biefs réduit à l'ordre 7, sera donc de dimension 21 (page 150).

Nous passons maintenant à une analyse du transfert $\mathcal{G}_1(j\omega)$. En premier lieu, nous étudions le conditionnement de la boucle ouverte (tracé sur la figure 9.3)

$$\kappa(\mathcal{G}_1(j\omega)) = \frac{\bar{\sigma}(\mathcal{G}_1(j\omega))}{\underline{\sigma}(\mathcal{G}_1(j\omega))} \quad (9.6)$$

Cette analyse nous montre le bon conditionnement du système initial dans la bande de fréquence significative. Cette propriété à des conséquences intéressantes dans le cadre de la commande des systèmes multivariables (voir par exemple [FL85]).

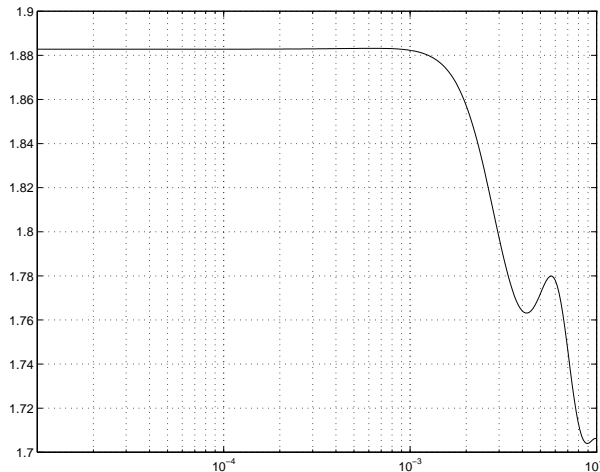


FIG. 9.3 - $\kappa(\mathcal{G}_1(j\omega))$

9.1.2 Matrices de transfert de la boucle fermée

Nous exprimons dans ce paragraphe les différents transferts liant les consignes de cote et les perturbations de débit aux erreurs de poursuite et aux commandes.

D'après les relations (9.4) et (9.5) établies dans la section précédente, le vecteur des sorties est lié en boucle ouverte au vecteur des commandes et des perturbations par la relation suivante :

$$y(p) = \mathcal{G}_1(p)u(p) - \mathcal{G}_2(p)d(p)$$

où y est le vecteur des sorties, u , le vecteur des commandes et d le vecteur des perturbations.

La boucle fermée (figure 9.4) prend alors la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (I + \mathcal{G}_1 K)^{-1} & (I + \mathcal{G}_1 K)^{-1} \mathcal{G}_2 \\ (I + K \mathcal{G}_1)^{-1} K & (I + K \mathcal{G}_1)^{-1} K \mathcal{G}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$$

où e est le vecteur des erreurs de poursuite défini comme la différence entre le vecteur des consignes, à savoir r , et le vecteur des sorties.

La matrice de la boucle fermée peut se réécrire, à travers l'utilisation des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire, comme :

$$H = \begin{pmatrix} S & S\mathcal{G}_2 \\ S_e K & S_e K\mathcal{G}_2 \end{pmatrix}$$

avec $S_e = (I + K\mathcal{G}_1)^{-1}$ et $S = (I + \mathcal{G}_1 K)^{-1}$.

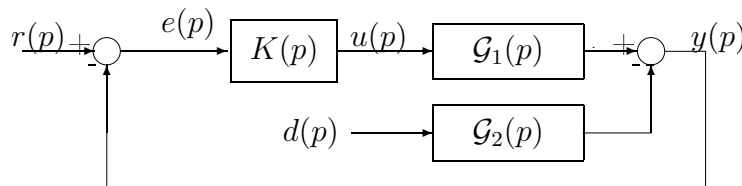


FIG. 9.4 – Schéma du système bouclé

9.2 Synthèse d'un correcteur H_∞

9.2.1 Expression du cahier des charges en terme de contraintes H_∞

Comme dans le cas monovariante, le cahier des charges a la forme suivante :

	Erreur de poursuite	Commande
Consigne de côte	Erreur statique et <i>découplage</i>	Effort de commande limité
Perturbation en débit	Rejet des perturbations et <i>découplage</i>	Effort de commande

On ajoute à cela une contrainte de robustesse spécifiée à travers l'obtention de marge multivariable de gain et de phase minimale.

Les spécifications concernent maintenant non seulement « des fonctions de transfert monovariante » (erreur statique, rejet de perturbation) mais aussi des propriétés attachées à des matrices de transfert (découplage et marge de gain).

Les contraintes formalisées au chapitre précédent restent donc valables. Il faut y ajouter les contraintes permettant d'assurer les objectifs multivariables, c'est-à-dire le découplage des effets induits par le changement de consigne et le découplage des effets des perturbations de débit entre biefs.

Il nous reste à noter que ces dernières contraintes concernent les propriétés attachées aux matrices de transfert et qu'elles seront donc réalisées à travers des contraintes sur la valeur singulière maximale de ces mêmes matrices [SLH81, DS81].

Objectifs de découplage inter-voies

Demander le découplage inter-voies est identique à demander que la matrice de transfert

liant les consignes aux cotes, c'est-à-dire $T = \mathcal{G}_1 K (I + \mathcal{G}_1 K)^{-1}$, soit équivalente à une matrice diagonale pour une bande de fréquence «la plus large possible». On peut, en utilisant la relation liant S à T ($S + T = I$), demander de façon équivalente que S soit diagonale. Les spécifications se rapportant à l'erreur de poursuite (voie par voie) conduisent à demander que la diagonale de S soit nulle. En d'autres termes, les contraintes se rapportant à la régulation et aux découplages inter-voies conduisent à chercher à satisfaire la condition suivante :

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \ll 1 \quad (9.7)$$

sur la plus grande bande de pulsations possible. Notons que cette condition assure finalement que $T(j\omega) \approx I$.

L'expression de cette condition en terme de critère H_∞ revient à chercher une matrice de pondération W_1 , (3×3), qui assure que l'inégalité (9.7) est satisfaite dès lors qu'il existe un correcteur qui est tel que :

$$\|W_1 S\|_\infty \leq 1$$

En effet, cette inégalité assure en fait que pour tout $\omega \in \bar{\mathbb{R}}$, on a :

$$\bar{\sigma}(W_1(j\omega)S(j\omega)) \leq 1$$

et donc que si $W_1(j\omega)$ est inversible que :

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) = \bar{\sigma}(W_1(j\omega)^{-1}W_1(j\omega)S(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(W_1(j\omega)^{-1})\bar{\sigma}(W_1(j\omega)S(j\omega))$$

Cette dernière inégalité se réécrit finalement comme :

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(W_1(j\omega)^{-1})$$

L'erreur de poursuite est donc directement proportionnelle à l'inverse du «gain multivariable» de W_1 . Une faible erreur statique (de poursuite) sera donc typiquement spécifiée à travers la contrainte suivante :

$$\bar{\sigma}(W_1(j0)^{-1}) \ll 1$$

Objectif de découplage des effets induits par les perturbations de débit

Comme dans le cas précédent, nous voulons que les transferts croisés soient le plus faible possible. Par ailleurs, nous désirons aussi que les transferts directs (ceux de la diagonale de $S\mathcal{G}_2$) soient aussi les plus faibles possibles. Cela conduit à demander que

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)\mathcal{G}_2(j\omega)) \ll 1$$

Nous ne répétons pas ici la démarche à suivre pour définir les propriétés qualitatives que doit satisfaire la matrice de pondération qui devra contraindre $S\mathcal{G}_2$.

Contraintes de robustesse : marge de gain minimale

La remarque que nous avons faite dans le cadre monovarié concernant le lien existant entre certains transferts du système et les marges multivariables du système peut être partiellement reconduite ici. Le calcul des marges (en entrée du système) fait appel, comme nous l'avons rappelé, à la norme du transfert «vu» soit par une erreur multiplicative directe ou inverse en entrée du système. Ces deux transferts correspondent non pas à S et T mais à $S_e = (I - K\mathcal{G}_1)^{-1}$ et $T_e = K\mathcal{G}_1(I + K\mathcal{G}_1)^{-1}$.

De fait, nous n'avons pas parmi nos quatre transferts accès de façon directe à S_e ou T_e . Afin de ne pas augmenter le nombre de bloc à considérer, nous rappelons le lien qu'il existe entre les valeurs singulières de S et S_e . En effet, supposons que $\mathcal{G}_1(j\omega)$ soit inversible alors on a :

$$\mathcal{G}_1(j\omega)S(j\omega)\mathcal{G}_1^{-1}(j\omega) = S_e(j\omega)$$

qui conduit par simple application des propriétés des valeurs singulières à l'inégalité suivante : $\bar{\sigma}(\mathcal{G}_1^{-1}(j\omega)S(j\omega)\mathcal{G}_1(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(\mathcal{G}_1(j\omega)^{-1})\bar{\sigma}(S(j\omega))\bar{\sigma}(\mathcal{G}_1(j\omega))$. On déduit de cela l'encadrement suivant [FL85] :

$$\kappa(\mathcal{G}_1(j\omega))^{-1}\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(S_e(j\omega)) \leq \kappa(\mathcal{G}_1(j\omega))\bar{\sigma}(S(j\omega)).$$

où $\kappa(\mathcal{G}_1(j\omega))$ est le nombre condition de $\mathcal{G}_1(j\omega)$ défini par la relation (9.6). A travers cette remarque, on voit qu'il est possible de contraindre S_e en contraignant S . Cela sera d'autant plus efficace que le nombre condition de \mathcal{G}_1 n'est pas trop grand² dans la zone où S_e a son maximum. Dans le cas étudié ici, le nombre condition est proche de 1 dans la zone de fréquence qui nous intéresse (voir figure 9.3).

Contraintes sur la commande : modeler les hautes fréquences

Nous reconduisons ici la spécification que nous avons introduite dans le cadre monovarié afin de diminuer les effets induits par les bruits de mesure sur les actionneurs. Elle conduit à définir une contrainte sur le « bloc » $S_e K$ permettant de modeler $\bar{\sigma}(S_e(j\omega)K(j\omega))$. Comme dans le cas monovarié, cette contrainte a comme intérêt de forcer le correcteur à atténuer les hautes fréquences.

9.2.2 La structure du critère

L'obtention du critère repose une fois de plus sur le fait que tous les sous-blocs d'une matrice de transfert de norme H_∞ inférieure ou égale à γ , ont une norme H_∞ inférieure ou égale à γ . Sur cette base, nous introduisons le système augmenté suivant :

$$M(p) = W_s(p)H(p)W_e(p)$$

où les pondérations en entrée et en sortie sont deux matrices diagonales données par :

$$W_e = \mathbf{diag}(1, 1, 1, W_{p1}, W_{p2}W_{p3}) \text{ et } W_s = \mathbf{diag}(W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{21}, W_{22}, W_{23})$$

où W_{1i} et W_{2i} sont des fonctions de transfert monovariées, et W_{pi} des gains constants. Ce critère s'écrit aussi :

$$H(p) = \begin{pmatrix} W_1 S & W_1 S \mathcal{G}_2 W_p \\ W_2 S_e K & W_2 S_e K \mathcal{G}_2 W_p \end{pmatrix}$$

où $W_1 = \mathbf{diag}(W_{11}, W_{12}, W_{13})$, $W_2 = \mathbf{diag}(W_{21}, W_{22}, W_{23})$ et $W_p = \mathbf{diag}(W_{p1}, W_{p2}, W_{p3})$.

9.2.3 Mise en oeuvre et analyse d'une solution possible

Les pondérations utilisées

La grande homogénéité du système nous permet d'utiliser des pondérations elles-mêmes homogènes dans le sens où l'ensemble des pondérations $W_{1,i}$, $W_{2,i}$ et $W_{p,i}$ sont prises identiques. Après une phase d'ajustement, nous avons conservé les pondérations suivantes :

² κ peut être modifié en pré et post multipliant G par deux matrices diagonales.

	W_{1i}	W_{2i}
G_0	1000	10^{-2}
G_∞	0.5	300
ω_c	2×10^{-4}	2×10^{-2}

et pris $W_{ip} = 4$ qui conduit à une valeur du critère de $\gamma = 1.2$. L'ordre du correcteur est 78 : 3 fois la dimension d'un bief (ordre 72) augmenté de la dimension des pondérations (ordre 6).

Dans la suite, nous analysons les sous blocs de $H(j\omega)$. La figure 9.5 correspond aux tracés des valeurs singulières maximales des matrices de transfert principales de $H(j\omega)$, en l'occurrence S , $S\mathcal{G}_2$, S_eK et $S_eK\mathcal{G}_2$, et des contraintes que le critère leur a imposées. On peut noter la similitude de ces courbes avec celles obtenues dans le cas monovarié (voir figure 8.11). On note que le bloc correspondant à la matrice de transfert $S_eK\mathcal{G}_2$ est non contraint.

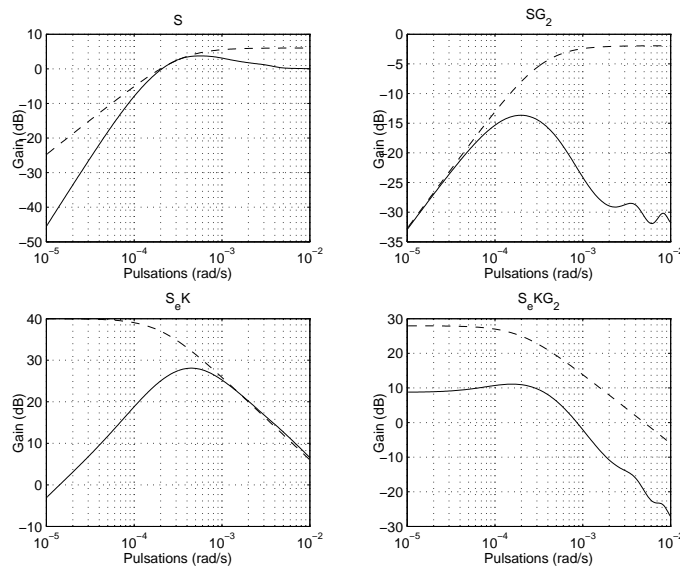


FIG. 9.5 – Tracé des 4 blocs et des contraintes associées

Analyse de la boucle fermée

La marge multivariable en entrée du système est calculée à partir de la norme H_∞ de S_e et T_e (voir relations (8.3)) et conduit à une marge de gain multivariable supérieure à 8 dB.

Analyse de la boucle ouverte

La figure 9.6 illustre d'une part que l'ensemble des valeurs singulières de $\mathcal{G}_1(j\omega)K(j\omega)$ (ainsi que celles de $K(j\omega)\mathcal{G}_1(j\omega)$) sont proches dans une bande de pulsations assez large. D'autre part, les valeurs singulières de \mathcal{G}_1K et $K\mathcal{G}_1$ sont «relativement» similaires. La bande passante en entrée correspond à la pulsation ω_{bpe} qui est telle que $\underline{\sigma}(\mathcal{G}_1(j\omega_{bpe})K(j\omega_{bpe})) \approx 1$ (celle en sortie ω_{bps} est définie par $\underline{\sigma}(K(j\omega_{bps})\mathcal{G}_1(j\omega_{bps})) \approx 1$). Dans notre cas, $\omega_{bpe} \approx \omega_{bps} \approx 2.3 \times 10^{-4}$. Il est à noter que cette valeur est proche de celle que nous avons spécifiée à travers $W_{1,i}$ qui était égale à $\omega_c = 2 \times 10^{-4}$ et qui correspond, rappelons le, à la pulsation où $|W_{1,i}(\omega_c)| = 1$.

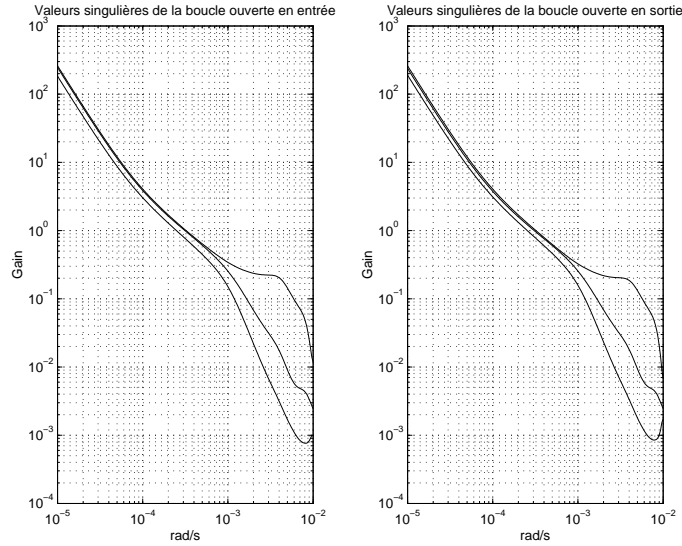


FIG. 9.6 – Valeurs singulières de $\mathcal{G}_1(j\omega)K(j\omega)$ et $K(j\omega)\mathcal{G}_1(j\omega)$

Simulations

Nous présentons dans ce paragraphe des simulations du système face aux changements de cote et face aux perturbations de débit. La présentation des simulations relatives à la perturbation du débit et à la modification de consigne de la cote du bief 3 sont suffisantes pour illustrer l'intérêt et la nature de la politique suivie par le correcteur H_∞ . Les courbes de la figure 9.7 présentent l'évolution des cotes et des commandes des trois biefs.

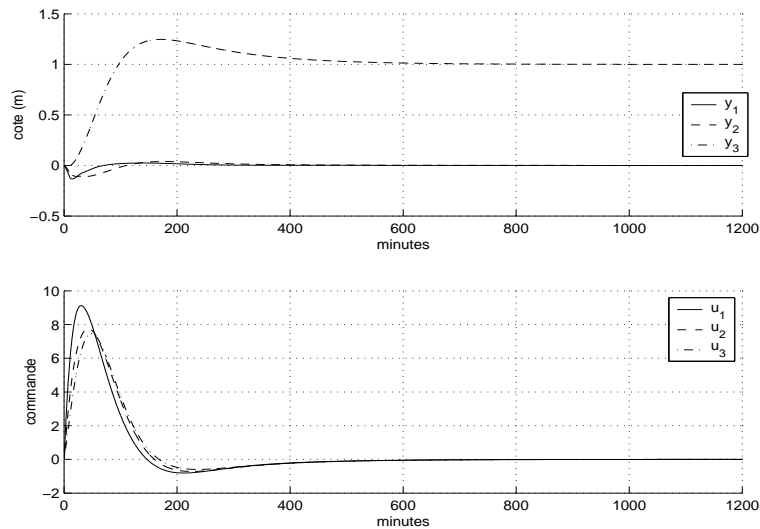


FIG. 9.7 – Evolution des cotes et des commandes face à un échelon de consigne sur le bief 3

Nous présentons maintenant l'effet d'une perturbation de valeur -1 agissant en aval du troisième bief. Les courbes de la figure 9.8 présentent l'évolution des cotes et des commandes des trois biefs.

