



Supélec

**EDF**  
Electricité  
de France

# ***Analyse de cahier des charges par optimisation convexe***

Soutenu par : **Slim HBAIEB**

Directeur de thèse : Stéphane FONT

Supélec, Service Automatique, France

# Plan de la présentation

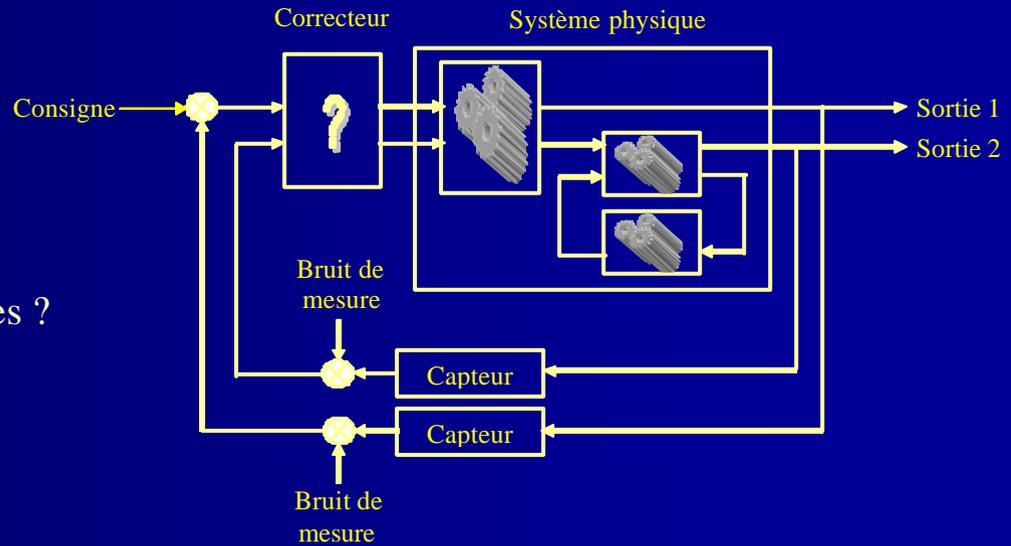
- Introduction
- Approche par les transferts
- Approche par les trajectoires
- Formulation pour la mise en œuvre numérique
- Application dans un cadre industriel
- Conclusions et perspectives

# Introduction (1/3)

## Contexte

### ■ Cahier des charges:

- ☞ Temps de réponse ?
- ☞ Dépassement ?
- ☞ Contraintes fréquentielles ?
- ☞ Découplage ?
- ☞ ...



### ■ Difficile à établir : compromis entre les demandes, méconnaissance du système...

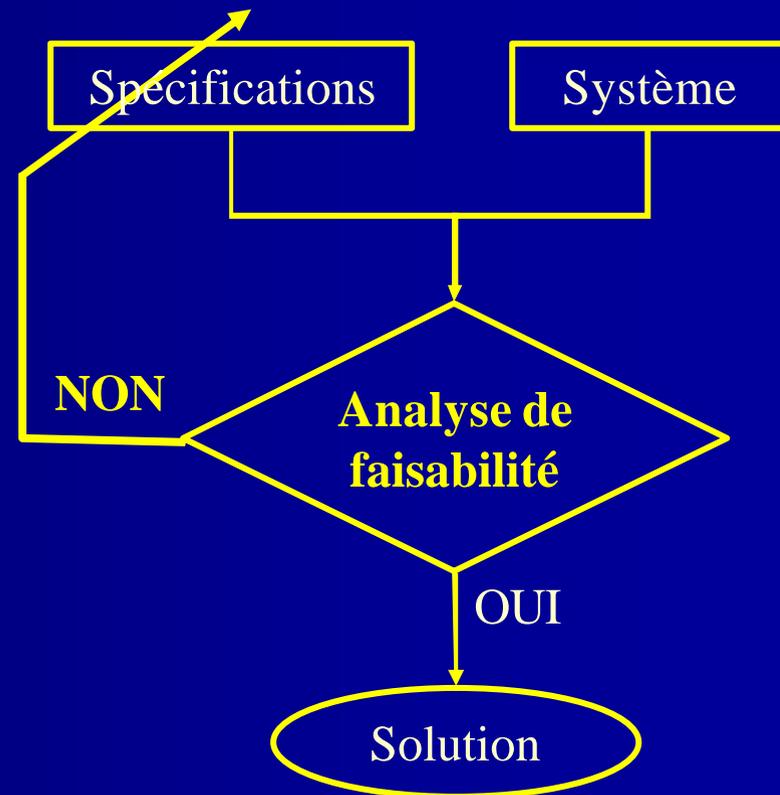
Il serait souhaitable de pouvoir :

