Modèles et Systèmes

Cours Sciences de l'Ingénieur
Licence 1A

G. Scorletti
Maître de conférences à l'Université de Caen
GREYC AUTOMATIQUE, ISMRA
6 bd du Maréchal Juin, F14050 Caen cedex
Tel : 02 31 45 27 12
e-mail : scorletti@greyc.ensicaen.fr

Page web : http://www.greyc.ensicaen.fr/EquipeAuto/Gerard_S/L1_SI.html

December 9, 2005

1 Introduction

Les systèmes technologiques ont envahi notre quotidien. Ils sont l'œuvre des ingénieurs. Pour l'ingénieur, se posent alors plusieurs problèmes importants : comment réussir à appréhender le comportement de ses systèmes afin de les concevoir, de les réaliser, de les commander et/ou de les faire évoluer ? La description du comportement attendu du système constitue le cahier des charges. Celui-ci est en général défini par différents intervenants, intéressés par les aspects fonctionnels du produit, les besoins des consommateurs, les contraintes de coût, le marketing, etc... Du fait de la complexité de plus en plus forte des systèmes technologiques, il apparaît de plus en plus nécessaire de disposer de méthodes et d'outils de conception, de réalisation et/ou de commande qui soient particulièrement efficaces.

Ces questions sont d'autant plus cruciales que le niveau de complexité des systèmes technologiques a fortement augmenté. Parallèlement, pour répondre à des contraintes de marché, le temps du cycle de conception des systèmes tend à être fortement réduit. Le phénomène est particulièrement impressionnant pour les applications "grand public". On peut citer le cas de l'automobile où le cycle de développement d'un véhicule est passé d'une dizaine d'années à moins de 5 ans alors que de nombreux systèmes électroniques complexes (ABS, ESP, injection électronique, etc..) y ont été massivement introduits, y compris dans les véhicules les plus bas de gamme afin de remplir les nouveaux objectifs pour le comportement désiré d'une véhicule (plus grand confort, sécurité accrue, etc.). Pour répondre à cette évolution, des méthodes et des outils de conception, de réalisation et/ou de commande des systèmes technologiques qui sont particulièrement efficaces ont été développées.

Au centre de ces méthodes et de ces outils, se trouve en général la modélisation. L'objectif de ce séminaire est d'introduire les notions de base de la modélisation ainsi que d'illustrer certaines utilisations et certains enjeux pour l'ingénieur.

2 Notions sur les systèmes

2.1 Définition de système

Definition 2.1 (Rappels) *Un **signal** est une fonction qui à un temps t associe la valeur d'une grandeur à cet instant. Cette grandeur est en général physique. Un **signal analogique** est un signal dont l'ensemble de définition (du temps) est un intervalle de $\mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire en général de la forme $[0,\ T]$ avec $T > 0$.*

La grandeur d'un signal peut être de différente nature :

- Information : par exemple le son (grandeur associée pression) ;
- Energie : par exemple la tension du secteur ;
- Matière : par exemple un débit d'eau en un point d'un canal d'irrigation.

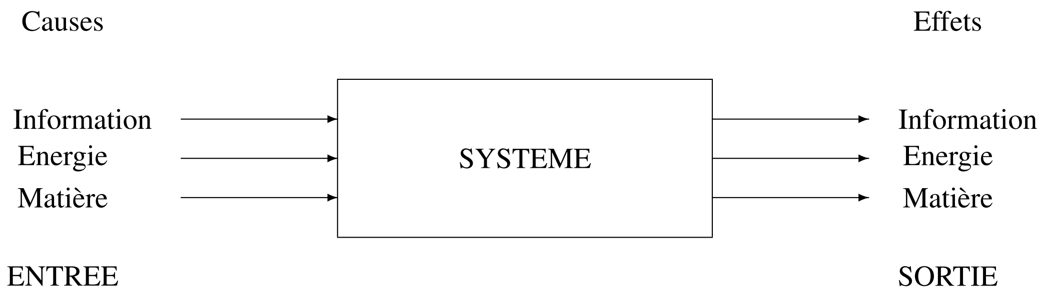

Figure 1: Système

Definition 2.2 *Un **système** est un processus qui transforme un ou plusieurs signaux d'**entrée** en un ou plusieurs signaux de **sortie** (voir Figure 1). Un système est en général une portion de la réalité définie par une* frontière *et organisée en fonction d'un but.*

Dans un certain nombre de cas, les entrées peuvent être interprétées comme des *causes* et les sorties comme des *effets*. Les causes produisent des effets.

Un premier exemple de système est un haut parleur. Un haut parleur transforme une tension électrique (signal d'entrée) en un son (signal de sortie).

Un autre exemple de système peut être donné par le comportement dans un plan d'un satellite en orbite autour de la terre (voir Figure 2). Dans ce plan, la position du satellite est déterminée par un angle $\theta(t)$. Deux propulseurs permettent d'exercer une force $F_c(t)$. Cette force crée un couple provoquant la rotation du satellite dans ce plan autour de l'axe central d'inertie. La position angulaire est donnée par $\theta(t)$. L'angle $\theta(t)$ et la force $F_c(t)$ étant des grandeurs dépendant du temps sont des signaux analogiques.

Le satellite peut être vu comme sur la Figure 3, c'est-à-dire comme un système qui admet

- un signal d'entrée : $F_c(t)$;