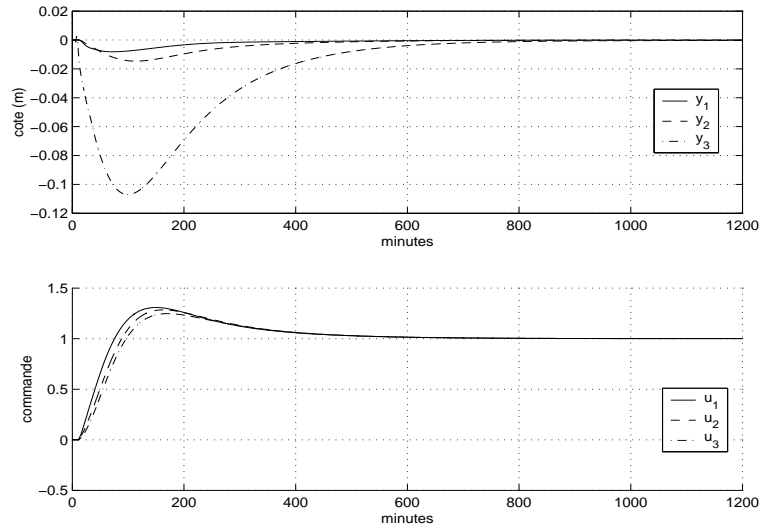


FIG. 9.8 – Evolution des cotes et commandes face à une perturbation de débit en aval du bief 3

La politique de commande s'avère intéressante puisque dans tous les cas, la commande u_1 (débit en tête du canal) est activée en premier de façon à amener l'eau nécessaire à la réjection d'une perturbation ou au suivi d'une consigne. Le découplage assuré par le correcteur est effectif : les cotes y_1 et y_2 ne sont que peu modifiées par le suivi de consigne ou le rejet de perturbation sur le bief 3.

A titre indicatif, les figures suivantes comparent les cotes d'eau face à une perturbation de débit en aval du bief 3 lorsque le correcteur PI du chapitre précédent est appliqué sur chaque bief.

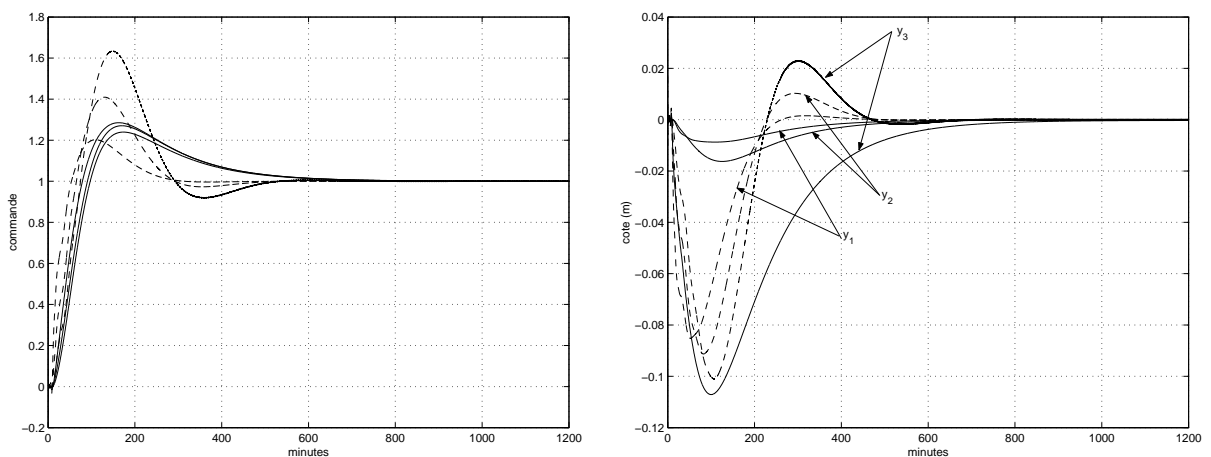


FIG. 9.9 – Correcteur diagonal PI (traits pointillés) comparé au correcteur H_∞ précédent (traits pleins)

9.3 Obtention d'un correcteur réduit

9.3.1 Synthèse sur un modèle d'ordre faible

Au lieu de considérer directement la réduction du correcteur H_∞ , nous procédons dans un premier temps à une nouvelle synthèse en utilisant un modèle d'ordre réduit. Si ce modèle d'ordre réduit représente le modèle initial dans la bande de pulsations où le correcteur agit principalement, alors il peut convenir comme modèle de synthèse. Le correcteur ainsi obtenu aura un ordre moins important et vérifiera les objectifs de commande.

Le modèle de bief $G_i(p)$ (relation (9.1)) est réduit entre 0 et $3 \times 10^{-3} \text{rad/s}$ ce qui correspond à 1 décade après la bande passante mise en évidence lors de l'analyse de la boucle ouverte avec le correcteur d'ordre 78.

En utilisant une approximation optimale pondérée au sens de la norme de Hankel, un ordre $r = 7$ est retenu pour la réduction d'un bief. La pondération choisie est d'ordre 3 : mise en série de 3 premiers ordre de pulsation propre $3 \times 10^{-3} \text{rad/s}$.

Le correcteur H_∞ , calculé sur le modèle de canal composé des 3 biefs réduit, est donc de taille $7 \times 3 + 6 = 27$. Ce correcteur satisfait $\|M(j\omega)\|_\infty = \gamma = 1.2$. Nous comparons sur la figure 9.10 le tracé du critère 4-blocs pour le correcteur initial ($n = 78$) et le correcteur d'ordre raisonnable ($n = 27$).

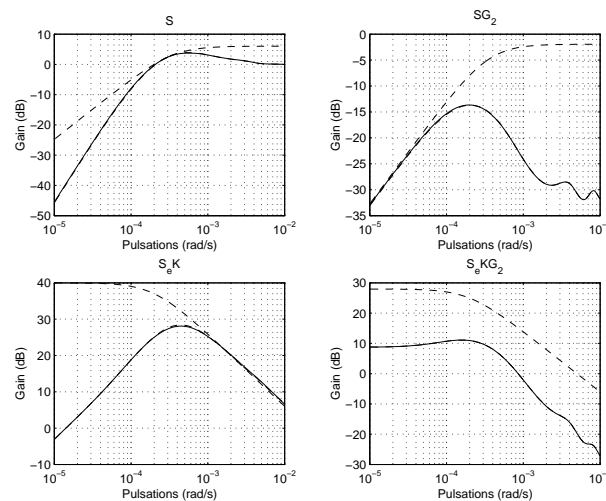


FIG. 9.10 – Tracé du 4-blocs pour le correcteur H_∞ initial ($n = 78$) et le correcteur d'ordre réduit ($n = 27$)

Les tracés précédents sont confondus ce qui signifie qu'un modèle de synthèse d'ordre 7 (pour 1 bief) est suffisant pour nos spécifications et que le correcteur d'ordre 27 remplit les différentes spécifications, y compris celle de robustesse en stabilité que nous avons détaillée dans le cas monovariante (section 8.4.1, page 200).

9.3.2 Réduction du correcteur

La réduction du correcteur d'ordre 27 doit s'opérer avec la nécessité de conserver au mieux ses propriétés multivariantes. Le correcteur à réduire possède une partie triangulaire inférieure dont les gains sont plus faibles que ceux de la partie triangulaire supérieure ; le sous-transfert $(3,1)$ étant de gain le plus faible (voir figure 9.11). C'est pourquoi le

correcteur réagit "par l'amont" de la perturbation comme nous l'avons constaté sur les simulations temporelles.

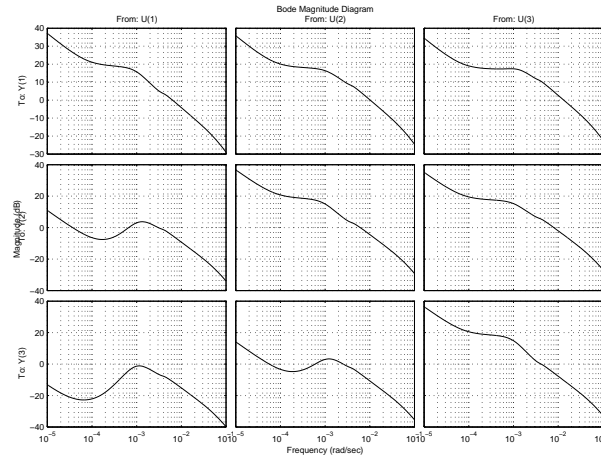


FIG. 9.11 – Modules des sous-transferts du correcteur à réduire

Afin de ne pas dégrader les sous-transferts de gain faible, une réduction au sens de l'erreur relative (Hankel pas à pas + optimisation du terme direct) nous a permis d'obtenir un correcteur d'ordre 9 qui continue à vérifier rigoureusement les spécifications du 4-blocs (figure 9.12).

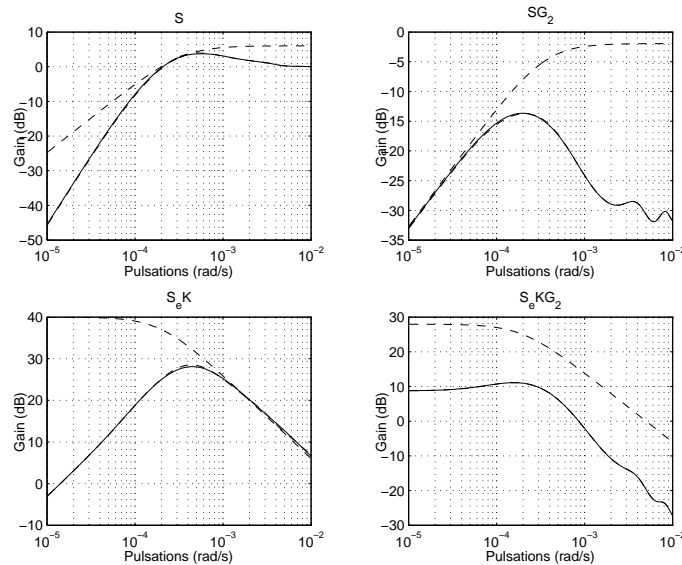


FIG. 9.12 – Critère 4-blocs pour le correcteur initial K_{76} et le correcteur réduit K_9 (pointillés)

Les tracés de la figure 9.12 sont très proche ce qui induit déjà que les contraintes fréquentielles sont respectées. La politique temporelle de commande du correcteur réduit à l'ordre 9 est illustrée sur la figure 9.13.

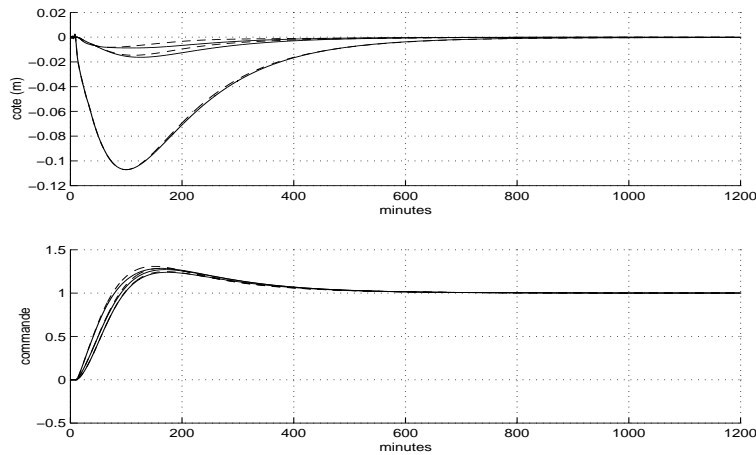


FIG. 9.13 – Comparaison des correcteurs K_{78} et K_9 (---). Evolution des cotes et commandes face à une perturbation de débit en aval du bief 3.

Le correcteur réduit satisfait à la politique de commande temporelle qui était un point fort du correcteur d'ordre plein. Une réduction à un ordre plus faible conduit à un correcteur dont la politique de commande ne tient plus compte du découplage car les sous-transferts triangulaires inférieurs (de gain faible) sont mal approchés.

9.4 Résumé

Dans ce chapitre nous avons exposé la démarche permettant de passer de l'approche H_∞ monovariante à l'approche H_∞ multivariante. A l'instar du cas monovariante, nous avons tout d'abord (re)formuler chaque contrainte du cahier des charges en terme d'une contrainte H_∞ pondérée sur des transfert(s) ou des matrices de transfert spécifique(s). Cette étape achevée, nous avons ramené l'ensemble de ces contraintes à un critère H_∞ «4 blocs» de forme standard.

La seconde partie du chapitre s'est employée à analyser la solution H_∞ obtenue. A partir de cette analyse (bande passante, politique multivariante du correcteur), un correcteur satisfaisant d'ordre 9 (au lieu de 78) a été obtenu.

Conclusions générales

La première partie de ce mémoire a mis en évidence la difficulté du problème de réduction de modèles. Il a été formulé comme la minimisation d'une norme H_∞ pondérée avec contrainte d'ordre sur la solution. Le problème d'optimisation sous-jacent, dont les contraintes *LMI* sont formulées de façon aboutie par rapport aux travaux antérieurs, révèle l'existence d'une contrainte non-convexe. Cela nous conduit à conjecturer ouvert le problème de réduction de modèles. Dès lors, la recherche d'une solution, par la mise en œuvre d'un algorithme, dépend de son point d'initialisation. Par ailleurs, il existe des méthodes à moindre coût qui pourraient permettre de calculer un bon point d'initialisation à l'algorithme. Il nous a donc semblé fondamental de faire une synthèse des méthodes existantes en les classant dans des catégories relatant les cas particuliers de notre formulation générale : l'erreur absolue, l'erreur absolue pondérée, l'erreur relative et l'erreur relative pondérée.

Au delà d'un simple inventaire des méthodes existantes, nous avons unifié toutes les méthodes en remarquant comment chacune se ramène, à travers des transformations diverses, à l'une des techniques fondamentales de l'erreur absolue : la troncature équilibrée ou la minimisation au sens de la norme de Hankel qui procurent des solutions sous-optimales. Parmi les méthodes de transformation, nous distinguons celles de nature géométrique (projection/intersection d'ellipsoïdes avec des plans dans l'espace d'état), qui débouchent sur la troncature équilibrée, et celles de nature algébrique (décomposition modale partielle avec des pondérations anticausales) qui débouchent sur la minimisation en norme de Hankel d'une erreur absolue.

Dans le contexte de la réduction au sens de la norme de Hankel, nous avons formalisé la recherche du facteur de liberté D_r comme minimisant la norme H_∞ de l'erreur pondérée ou relative pondérée.

Nous avons montré l'intérêt d'une bonne approximation en erreur relative qui, par rapport à l'erreur absolue, garantie pour l'ensemble des pulsations une bonne approximation en gain et en phase. Il s'avère en fait que les méthodes existantes pour l'erreur relative reviennent à réduire en erreur absolue un transfert particulier : le transfert de phase qui représente la phase d'un système (en monovariable). Le calcul du transfert de phase est lié au choix d'un facteur spectral particulier du modèle à réduire.

Nous avons souligné dans la chapitre 6 (réduction à pôles fixés) l'intérêt algorithmique

de la classe des méthodes de réduction la plus ancienne : l'agrégation. Tirant partie des propriétés de cette approche, nous avons ainsi formulé de façon convexe la recherche d'un modèle réduit dans le cas de 2 pondérations. Ceci revient en fait à résoudre le problème de départ pour un point d'initialisation particulier qui "convexifie" le problème.

Le réglage des pondérations, est d'un point de vue pratique, une étape d'essais/erreurs coûteuse en temps. Comme les méthodes existantes n'aspirent pas vraiment à résoudre le problème posé, nous pouvons remarquer une inadéquation entre le réglage d'une pondération et la solution obtenue. Il est par ailleurs un peu contradictoire d'augmenter la taille déjà élevée d'un modèle à réduire par les états des pondérations. C'est pourquoi nous avons formulé une nouvelle approche de la réduction de modèles sur des gammes de pulsations sans utiliser de pondérations. Formulée sous forme convexe (et de dimension finie), l'algorithme optimise une partie du modèle réduit, connaissant le reste de la solution qui est fixée par ailleurs. Cette approche peut rentrer dans la cadre des méthodes d'agrégation qui fixent une partie du modèle réduit, mais il est possible, comme nous l'avons vu à travers les exemples, d'initialiser l'algorithme avec une solution déjà satisfaisante qui ne pourra qu'être améliorée sur les gammes de pulsations spécifiées.

Bilan de l'étude des exemples

Le premier exemple, celui de Safonov, est révélateur des potentialités des méthodes dans le cadre monovariable. L'utilisation de l'erreur relative est sans aucun doute significative pour approcher l'anti-résonance du système. L'ajout du pondération passe-bas permet d'améliorer l'erreur relative en basses pulsations tout en continuant à respecter l'anti-résonance. C'est par la réduction optimale au sens de la norme de Hankel relative pondérée que nous avons, dans un premier temps, trouvé la solution la plus satisfaisante parmi les techniques classiques. Cette solution a été améliorée dans la gamme de pulsations désirée ($[0; 2rad/s]$) grâce à notre nouvelle approche (voir page 164).

Le benchmark TGEN obtient le meilleur résultat en considérant une approximation optimale au sens d'une norme de Hankel pondérée, page 116. La pondération choisie permet de remettre à l'échelle les entrées qui, dans le modèle de départ, ont des gains disproportionnés.