- ☞ poser un cahier des charges **faisable et exigeant** ?
- ☞ chiffrer les **limites de performances** atteignables par le système ?
- ☞ **analyser la faisabilité** d'un cahier des charges donné ?

# Introduction (2/3)

## Motivations

- **Besoin industriel**
- Étudier les **compromis** entre différentes demandes
- **Optimiser** les performances
- Générer des transferts ou des trajectoires de références comme **base de comparaison** pour d'autres méthodes



# Introduction (3/3)

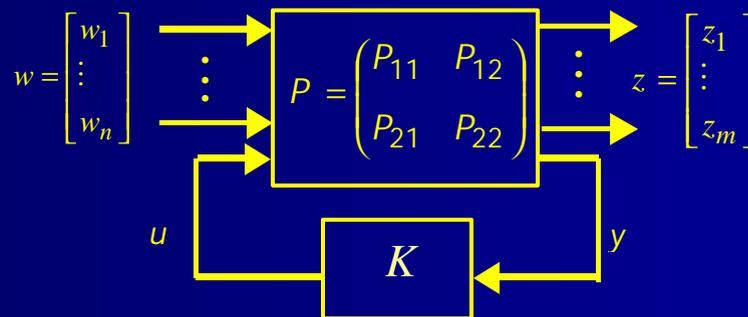
## Sujet

- Poser le **problème de faisabilité** d'un cahier des charges sous forme d'un **problème d'optimisation**
  - ☞ Élaborer une approche **constructive**
    - ⇒ **calculable** en un temps raisonnable
  - ☞ Pouvoir dire non
    - ⇒ Géométrie **convexe**
  - ☞ Recherche de l'existence d'un correcteur
    - ⇒ **tous les degrés de liberté**

# Approche par les transferts (1/9)

## Notations

- On considère le système mis sous la forme standard suivante :



$$H_{z/w} = LFT(P, K) = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}$$

- Contrainte de gabarit fréquentiel :  $C_i = \{ K / \forall w, |H_i(jw)| \leq |G(jw)| \}$
- Contrainte d'enveloppe temporelle :  $C_i = \{ K / \forall t, z_{i \min}(t) \leq z_i(t) \leq z_{i \max}(t) \}$
- Cahier des charges :  $\bigcap_i C_i$

# Approche par les transferts (2/9)

## Motivations

- Problème de faisabilité

$$\text{Existe-t-il } K \in \left( \bigcap_i C_i \right)$$

- Limites de performances

$$\min_{K \in \left( \bigcap_i C_i \right)} J(K)$$

- Objectif : trouver une **formulation équivalente** sous forme de problèmes d'optimisation que l'on sait résoudre effectivement

# Approche par les transferts (3/9)

## Paramétrisation de l'ensemble des correcteurs

- Géométrie complexe en fonction de  $K$  (non convexité des contraintes, inversion...):