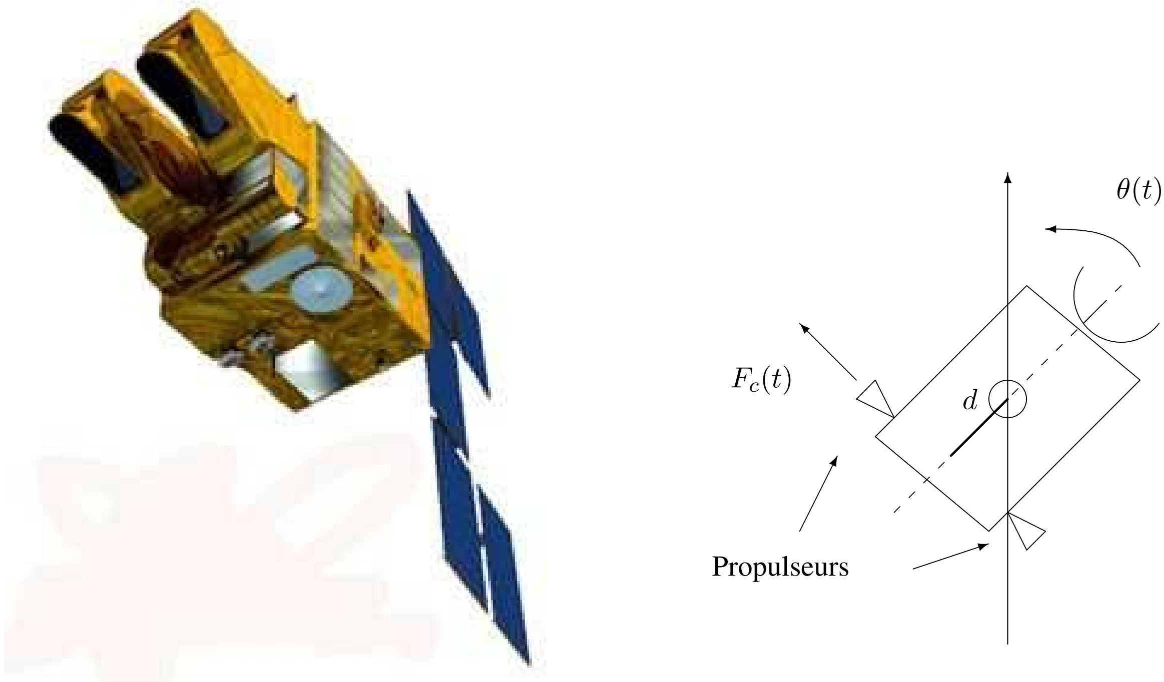

Figure 2: Satellite

- un signal de sortie : $\theta(t)$.

L'évolution dans le temps de l'angle $\theta(t)$ est bien l'effet de l'évolution dans le temps de la force $F_c(t)$ qui en est la cause. Nous reviendrons sur cet exemple.

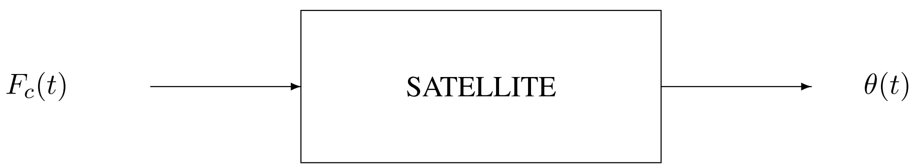

Figure 3: Le système satellite

2.2 Définition de système dynamique

Definition 2.3 *Un **système causal** est un système dont la valeur des signaux de sortie à un instant t ne dépend de la valeur des signaux d'entrée qu'aux instants antérieurs ou égal à t, c'est-à-dire appartenant à l'intervalle* $[0,\ t]$.

Si on reprend l'interprétation des signaux d'entrée comme des "causes" et des signaux de sortie comme des "effets", la causalité indique que *les effets ne peuvent pas précéder les causes*.

Definition 2.4 *Un **système sans mémoire** est un système causal dont la valeur des signaux de sortie à un instant t ne dépend que de la valeur des signaux d'entrée à l'instant t.*

Definition 2.5 *Un **système dynamique** est un système causal qui n'est pas un système sans mémoire.*

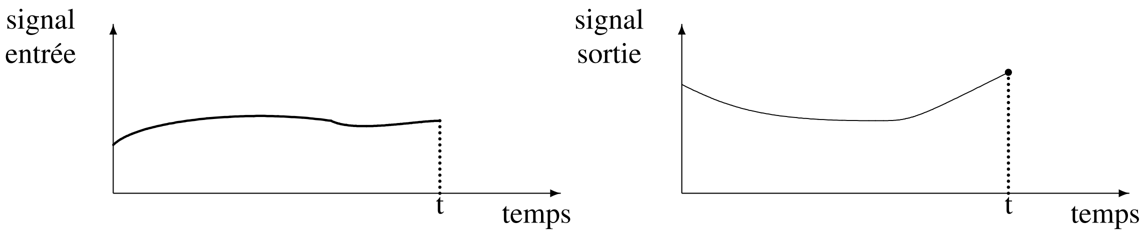

Figure 4: Système causal

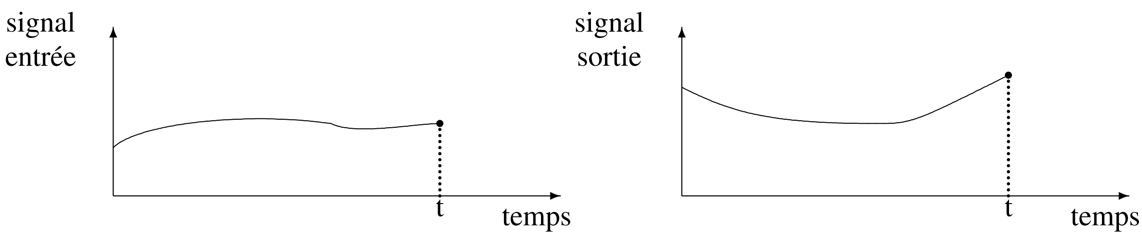

Figure 5: Système sans mémoire

D'après cette définition, dans le cas d'un système dynamique, la valeur des signaux de sortie à un instant t dépend de la valeur des signaux d'entrée aux instants appartenant à l'intervalle $[0,\ t[$, tout en pouvant dépendre de la valeur des signaux d'entrée à l'instant t.

La grande majorité des systèmes auxquels l'ingénieur est confronté sont des systèmes dynamiques. Le système satellite vu précédemment est un système dynamique.

Dans ce qui suit, on considère le cas des systèmes avec un seul signal d'entrée noté $e(t)$ et un seul signal de sortie noté $s(t)$.

2.3 Caractérisation du comportement d'un système dynamique

Le comportement d'un système dynamique peut être caractérisé par l'étude des sorties correspondant à des signaux d'entrée appartenant à des ensembles bien définis de fonctions "élémentaires". En fonction du type de systèmes considéré et des objectifs de son étude, les ensembles considérés peuvent être très différents. Dans cette section, nous allons simplement en donner quelques exemples.

Le signal d'entrée le plus simple est sans aucun doute la fonction $e(t)$ définie par :

$$\forall t \in [0,\ +\infty[\quad e(t) = 0.$$

La sortie $s(t)$ correspondante est appelé **réponse en régime libre**. Pour tout autre signal d'entrée, on parle de **réponse en régime forcé**.