Le modèle de bief de type 1 s'est vu réduit à l'ordre 7 dans la gamme de pulsations pertinente pour l'élaboration de la loi de commande. En retenant les 7 premiers modes du système (au sens des pulsations propres), l'agrégation suivie de l'optimisation de l'erreur relative pondérée donne un résultat inégalé par les méthodes classiques de troncature ou de norme de Hankel. L'approche directe sur la gamme de pulsations $[0, 5 \times 10^{-3}rad/s]$, en retenant aussi les 7 premiers modes, a permis de conclure quant à la supériorité de cette approche (page 166). Notons aussi que nous avons amélioré sur cette exemple, page 37, l'ordre du modèle réduit obtenu par troncature équilibrée, en proposant un algorithme de dégénérescence de l'ordre. Ainsi, l'ordre de la solution donnée par la troncature équilibrée a été amélioré de 5 états.

Lorsque des simulateurs de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles existent, il est possible d'obtenir des modèles finis mais de grande dimension. La réduction du modèle est alors une étape nécessaire avant la détermination de lois de commande.

Elle s'articule, par rapport à l'utilisation de schémas numériques de résolution, comme un outil permettant d'éliminer méthodiquement des variables d'états. Dans la perspective d'élaborer des lois de commande de type fréquentiel, nous avons proposé dans la première partie des outils qui, de façon systématique et maîtrisée, approchent des modèles de grande dimension dans des gammes de pulsations. Ces outils sont nécessaires pour la conception assistée par ordinateur de lois de commande.

L'application des méthodes de réduction pour l'obtention de modèles de synthèse multivariables, à partir du schéma numérique de Preissmann, a permis de nous ramener à un modèle de bief comportant 7 états au lieu de 24 (voire bien plus lorsque des pas plus faibles de discrétisation sont choisis).

Approche fréquentielle pour la commande multivariable des canaux d'irrigation

En premier lieu, nous avons établi quelques règles pour la conception de correcteurs de type PI qui répondent à la stratégie de commande aval distante. Nous montrons comment le retard du système, et non la structure limitée de loi de commande, limite la performance. Afin d'intégrer automatiquement de nouvelles spécifications telles que le roll-off et l'obtention de marges de stabilité minimales, un schéma H_∞ 4-blocs est proposé. La réduction du correcteur H_∞ révèle que l'on peut se ramener à une structure de type PI "amélioré" qui répond aux spécifications.

Comme pour la synthèse monovariante, le cas multivariable est traité en considérant pour chaque spécification du cahier des charges une formulation en terme de contrainte H_∞ pondérée sur une matrice de transfert spécifique de la boucle fermée. L'objectif de découplage, conduisant à l'équité de la répartition de l'eau, est pris explicitement en compte ainsi que l'obtention de marges de stabilité multivariables. Une synthèse H_∞ 4-blocs est menée sur un modèle de canal réduit de canal à 21 états (au lieu de 72) et le correcteur obtenu est réduit à 9 états. L'étude des 2 réductions (celle du modèle et celle du correcteur) met en avant que le cahier des charges peut être rempli par un correcteur de complexité raisonnable.

Notre méthodologie, qui propose des outils transmissibles et basés sur l'optimisation convexe possède un intérêt certain en Sciences de l'Ingénieur. Appliquée dernièrement sur un cas concret de commande d'un canal, elle a donné des conclusions intéressantes. Une bonne utilisation d'outils "sous-optimaux" mènent à des résultats pratiques satisfaisants.

Perspectives

Dans le cas monovariante, l'approche directe de la réduction dans des gammes de pulsations développée dans le chapitre 6, pourrait s'étendre à l'approximation de la phase sans fixer les pôles de la solution.

La réduction de type boucle ouverte étant acquise, le domaine de la réduction de correcteur en boucle fermée pourrait faire l'objet d'études plus approfondies.

Concernant la commande des canaux, un thème à l'étude a pour but de concevoir manuellement des correcteurs multivariables en se basant sur des concepts connus de l'irrigation : commande amont locale, report de débits. Le compromis gaspillage de la ressource/satisfaction de l'utilisateur pourrait ainsi être intégré de façon directe.

Enfin, la conception de correcteurs avec séquençement de gains pourrait tenir compte de

différents régimes de fonctionnement révélateurs de la quantité d'eau disponible dans un bief.

Troisième partie

Annexes

Réduction pour des classes de signaux

A.1 Ensembles de signaux et pondérations

Les pondérations agissent de la manière suivante, figure A.1. Elles transforment l'ensemble des signaux contenus dans la boule unité (au sens de la norme euclidienne) en des ensembles de signaux $\{\mathcal{U}\}$, et $\{\mathcal{E}\}$.

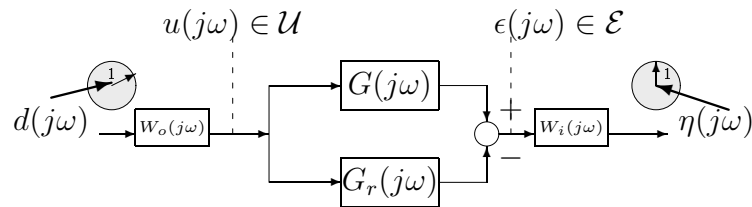


FIG. A.1 – Pondérations fréquentielles pour la modélisation d'ensemble de signaux

Les pondérations fréquentielles permettent de modéliser les ensembles \mathcal{U} et \mathcal{E} à partir des signaux canoniques $d(j\omega)$ et $\eta(j\omega)$.

$$u(j\omega) \in \{\mathcal{U}\} \iff \exists d(j\omega), \|d(j\omega)\| \leq 1, u(j\omega) = W_i d(j\omega)$$

$$\epsilon(j\omega) \in \{\mathcal{E}\} \iff \exists \eta(j\omega), \|\eta(j\omega)\| \leq 1, \epsilon(j\omega) = W_o^{-1} \eta(j\omega)$$

Ces relations sont des conséquences directes des définitions des ensembles $\{\mathcal{U}\}$ et $\{\mathcal{E}\}$ en utilisant l'inversibilité de W_i et W_o , voir figure A.2.

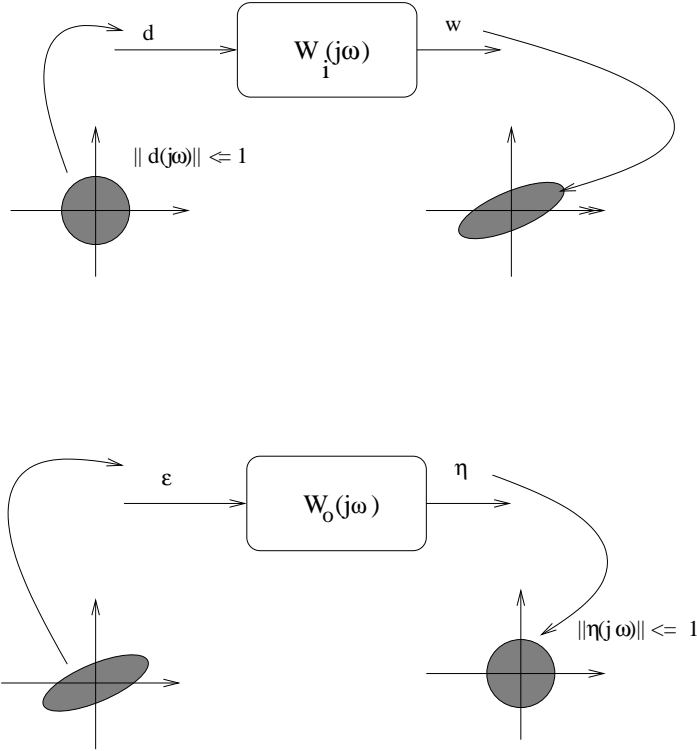


FIG. A.2 – Transformation des signaux par ajout de pondérations

A.2 Démonstration du théorème 1.2.1

Au lieu de considérer les signaux $u(j\omega)$ et $\epsilon(j\omega)$ nous basons la démonstration qui suit sur les signaux $d(j\omega)$ et $\eta(j\omega)$ car :

$$\forall d(j\omega) / \|d(j\omega)\| \leq 1, \|\eta(j\omega)\| \leq 1 \Leftrightarrow \forall u(j\omega) \in \{\mathcal{U}\}, \epsilon(j\omega) \in \{\mathcal{E}\}$$

Démonstration :

\Leftarrow

Supposons $\|W_o(G - G_r)W_i\|_\infty \leq 1$.

$$\|\eta\| = \|W_o(G - G_r)W_i d\| \leq \bar{\sigma}(W_o(G - G_r)W_i)\bar{\sigma}(d) \leq 1.$$

\Rightarrow (par l'absurde)

Par hypothèse $\forall d, \|d(j\omega)\| \leq 1, \|\eta(j\omega)\| \leq 1$.

Supposons au contraire que $\underbrace{\|W_o(G - G_r)W_i\|_\infty}_T > 1 \Leftrightarrow \sup_\omega \bar{\sigma}(T(j\omega)) > 1$.

$\exists \omega_0 \in \bar{\mathbb{R}}, \bar{\sigma}(T(j\omega_0)) > 1$.

Opérons une décomposition en valeurs singulières (rangées par ordre décroissant) de $T(j\omega_0)$:

$$T(j\omega_0) = U \mathbf{diag}(\sigma_k) V^*$$

$$V = (v_1 \dots) \quad U = (u_1 \dots)$$

où U et V sont des matrices unitaires. Prenons $d(j\omega_0) = v_1$ ($v_1^T v_1 = 1$), alors $\eta(j\omega_0) = T(j\omega_0)v_1 = \sigma_1 u_1 = \bar{\sigma}(T(j\omega_0))u_1$

Il vient alors $\|\eta(j\omega_0)\| = \bar{\sigma}(T(j\omega_0)) > 1$. Ainsi pour $d(j\omega_0) = v_1$ vérifiant $\|d(j\omega_0)\| \leq 1$, $\|\eta(j\omega_0)\| > 1$ ce qui contredit l'hypothèse de départ. \square

B.1 Lemme réel borné

Ce lemme permet de caractériser dans l'espace d'état une contrainte de type H_∞ d'un transfert.

LEMME B.1.1 ([BGFB94])

Soit $T(p)$ un transfert stable de représentation d'état $[A, B, C, D]$ minimale. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

i) $\|T(p)\|_\infty < \gamma$

ii) il existe une matrice X symétrique définie positive solution de l'inégalité :

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0$$

Ce lemme reste valable dans le cas où l'on remplace les inégalités strictes par des inégalités au sens large.

B.2 Lemme de Schur

LEMME B.2.1

L'inégalité

$$\begin{bmatrix} Q(\xi) & S(\xi) \\ S^T(\xi) & R(\xi) \end{bmatrix} \geq 0$$

où $Q(\xi) = Q^T(\xi)$, $R(\xi) = R^T(\xi)$ inversible, $S(\xi)$ sont des fonctions affines de ξ , est équivalente à :

$$\begin{cases} R(\xi) > 0 \\ Q(\xi) - S(\xi)R(\xi)^{-1}S^T(\xi) \geq 0 \end{cases}$$

B.3 Lemme d'élimination des variables

Soient $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $K \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $V \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $m < n$ et $k < n$.

LEMME B.3.1

L'ensemble des matrices G vérifiant

$$G + UKV + V^T K^T U^T < 0$$

est non-vide si et seulement si :

$$\begin{aligned} U^{T\perp T} G U^{T\perp} &< 0 \\ V^{\perp T} G V^{\perp} &< 0 \end{aligned}$$

B.4 Lemme de complétion d'une matrice définie positive

LEMME B.4.1 ([PAC94])

Soient $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telles que $X = X^T > 0$ et $Y = Y^T > 0$. Soit r un entier avec $r < n$. Alors, il existe des matrices $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ telles que $X_{22} = X_{22}^T$ et :

$$\begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

si et seulement si

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \leq n + r$$

B.5 Lemme de complétion d'une matrice symétrique d'inertie donnée

LEMME B.5.1

Soient $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telles que $X = X^T > 0$ et $Y = Y^T > 0$.

Le plus petit entier positif \bar{r} tel qu'il existe $m \geq 0$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times (\bar{r}+m)}$, $X_{22} = X_{22}^T \in \mathbb{R}^{(\bar{r}+m) \times (\bar{r}+m)}$, vérifiant

$$\tilde{P} \triangleq \begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_+(\tilde{P}) &= n + \bar{r} \\ \delta_-(\tilde{P}) &= m \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

est

$$\bar{r} = \delta_+(X - Y^{-1})$$

Démonstration : Supposons $\exists r, \forall m \geq 0, X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times (r+m)}, X_{22} = X_{22}^T \in \mathbb{R}^{(r+m) \times (r+m)}$ vérifiant (B.1) et (B.2).

D'après [Sco97a], nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} I & -X_{12}X_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{P} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_{22}^{-1}X_{12}^T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Or, $Y^{-1} = X - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T$ qui est par hypothèse strictement positive et possède n valeurs propres strictement positives. Par suite X_{22} contient les r autres valeurs propres strictement positives. Comme $X - Y^{-1} = X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T$, il vient $\delta_+(X - Y^{-1}) \leq r$, car X_{12} n'est pas forcément de rang plein.

Prenons $r = \bar{r} \triangleq \delta_+(X - Y^{-1})$.

D'après [HJ85b] page 222,

$$\exists X_f = X_f^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ de rang plein } / X - Y^{-1} = X_f \begin{bmatrix} I_{\bar{r}} & 0 & 0 \\ 0 & -I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_f^T$$

où $m = \mathbf{rang}(X - Y^{-1}) - \bar{r}$.

En écrivant

$$X_f \triangleq [X_{f1} \quad X_{f2}]$$

alors $X_{f1} \in \mathbb{R}^{n \times (\bar{r}+m)}$.

De plus, nous avons

$$X - Y^{-1} = X_{f1} \begin{bmatrix} I_{\bar{r}} & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} X_{f1}^T \quad (\text{B.4})$$

Montrons alors qu'en prenant $X_{12} = X_{f1}$ et $X_{22} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}$, la construction de \tilde{P} peut être faite.

En effet, d'après la formule d'inversion matricielle, nous avons $Y^{-1} = X - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T$ qui est vérifiée d'après (B.4).

Pour finir, calculons l'inertie de \tilde{P} ainsi construite. D'après (B.3), \tilde{P} possède r valeurs propres strictement positives provenant de X_{22} et m valeurs propres strictement négatives provenant de X_{22} . De plus, comme $X - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T = Y^{-1}$, \tilde{P} possède encore n valeurs propres strictement positives. \square

B.6 Autres lemmes

LEMME B.6.1

Soient deux matrices P et Q symétriques, alors :

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} P > 0 \\ Q > 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Démonstration : Raisonnons par l'absurde. Supposons $x_1 \neq 0$ vecteur propre de P associé à la valeur propre 0.

$x_1^T P x_1 = 0$ ou encore $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda x_1^T) P (\lambda x_1) = 0$.

En passant à la forme quadratique, (B.5) devient :

$$\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad x_2 \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Par suite, $\lambda x_1^T x_2 + \lambda x_2 x_1^T + x_2^T Q x_2 \geq 0$. En bornant Q par ηI i.e. $Q \leq \eta I$, $\eta > 0$, il vient :

$$\lambda x_1^T x_2 + \lambda x_2 x_1^T + \eta x_2^T x_2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

En faisant tendre λ vers $-\infty$, la dernière inégalité n'est plus vérifiée ce qui contredit $P \geq 0$. Donc, $P > 0$. Un raisonnement similaire aboutit à $Q > 0$. \square

LEMME B.6.2

La matrice $\begin{bmatrix} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{bmatrix}$, $Q > 0$, est de rang dégénéré ayant 0 comme valeur propre de multiplicité j si et seulement si $P - \gamma^2 Q^{-1}$ est une matrice dégénérée possédant 0 comme valeur propre de multiplicité j .

Démonstration : $\begin{bmatrix} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{bmatrix}$, $Q > 0$ est semblable à $\begin{bmatrix} P - \gamma^2 Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$, $Q > 0$. \square

LEMME B.6.3

[OA00] Soient A et $P = P^T$ 2 matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$, vérifiant

$$AP + PA^T + BB^T = 0$$

Supposons que P est inversible et que A ne possède pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Alors $\delta_-(A) = \delta_+(P)$ et $\delta_+(A) = \delta_-(P)$.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $A - \epsilon P$ possède le même nombre de valeurs propres strictement positives et négatives que A . Alors

$$P(A^T - \epsilon P) + (A - \epsilon P)P + (BB^T + 2\epsilon P^2) = 0$$

et $BB^T + 2\epsilon P^2$ est une matrice définie strictement positives. D'après le théorème 2.4.10 de [HJ85b], le résultat est immédiat. \square

LEMME B.6.4

Projection d'un ellipsoïde sur un plan

Soit $\varepsilon_{Q^{-1}}$ l'ellipsoïde défini par

$$\left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} / x^T Q^{-1} x \leq 1 \right\}$$

où $Q = Q^T > 0$ et $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & * \\ * & * \end{bmatrix}$.

Notons $\mathcal{I}(\varepsilon_{Q^{-1}})$ la projection orthogonale de $\varepsilon_{Q^{-1}}$ sur le plan $x_2 = 0$.

Alors $\mathcal{I}(\varepsilon_{Q^{-1}}) = \{x/x^T Q_{11}^{-1} x \leq 1\}$

Démonstration : $x \in \mathcal{I}(\varepsilon_{Q^{-1}})$ si et seulement si $\exists y$ tel que :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \varepsilon_{Q^{-1}} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & [x^T & y^T] \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & x^T & 0 \\ x & Q_{11} & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} + UyV + V^T y^T U^T \geq 0 \end{aligned}$$

avec $U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$ et $V = [I \ 0 \ 0]$.

Appliquons le lemme d'élimination sur l'inégalité précédente.