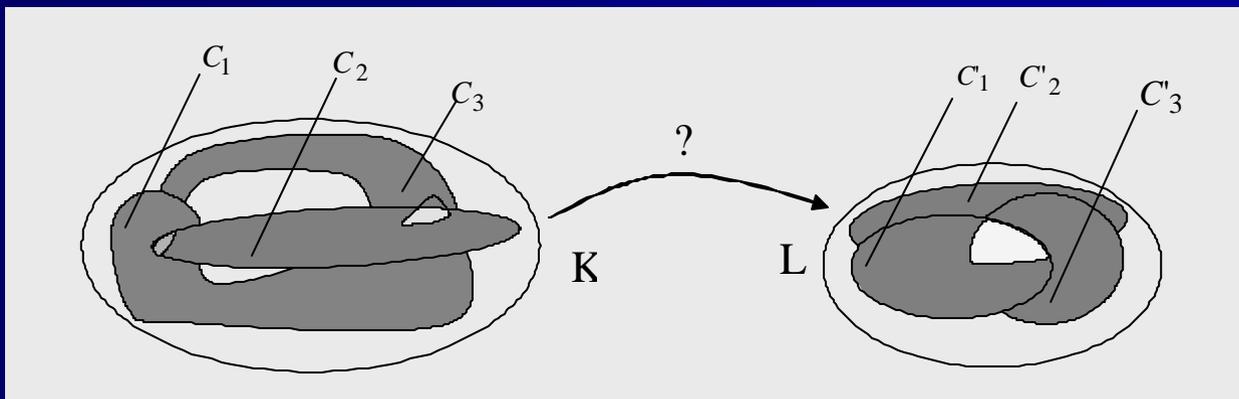
☞ Contrainte temporelle :

$$C_i = \{ K / \forall t, z_{i \min}(t) \leq \left( L^{-1} \left( W_i \cdot (P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}) \right) \right) (t) \leq z_{i \max}(t) \}$$

☞ Contrainte fréquentielle :

$$C_i = \{ K / \forall w, \left| (P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21})(jw) \right| \leq |G(jw)| \}$$

- Nécessité d'un changement de variable  $K \rightarrow L$  :



# Approche par les transferts (4/9)

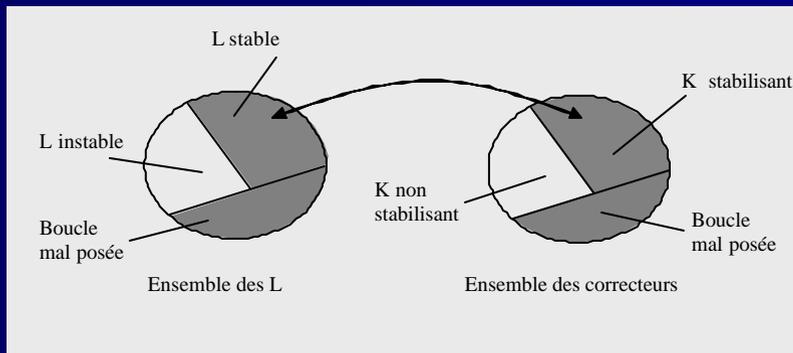
## Cas des transferts de boucles bien posées

- Choix comme nouvelle variable le transfert L défini par :  $L = K (I - P_{22} K)^{-1} = KS$

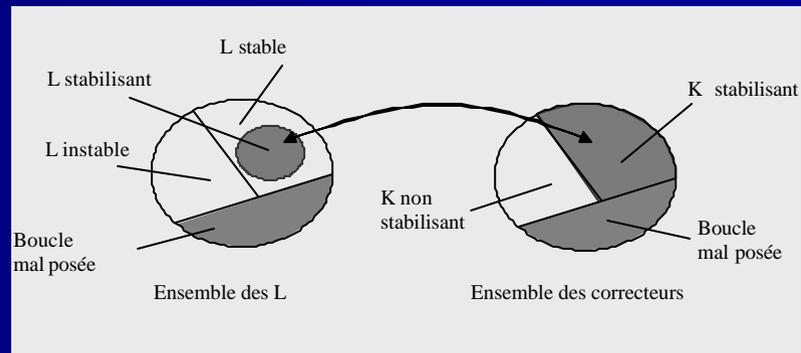
- ☞ Paramètre tous les transferts de boucles (stables et instables)
- ☞ Seule hypothèse nécessaire : boucle bien posée (  $(I - P_{22}K)$  inversible)
- ☞ Sens physique du paramètre (transfert de la référence vers la commande)