Sur la Figure 6, sont représentées 3 types de signaux de sortie qu'il est possible d'observer. Les deux premiers correspondent au signal $s(t)$ qui tend vers 0. Considérons par exemple le deuxième cas. Soit t_r le plus petit instant tel que :

$$\forall t \geq t_r, \quad s(t) \approx 0.$$

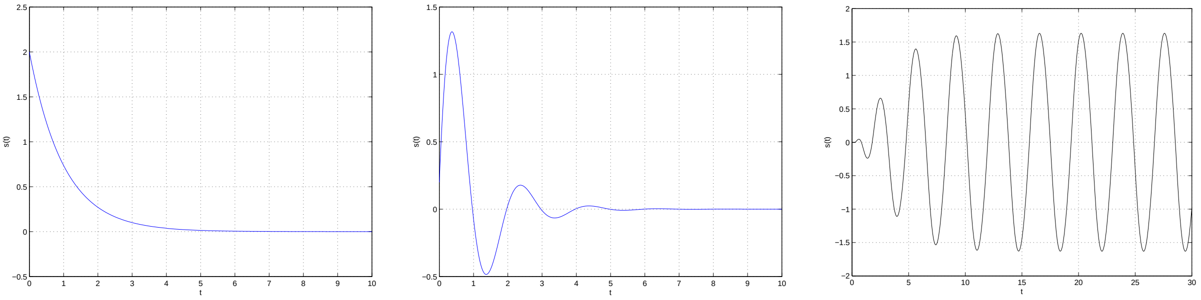

Figure 6: Quelques réponses en régime libre possibles

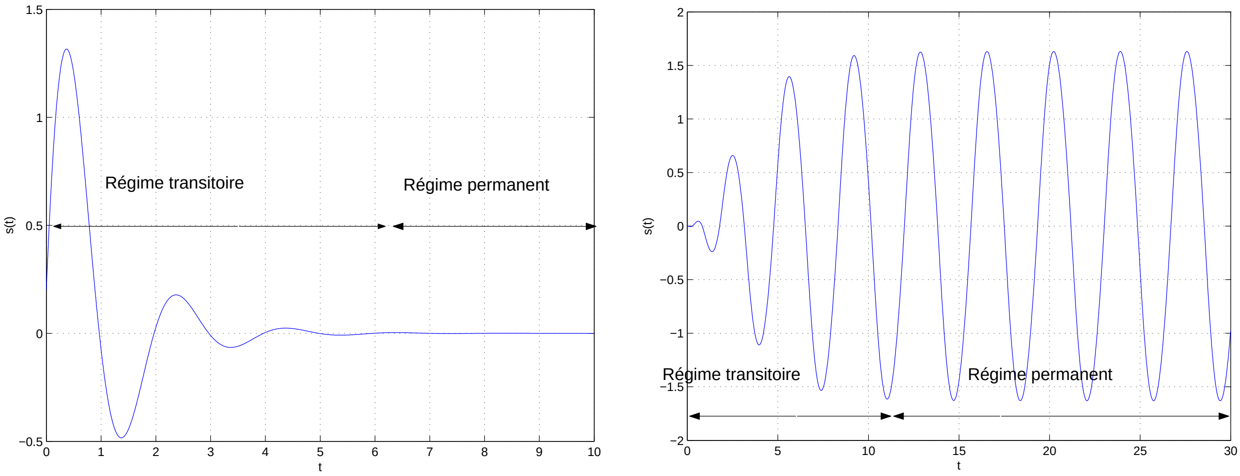

Figure 7: Régime transitoire Régime permanent

On appelle **régime transitoire** l'intervalle de temps $[0,\ t_r]$ et **régime permanent** l'intervalle de temps $]t_r,\ +\infty[$ (voir la Figure 7). La durée du régime transitoire (c'est-à-dire t_r) est une caractéristique importante du comportement du système.

Le troisième signal représenté sur la Figure 6 est, au bout d'un certain temps (régime transitoire), une fonction périodique (régime permanent) (voir la Figure 7). Un système présentant un signal de sortie périodique en régime libre est un **oscillateur** (exemple une "horloge mécanique"). Le signal de sortie d'un oscillateur est en régime permanent une fonction sinusoïdale du temps.

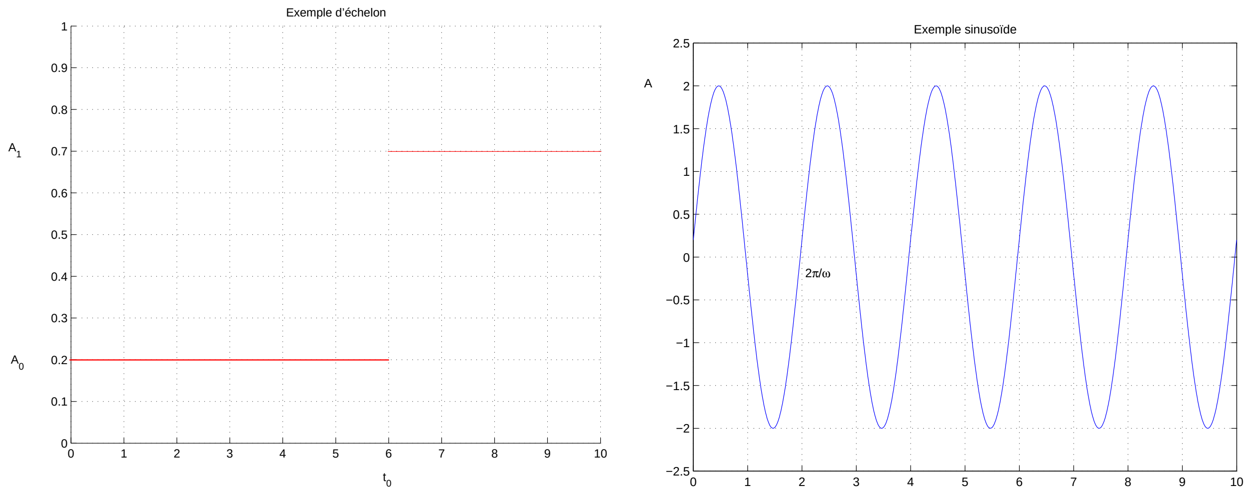

Figure 8: Signaux particuliers

D'autres signaux d'entrée élémentaires sont définis par la fonction échelon et par la fonction sinus. La **fonction échelon** est une fonction f telle que :