$U^{T\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Le développement de l'inégalité

$$U^{T\perp T} \begin{bmatrix} 1 & x^T & 0 \\ x & Q_{11} & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} U^{T\perp} \geq 0$$

aboutit à

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T \\ x & Q_{11} \end{bmatrix} \geq 0$$

Par application du lemme de Schur, il vient

$$x^T Q_{11}^{-1} x \leq 1$$

□

LEMME B.6.5

Existence d'une solution $X/AX + XB = C$

Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Il existe une solution $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ à l'équation $AX + XB = C$ si et seulement si :

$$\mathbf{Sp}(A) \cap \mathbf{Sp}(B) = \emptyset$$

Démonstration : Une démonstration simple basée sur le produit de Kronecker se trouve dans [HJ85b]. □

Démonstrations de différents résultats du chapitre 2

C.1 Commentaires et démonstration du théorème 2.2.1

L'approche est basée sur le parallèle entre réduction de modèles et synthèse de loi de commande d'ordre réduit. Les représentations d'état des différents transferts sont rappelées.

$$W_i \stackrel{s}{=} \begin{bmatrix} A_{wi} & B_{wi} \\ C_{wi} & D_{wi} \end{bmatrix} \quad W_o \stackrel{s}{=} \begin{bmatrix} A_{wo} & B_{wo} \\ C_{wo} & D_{wo} \end{bmatrix} \quad G \stackrel{s}{=} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Nous rappelons que les pondérations sont carrées de dimension n_u et possèdent un nombre d'états n_i pour $W_i(p)$ et n_o pour $W_o(p)$. L'erreur pondérée $\Delta(p) = W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)$ peut s'exprimer comme l'interconnexion d'un transfert $H(p)$ avec $G_r(p)$: $\Delta(p) = H(p) \star G_r(p)$.

D'après la figure 2.1, page 29, notons H le système linéaire stationnaire décrit par :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = H \left(\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \right)$$

La représentation d'état associée à H est donnée par :

$$H \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{array} \right] \quad (\text{C.1})$$

Précisons cette représentation d'état.

$H(p)$ s'écrit sous une forme minimale en symboles [Fon95] de la manière suivante :

$$H(p) = \begin{pmatrix} W_o(p) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & G(p) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_i(p) & 0 \end{pmatrix}$$

En représentation d'état $H(p)$ s'exprime comme :

$$H(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A_{wo} & B_{wo} & 0 \\ \hline C_{wo} & D_{wo} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cc} A & 0 & B \\ \hline C & -I & D \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cc} A_{wi} & B_{wi} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ C_{wi} & D_{wi} & 0 \end{array} \right]$$

A l'aide des formules de multiplication de produits de Redheffer ¹ [Sco97a], $H(p)$ de la forme (C.1) s'exprime de la façon suivante :

$$H(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{ccc|cc} A_{wo} & B_{wo}C & B_{wo}DC_{wi} & B_{wo}DD_{wi} & -B_{wo} \\ 0 & A & BC_{wi} & BD_{wi} & 0 \\ 0 & 0 & A_{wi} & B_{wi} & 0 \\ \hline C_{wo} & D_{wo}C & D_{wo}DC_{wi} & D_{wo}DD_{wi} & -D_{wo} \\ 0 & 0 & C_{wi} & D_{wi} & 0 \end{array} \right] \quad (C.2)$$

Le théorème suivant, cas particulier d'un résultat plus général, est le point de départ des calculs.

THÉORÈME C.1.1 (ADAPTÉ DE[SCO97A])

Il existe un modèle réduit $G_r(p)$ d'ordre inférieur ou égal à r tel que :

$$z(p) = W_o(p)(G(p) - G_r(p))W_i(p)w(p) = (H(p) \star G_r(p))w(p) \text{ soit}$$

- stable,

$$- \|H(p) \star G_r(p)\|_\infty \leq \gamma;$$

si et seulement si il existe deux matrices P et Q telles que :

$$\left[\begin{array}{cc} C_y & D_{yw} \end{array} \right]^\perp \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} & B_w & & & \\ C_z & D_{zw} & & & \\ I & 0 & & & \\ 0 & I & & & \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & B_w \\ C_z & D_{zw} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} C_y & D_{yw} \end{array} \right]^\perp \leq 0 \quad (C.3)$$

$$\left[\begin{array}{cc} B_u^T & D_{zu}^T \end{array} \right]^\perp \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A}^T & C_z^T & & & \\ B_w^T & D_{zw}^T & & & \\ I & 0 & & & \\ 0 & I & & & \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & Q & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}^T & C_z^T \\ B_w^T & D_{zw}^T \\ I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} B_u^T & D_{zu}^T \end{array} \right]^\perp \leq 0 \quad (C.4)$$

$$\left[\begin{array}{cc} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{array} \right] \geq 0 \quad (C.5)$$

$$\text{rang} \left[\begin{array}{cc} P & \gamma I \\ \gamma I & Q \end{array} \right] \leq n + n_i + n_o + r \quad (C.6)$$

C.1.1 Développement de la condition (C.3)

La matrice $\left[\begin{array}{cc} C_y & D_{yw} \end{array} \right]$ s'écrit $\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & C_{wi} & D_{wi} \end{array} \right] \stackrel{\Delta}{=} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \Omega \end{array} \right]$ avec $\Omega = \left[\begin{array}{cc} C_{wi} & D_{wi} \end{array} \right]$.
On a :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \Omega \end{array} \right]^\perp = \left[\begin{array}{c|c} I_{n_o+n} & 0 \\ \hline 0 & \Omega^\perp \end{array} \right]$$

où $\Omega^\perp = \left[\begin{array}{cc} C_{wi} & D_{wi} \end{array} \right]^\perp \stackrel{\Delta}{=} \left[\begin{array}{cc} \Omega_1 & \Omega_2 \end{array} \right]$ avec $\Omega^\perp \in \mathbb{R}^{(n_i+n_u) \times n_i}$. Pour certains cas spécifiques, nous précisons les expressions de Ω_1 et Ω_2 .

Explicitons dans un premier temps le produit

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & B_w \\ C_z & D_{zw} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} C_y & D_{yw} \end{array} \right]^\perp$$

¹chaque terme du produit étant un produit de Redheffer standard sur un intégrateur

qui vaut :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{wo} & B_{wo}C & B_{wo}DC_{wi} & B_{wo}DD_{wi} \\ 0 & A & BC_{wi} & BD_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} & B_{wi} \\ C_{wo} & D_{wo}C & D_{wo}DC_{wi} & D_{wo}DD_{wi} \\ I_{n_o+n} & & 0 & 0 \\ 0 & & I_{n_i} & 0 \\ 0 & & 0 & I_{n_u} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_{n_o+n} & 0 \\ 0 & \Omega^\perp \end{array} \right]$$

En faisant apparaître Ω :

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & B_{wo}D\Omega \\ 0 & A & B\Omega \\ 0 & 0 & [A_{wi} \ B_{wi}] \\ C_{wo} & D_{wo}C & D_{wo}D\Omega \\ I_{n_o+n} & & 0 \\ 0 & & I_{n_i+n_u} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_{n_o+n} & 0 \\ 0 & \Omega^\perp \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0_{(n_o+n) \times n_i} \\ 0 & A & \\ 0 & 0 & [A_{wi} \ B_{wi}] \Omega^\perp \\ C_{wo} & D_{wo}C & 0 \\ I_{n_o+n} & & 0 \\ 0 & & \Omega^\perp \end{array} \right]$$

En tenant compte de la partition de Ω^\perp , le produit

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0_{(n_o+n) \times n_i} \\ 0 & A & \\ 0 & 0 & [A_{wi} \ B_{wi}] \Omega^\perp \\ \hline C_{wo} & D_{wo}C & 0 \\ I_{n_o+n} & & 0 \\ 0 & & \Omega^\perp \end{array} \right]$$

vaut

$$\left[\begin{array}{c} P \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_1 \end{array} \right] \\ C_{wo} \ D_{wo}C \\ P \left[\begin{array}{ccc} A_{wo} & B_{wo}C & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A_{wi}\Omega_1 + B_{wi}\Omega_2 \end{array} \right] \\ -\gamma^2 I \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \Omega_2 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Posons $A_{inv}^i = B_{wi}\Omega_2 + A_{wi}\Omega_1$. En écrivant P sous la forme $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$, avec $P_{11} \in \mathbb{R}^{(n_o+n) \times (n_o+n)}$, l'inégalité (C.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{inv}^i \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{12}^T & P_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_1 \end{array} \right] + \dots \\ \dots + & \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_1^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{12}^T & P_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{inv}^i \end{array} \right] + \dots \quad (C.7) \\ \dots + & \left[\begin{array}{c|c|c} C_{wo}^T & & \\ \hline C^T & D_{wo}^T & \\ \hline 0 & & -\gamma^2 \Omega_2^T \Omega_2 \end{array} \right] \leq 0 \end{aligned}$$

Il est possible de préciser Ω_1 et Ω_2 en faisant l'hypothèse que D_{wi} est inversible.

LEMME C.1.2

La matrice $D_{wi}^T + D_{wi}^{-1}C_{wi}C_{wi}^T$ est de rang n_u

Démonstration : Supposons le contraire : $\exists v \neq 0, (D_{wi}D_{wi}^T + C_{wi}C_{wi}^T)v = 0$. En post-multipliant par v^T , nous avons

$$v^T(D_{wi}D_{wi}^T + C_{wi}C_{wi}^T)v = 0 \quad (\text{C.8})$$

Or D_i étant inversible, $\exists \epsilon_1 > 0, D_{wi}D_{wi}^T \geq \epsilon_1 I$. De même $\exists \epsilon_2 \geq 0, C_{wi}C_{wi}^T \geq \epsilon_2 I$. Finalement, $\forall v, v^T(D_{wi}D_{wi}^T + C_{wi}C_{wi}^T)v \geq (\epsilon_1 + \epsilon_2)v^T v > 0$, ce qui contredit (C.8).

La matrice $D_{wi}^T + D_{wi}^{-1}C_{wi}C_{wi}^T$ est donc de rang plein n_u . \square

Les conditions sur Ω_1 et Ω_2 : $\begin{bmatrix} C_{wi} & D_{wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = 0$ et $\begin{bmatrix} C_{wi}^T & \Omega_1 \\ D_{wi}^T & \Omega_2 \end{bmatrix}$ de rang plein mènent au choix possible suivant :

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -D_{wi}^{-1}C_{wi} \end{bmatrix} \text{ ssi } \mathbf{rang}(D_{wi}^T + D_{wi}^{-1}C_{wi}C_{wi}^T) = n_u$$

ce qui est toujours vrai d'après le lemme précédent.

REMARQUE C.1.1

Si D_{wi} est inversible, $A_{inv}^i = A_{wi} - B_{wi}D_{wi}^{-1}C_{wi}$. Notons que cette matrice est la matrice A de la représentation d'état de $W_i^{-1}(p)$.

Finalement, l'inégalité (C.3) devient, sous l'hypothèse que D_{wi} est inversible :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{wi} - B_{wi}D_{wi}^{-1}C_{wi} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{12}^T & P_{22} \end{array} \right] + \dots \\ & \dots + \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{12}^T & P_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} A_{wo} & B_{wo}C & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{wi} - B_{wi}D_{wi}^{-1}C_{wi} \end{array} \right] + \dots \quad (\text{C.9}) \\ & \dots + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} C_{wo}^T \\ C_{wo}^T D_{wo}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{wo} & D_{wo}C \end{bmatrix} \\ \hline 0 & -\gamma^2 C_{wi}^T D_{wi}^{-T} D_{wi}^{-1} C_{wi} \end{array} \right] \leq 0 \end{aligned}$$

C.1.2 Développement de la condition (C.4)

Afin de développer l'inégalité (C.4), nous opérons d'abord un changement de base :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sur $H(p)$. L'ensemble des matrices Q du théorème C.1.1 sera obtenu par changement de base inverse.

$H(p)$ devient :

$$H(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{ccc|cc} A_{wi} & 0 & 0 & B_{wi} & 0 \\ BC_{wi} & A & 0 & BD_{wi} & 0 \\ B_{wo}DC_{wi} & B_{wo}C & A_{wo} & B_{wo}DD_{wi} & -B_{wo} \\ \hline C_{wo} & D_{wo}C & D_{wo}DC_{wi} & D_{wo}DD_{wi} & -D_{wo} \\ 0 & 0 & C_{wi} & D_{wi} & 0 \end{array} \right]$$

$[B_u^T \ D_{zu}^T] = [0 \ 0 \ -B_{wo}^T \ -D_{wo}^T]$. Posons alors $\Lambda = [B_{wo}^T \ D_{wo}^T]$. Comme précédemment l'orthogonal $[B_u^T \ D_{zu}^T]^\perp$ s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} I_{n_i+n} & 0 \\ 0 & \Lambda^\perp \end{bmatrix}$$

où $\Lambda^\perp \in \mathbb{R}^{(n_o+n_u) \times n_o}$. Par dualité par rapport au calcul précédent, l'inégalité (C.4) donne :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{wi} & 0 & 0 \\ BC_{wi} & A & 0 \\ 0 & 0 & A_{inv}^o \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_1 \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_1^T \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} A_{wi} & 0 & 0 \\ BC_{wi} & A & 0 \\ 0 & 0 & A_{inv}^o \end{bmatrix}^T + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} B_{wi} \\ BD_{wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{wi}^T & D_{wi}^T B^T \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma^2 \Lambda_2^T \Lambda_2 \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

avec

$$(i) \ \Lambda^\perp \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \ Q = Q^T \triangleq \begin{bmatrix} Q_{33} & Q_{23}^T & Q_{13}^T \\ Q_{23}^T & Q_{22} & Q_{12}^T \\ Q_{13} & Q_{12} & Q_{11} \end{bmatrix}$$

$$(iii) \ A_{inv}^o \triangleq \Lambda_1^T A_{wo} + \Lambda_2^T C_{wo}$$

Λ_1 et Λ_2 se précisent lorsque D_{wo} est inversible. Dans ce cas, il est possible de montrer comme dans l'inégalité précédente que $\Lambda_1 = I$ et $\Lambda_2 = -D_{wo}^{-T} B_{wo}^T$ convient. A_{inv}^o devient alors $A_{wo} - B_{wo} D_{wo}^{-1} C_{wo}$.

Finalement, l'inégalité (C.4) du théorème s'écrit,

$$\exists Q = Q^T \triangleq \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} A_{wi} & 0 & 0 \\ BC_{wi} & A & 0 \\ 0 & 0 & A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A_{wi} & 0 & 0 \\ BC_{wi} & A & 0 \\ 0 & 0 & A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} \end{bmatrix}^T + \dots \\
& \dots + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{wi} \\ BD_{wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{wi}^T & D_{wi}^T B^T \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 B_{wo}D_{wo}^{-1}D_{wo}^{-T}B_{wo}^T \end{bmatrix} \leq 0
\end{aligned} \tag{C.10}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
& \exists Q = Q^T \triangleq \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} & 0 & 0 \\ 0 & A & BC_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} + \dots \\
& \dots + \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} & 0 & 0 \\ 0 & A & BC_{wi} \\ 0 & 0 & A_{wi} \end{bmatrix}^T + \dots \\
& \dots + \begin{bmatrix} -\gamma^2 B_{wo}D_{wo}^{-1}D_{wo}^{-T}B_{wo}^T & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} BD_{wi} \\ B_{wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{wi}^T B & B_{wi}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \leq 0
\end{aligned} \tag{C.11}$$

C.2 Démonstration du lemme 2.4.2

La démonstration se fait rapidement en reprenant le théorème C.1.1, page 236. Dans ce cadre, $H(p)$ (figure 2.9) vaut

$$H(p) \stackrel{s}{=} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 & BD^{-1} \\ D^{-1}C & I & -D^{-1} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_y \ D_{yw}]^\perp = [I \ 0]^T.$$

La condition (C.3) devient donc :

$$\begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^T & C^T D^{-T} & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C \\ D^{-1}C \\ I \\ O \end{bmatrix} \leq 0$$

ou encore :

$$(A - BD^{-1}C)^T P + P(A - BD^{-1}C) + C^T D^{-T} D^{-1} C \leq 0$$

La condition (C.4) donne $[B_u^T \ D_{zu}^T]^\perp = [D^{-T} B^T \ -D^{-T}]^\perp = [I \ B]^T$, et (après simplifications)

$$\begin{bmatrix} A^T & B & I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B^T \\ I \\ B^T \end{bmatrix} \leq 0$$

impliquant :

$$AQ + QA^T + (1 - \gamma^2)BB^T \leq 0$$

Les contraintes (2.36) et (2.37) sont directement issues du théorème C.1.1.

C.3 Démonstration du lemme 2.5.1

La démonstration se fait à partir du théorème C.1.1, page 236. Ici, $H(p)$ (figure 2.11) vaut

$$H(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|cc} A - BD^{-1}C & 0 & BD^{-1} & 0 \\ 0 & A_{wo} & B_{wo} & -B_{wo} \\ \hline 0 & C_{wo} & D_{wo} & -D_{wo} \\ -D^{-1}C & 0 & D^{-1} & 0 \end{array} \right]$$

Développement de la condition (C.3) :

$$[C_y \ D_{yw}]^\perp = [-D^{-1}C \ 0 \ D^{-1}]^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 & BD^{-1} \\ 0 & A_{wo} & B_{wo} \\ 0 & C_{wo} & D_{wo} \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{no} & 0 \\ 0 & 0 & I_{nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{wo} \\ 0 & C_{wo} \\ I & 0 \\ 0 & I_{no} \\ C & 0 \end{bmatrix} \triangleq \Gamma$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \Gamma = \begin{bmatrix} P \\ 0 & C_{wo} \\ P \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{wo} \end{bmatrix} \\ -\gamma^2 C & 0 \end{bmatrix}$$

La condition (C.3) donne finalement :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{wo} \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{wo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma^2 C^T C & 0 \\ 0 & C_{wo}^T C_{wo} \end{bmatrix} \leq 0$$

$\exists P = P^T /$

Développement de la condition (C.4) :

$$[B_u^T \ D_{zu}]^\perp = [0 \ -B_{wo}^T \ -D_{wo}^T]^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & -D_{wo}^{-T} B_{wo}^T \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A^T - C^T D^{-T} B^T & 0 & 0 \\ 0 & A_{wo}^T & C_{wo}^T \\ D^{-T} B^T & B_{wo}^T & D_{wo}^T \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{no} & 0 \\ 0 & 0 & I_{nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & -D_{wo}^{-T} B_{wo}^T \end{bmatrix} = \dots$$

$$= \begin{bmatrix} A^T - C^T D^{-T} B^T & 0 \\ 0 & A_{wo}^T - C_{wo}^T D_{wo}^{-T} B_{wo}^T \\ D^{-T} B^T & 0 \\ I_n & 0 \\ 0 & I_{no} \\ 0 & -D_{wo}^{-T} B_{wo}^T \end{bmatrix} \triangleq \Gamma'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & Q & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \Gamma' = \begin{bmatrix} Q \\ Q \begin{bmatrix} A^T - C^T D^{-T} B^T & 0 \\ 0 & A_{wo}^T - C_{wo}^T D_{wo}^{-T} B_{wo}^T \\ 0 & \gamma^2 D_{wo}^{-T} B_{wo}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

La condition (C.4) donne finalement :

$$\begin{aligned} & \exists Q = Q^T / \\ & \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & A_{wo} - B_{wo}D_{wo}^{-1}C_{wo} \end{bmatrix}^T + \dots \\ & + \begin{bmatrix} BD^{-1}D^{-T}B^T & 0 \\ 0 & -\gamma^2 B_{wo}D_{wo}^{-1}D_{wo}^{-T}B_{wo}^T \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

D.1 L'opérateur de Hankel

L'opérateur de Hankel est l'application qui à une entrée passée $u(t), t \leq 0$ et $u(t) = 0, \forall t > 0$ fait correspondre la sortie future $y(t), \forall t \geq 0$.