- Expression affine des transferts de boucles :  $H_{z/w} = F_l(P, K) = P_{11} + P_{12} L P_{21}$

☞ Si  $P_{22}$  stable  $\Rightarrow L_{\text{stabilisant}}$  est l'ensemble des transferts stables



☞ Si  $P_{22}$  instable  $\Rightarrow L_{\text{stabilisant}}$  est un sous ensemble de l'ensemble des transferts stables



# Approche par les transferts (5/9)

## Cas des transferts de boucles stables

- Utilisation de la paramétrisation de Youla-Kucera

- ☞ Q décrit à l'ensemble des transferts stables

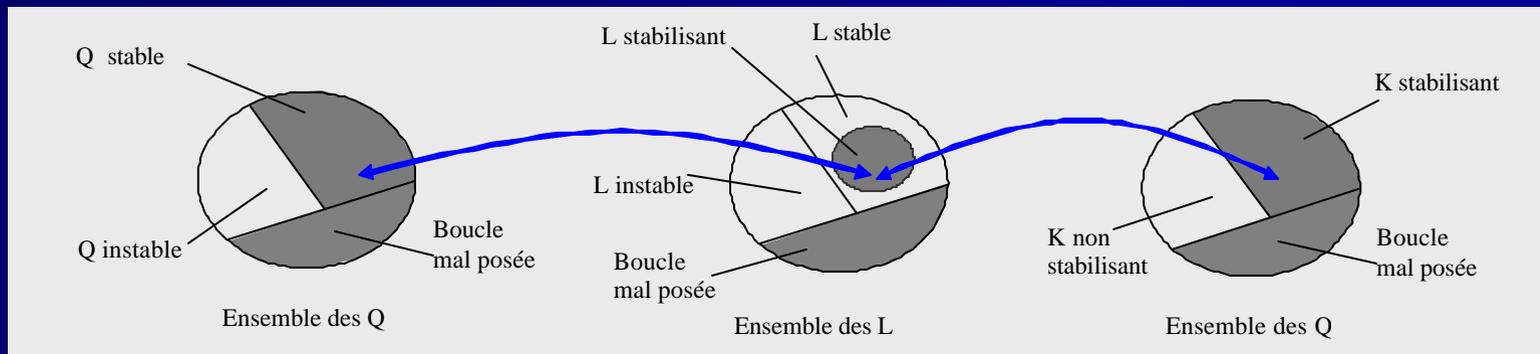
- ☞ Q paramètre tous les transferts de boucles stables

- Expression affine des transferts de boucles :

$$H_{z/w} = F_l(P, K) = T_1 + T_2 Q T_3$$

- ☞ Si  $P_{22}$  stable  $\Rightarrow$  Q se confond avec L

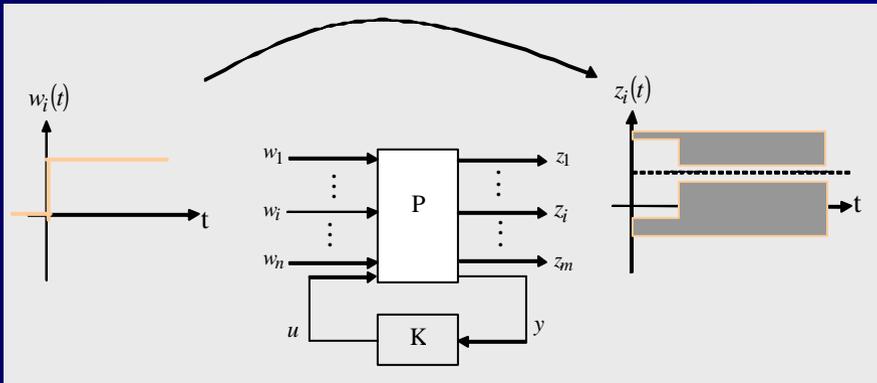
- ☞ Si  $P_{22}$  instable  $\Rightarrow$  Q est une paramétrisation linéaire de  $L_{\text{stabilisant}}$