$$\begin{array}{ll} \forall t \in [0,\ t_0[& f(t) = A_0 \\ \forall t \in [t_0,\ +\infty[& f(t) = A_1 \end{array}$$

avec $t_0 \in [0,\ +\infty[$, A_0 et A_1 deux nombres réels (voir Figure 8, droite). Une **fonction constante** est une fonction échelon pour laquelle $t_0 = 0$. Une **fonction sinusoïdale** est une fonction f telle que :

$$\forall t \in [0,\ +\infty[\quad f(t) = Asin(\omega t + \phi)$$

avec A, ω et ϕ trois nombres réels positifs (voir Figure 8, gauche). Il a été vu dans le premier séminaire que tout signal est décomposable en une somme de signaux sinusoïdaux. Il est donc particulièrement important d'étudier le comportement du système à un signal d'entrée sinusoïdal.

Pour un signal d'entrée élémentaire en entrée du système, la première question est de savoir si, après un régime transitoire, le signal de sortie correspond à un signal élémentaire en régime permanent (fonction constante, fonction sinusoïdale, etc..). La seconde question est de déterminer la durée du régime transitoire et certaines caractéristiques du signal de sortie pendant le régime transitoire comme l'**amortissement**.

Prenons l'exemple d'un système dont le signal d'entrée est une fonction constante de valeur égale à 1 (voir Figure 9 et Figure 10). Après un régime transitoire, le signal de sortie $s(t)$ est (à peu près) constant (la valeur de la constante égale à $0,25$ est appelée **valeur finale**) en régime permanent. Dans le régime transitoire, on constate que $s(t)$, avant de tendre vers $0,25$, atteint une valeur maximale de $0,31$.