DÉFINITION D.1.1

Soit $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ décrit par (3.1). Alors l'opérateur de Hankel Γ_G est défini comme :

$$\Gamma_G : L^2[-\infty, 0] \rightarrow L^2[0, \infty] : (\Gamma_G v)(t) \triangleq \int_0^\infty C e^{A(t+\tau)} B v(\tau) d\tau, t > 0$$

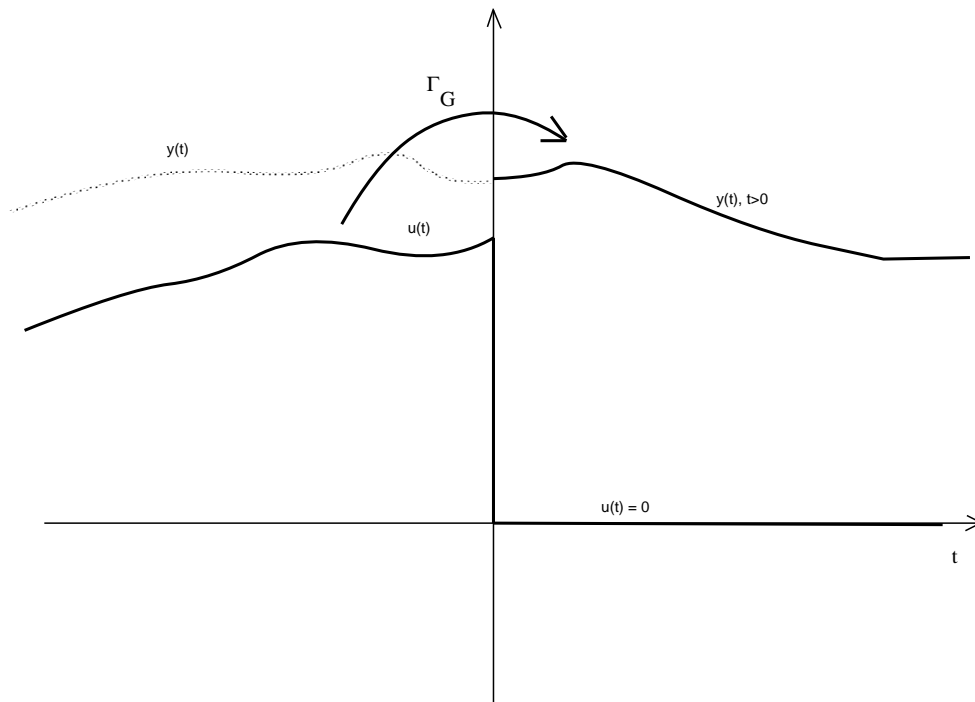


FIG. D.1 – Illustration de l'opérateur de Hankel Γ_G

Les matrices d'états A , B , C , D du modèle telles que les donne [Var99] sont les suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a1 \\ \vdots \\ a10 \end{bmatrix}$$

avec :

$$a1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$a2 = [0 \ -0.11323 \ -0.98109 \ -11.847 \ -11.847 \ -63.08 \ -34.339 \ -34.339 \ -27.645 \ 0];$$

$$a3 = [324.121 \ -1.1755 \ -29.101 \ 0.12722 \ 2.83448 \ -967.73 \ -678.14 \ -678.14 \ 0 \ -129.29];$$

$$a4 = [-127.3 \ 0.46167 \ 11.4294 \ -1.0379 \ 13.1237 \ 380.079 \ 266.341 \ 266.341 \ 0 \ 1054.85];$$

$$a5 = [-186.05 \ 0.67475 \ 16.7045 \ 0.86092 \ -17.068 \ 555.502 \ 389.268 \ 389.268 \ 0 \ -874.92];$$

$$a6 = [341.917 \ 1.09173 \ 1052.75 \ 756.465 \ 756.465 \ -29.774 \ 0.16507 \ 3.27626 \ 0 \ 0];$$

$$a7 = [-30.748 \ -0.09817 \ -94.674 \ -68.029 \ -68.029 \ 2.67753 \ -2.6558 \ 4.88497 \ 0 \ 0];$$

$$a8 = [-302.36 \ -0.96543 \ -930.96 \ -668.95 \ -668.95 \ 26.3292 \ 2.42028 \ -9.5603 \ 0 \ 0];$$

$$a9 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1.66667 \ 0];$$

$$a10 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -10];$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.66667 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.49134 & 0 & -0.63203 & 0 & 0 & -0.20743 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Éléments de factorisation spectrale

Cette partie a pour objectif d'introduire quelques outils nécessaires à la manipulation des facteurs spectraux. La notion de spectre est intimement liée aux matrices de fonctions de transfert réelles rationnelles positives. Les définitions suivantes résument ces notions.

DÉFINITION F.0.2 (MATRICE RÉELLE RATIONNELLE POSITIVE [FCG79])

La matrice de fonctions de transfert $Z(p)$ est réelle positive si et seulement si :

- (i) $Z(p)$ n'a pas de pôles dans le demi-plan droit ouvert.
- (ii) $Z(j\omega) + Z(j\omega)^* \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} - \{\omega_0 / j\omega_0 \text{ est pôle de } Z(p)\}$.
- (iii) Si $j\omega_0$ est pôle de $Z(p)$ alors il est simple et le résidu correspondant est une matrice hermitienne semi-définie positive.

Cette définition traduit dans un cas générique ($Z(p) \in \mathcal{RH}_\infty$) que la partie réelle de $Z(j\omega)$ est positive. Du reste, nous considérons dans la suite, sans perte de généralité, que la propriété de positivité est évaluée sur l'axe imaginaire.

DÉFINITION F.0.3 (SPECTRE RATIONNEL POSITIF ET FACTEURS SPECTRAUX)

- (i) La matrice carrée de fonctions de transfert $\Phi(p)$ d'ordre m est appelée spectre positif s'il existe une matrice de fonctions de transfert réelle rationnelle positive $Z(p)$ telle que

$$\Phi(j\omega) = Z(j\omega) + Z(j\omega)^* \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

- (ii) $G(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ est un facteur spectral à gauche, stable associé à un spectre rationnel $\Phi(p) \geq 0$ lorsque $\Phi(p) = G(p)G(p)^*$. $G(p)$ est un facteur spectral minimal lorsque le degré n de $G(p)$ vérifie $m = 2n$.
- (iii) $V(p) \in \mathcal{RH}_\infty$ est un facteur spectral à droite, stable associé à un spectre rationnel $\Phi(p) \geq 0$ lorsque $\Phi(p) = V(p)^*V(p)$. $V(p)$ est un facteur spectral minimal lorsque le degré q de $V(p)$ vérifie $m = 2q$.

De la définition précédente, nous pouvons remarquer qu'un spectre $\Phi(p)$ vérifie $\Phi(j\omega) = \Phi(j\omega)^*$ et que $\Phi(j\omega) \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$.

Le point important de cette section concerne l'étude de l'ensemble des facteurs spectraux $V(p)$ et $G(p)$ associés à un spectre rationnel

$$\Phi(p) = G(p)G(p)^* = V(p)^*V(p) \tag{F.1}$$

Plus précisément, nous étudierons et donnerons les solutions algorithmiques aux problèmes suivants qui sont des points techniques essentiels pour la suite :

- Etant donnée $\Phi(p)$, donner une paramétrisation de l'ensemble des $V(p)$ et $G(p)$ vérifiant (F.1). Ceci est fait par l'intermédiaire du théorème F.1.1, page 248.
- Si $G(p)$ est une matrice de fonctions de transfert stable, trouver un facteur $V(p)$ stable et minimum de phase. La résolution de ce problème est menée dans la section F.3, page 252.
- Si $G(p)$ est une matrice de fonctions de transfert stable et non-minimum de phase, trouver un facteur spectral $W(p)$ stable et minimum de phase tel que $G(p)G(p)^* = W(p)W(p)^*$.

Ces 3 questions ont été abondamment étudiées en Automatique et Traitement du signal, nous insisterons sur les aspects essentiels que sont l'étude de l'ensemble des solutions [And73, FCG79] et leur moyen de calcul.

F.1 Ensemble des facteurs spectraux associés à un spectre

Soit $Z(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_Z & B_Z \\ \hline C_Z & D_Z \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q}$ une matrice de fonctions de transfert positive réelle et minimale vérifiant :

$$\Phi(p) = Z(p) + Z(p)^* > 0$$

L'ensemble des facteurs spectraux $G(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times p}$ et $V(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_V & B_V \\ \hline C_V & D_V \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times q}$ vérifiant (F.1) est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME F.1.1

$G(p)$ et $V(p)$ sont des facteurs spectraux stables et minimaux associés au spectre $\Phi(p) \triangleq Z(p) + Z(p)^*$ si et seulement si il existe une représentation d'état dans laquelle :

(i) $A = A_Z$ et $C = C_Z$.

(ii) B et D sont telles que si $\exists Q = Q^T > 0$ vérifiant

$$N(Q) \triangleq \begin{bmatrix} A_Z Q + Q A_Z^T & B_Z - Q C_Z^T \\ B_Z^T - C_Z Q & -D_Z - D_Z^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{F.2})$$

alors

$$- \begin{bmatrix} -B \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B^T & D^T \end{bmatrix} = N(Q) \quad (\text{F.3})$$

(iii) $A_V = A_Z$ et $B_V = B_Z$.

(iv) C_V et D_V sont telles que si $\exists P = P^T > 0$ vérifiant

$$M(P) \triangleq \begin{bmatrix} A_Z^T P + P A_Z & P B_Z - C_Z^T \\ B_Z^T P - C_Z & -D_Z - D_Z^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{F.4})$$

alors

$$- \begin{bmatrix} C_V^T \\ D_V^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_V & D_V \end{bmatrix} = M(P) \quad (\text{F.5})$$

Démonstration : Montrons d'abord que si $V(p)$ est un facteur spectral minimal, alors les propositions (iii) et (iv) sont vraies.

Ecrivons les représentations d'état de $Z + Z^*$ et de V^*V ($Z + Z^* = V^*V$) :

$$\begin{aligned} Z(p) + Z(p)^* &\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_Z & 0 & B_Z \\ 0 & -A_Z^T & -C_Z^T \\ \hline C_Z & B_Z^T & D_Z + D_Z^T \end{array} \right] \\ V(p)^*V(p) &\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_V & 0 & B_V \\ -C_V^T C_V & -A_V^T & -C_V^T D_V \\ \hline D_V^T C_V & B_V^T & D_V^T D_V \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Introduisons P la solution de l'équation de Lyapunov :

$$P/A_V^T P + P A_V + C_V^T C_V = 0 \quad (\text{F.7})$$

Par construction P existe et $P = P^T > 0$ car la paire (A_V, C_V) est observable par hypothèse et $V(p)$ est stable.

Opérons le changement dans l'espace d'état $T \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix}$ sur l'expression (F.6). Il vient :

$$V(p)^*V(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_V & 0 & B_V \\ 0 & -A_V^T & -P B_V - C_V^T D_V \\ \hline D_V^T C_V + B_V^T P & B_V^T & D_V^T D_V \end{array} \right] \quad (\text{F.8})$$

Les représentations d'état de $Z + Z^*$ et V^*V sont égales à un changement de base près. Puisque $VV^* = Z + Z^*$, on peut choisir la représentation d'état de $V(p)$, d'après (F.8), comme suit : $A_V = A_Z$ et $B_V = B_Z$. De plus, nous avons $-P B_Z - C_V^T D_V = -C_Z^T$ et $D_Z + D_Z^T = D_V D_V^T$. Par ailleurs, nous avons d'après (F.7) $P = P^T$ et $A_Z^T P + P A_Z + C_V^T C_V = 0$. De ces égalités découle l'égalité matricielle suivante :

$$\left[\begin{array}{cc} A_Z^T P + P A_Z & P B_Z - C_Z^T \\ B_Z^T P - C_Z & -D_Z - D_Z^T \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{cc} -C_V^T C_V & -C_V^T D_V \\ -D_V^T C_V & -D_V^T D_V \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} C_V^T \\ D_V^T \end{array} \right] [C_V \quad D_V] \leq 0$$

Réciproquement montrons que les conditions (iii) et (iv) impliquent que $V(p)$ est un facteur spectral associé au spectre positif $\Phi = Z + Z^*$.

D'après le lemme positif réel, la condition (F.4) exprime la positivité de $\Phi = Z + Z^*$. Supposons qu'il existe P telle que (F.4) soit vérifiée, c'est-à-dire $M(P) \leq 0$. Il existe alors

une décomposition de $M(P)$ sous la forme $M(P) = - \left[\begin{array}{c} C_V^T \\ D_V^T \end{array} \right] [C_V \quad D_V]$, ce qui assure

l'existence de C_V et D_V . Montrons qu'avec un tel choix des matrices d'état de $V(p)$ que $Z + Z^* = V^*V$. D'après ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$\left[\begin{array}{cc} A_Z^T P + P A_Z & P B_Z - C_Z^T \\ B_Z^T P - C_Z & -D_Z - D_Z^T \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} C_V^T \\ D_V^T \end{array} \right] [C_V \quad D_V]$$

ou encore

$$\left[\begin{array}{cc} A_Z^T P + P A_Z + C_V^T C_V & P B_Z + C_V^T D_V \\ B_Z^T P + D_V^T C_V & D_V^T D_V \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & C_Z^T \\ C_Z & D_Z + D_Z^T \end{array} \right]$$

En pré multipliant les 2 membres de la dernière égalité par $\begin{bmatrix} (j\omega - A_Z)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^*$ et en post multipliant par $\begin{bmatrix} (j\omega - A_Z)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}$, il vient : $V^*V = Z + Z^*$ Le calcul du membre de gauche est identique à celui fait dans la démonstration du théorème (3.4.6), page 79. Le calcul du membre de droite est quant à lui sans difficulté.

Une démonstration identique conduit au résultat concernant le facteur spectral $G(p)$

(relations (i) et (ii)). Remarquons que (F.2) et (F.4) ont la même structure. Ces inégalités sont duales et (F.4) s'obtient à partir de (F.2) par la post et pré multiplication par $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et en posant $Q = P^{-1}$. \square

REMARQUES F.1.1

1. Les entiers p et m qui désignent respectivement le nombre d'entrées de G et le nombre de sorties de V dépendent des matrices Q et P vérifiant (F.2) et (F.4). Plus exactement, $p = \text{rang}(N(Q))$ et $m = \text{rang}(M(P))$.
2. Les ensembles $\mathcal{P} \triangleq \{P = P^T > 0 / M(P) \leq 0\}$ et $\mathcal{Q} \triangleq \{Q = Q^T > 0 / N(Q) \leq 0\}$ sont des ensembles convexes (intersection de 2 ensembles convexes). Par ailleurs, ces ensembles sont fermés, bornés, et admettent un maximum et un minimum [Wil71, FCG79]. Dans la suite, nous noterons :

$$P_{min} \leq P \leq P_{max}, \forall P \in \mathcal{P}$$

et

$$Q_{min} \leq Q \leq Q_{max}, \forall Q \in \mathcal{Q}$$

3. Nous pouvons de plus noter que $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow P^{-1} \in \mathcal{Q}$ en remarquant que $M(P) \leq 0 \Leftrightarrow N(P^{-1}) \leq 0$ (voir fin de la démonstration du théorème F.1.1). Ceci mène donc à :

$$\begin{aligned} P_{min}^{-1} &= Q_{max} \\ Q_{min}^{-1} &= P_{max} \end{aligned}$$

4. En considérant le bloc (1,1) de (F.5), nous remarquons que si $P \in \mathcal{P}$, alors P est aussi le grammien d'observabilité de $V(p)$ pour C_V et D_V vérifiant (F.5). De même, un élément $Q \in \mathcal{Q}$ est le grammien de commandabilité de $G(p)$ pour B, C et Q vérifiant (F.3).

F.2 Propriétés associées aux solutions extrémales

Dans l'étude concernant la réduction de l'erreur relative, nous serons amené à considérer les solutions P_{min} et Q_{max} définies dans la remarque F.1.1.

LEMME F.2.1

(i) P_{min} est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} P_{min} &= \underset{P}{\text{argmin}} \text{ trace}(P) \\ &\begin{aligned} &P = P^T > 0 \\ &\begin{bmatrix} A_Z^T P + P A_Z & P B_Z - C_Z^T \\ B_Z^T P - C_Z & -D_Z - D_Z^T \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

(ii) De manière équivalente P_{min} est la solution stabilisante de l'équation de Riccati :

$$A_Z^T P + P A_Z + (P B_Z - C_Z^T)(D_Z + D_Z^T)^{-1}(B_Z^T P - C_Z) = 0 \quad (\text{F.9})$$

(iii) Le facteur spectral $V(p)$ du spectre $\Phi(p) = Z(p) + Z(p)^*$, associé à la solution P_{min} de l'inégalité (F.4) est stable, carré et minimum de phase.

(iv) De la même manière Q_{min} est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$Q_{min} = \underset{Q}{\operatorname{argmin}} \operatorname{trace}(Q)$$

$$\begin{aligned} & Q = Q^T > 0 \\ & \begin{bmatrix} A_Z Q + Q A_Z^T & B_Z - Q C_Z^T \\ C_Z Q - B_Z^T & -D_Z - D_Z^T \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

(v) De manière équivalente Q_{min} est la solution stabilisante de l'équation de Riccati :

$$A_Z Q + Q A_Z^T + (B_Z - Q C_Z^T)(D_Z + D_Z^T)^{-1}(C_Z Q - B_Z^T) = 0 \quad (\text{F.10})$$

(vi) Le facteur spectral $G(p)$ du spectre $\Phi(p) = Z(p) + Z(p)^*$, associé à la solution Q_{min} de l'inégalité (F.2) est stable carré et minimum de phase.