# Approche par les transferts (6/9)

## Expressions convexe des contraintes

### ■ Contrainte d'enveloppe temporelle



☞ Dans l'ensemble des K

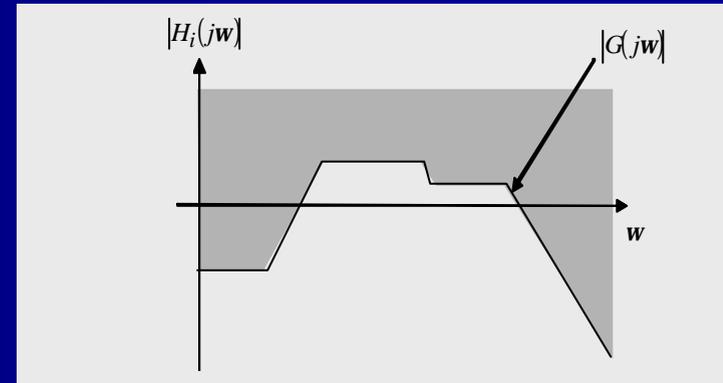
$$C_i = \{ K / \forall t, z_{i \min}(t) \leq z_i(t) \leq z_{i \max}(t) \}$$

☞ Dans l'ensemble des Q

$$z_i(t) = L^{-1}(W_i T_{1,i}) + L^{-1}(W_i T_{2,i} Q T_{3,i})$$

$$C'_i = \{ Q / \forall t, z_{i \min}(t) \leq z_i(t) \leq z_{i \max}(t) \}$$

### ■ Contrainte de gabarit fréquentiel



☞ Dans l'ensemble des K

$$C_i = \{ K / \forall w, |H_i(jw)| \leq |G(jw)| \}$$

☞ Dans l'ensemble des Q

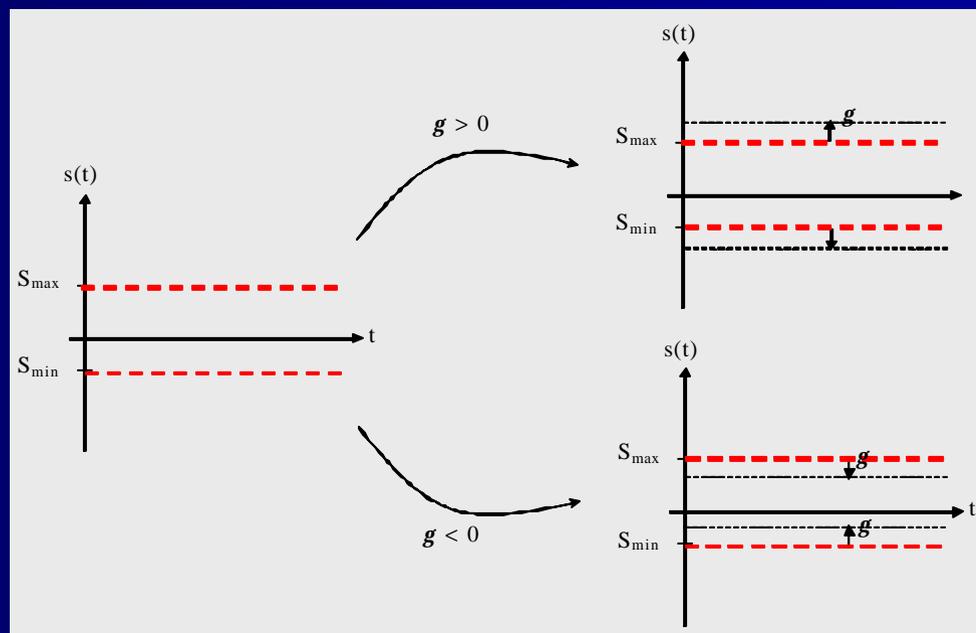
$$H_i(jw) = (T_{1,i} + T_{2,i} Q T_{3,i})(jw)$$

$$C'_i = \{ Q / \forall w, |H_i(jw)| \leq |G(jw)| \}$$

## Mise sous forme de problème d'optimisation

- Idée : exprimer le problème de faisabilité en un problème d'optimisation

⇒ utilisation d'une variable supplémentaire ?