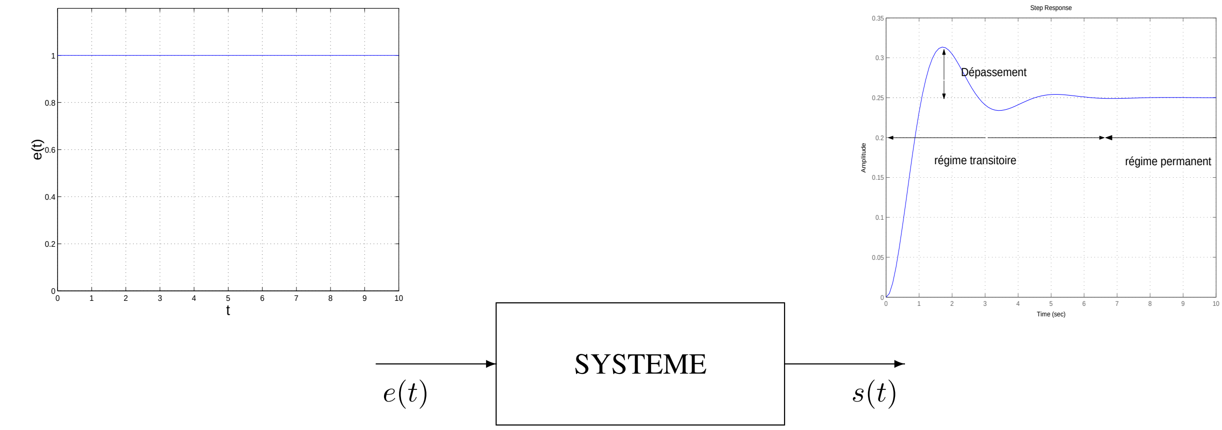

Figure 9: Exemple

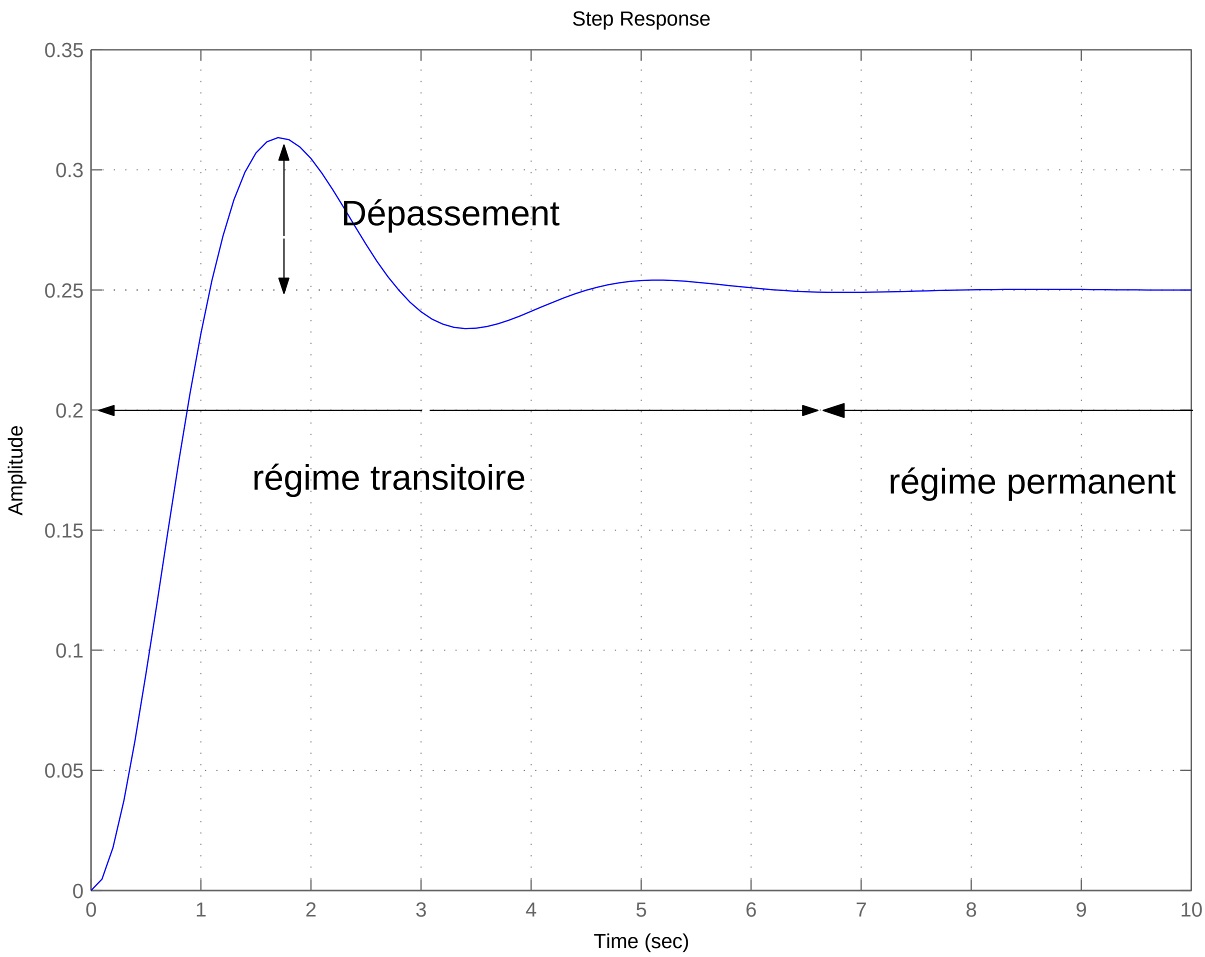

Figure 10: Exemple (suite)

La fonction $s(t)$ dépasse donc la valeur finale : on a un dépassement. Le dépassement est défini en $\%$ de la valeur finale :

$$\frac{(\text{valeur maximale de } s(t)) - (\text{valeur finale de } s(t))}{(\text{valeur finale de } s(t))} \times 100.$$

Le dépassement peut être un indicateur d'amortissement : si le dépassement est important, le système est dit mal amorti, sinon il est bien amorti.

3 Représentation des systèmes par des modèles

3.1 Qu'est ce qu'un modèle ?

Definition 3.1 *Pour un système causal, un* ***modèle*** *est une représentation, plus ou moins fidèle, souvent en termes mathématiques, des relations qui existent entre les signaux de sortie et les signaux d'entrée de ce système. La* ***modélisation*** *d'un système consiste à déterminer un modèle de ce système.*

Pour un système sans mémoire, un modèle est constitué par une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$s(t) = f(e(t)).$$

Une classe importante de systèmes dynamiques considérés par les ingénieurs est celle des systèmes dont un modèle est constitué par un ensemble d'équations différentielles, c'est-à-dire un ensemble d'égalités où les signaux d'entrée et de sortie ainsi que leurs dérivées successives interviennent. Un exemple d'équation différentielle est donné par :

$$\frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t).$$

où a_0 et b_0 sont des coefficients réels et où $\frac{ds(t)}{dt}$ est la dérivée première de la fonction $s(t)$. Il s'agit d'une équation différentielle (linéaire) d'ordre 1 qui a été étudiée en cours de Mathématiques de Terminale dans le cas où $e(t) = 1$ (*Les résultats de Terminale seront repris et généralisés dans le cours Mathématiques pour l'ingénieur Licence 1ière année, semestre 2*).

Les équations différentielles (linéaires) d'ordre 1 sont un cas particulier des équations différentielles (linéaires) d'ordre n définie ci dessous :

$$\frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}s(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1\frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{(m-1)}s(t)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t).$$

où a_{n-1}, $\cdots$, a_0 et b_n, $\cdots$, b_0 sont des coefficients réels, où m et n sont deux entiers et où $\frac{d^n s(t)}{dt^n}$ est la fonction $s(t)$ qui a été dérivée successivement n fois. Si une équation différentielle d'ordre n est un modèle d'un système physique alors $m \leq n$.

Pas de panique devant les équations différentielles ! Les équations différentielles (linéaires) d'ordre 1 et 2 seront étudiées en détails dans le cours Mathématiques pour l'ingénieur Licence 1ière année, semestre 2, parcours Science de l'Ingénieur, dans le cas général dans le cours Algèbre linéaire Licence 2ième année parcours Science de l'Ingénieur EEA, le cours Systèmes asservis linéaires Licence 3ième année parcours Science de l'Ingénieur EEA.

Comment obtenir un modèle ? Dans le cas d'un système physique, une première approche est d'appliquer les lois de la Physique.

Retour sur l'exemple du satellite Le satellite peut être supposé être un corps rigide. On s'intéresse à son mouvement de rotation dans un plan. Par application du principe fondamental de la dynamique (en rotation), on obtient

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = dF_c(t)$$

soit

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{d}{J}F_c(t) \tag{1}$$

avec

- d la distance définie sur la partie droite de la Figure 2 ;
- J l'inertie du satellite ;
- $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ la dérivée seconde de la fonction $\theta(t)$.

On obtient une équation différentielle du second ordre puisque le signal de sortie est dérivé deux fois.

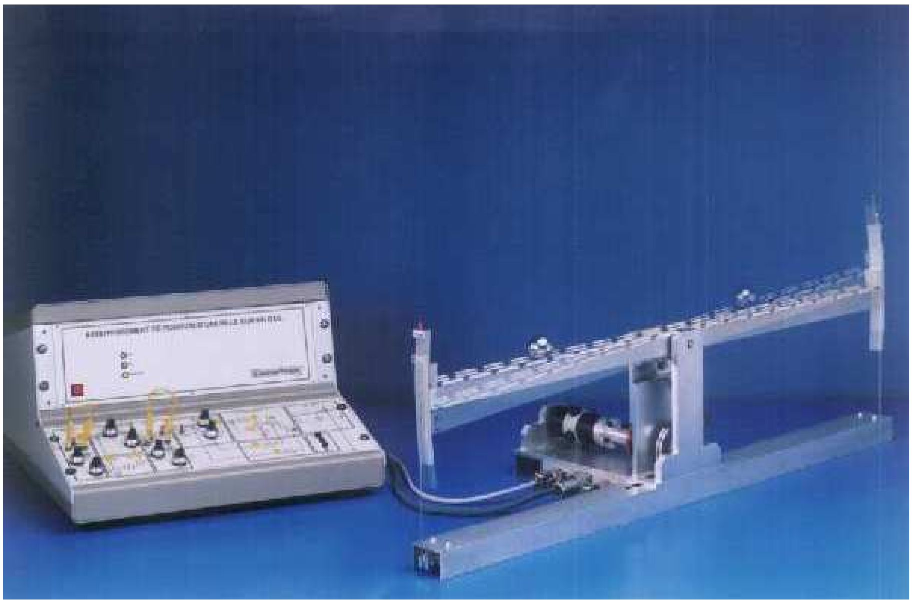

Figure 11: Photo du système bille sur un rail

Exemple de la bille sur un rail Le système se compose d'une barre rigide portant un rail, mobile autour d'un axe horizontal, et d'une bille roulant sur ce rail. L'inclinaison de la barre est assurée par un moteur électrique lié à la barre par un engrenage entraînant un système de câbles. A ce moteur est associé un circuit électronique qui permet d'imposer à la position angulaire de la barre autour de son axe horizontal une valeur déterminée dans l'intervalle $[-10$ degrés, $+10$ degrés$]$.