Démonstration : Soit $P \in \mathcal{P}$. Par définition de P_{min} nous avons $P - P_{min} \geq 0$, donc $\operatorname{trace}(P - P_{min}) \geq 0$ et $\operatorname{trace}(P) \geq \operatorname{trace}(P_{min})$. P_{min} peut dès lors être calculée d'après (i).

(ii) est montré dans [ZDG96].

Pour montrer (iii) utilisons un résultat standard sur les équations de Riccati [ZDG96, Wil71] : les valeurs propres de

$$A_Z - B_Z(D_Z + D_Z^T)^{-1}C_Z + B_Z(D_Z + D_Z^T)^{-1}B_Z^T P_{min}$$

sont à partie réelle négative. En développant la dernière égalité grâce aux relations (iii) et (iv) du théorème F.1.1, nous obtenons que la matrice :

$$A_V - B_V D_V^{-1} C_V$$

à ses valeurs propres à partie réelle négative.

La matrice $M(P_{min})$ est de rang égal à n_y . En effet, $M(P_{min})$ est semblable à (voir démonstration du lemme B.5.1, page 230) :

$$\begin{bmatrix} A_Z^T P_{min} + P_{min} A_Z + (P_{min} B_Z - C_Z^T)(D_Z + D_Z^T)^{-1}(B_Z^T P_{min} - C_Z) & 0 \\ 0 & D_Z + D_Z^T \end{bmatrix}$$

Le bloc (1, 1) étant nul et D_z de rang plein égal à q , il s'ensuit d'après la remarque F.1.1, que $m = q$. $V(p)$ est donc carré.

Une démonstration similaire à la précédente aboutit aux propositions (iv) et (v).
□

F.3 Techniques de calcul

Dans ce qui précède, les propriétés algébriques des facteurs spectraux associés à un spectre ont été présentées. Examinons plus précisément comment les calculer dans le cas carré.

F.3.1 Calcul d'un facteur spectral à droite minimum de phase

Étant donné $G(p)$ un facteur spectral à gauche, établissons la démarche pour obtenir un facteur spectral à droite $V(p)$ stable et minimum de phase. Pour obtenir simplement $V(p)$, nous pouvons former à partir de $G(p)$ le transfert $Z(p)$. Le théorème F.1.1 fournit tous les $V(p)$ possibles. Celui correspondant à P_{min} (lemme F.2.1) minimum de phase. La démarche se réalise finalement comme suit :

1. Trouver $Z(j\omega)$ tel que $G(j\omega)G(j\omega)^* = Z(j\omega) + Z(j\omega)^*$. Pour ce faire, les propositions (i) et (ii) du théorème F.1.1 donnent $A_Z = A$, $C_Z = C$ et $D_Z = \frac{1}{2}DD^T$. Il vient donc :

$$Z(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B_Z \\ \hline C & \frac{1}{2}DD^T \end{array} \right]$$

où B_Z s'exprime, d'après (ii), en fonction de Q le grammien de commandabilité de G :

$$B_Z = QC^T + BD^T \quad (\text{F.11})$$

2. Étant donnée $Z(p)$, trouver $V(j\omega)$ minimum de phase tel que $V(j\omega)^*V(j\omega) = Z(j\omega) + Z(j\omega)^*$. D'après la proposition (iii) du théorème F.1.1, nous avons $A_V = A_Z = A$, $B_V = B_Z$ et $D_V = D^T$. Le lemme F.2.1 précise l'obtention de $V(p)$ stable et minimum de phase en utilisant P_{min} vérifiant (F.9).

$$V(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B_Z \\ \hline C_V & D^T \end{array} \right]$$

avec $C_V = D^{-1}(C - B_Z^T P_{min})$ (d'après la proposition (iv) du théorème F.1.1), P_{min} vérifiant l'équation de Riccati :

$$P_{min}A + A^T P_{min} + \underbrace{(C - B_Z^T P_{min})^T (DD^T)^{-1} (C - B_Z^T P_{min})}_{C_V^T C_V} = 0 \quad (\text{F.12})$$

P_{min} donnée par (F.12) représente le grammien d'observabilité du facteur spectral à droite $V(p)$ minimum de phase.

REMARQUE F.3.1

Dans la démarche précédente, nous pouvons noter un lien étroit avec la décomposition modale partielle. La recherche de $Z(p)$ à partir de $G(p)$ peut se faire de manière équivalente à l'aide de la relation (4.3), page 97, en prenant $W_i = G^*$ et $W_o = I$.

De même, le calcul de $V(p)$ est identique en considérant les relations (4.8) et (4.9) page 98. Dans ce cas, il s'agit de considérer $W_o = V^*$ et $W_i = I$.

F.3.2 Calcul d'un facteur spectral à gauche minimum de phase

Dans certains cas, il est utile, étant donnée une matrice carrée de fonctions de transfert stable et non-minimum de phase $G(p)$, de trouver $W(p)$ stable et minimum de phase vérifiant $G(p)G(p)^* = W(p)W(p)^*$. Par appréhender simplement cette situation, reprenons l'étape 1 de la section précédente, à savoir la décomposition en $Z + Z^*$ à partir de G . En effet, à partir de

$$Z(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B_Z \\ \hline C & \frac{1}{2}DD^T \end{array} \right]$$

avec $B_Z = QC^T + BD^T$ et Q le grammien de commandabilité de G , nous pouvons revenir à la paramétrisation de l'ensemble des $G(p)$ tels que $Z + Z^* = GG^*$ et choisir l'élément W minimum de phase caractérisé par Q_{min} vérifiant la relation (F.10). Dès lors, d'après la condition (ii) du théorème F.1.1, nous avons : $B_Z - Q_{min}C^T = B_W D^T$. Il vient donc :

$$B_W = B + (Q - Q_{min})C^T D^{-T}$$

et finalement

$$W(p) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B_W \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Seule la matrice B de la représentation d'état de G devient B_W de façon à rendre les zéros stables.

F.3.3 Représentation d'état compacte associée à 2 facteurs spectraux

Au vu des représentations d'état associées à $G(p)$, $Z(p)$ et $V(p)$, nous pouvons considérer le transfert concaténé suivant formé de G , Z , V et d'un transfert F_c :

$$\left[\begin{array}{cc} Z(p) & G(p) \\ V(p) & F_c(p) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2}DD^T & D \\ D^T & F_c(\infty) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} C \\ C_V \end{array} \right] (pI - A)^{-1} \left[\begin{array}{cc} B_V & B \end{array} \right] \quad (\text{F.13})$$

Rappelons que si $G(p)$ est le seul transfert connu, alors $B_V = QC^T + BD^T$, avec Q grammien de commandabilité de G et $C_V = D^{-1}(C - B_V^T P)$ (P vérifiant (F.4)).

Si $V(p)$ est minimum de phase alors la matrice de transfert $F_c(p)$ possède la propriété d'être la partie causale du transfert all-pass $V(j\omega)^{-*}G(j\omega)$. En effet, calculons $V(p)^*F_c(p)$:

$$\begin{aligned} V(p)^*(F_c(p) - F_c(\infty)) &= (D + B_V^T(-pI - A^T)^{-1}C_V^T)C_V(pI - A)^{-1}B = \dots \\ \dots \text{ (d'après F.12)} &= DC_V(pI - A)^{-1}B + B_V^T(-pI - A^T)^{-1}((-pI - A^T)P_{min} + \dots \\ \dots + P_{min}(pI - A))(pI - A)^{-1}B &= \dots \\ \dots &= (DC_V + B_V^T P_{min})(pI - A)^{-1}B + B_V^T(-pI - A^T)^{-1}P_{min}B = \dots \\ \dots &= G(p) + (-D + B_V^T(-pI - A^T)^{-1}P_{min}B) \end{aligned}$$

En multipliant à gauche par $V(p)^{-*}$ (anticausal) et en prenant la partie causale des 2 membres, il vient :

$$F_c(p) - F_c(\infty) = [V(j\omega)^{-*}G(j\omega)]_+ \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_V & 0 \end{array} \right] \quad (\text{F.14})$$

Le transfert $F_c(p)$, ôté de son terme direct, possède donc propriété d'être la partie causale du transfert all-pass $V(j\omega)^{-*}G(j\omega)$.

Compléments sur les exemples

G.1 Exemple de Safonov

G.1.1 Erreur absolue

G.1.1.1 Troncature équilibrée

Les modèles réduits à l'ordre 5 et 6 sont analysés dans la suite.

• $r = 6$

$$G_6(p) = \frac{39.98(p + 0.4071)(p^2 + 0.1228p + 0.2181)(p^2 + 0.0212p + 0.229)}{(p^2 + 9.997p + 25)(p^2 + 0.48p + 0.06821)(p^2 + 1.395p + 0.5152)}$$

Les erreurs en gain et modules sont présentées sur la figure suivante.

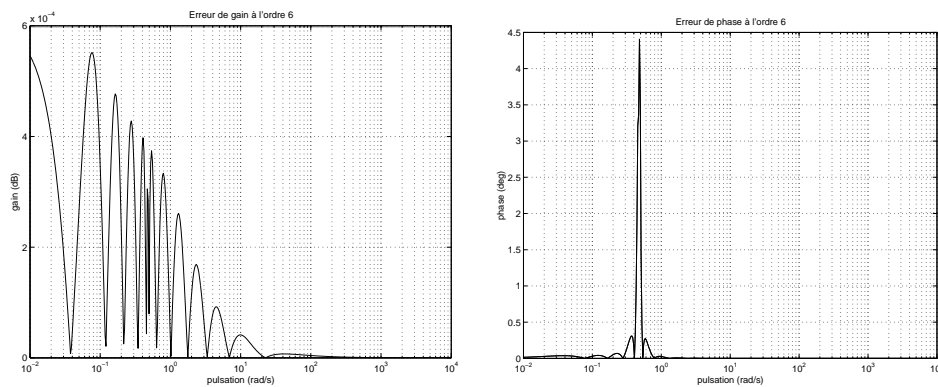


FIG. G.1 – Erreur sur le gain $||G(j\omega)| - |G_6(j\omega)||$ et sur la phase $\arg(G(j\omega)) - \arg(G_6(j\omega))$

• $r = 5$

$$G_5(p) = \frac{39.98(p^2 + 0.05191p + 0.2222)(p^2 + 0.07994p + 0.2271)}{(p + 5.155)(p + 4.835)(p + 0.8093)(p^2 + 0.6541p + 0.1077)}$$

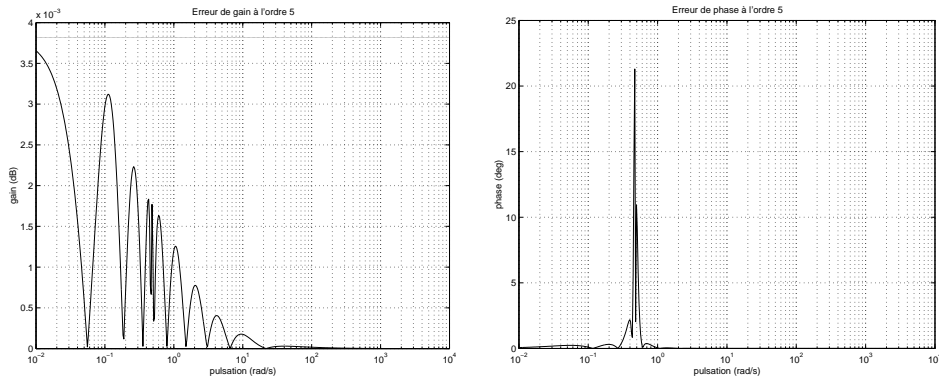


FIG. G.2 – Erreur sur le gain $||G(j\omega)| - |G_5(j\omega)||$ et sur la phase $\arg(G(j\omega)) - \arg(G_5(j\omega))$

G.1.1.2 Approximation optimale au sens de la norme de Hankel

• $r = 6$

$$G_6(p) = \frac{40(p + 0.2775)(p^2 + 0.1184p + 0.2197)(p^2 + 0.02382p + 0.2283)}{(p + 5.193)(p + 4.803)(p + 0.6966)(p + 0.6109)(p^2 + 0.4418p + 0.05668)}$$

Les erreurs en gain et modules sont présentées sur la figure suivante.

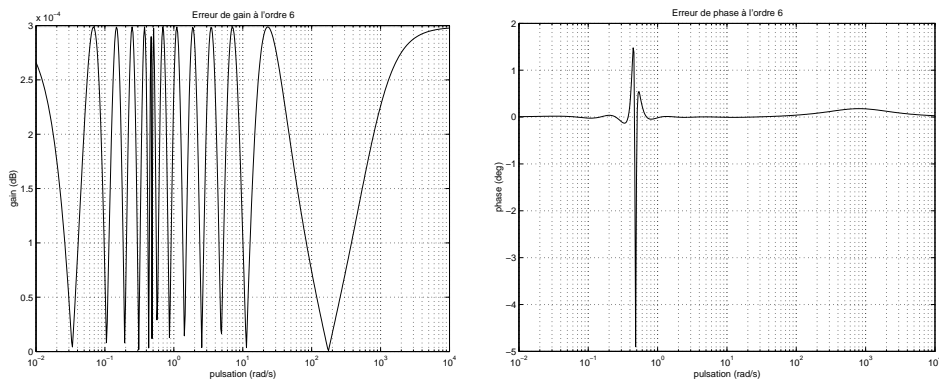


FIG. G.3 – Erreur sur le gain $||G(j\omega)| - |G_6(j\omega)||$ et sur la phase $\arg(G(j\omega)) - \arg(G_6(j\omega))$

Dans ce cas, l'erreur $G(j\omega) - G_6(j\omega)$ est σ_6^2 all-pass : $|G(j\omega) - G_6(j\omega)| = \sigma_6$. L'approximation est optimale.

• $r = 5$

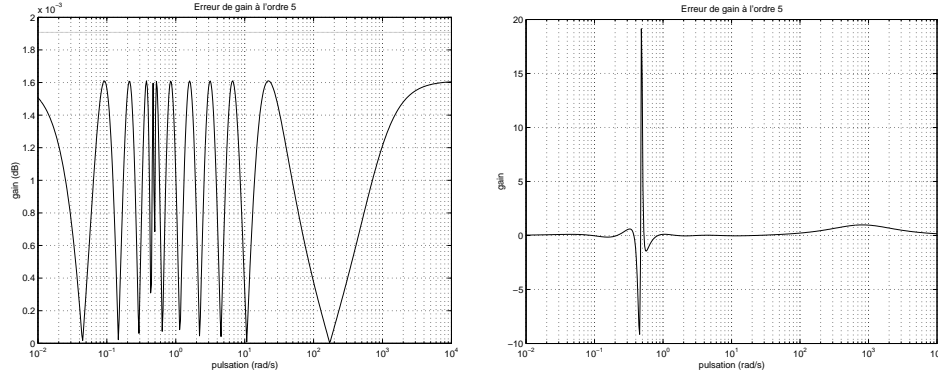


FIG. G.4 – Erreur sur le gain $| |G(j\omega)| - |G_5(j\omega)| |$ et sur la phase $\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_5(j\omega))$

G.1.2 Erreur relative

G.1.2.1 BST

La réduction à l'ordre 6 donne lieu à un modèle réduit extrêmement proche du modèle initial. Comme pour la troncature équilibrée, cette méthode supprime le seul pôle réel qui a la propriété d'être proche d'un zéro.

A l'ordre 5, les tracés fréquentiels de $G(p)$ et $G_5(p)$ sont toujours indiscernables.

Compte tenu de la borne a priori sur $\|\Delta_{rel}\|_\infty$ donnée par la relation (5.18), nous choisissons de tracer les erreurs en module et en phase qui ont la propriété de posséder des bornes supérieures en fonction de la borne sur $\|\Delta_{rel}\|_\infty$: relations (2.31), page 41 et (2.32), page 42.

- $r = 6$

$$G_6(p) = \frac{39.98(p + 0.3534)(p^2 + 0.1154p + 0.2172)(p^2 + 0.02491p + 0.2297)}{(p + 5.151)(p + 4.839)(p^2 + 1.339s + 0.4489)(p^2 + 0.4852p + 0.06806)}$$

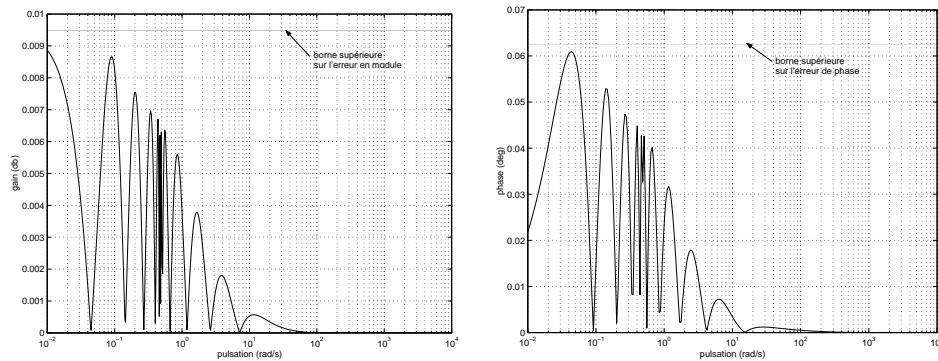


FIG. G.5 – Erreurs et bornes supérieures sur le module et la phase de $G(j\omega)$ et $G_6(j\omega)$

- $r = 5$

$$G_5(p) = \frac{39.98(p^2 + 0.1133p + 0.2171)(p^2 + 0.02519p + 0.2298)}{(p + 5.334)(p + 4.643)(p + 0.8569)(p^2 + 0.6287p + 0.1009)}$$

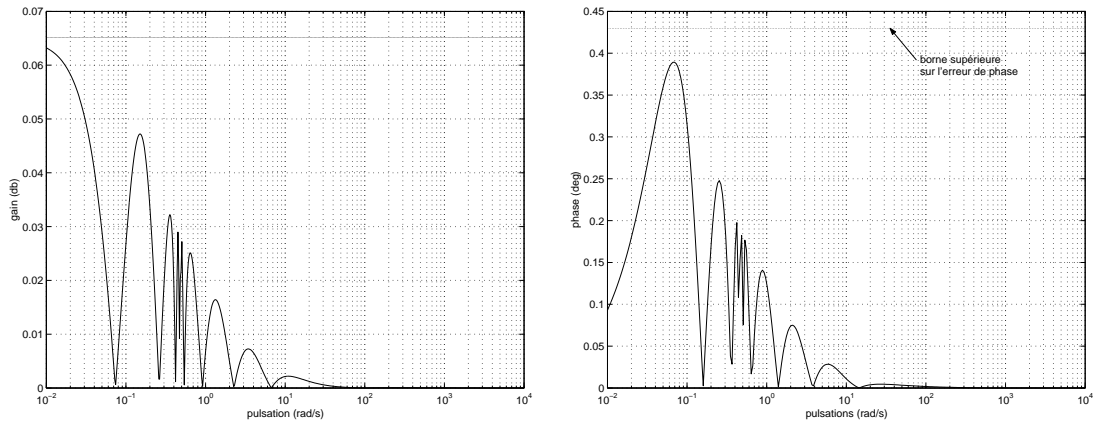


FIG. G.6 – Erreurs de module $| |G(j\omega)|_{dB} - |G_5(j\omega)|_{dB} |$ et de phase $|\arg(G(j\omega)) - \arg(G_5(j\omega))|$ et bornes supérieures associées

A l'ordre 5, le modèle réduit ne possède plus que les zéros mal amortis constituant l'anti-résonance. Les 2 pôles complexes conjugués du système au voisinage de 1rad/s sont remplacés par un pôle réel à une pulsation légèrement inférieure. La figure suivante illustre ceci.