☞ Contrainte temporelle :

$$C_i = \{ Q / \forall t, (z_{i\min}(t) - g) \leq z_i(t) \leq (z_{i\max}(t) + g) \}$$

☞ Contrainte fréquentielle :

$$C_i = \{ Q / \forall w, |H_i(jw)| \leq |G(jw)| + g \}$$

# Approche par les transferts (8/9)

## Expressions du problème en fonction de Q

- On démontre que le problème global est équivalent au problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}_{opt} = \min_{\substack{\text{contraintes temporelles} \\ \text{contraintes fréquentielles}}} \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_{opt} \leq 0 \end{array} \right.$$

- ☞ Toujours faisable moyennant des hypothèses sur les gabarits et le système
- ☞ **Convexité en (Q,?)**

# Approche par les transferts (9/9)

## ■ Bilan sur l'approche :

problème d'ensemble  $\Rightarrow$  problème de faisabilité  $\Rightarrow$  problème d'optimalité

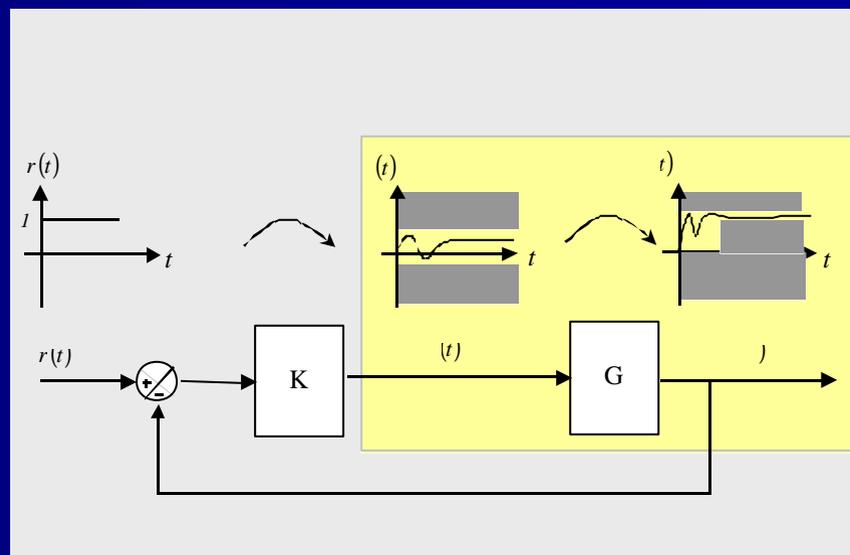
## ■ Utilisations :

- ☞ détection des spécifications contraignantes
- ☞ Chercher un cahier des charges en limite de faisabilité
- ☞ optimisation de critères (énergie, maximum de commande...)