On désire étudier l'évolution temporelle de la position de la bille sur le rail : c'est le signal de sortie du système. Cette évolution dépend de la position angulaire de la barre : c'est le signal d'entrée du système. On obtient donc le schéma représenté Figure 13.

On définit, Figure 12 :

- $y(t)$ la position de la bille sur le rail à l'instant t, avec $y = 0$ quand la bille est au centre de la barre ;
- $\beta(t)$ la position angulaire de la barre à l'instant t, avec $\beta = 0$ quand la barre est horizontale.

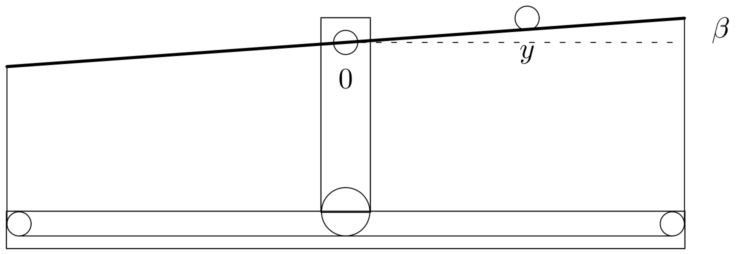

Figure 12: Vue de face du système bille sur rail

Figure 13: Le système bille sur rail

Les équations de la Mécanique permettent d'obtenir un modèle pour le système bille sur rail :

$$\left(m + \frac{J_{bille}}{r^2}\right)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{J_{bille}}{r^2}\frac{d^2\beta(t)}{dt^2} - my(t)\frac{d\beta(t)}{dt} = mg\sin(\beta(t)) \quad (2)$$

avec

- m la masse de la bille ;
- J_{bille} l'inertie de la bille ;
- r le rayon effectif de la bille pour le roulement (voir la Figure 14) ;
- g est la gravitation ($9,81 m/s^2$).

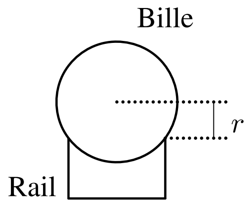

Figure 14: Vue de coté et en coupe de la bille sur le rail

Ce modèle peut être obtenu assez simplement par une approche systématique basée sur les équations de Lagrange. Ce point sera abordé dans les cours Mécanique 1 et Approfondissement mécanique en Licence 2ième année, parcours Science de l'Ingénieur EEA.

Il est amusant de noter que le modèle de la bille sur le rail (un système qui ressemble à un “jouet”) constitué par l’équation différentielle (2) est beaucoup plus complexe que le modèle du satellite (un système de très haute technologie) constitué par l’équation différentielle (1). La question est de savoir si une telle complexité est “nécessaire” et si non s’il est possible d’obtenir un modèle simplifié.

La fonction $\sin$ a la propriété suivante : si x est de valeur faible alors : $\sin(x) \approx x$. Dans notre cas, l’angle β est toujours inférieur à 10 degrés soit une valeur faible en radians. De plus, on peut faire l’hypothèse (raisonnable) que sa dérivée première et sa dérivée seconde sont suffisamment faibles pour être considérées comme nulles. En résumé :

$$\sin(\beta(t)) \approx \beta(t), \quad \tfrac{d\beta(t)}{dt} \approx 0, \quad \tfrac{d^2\beta(t)}{dt^2} \approx 0.$$

L’équation différentielle (2) peut donc se réécrire sous cette hypothèse :

$$\left(m + \frac{J_{bille}}{r^2}\right)\frac{d^2y(t)}{dt^2} = mg\beta(t)$$

Comme $J_{bille} = \frac{2}{5}mR^2$, où R est le rayon de la bille, on obtient finalement :

$$\left(1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)\frac{d^2y(t)}{dt^2} = g\beta(t) \tag{3}$$

Nous reviendrons plus tard sur la validité de prendre comme modèle (3) plutôt que (2). On peut noter que ce modèle ressemble beaucoup au modèle (1) du satellite.

3.2 Pourquoi modéliser?

3.2.1 Connaissance des systèmes

La modélisation est un outil puissant de compréhension du comportement dynamique des systèmes, indépendamment du système physique représenté.

Retour sur le satellite et la bille sur le rail Ce qui est frappant dans l’exemple du satellite et dans l’exemple de la bille sur le rail, c’est que les deux modèles obtenus (modèle (1) pour le satellite et modèle (2) pour la bille sur le rail) sont similaires. Tous les deux s’écrivent sous la forme :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = ke(t) \tag{4}$$

où

- $e(t)$ est le signal d’entrée :
  - $F_c(t)$ pour le satellite ;
  - $\beta(t)$ pour la bille sur rail ;
- $s(t)$ est le signal de sortie :
  - $\theta(t)$ pour le satellite ;
  - $y(t)$ pour la bille sur rail ;
- k est un constante qui vaut :
  - $\frac{d}{J}$ pour le satellite ;
  - $\dfrac{g}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2}$ pour la bille sur rail.

Ce que révèle la similitude de ces deux modèles est que le comportement de la bille sur le rail est donc similaire au comportement du satellite. Cela a plusieurs conséquences.

1. Il est possible de remplacer l'étude expérimentale d'un satellite par celle de la bille sur le rail qui est nettement plus simple et moins coûteuse. On dit que la bille sur le rail est une **maquette** du satellite. Les maquettes sont traditionnellement utilisées en Sciences de l'Ingénieur.

2. L'étude des propriétés mathématiques de l'équation différentielle (4) permet de connaître les propriétés de tous les systèmes (physiques) dont le modèle est de la forme (4) et cela sans les avoir forcement explicitement considérés. La modélisation est donc un outil extrêmement puissant puisqu'il permet de transposer la connaissance acquise par l'étude du comportement dynamique de systèmes d'une certaine nature (par exemple système électrique) à l'étude de systèmes d'autre nature (par exemple système mécanique).