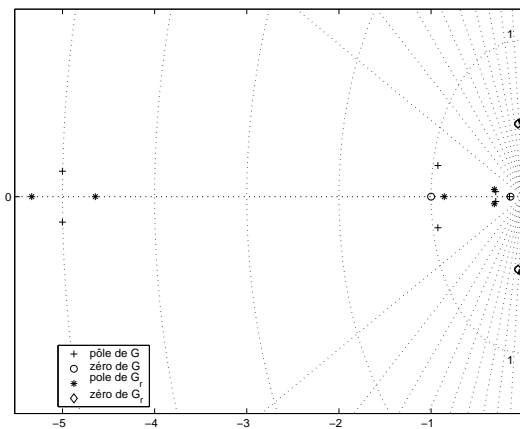


FIG. G.7 – Pôles et zéros de $G(j\omega)$ et $G_5(j\omega)$

G.1.2.2 Hankel relatif pas à pas

- $r = 6$

$$G_6(p) = \frac{40(p + 0.2501)(p^2 + 0.1151p + 0.2172)(p^2 + 0.02496p + 0.2297)}{p + 5.396)(p + 4.598)(p + 0.8068)(p + 0.4771)(p^2 + 0.4479p + 0.05651)}$$

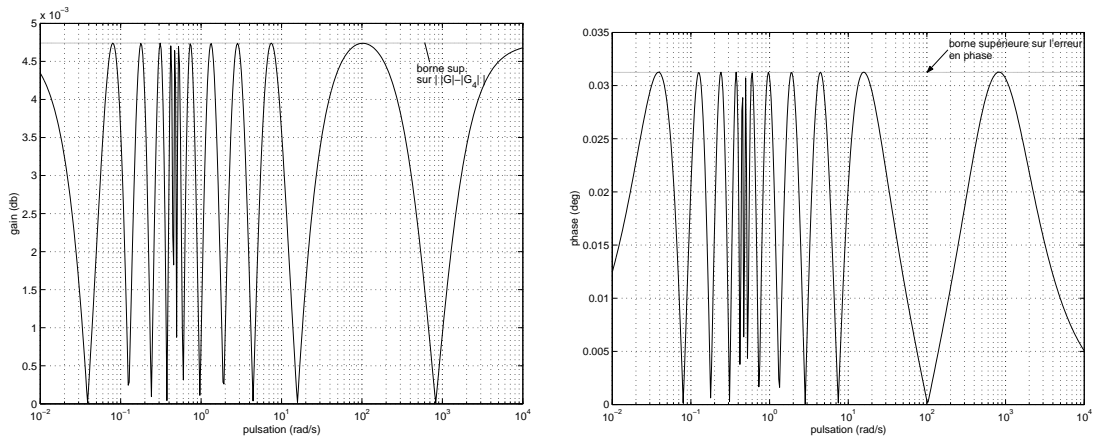


FIG. G.8 – Erreurs de module $| |G(j\omega)|_{dB} - |G_6(j\omega)|_{dB} |$ et de phase $|\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_6(j\omega))|$ et bornes supérieures associées

- $r = 5$

$$G_5(p) = \frac{40.14(p^2 + 0.1143p + 0.2164)(p^2 + 0.02492p + 0.2299)}{(p + 5.938)(p + 4.088)(p + 0.9307)(p^2 + 0.5956p + 0.09521)}$$

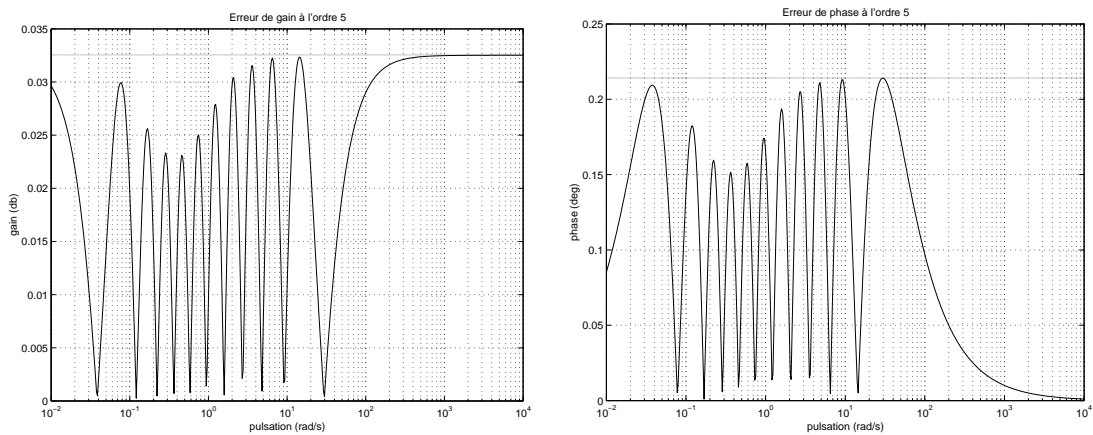


FIG. G.9 – Erreurs de module $| |G(j\omega)|_{dB} - |G_5(j\omega)|_{dB} |$ et de phase $|\mathbf{arg}(G(j\omega)) - \mathbf{arg}(G_5(j\omega))|$ et bornes supérieures associées

Modèle de bief discrétisé

Les équations de Saint-Venant sont discrétisées avec un pas spatial Δx , et un pas temporel Δt . Entre les sections $s\Delta x$ et $(s+1)\Delta x$, en reprenant les notations vues dans la section 7.3, on a (figure H.1) :

Entre les sections $(s-1)$ et s , les variations de cote δY et de débit δQ sont reliées par :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q_{s-1}^+ \\ \delta Y_{s-1}^+ \\ \delta Q_s^+ \\ \delta Y_s^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q_{s-1} \\ \delta Y_{s-1} \\ \delta Q_s \\ \delta Y_s \end{pmatrix} \quad (\text{H.1})$$

Cette écriture matricielle traduit les équations de continuité et de dynamique de l'écoulement. L'obtention de cette forme est montrée dans [Mal94]. Les deux conditions à la limite rajoutent deux relations, et donnent donc une forme carrée aux matrices A_{ij} et B_{ij} . Par rapport aux modèles proposés dans [Mal94], nous introduisons comme conditions aux limites les débits à l'amont et à l'aval du bief.

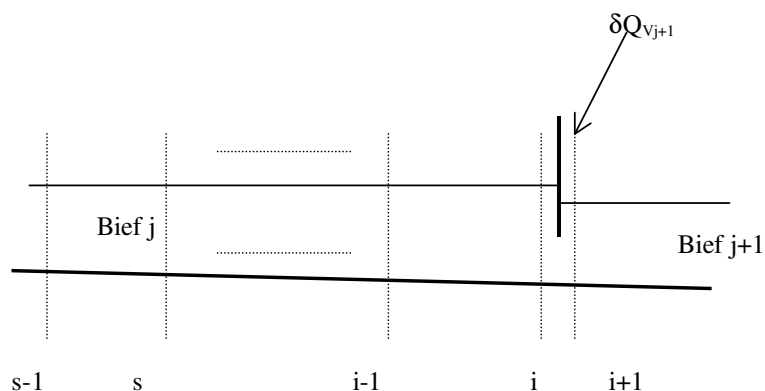


FIG. H.1 – Sections de calcul sur un canal

Considérons le bief j décomposé en i sections de calculs (i dépend de Δx et de L). La première section, correspondant à l'ouvrage amont est une section "de commande". A

Le vecteur d'état comporte alors les variations de débit et de cote en chaque section de calcul, sauf aux extrémités où les débits passent dans la commande (conditions à la limite des équations de Saint-Venant).

Nous choisissons comme sorties la cote à asservir (la cote aval) et la cote mesurée (la cote amont du bief).

$$Y = HX$$

$$\text{avec } H = \begin{pmatrix} 1 & \dots(0)\dots & 0 \\ 0 & \dots(0)\dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } X = \begin{pmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Q_2 \\ \delta Y_2 \\ \dots \\ \dots \\ \delta Q_{i-1} \\ \delta Y_{i-1} \\ \delta Y_i \end{pmatrix}$$

La dernière vanne (aval du dernier bief) est supposée fixe. Cela induit une relation aval $\delta Q = \alpha \delta Y$ ou courbe de tarage.

- [AA02] A.C. Antoulas and A.Astolfi. H_∞ -norm approximation. In *MTNS, workshop on open problem in system theory*, pages 73–76, available on <http://www.inma.ucl.ac.be/blondel/op/>, Août 2002.
- [ABM⁺98] K. Akouz, A. Benhammou, P.O. Malaterre, B. Dahhou, and G.Roux. Predictive Control Applied to ASCE Canal 2. *IEEE Int. Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC98), San Diego, California*, (1) :3920–3924, 1998.
- [ABM⁺99] K. Akouz, A. Benhammou, P.O. Malaterre, J.P.Baume, S. Sawadogo, and B. Dahhou. Predictive control of a portion of ASCE canal 2. *European Control Conference (ECC99), Karlsruhe, Germany*, (1) :3856–3860, 1999.
- [AL89] B.D.O. Anderson and Y. Liu. Controller reduction : concepts and approaches. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-34(7) :247–255, 1989.
- [And73] B.D.O. Anderson. Algebraic properties of minimal degree spectral factors. *Automatica*, 9 :491–500, 1973.
- [Ans86] B.D.O. Anseron. Weighted Hankel norm approximation : Calculation of bounds. *Systems and Control Letters*, 7(4) :247–255, 1986.
- [Ant96] A.C. Antoulas. Lectures on Optimal Approximation of Linear Systems. Technical report, Departement of Electrical and Computer Engineering, Rice University Houston, 1996.
- [Aok68] M. Aoki. Control of large-scale dynamic systems by aggregation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-13(3) :246–253, 1968.
- [ASF88] U.M. Al-Saggaf and G.F. Franklin. Model reduction via balanced realizations : An extension and frequency weighting techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7) :687–691, 1988.
- [BDM85] P. Bertrand, G. Duc, and G. Michailesco. Développements récents sur la réduction de modèles. *RAIRO APII, Journée d'étude*, 19(2) :131–146, 1985.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Studies in Appl. Math. SIAM, 1994.
- [Bla34] H. S. Black. Stabilized feedback amplifiers. *Bell System Technical Journal*, 13 :1–18, 1934.

- [BM82] D. Bonvin and D.A. Mellichamp. A unified derivation and critical review of modal approaches to model reduction. *International Journal of Control*, 35(5) :829–848, 1982.
- [BMS98] H. Baki, N. Munro, and M.T. Söylemez. Model-order reduction using quasi-generalized singular perturbation method for the F16-aircraft model. *Proceedings of the 1998 IEEE international conference on control applications*, pages 113–117, 1998.
- [Bod45] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, New York, 1945.
- [Bre78] J.W. Brewer. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-25(9) :772–780, 1978.
- [Bro70] R.W. Brockett. *Finite Dimensional Linear Systems*. New York : Wiley, 1970.
- [BS97] J.P. Baume and J. Sau. Study of irrigation canal dynamics for control purposes. In *Int. Workshop RIC'97*, pages 3–12, Marrakech, Morocco, 1997.
- [BSM98] J.P. Baume, J. Sau, and P.-O. Malaterre. Modeling of irrigation channel dynamics for controller design. In *Conf. on Systems, Man and Cybernetics, SMC'98*, pages 3856–3861, San Diego, 1998.
- [BT97] V.D. Blondel and J.N. Tsitsiklis. NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(6) :2118–2127, 1997.
- [BT00] V.D. Blondel and J.N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9) :1249–1274, 2000.
- [BYDM94] R. D. Braatz, P. M. Young, J. C. Doyle, and M. Morari. Computational complexity of μ calculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-39(5) :1000–1002, May 1994.
- [CCA94] B. Clapperton, F. Crusca, and M. Aldeen. Bilinear transformation and generalised singular perturbation model reduction. *Proceedings of the 33rd conference on decision and control*, pages 3737–3742, 1994.
- [CD02] Y. Chahlaoui and P. Van Dooren. A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems. Technical report, SLICOT Working Note 2002-2, 2002.
- [CdNBdH01] J.M. Coron, B. d'Andréa Novel, G. Bastin, and J. de Halleux. Contrôle frontière de l'EDP de saint-venant par approche lyapunov. application à la commande de canaux d'irrigation. In *Journées nationales d'Automatique CNRS*, Autrans, 2001.
- [CGZ95] J. Chen, Guoxiang Gu, and K. Zhou. Balanced truncation with relative/multiplicative error bounds in L_∞ norm. In *Proceedings of 34th Conference on Decision and Control*, pages 3086–3091, New Orleans, LA, 1995.
- [Chi93] T.Y. Chiu. Model reduction for unstable linear systems. *Control-Theory and advanced technology*, 9(2) :467–480, 1993.
- [CHV80] J.A. Cunge, F.M. Holly, and A. Verwey. *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
- [CZ95] X. Chen and K. Zhou. On the relative and multiplicative model reductions. *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*, pages 57–60, 1995.

- [CZ96] X. Chen and K. Zhou. H_∞ and H_2 controller reductions with guaranteed performance. *Proceedings of 35th Conference on Decision and Control Kobe, Japan*, pages 897–902, 1996.
- [Dav66] E.J. Davison. A method for simplifying linear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11 :93–101, 1966.
- [DGKF89] J.C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8) :831–847, august 1989.
- [DP84] U.B. Dessai and D. Pal. A transformation approach to stochastic model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(12) :1097–1100, 1984.
- [DS81] J.C. Doyle and G. Stein. Multivariable feedback design : concepts for a classical / modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26 :4–16, 1981.
- [DSL99] M. Diab, V. Sreeram, and W.Q. Liu. Frequency-weighted model reduction via quasi-Kalman decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1) :139–142, 1999.
- [DV75] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems : Input-Output Properties*. Academic Press, New York, 1975.
- [dVS88] C. de Villemagne and R.E. Skelton. Controller reduction using canonical interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8) :740–750, 1988.
- [DWS82] J. Doyle, J. E. Wall, and G. Stein. Performance and robustness analysis for structured uncertainties. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 629–636, 1982.
- [Enn84] D.F. Enns. Model reduction with balanced realizations : An error bound and a frequency weighted generalization. In *Proceedings of 23rd Conference on Decision and Control*, pages 127–132, Las Vegas, NV, 1984.
- [FCG79] P. Faurre, M. Clerget, and F. Germain. *Opérateurs Rationnels Positifs*. Dunod, 1979.
- [FGV90] D.M. Farlane, K. Glover, and M. Vidyasagar. Reduced-order controller design using coprime factor model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3) :369–373, 1990.
- [FL85] J.D. Freudenberg and D.P. Looze. *Frequency domain properties of scalar and multivariable feedback systems*. Lecture and Notes in Control and Information, Springer Verlag, 1985.
- [FL97] M. Fu and Z. Luo. Computational complexity of a problem arising in fixed order output feedback design. *Systems and Control Letters*, 30 :209–215, 1997.
- [FMS00] J. Freudenberg, R. Middleton, and A. Stefanopoulou. A survey of inherent design limitations. *Proceedings of American Control Conference Chicago, Illinois*, pages 2987–3001, 2000.
- [FN82] K.V. Fernando and H. Nicholson. Singular perturbational model reduction in the frequency domain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-27(4) :969–970, 1982.
- [Fon95] S. Font. *Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis : optimisation H_∞ et approche symbolique de la forme standard*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, France, 1995.

- [FS02] V. Fromion and G. Scorletti. A theoretical framework for gain scheduling. *Accepted to International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2002.
- [GA86] M. Green and B.D.O. Anderson. The approximation of power spectra by phase matching. In *Proceedings of 25th Conference on Decision and Control*, pages 1085–1090, Athens, Greece, 1986.
- [GA89] M. Green and B.D.O. Anderson. Model reduction by phase matching. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2 :221–263, 1989.
- [GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4 :421–448, 1994.
- [GG98] P.J. Goddard and K. Glover. Controller approximation : approaches for preserving H_∞ performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(7) :858–871, 1998.
- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and company, New York, 1979.
- [GL95] M. Green and D.J.N. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1995.
- [GL02] D. Georges and X. Litrico. *Automatique pour la gestion des ressources en eau*, chapter Commande de dimension finie, pages 111–159. Hermès, collection IC2, 2002.
- [Glo84] K. Glover. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds. *International Journal of Control*, 39(6) :1115–1193, 1984.
- [Glo86] K. Glover. Multiplicative approximation of linear multivariable systems with L_∞ error bounds. *Proceedings of the IEEE ACC*, pages 1705–1709, 1986.
- [Glo89] K. Glover. *Data to Model, J.C Willems*, chapter A tutorial on Hankel-norm approximation. Springer-Verlag, 1989.
- [GLS96] K.M. Grigoriadis, J. Liu, and R.E. Skelton. L_2 and $L_2 - L_\infty$ Model Reduction via Linear Matrix Inequalities. In *Proceedings of 35th Conference on Decision and Control*, pages 4282–4287, Kobe, Japan, 1996.
- [GMAO01a] T. Van Gestel, B. De Moor, B.D.O. Anderson, and P. Van Overschee. Discussion on : " on frequency weighted balanced truncation : Hankel singular values and error bounds". *European Journal of Control*, 7(6) :593–595, 2001.
- [GMAO01b] T. Van Gestel, B. De Moor, B.D.O. Anderson, and P. Van Overschee. On frequency weighted balanced truncation : Hankel singular values and error bounds. *European Journal of Control*, 7(6) :584–592, 2001.
- [GN93] P. Gahinet and A. Nemirovskii. *LMI Lab : A Package for Manipulating and Solving LMIs*. INRIA, 1993.
- [GOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8) :1–6, 1997.
- [Gre88a] M. Green. Balanced stochastic realizations. *Journal of Linear Algebra and its Applications*, 98 :211–247, 1988.
- [Gre88b] M. Green. A relative error bound for balanced stochastic truncation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(10) :961–965, 1988.