# Approche par les trajectoires (1/9)

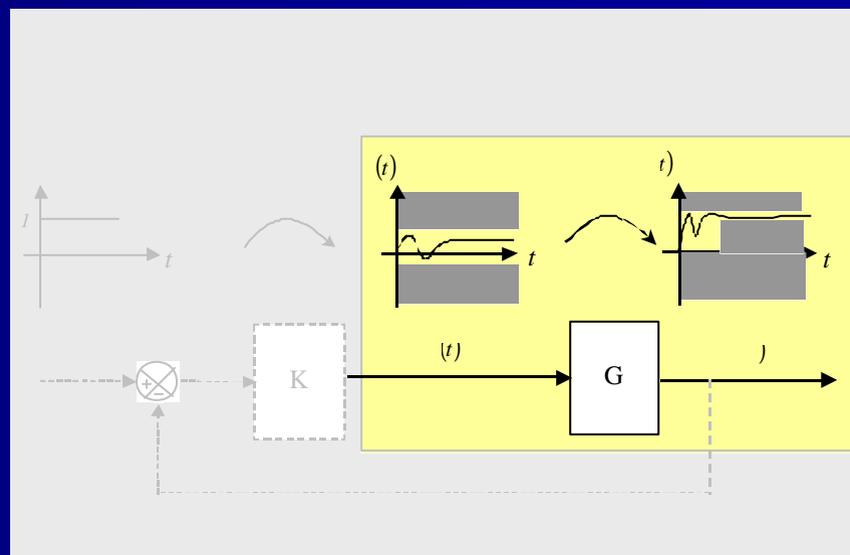
## Motivations

- S'il existe un correcteur solution, il existe des trajectoires entrées/sorties solutions  
 → l'existence de telles trajectoires est une **condition nécessaire** à l'existence d'un correcteur



- S'il existe un correcteur solution, il existe des trajectoires entrées/sorties solutions

- l'existence de telles trajectoires est une **condition nécessaire** à l'existence d'un correcteur
- étudier l'existence de trajectoires possibles comme un préalable au problème de commande



- Exemple de problèmes qui rentrent dans ce cadre :

- ☞ temps de réponse minimum pour une commande respectant une contrainte donnée ?
- ☞ amplitude minimal de commande nécessaire pour tenir un temps de réponse donné ?

⇒ Analyse des spécifications en entrées-sorties d'un point de vue trajectoires

⇒ Recherche d'une **condition suffisante** pour l'existence d'un correcteur

# Approche par les trajectoires (2/9)

## Méthodologie

- Problème de faisabilité entrées/sorties :

Existe-t-il  $(u(t), y(t))$  tel que :

$$\begin{cases} u(t) \in C_u, & C_u = \{u(t) / u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t), \forall t\} \\ y(t) \in C_y, & C_y = \{y(t) / y_{\min}(t) \leq y(t) \leq y_{\max}(t), \forall t\} \\ y(t) = G(u(t)) \end{cases}$$

- Paramétrisation par les trajectoires de commandes :

Existe-t-il  $u(t)$  tel que

$$\begin{cases} u(t) \in C_u \\ G(u(t)) \in C_y \end{cases}$$

- Introduction d'une variable réelle ? → Problème d'optimisation

$$\min g$$

$$(u_{\min}(t) - g) \leq u(t) \leq (u_{\max}(t) + g)$$

$$(y_{\min}(t) - g) \leq G(u(t)) \leq (y_{\max}(t) + g)$$

☞ Toujours faisable moyennant des hypothèses sur les gabarits et le système

☞ Convexité en  $(Q, ?)$

- Utilisations : détection des spécifications contraignantes, recherche d'un cahier des charges en limite de faisabilité, optimisation de critères ...

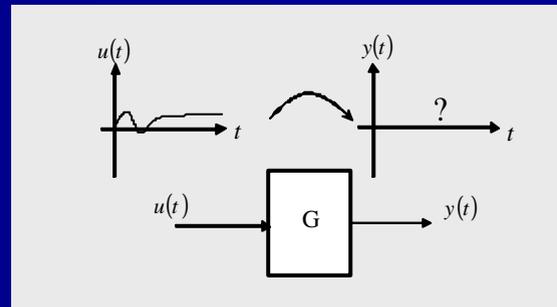
# Approche par les trajectoires (3/9)