C'est cette seconde constatation qui est à l'origine du développement de méthodes d'étude du comportement des systèmes dynamiques indépendamment de leur nature physique particulière. Le bénéfice de ses méthodes est important car les systèmes technologiques actuels sont très souvent constitués d'éléments de nature physique différent. Par exemple, alors qu'une automobile était une douzaine d'année encore essentiellement un système mécanique, les évolutions technologiques actuelles (ABS, injection électronique, etc...) font qu'actuellement une automobile inclut forcement des éléments électroniques de façon importante.

Ces méthodes seront notamment étudiées en détails dans les cours "Signaux et systèmes : outils d'analyse", "Systèmes asservis linéaires", "Automatique non linéaire", Licence 3ième année, parcours Science de l'Ingénieur EEA.

3.2.2 Représentation des systèmes

Le second point est que par définition *un modèle est une représentation d'un système*. Il peut ainsi permettre de décrire de façon non équivoque un système technologique qui existe physiquement ou seulement "sur le papier". De sa définition à son exploitation, un système technologique va être appréhendé par différentes personnes (ingénieurs, etc..) sous des points de vue différents (conception, réalisation, maintenance, exploitation, etc..). Le passage d'une personne à l'autre doit alors se faire sans perte d'information, ce que permet l'utilisation d'un modèle. Ce problème est suffisamment central pour qu'un effort particulier soit consacré au niveau de la définition et de la mise en œuvre de normes et de standards dans l'industrie. *La modélisation est donc une sorte de langage.*

3.2.3 Prévision du comportement des systèmes

Lors de la conception d'un nouveau système technologique, le cahier des charges exprime le comportement attendu du système. La question fondamentale est de garantir que le système qui a été conçu (sur le papier) remplit bien le cahier des charges, voire possède un comportement "satisfaisant". L'approche traditionnelle de la conception d'un système consiste à le concevoir sur le papier, à le réaliser et à faire des expériences sur le système correspondant à des scénarios types afin de vérifier si son comportement est satisfaisant et s'il est nécessaire de l'améliorer voire de le re concevoir. Cette approche pose plusieurs problèmes. Dans certains cas, il est impossible de réaliser des expériences sur le système (par exemple, satellite dans l'espace). Parfois, cela peut être dangereux si des informations manquent sur son comportement possible. De façon plus courante, une telle approche est longue et coûteuse, ce que permettent de moins en moins les contraintes économiques.

Face à cela, la modélisation des systèmes dynamiques a pris une place fondamentale dans les Sciences de l'Ingénieur. En effet, la connaissance du modèle permet de prévoir pour un signal d'entrée donné quel sera le signal de sortie correspondant.

Retour sur le satellite et la bille sur le rail Les deux systèmes sont modélisés par l'équation différentielle (4) qui est reproduite ci-dessous :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = ke(t). \tag{5}$$

Pour un signal d'entrée e donné par :

$$\forall t, \quad e(t) = A$$

où A est une grandeur constante, voyons comment déterminer dans ce cas précis le signal de sortie $s(t)$. L'intégration de l'équation précédente entre 0 et t donne :

$$\int_0^t \frac{d^2s(\tau)}{dt^2} d\tau = \int_0^t kAd\tau. \tag{6}$$

Pas de panique devant l'intégration ! Les résultats de Terminale seront repris et étendus dans le cours Mathématiques pour l'ingénieur Licence 1ière année, semestre 2, parcours Science de l'Ingénieur EEA.
L'équation (6) donne :

$$\frac{ds(t)}{dt} - \frac{ds(0)}{dt} = kAt. \tag{7}$$

où $\frac{ds(0)}{dt}$ est la valeur de la dérivée de la fonction $s(t)$ au temps $t = 0$. En intégrant entre 0 et t cette équation, on obtient :

$$\int_0^t \left(\frac{ds(\tau)}{dt} - \frac{ds(0)}{dt}\right) d\tau = k\int_0^t \tau d\tau \tag{8}$$

soit

$$s(t) - s(0) - \frac{ds(0)}{dt}t = \frac{kA}{2}t^2 \tag{9}$$

c'est-à-dire :

$$s(t) = \frac{kA}{2}t^2 + \frac{ds(0)}{dt}t + s(0) \tag{10}$$

Le modèle permet donc de prévoir la valeur de $s(t)$ pour tout instant t si la valeur du signal de sortie et de sa dérivée à l'instant $t = 0$ sont connus : $s(0)$ et $\frac{ds(0)}{dt}$ sont appelées les **conditions initiales**. Dans le cas de la bille sur le rail, cela correspond à connaître la position initiale de la bille sur le rail $s(0)$ ainsi que sa vitesse $\frac{ds(0)}{dt}$. On constate que la courbe caractéristique de la fonction $s(t)$ est une parabole en fonction du temps.

Remarque Dans la section 2.3, les signaux de sortie présentés pour des signaux d'entrée non nuls sont obtenus pour des conditions initiales nulles.

De façon générale, on peut établir que le nombre de conditions initiales nécessaires est égal à l'ordre de l'équation différentielle. De plus, pour un système dynamique, la valeur du signal de sortie s à l'instant t peut être déterminée à partir de la seule connaissance des trois choses suivantes :

1. un modèle du système ;
2. la valeur des conditions initiales ;
3. la valeur des signaux d'entrée qu'aux instants antérieurs à t.

3.3 Comment obtenir un modèle ?

Pour un système donné, peuvent être déterminés plusieurs modèles, de complexité plus ou moins importante, voir l'exemple de la bille sur un rail. Ce qui est important pour l'ingénieur, c'est que le modèle considéré reproduise assez fidèlement le comportement du système qu'il modélise, c'est-à-dire que pour un signal d'entrée $e(t)$ donné, le signal de sortie calculée à partir du modèle corresponde bien au signal que l'on constate expérimentalement à la sortie du système physique. Le fait que ce modèle découle des lois de la Physique est, pour l'ingénieur, secondaire. Dans de nombreux systèmes, l'écriture détaillée des lois de la Physique mène à des modèles trop complexes dont il est parfois difficile de déterminer tous les paramètres. Ils sont trop complexes dans le sens où il est possible d'avoir une bonne prévision du comportement dynamique du système avec des modèles plus simples.