- [Gri95] K.M. Grigoriadis. Optimal H_∞ model reduction via linear matrix inequalities : continuous and discrete-time cases. *Systems and Control Letters*, 26 :321–333, 1995.
- [Gu95] Guoxiang Gu. Model reduction with relative/multiplicative error bounds and relations to controller reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(8) :1478–1485, 1995.
- [Hal92] Y. Halevi. Frequency weighted model reduction via optimal projection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(10) :1537–1542, 1992.
- [Hel94] A. Helmersson. Model reduction using LMIs. In *33th Conf. on Decision and Control*, volume 4, pages 3217–3222, Lake Buena vista, Florida, septembre 1994.
- [HJ85a] P. Harshavardhana and E.A. Jonckheere. Spectral factor reduction by phase matching : the continuous-time single-input single-output case. *International Journal of Control*, 42(1) :43–63, 1985.
- [HJ85b] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. ISBN 0-521-30586-1. Cambridge University press, 1985.
- [HJS84] P. Harshavardhana, E.A. Jonckheere, and L.M. Silverman. Stochastic balancing and approximation-stability and minimality. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(8) :744–746, 1984.
- [IS95] T. Iwasaki and R.E. Skelton. The XY-centering algorithm for the dual LMI problem : a new approach to fixed-order control design. *International Journal of Control*, 62(6) :1257–1272, 1995.
- [JH85] E.A. Jonckheere and J.W. Helton. Power Spectrum Reduction by Optimal Hankel Norm Approximation of the Phase of the Outer Spectral Factor. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(12) :1192–1201, 1985.
- [JL87] E. Jonckheere and R. Li. L_∞ error bound for the phase matching approximation (the one-step-at-a-time Hankel norm model reduction version). *International Journal of Control*, 46(4) :1343–1354, 1987.
- [Kab85] P.T. Kabamba. Balanced forms : Canonicity and parameterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(11) :1106–1109, 1985.
- [KAM95a] S.W. Kim, B.D.O. Anderson, and A.G. Madievski. Error bound for transfer function order reduction using frequency weighted balanced truncation. *Systems and Control Letters*, 24(3) :183–192, 1995.
- [KAM95b] S.W. Kim, B.D.O. Anderson, and A.G. Madievski. Multiplicative approximation of transfer functions with frequency weighting. *Systems and Control Letters*, 25(3) :199–204, 1995.
- [KB93] D. Kavranoglu and M. Bettayeb. Characterization of the solution to the optimal H_∞ model reduction problem. *Systems and Control Letters*, 20 :99–107, 1993.
- [KLH92] K.Glover, D.J.N. Limebeer, and Y.S. Hung. A structured approximation problem with applications to frequency weighted model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(4) :447–465, 1992.
- [KOS76] P.V. Kokotovic, R.E. O'Malley, and P. Sannuti. Singular perturbations and order reduction in control theory-An overview. *Automatica*, 12 :123–132, 1976.
- [LA85] G.A. Latham and B.D.O. Anerson. Frequency-weighted optimal Hankel norm approximation of stable transfert functions. *Systems and Control Letters*, 5(4) :229–235, 1985.

- [LA89] Y. Liu and B.D.O. Anderson. Singular perturbation approximation of balanced systems. *Proceedings of the 28th conference on decision and control, Tampa*, pages 1355–1360, 1989.
- [LB88] D.K. Lindner and J. Babendreier. A Trajectory Analysis of Near Aggregation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(5) :474–477, 1988.
- [LC92] C.A. Lin and T.Y. Chiu. Model Reduction via Frequency Weighted Balanced Realization. *Control-Theory and Advanced Technology*, 8 :341–451, 1992.
- [LF01a] X. Litrico and V. Fromion. About optimal performance and approximation of open-channel hydraulic systems. In *40th Conf. on Decision and Control*, pages 4511–4516, Orlando, 2001.
- [LF01b] X. Litrico and V. Fromion. Infinite dimensional modelling of open-channel hydraulic systems for control purposes. In *41th Conf. on Decision and Control, Las Vegas*, 2001.
- [LP96] A. Lindquist and G. Picci. Canonical correlation analysis, approximate covariance extension, and identification of stationary time series. *Automatica*, 32 :709–733, 1996.
- [Mal94] P.O. Malaterre. *Modélisation analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation*. PhD thesis, CEMAGREF/LAAS(CNRS)/ENGREF, 1994.
- [Mal95] P.-O. Malaterre. La régulation des canaux d'irrigation : caractérisation et classification. *La Houille Blanche*, 5/6 :17–35, 1995.
- [Mal98] P.O. Malaterre. PILOTE : Linear Quadratic Optimal Controller for Irrigation Canals. *ASCE Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124(4) :187–194, 1998.
- [MB97] P.-O. Malaterre and J.-P. Baume. Sic 3.0, a simulation model for canal automation design. In *Int. Workshop on the Regulation of Irrigation Canals RIC'97, Marrakech (Morocco)*, April 22-24 1997.
- [MB99] P.-O. Malaterre and J.-P. Baume. Optimum choice of control action variables and linked algorithms. comparison of different alternatives. *Workshop on Modernization of Irrigation Water Delivery Systems, in Phoenix, Arizona, USA*, October 18-21 1999.
- [Mey90] D.G. Meyer. Fractional balanced reduction : model reduction via fractional representation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(12) :1341–1345, 1990.
- [MG91] D. Mustafa and K. Glover. Controller reduction by h_∞ -balanced truncation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-36(6) :668–682, 1991.
- [MK01] P.O. Malaterre and M. Khammash. l_1 controller design for a high-order 5-pool irrigation canal system. In *European Control Conference*, Porto, 2001.
- [Moo81] B.C. Moore. Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(1) :17–31, 1981.
- [MR76] C.T. Mullis and R.A. Roberts. Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-23(9) :551–562, 1976.
- [NN93] Y. Nesterov and A. Nemirovsky. Interior point polynomial methods in convex programming. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, 13, 1993.
- [OA00] G. Obinata and B.D.O Anderson. *Model reduction for control system design*. ISBN : 1-85233-371-5. Springer-Verlag, 2000.

- [Pac94] A. Packard. Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems and Control Letters*, 22 :79–92, 1994.
- [PG99] P. Pognant-Gros. *Modélisation, analyse et commande H_∞ d'un canal d'irrigation*. Number RE99-03 in Série irmo, Rapports et études. Mémoire de DEA, 1999.
- [PGFB01a] P. Pognant-Gros, V. Fromion, and J.P. Baume. Canal Control Design, a Multivariable Approach Using H_∞ . In *European Control Conference*, Porto, 2001.
- [PGFB01b] P. Pognant-Gros, V. Fromion, and J.P. Baume. Commande multivariable d'un canal d'irrigation. In *Colloque Automatique et environnement*, Saint-Etienne, Avril 2001.
- [PGRGF01] P. Pognant-Gros, L. Rossignol, G.Scorletti, and V. Fromion. Approche directe de la réduction de modèles sur des gammes de fréquences. In *Journées doctorales d'Automatique*, pages 19–24, Toulouse, september 2001.
- [Pop73] V. M. Popov. *Hyperstability of Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1973.
- [Pra94] R. Prakash. Properties of Low-Frequency Approximation Balancing Method of Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5) :1135–1141, 1994.
- [PS82] L. Pernebo and L.M. Silverman. Model reduction via balanced state space representations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-27(2) :382–387, 1982.
- [RCCS98] V.M. Ruiz-Carmona, A.J. Clemmens, and J. Schuurmans. Canal Control Algorithm Formulations. *ASCE Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124(1) :31–39, 1998.
- [RG98] D.C Rogers and J. Goussard. Canal Control Algorithms Currently in Use. *ASCE Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124(1) :11–15, 1998.
- [RH92] A. Rachid and G. Hashim. Model Reduction Via Schur Decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(5) :666–668, 1992.
- [RSF01] L. Rossignol, G. Scorletti, and V. Fromion. Filter design under magnitude constraints is a finite dimensional convex optimization problem. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3575–3580, December 2001.
- [SA78] M.G. Safonov and M. Athans. Robustness and computational aspects of nonlinear stochastic estimators and regulators. *IEEE Trans. Aut. Control*, pages 719–725, 1978.
- [SA95a] V. Sreeram and B.D.O. Anderson. Frequency weighted balanced reduction technique : A generalization and an error bound. *Proceedings of 34th Conference on Decision and Control New Orleans, LA*, pages 3576–3581, 1995.
- [SA95b] V. Sreeram and B.D.O. Anderson. A Schur method for singular perturbation approximation of balanced systems. *Proceedings of 34th Conference on Decision and Control New Orleans, LA*, pages 3094–3095, 1995.
- [SAM95] V. Sreeram, B.D.O. Anderson, and A.G. Madijevski. New results on frequency weighted balanced reduction technique. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 4004–4009, 1995.
- [SC90] E.D. Swain and D.A. Chin. Model of flow in regulated open-channel networks. *ASCE Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 116(4) :537–556, 1990.

- [SC92] M.G. Safonov and R.Y. Chiang. Model reduction for robust control : A Schur relative error method. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2 :259–272, 1992.
- [SCL90] M.G. Safonov, R.Y. Chiang, and D.J.N. Limebeer. Optimal Hankel model reduction for nonminimal systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(4) :496–502, 1990.
- [Sco97a] G. Scorletti. *Approche Unifiée de l'Analyse et de la Commande des Systèmes par Formulation LMI*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, 1997.
- [Sco97b] G. Scorletti. Commande par séquençement de gains. Technical report, INRIA, 1997. Rapport de fin de contrat DRET No93.156.
- [Ske89] R.E. Skelton. Model error concepts in control design. *International Journal of Control*, 49(5) :1725–1753, 1989.
- [SLH81] M.G. Safonov, A.J. Laub, and G.L. Hartmann. Feedback Properties of Multivariable Systems : The Role and Use of the Return Difference Matrix. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-26(1) :47–65, 1981.
- [SM99] G. Schelfhout and B. De Moor. Inverse outer factor weighted balanced truncation. Technical report, ESAT-Katholieke Universiteit Leuven, 1999.
- [SMB77] J.M. Siret, G. Michalesco, and P. Bertrand. Representation of linear dynamical systems by aggregated models. *International Journal of Control*, 26(1) :121–128, 1977.
- [The89] C.P. Therapos. Balancing transformations for unstable nonminimal linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(4) :455–457, 1989.
- [Var99] A. Varga. Model reduction routines for SLICOT. Technical report, NICONET report 1999-8, ftp : wgs.esat.kuleuven.ac.be, 1999.
- [Var01] A. Varga. Numerical approach for the frequency-weighted Hankel-norm approximation. In *Proceedings of the European Control Conference*, pages 640–645, Porto, Portugal, september 2001.
- [VC98] C. Valentin-Charbonnel. *Commande robuste avec contrainte d'ordre, par la norme H_∞ et le formalisme LMI. Application au contrôle d'attitude d'un satellite d'observation de la Terre*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, Ecole supérieure d'électricité Gif-sur-Yvette, 1998.
- [VD97] C. Valentin and G. Duc. LMI-based algorithms for frequency weighted optimal H_2 -norm model reduction. In *36th Conf. on Decision and Control*, pages 767–772, San Diego, december 1997.
- [VP01] A. Varga and P. Parrilo. Fast algorithms for solving H_∞ -norm minimization problems. In *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, pages 261–266, Orlando, Florida USA, december 2001.
- [WC00] S. Wang and J.H. Chow. Low-order controller design for siso systems using coprime factors and LMI. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(6) :1166–1169, 2000.
- [Wil71] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6) :622–634, 1971.
- [Woe94] P. Woertelboer. *Frequency-Weighted Balanced Reduction of Closed-Loop Mechanical Servo-systems : Theory and Tools*. PhD thesis, Delft University of Technology, 1994.
- [WS90] W.Wang and M.G. Safonov. A tighter relative-error bound for balanced stochastic truncation. *Systems and Control Letters*, 14 :307–317, 1990.

- [WS92] W. Wang and M.G. Safonov. Multiplicative-error bound for balanced stochastic truncation model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1265–1267, 1992.
- [Wu97] Fen Wu. Frequency Weighted Optimal H_∞ Model reduction. *Proceedings of American Control Conference*, pages 1478–1485, 1997.
- [WVL98] G. Wang, V.Sreeram, and W.Q. Liu. A new frequency-weighted optimal Hankel norm model reduction and an error bound. *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, pages 2185–2188, 1998.
- [WVL99] G. Wang, V.Sreeram, and W.Q. Liu. A new frequency-weighted balanced truncation method and an error bound. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9) :1734–1737, 1999.
- [YL99] W-Y. Yan and J. Lam. An approximate approach to H_2 optimal model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(7) :1341–1357, 1999.
- [Zam66] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems—Part I, II. *IEEE Trans. Aut. Control*, 11, 1966.
- [Zam81] G. Zames. Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(2) :301–320, April 1981.
- [ZCC95] K. Zhou, C.D’Souza, and J.R. Cloutier. Structurally balanced controller order reduction with guaranteed closed loop performance. *Systems and Control Letters*, 24 :235–242, 1995.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1996.
- [Zho93a] K. Zhou. Error bounds for frequency weighted balanced truncation and relative error model reduction. In *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 3347–3352, San Antonio, Texas, 1993.
- [Zho93b] K. Zhou. Frequency Weighted Model Reduction with L_∞ Error Bounds. *Systems and Control Letters*, 21 :115–125, 1993.
- [Zho93c] K. Zhou. Weighted optimal Hankel norm model reduction. In *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 3353–3354, 1993.
- [Zho95a] K. Zhou. Frequency-weighted L_∞ norm and optimal Hankel norm model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(10) :1687–1699, 1995.
- [Zho95b] K. Zhou. *IMA in maths and applications*, volume 66, chapter Weighted Approximation techniques and their applications in controller reduction, pages 175–207. Springer Verlag, 1995.
- [Zho95c] K. Zhou. Relative/multiplicative model reduction for unstable and non-minimum phase systems. *Automatica*, 31(8) :1087–1098, 1995.
- [ZSW99] K. Zhou, G. Salomon, and E. Wu. Balanced realization and model reduction for unstable systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9 :183–198, 1999.

Résumé de la thèse

Les modèles de synthèse de nombreux systèmes (comme les canaux d'irrigation) sont de dimension inutilement importante car obtenus par discrétisation d'équations aux dérivées partielles.

L'objectif est ici de proposer une méthode de réduction du modèle du système à commander pour la synthèse d'un correcteur H_∞ en prenant en compte le cahier des charges. La formalisation du problème puis la formulation de sa solution par les outils de l'approche LMI nous mènent à conjecturer (NP) difficile la résolution (optimale) de ce problème. Dans ce cadre, les méthodes existantes bien que sous-optimales possèdent un intérêt pratique majeur. Nous montrons que la multiplicité de ces méthodes se ramène à l'utilisation de deux techniques : troncature équilibrée et minimisation de la norme de Hankel. Une approche directe du problème est ensuite proposée en se basant sur les outils de la robustesse.

L'intérêt de notre approche est illustré par la synthèse de commandes multivariables de canaux d'irrigation, objet de la collaboration entre le LAP, l'INRA et le CEMAGREF et cadre de cette thèse. La synthèse est basée sur la minimisation d'un critère H_∞ multivariable traduisant un cahier des charges typique (découplage, etc.). La mise en œuvre des méthodes de réduction de modèles sur le modèle de synthèse et sur le correcteur permet d'obtenir un correcteur d'ordre réduit (9) pour un modèle initial d'ordre 72, assurant les mêmes spécifications que le correcteur d'ordre plein.

Mots-clés : commande robuste multivariable, canaux d'irrigation, réduction de modèles, optimisation LMI.

Abstract of the thesis

From model reduction to robust control. Application to irrigation canals control

Design models of many systems (as irrigation canals) are unnecessarily high dimensional as obtained by discretizing partial differential equations.

In order to design H_∞ controller, our purpose is to propose a model reduction process for the plant which explicitly considers control specifications. By investigating problem formalisation and the formulation of its solution using the LMI approach, we conjecture (NP) hardness of the (optimal) problem resolution. As a consequence, even if existing methods are sub-optimal, their practical interest is strong due to their computational efficiency. In this thesis, these numerous methods are unified using two technical approaches : balanced truncation and Hankel norm minimization. Furthermore, we propose a direct solution of the problem based on the robustness analysis framework.

The interest of our approach is illustrated with the design of multivariable controllers for irrigation canals. This application is the purpose of a collaboration between LAP, INRA and CEMAGREF which includes this thesis. Controller is designed by minimizing a multivariable H_∞ criterion where typical specifications (as decoupling, etc) are explicitly considered. By applying model reduction methods on the design model and on the controller, a low order controller (9) for an initial design model of order 72, ensuring full order controller performance, is obtained.

Keywords : multivariable robust control, irrigation canals, model reduction, LMI optimization.

Discipline : Automatique

LAP-ISMRA : 6 Boulevard du maréchal Juin, 14050 Caen Cedex

LASB-INRA : 2 place P. Viala, 34060 Montpellier

CEMAGREF Montpellier, U.R. Irrigation : 361 rue J.F. Breton, BP 5095, 34033 Montpellier Cedex 1