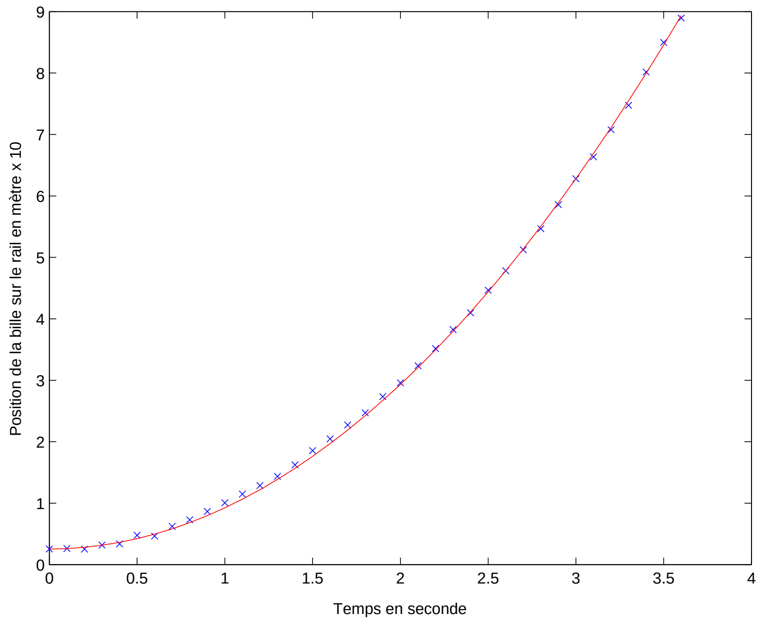

Figure 15: Evolution temporelle de la bille sur le rail : y est indiqué en ordonnée, le temps en abscisse

Retour sur la bille sur le rail On effectue l'expérience suivante. La bille est à l'instant $t = 0$ à la position légèrement supérieure à 0, avec une vitesse nulle. On applique le signal d'entrée $e(t) = A$ à cet instant. On mesure la position de la bille sur le rail et on la représente en fonction du temps, voir sur la Figure 15 les points représentés par des croix bleues. On obtient une branche de parabole, ce qui correspond à l'équation obtenue à partir du modèle (10) :

$$y(t) = \frac{kA}{2}t^2 + y(0).$$

Le paramètre k peut être déterminé à partir de l'expression :

$$k = \frac{g}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2}.$$

Une alternative est de déterminer le paramètre k directement à partir des données expérimentales, ce qui a l'avantage de s'affranchir de la connaissance des paramètres physiques r et R. *La méthode pour effectuer cela par un programme informatique de calcul numérique sera présentée ultérieurement dans le parcours Science de l'Ingénieur*. Sur la Figure 15, est représentée (continue, en rouge) la courbe caractéristique de la fonction $y(t)$ avec la valeur de k ainsi déterminée. On note une très bonne correspondance entre la courbe obtenue et les données expérimentales, ce qui justifie le choix du modèle simplifié qui a été fait.

On dit que l'on a effectué une **identification** du modèle. Une identification consiste à mesurer expérimentalement les signaux de sortie du système physique pour un ensemble de signaux d'entrée, puis de traiter ces données expérimentales afin de déterminer un modèle. Il peut s'agir d'un modèle dont on connaît l'équation différentielle sans en avoir déterminé les paramètres : c'est le cas de l'exemple ci-dessus. Il existe même des méthodes pour obtenir des modèles en se passant totalement de la connaissance des lois de la Physique, simplement en examinant de façon expérimentale le comportement du système. *Ces méthodes d'identification seront abordées en Licence 3ieme année du parcours Science de l'Ingénieur ainsi que dans le master qui suit.*

En résumé, pour un système, un modèle peut être obtenu par l'écriture des lois de la Physique et la détermination de ces paramètres. On parle alors de **modèle de connaissance** ou **modèle "boîte blanche"**. Une alternative est de l'identifier à partir de données expérimentales, sans appliquer les lois de la Physique : on parle alors de **modèle de comportement** ou **modèle "boîte noire"**. Dans un certain nombre de cas, une partie d'un modèle peut être obtenue par les lois de la Physique, une autre par l'identification : on parle alors de **modèle "boîte grise"**.

3.4 Comment exploiter un modèle ?

Dans l'exemple de la bille sur un rail, pour effectuer des prévisions, on a déterminé, (voir page 13), pour un signal d'entrée $e(t)$ donné quelle était l'expression explicite du signal de sortie $s(t)$ en fonction du temps t. Cela a été possible car, d'une part, le signal $e(t)$ est une fonction très simple (la fonction constante) et, d'autre part, l'équation différentielle considérée est aussi très simple. En général, ce n'est malheureusement pas possible. Par contre, il existe des programmes informatiques de calcul capables de déterminer, par un calcul sur ordinateur, les valeurs que prend la sortie $s(t)$ pour un signal d'entrée $e(t)$ et des conditions initiales donnés et pour t appartenant à un intervalle $[0,\ T]$. En classe de première, la méthode d'Euler pour calculer la solution d'équations différentielles d'ordre 1 a été présentée. Il s'agit d'une méthode particulière pour une équation différentielle particulière. *Ces méthodes seront abordées en Licence 2ieme année et 3ieme année du parcours Science de l'Ingénieur ainsi que dans le Master qui suit.*

Definition 3.2 *On appelle* ***simulation numérique*** *le calcul sur ordinateur de la solution $s(t)$ d'une équation différentielle pour un signal d'entrée $e(t)$ et des conditions initiales donnés et pour t appartenant à un intervalle $[0,\ T]$.*

La simulation permet ainsi dans une certaine mesure de tester si le comportement du système (qui n'existe en général que sur le papier) est satisfaisant et de mettre en évidence certains problèmes. Il s'agit d'une véritable "réalité virtuelle". Néanmoins, la simulation ne remplace pas complètement l'expérimentation qu'il est nécessaire d'effectuer si à l'issue de la simulation le comportement du système semble satisfaisant.

La généralisation de la modélisation et de la simulation des systèmes dynamiques a été une formidable révolution récente dans les Sciences de l'Ingénieur. Précédemment, quand la modélisation était utilisée, seul le comportement du système en régime permanent était généralement étudié.