## Etude des limites de performances

- Propagation d'un gabarit  $C_u$  de l'entrée vers la sortie

$$y(t) / \begin{cases} u(t) \in C_u \\ y(t) = G(u(t)) \end{cases}$$

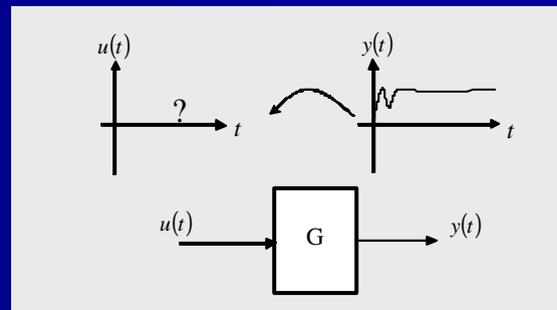
- ☞ Image convexe, mais difficile à caractériser
- ⇒ Caractériser l'enveloppe de  $G(C_u)$



- Propagation d'un gabarit  $C_y$  de la sortie vers l'entrée

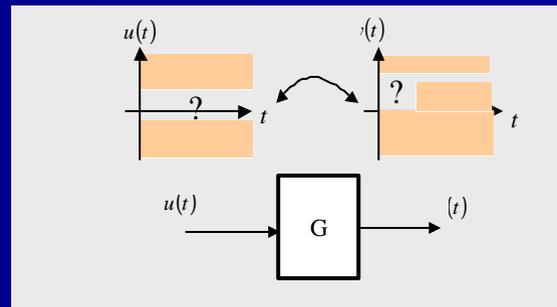
$$u(t) / \begin{cases} y(t) \in C_y \\ y(t) = G(u(t)) \end{cases}$$

- ☞ Image inverse convexe, mais difficile à caractériser
- ⇒ Caractériser l'enveloppe de  $G^{-1}(C_y)$



- Ensemble des couples entrée-sortie respectant un gabarit d'entrée  $C_u$  et un gabarit de sortie  $C_y$

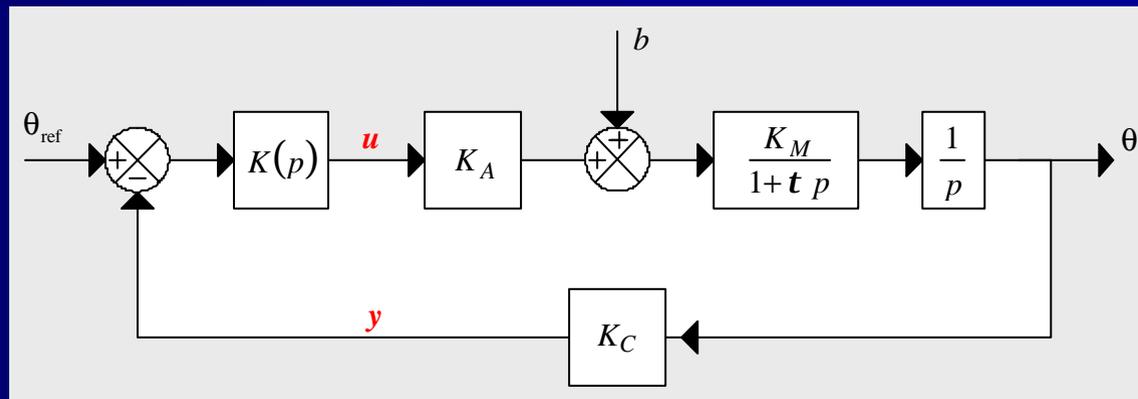
$$(u(t), y(t)) / \begin{cases} u(t) \in C_u \\ y(t) \in C_y \\ y(t) = G(u(t)) \end{cases}$$



# Approche par les trajectoires (4/9)

## Cas d'un moteur à courant continu

### ■ Système considéré :



### ■ Spécifications :

☞ Gabarit d'entrée défini par

$$\Leftrightarrow u_{min}(t) = u_{max}(t) = \text{constante}$$

☞ Gabarit de sortie définie par

☞ un temps de d'établissement à 5% inférieur à 0.1 seconde

☞ un dépassement inférieur à 10%

☞ un temps de réponse à 80% inférieur à 0.04 seconde

# Approche par les trajectoires (5/9)

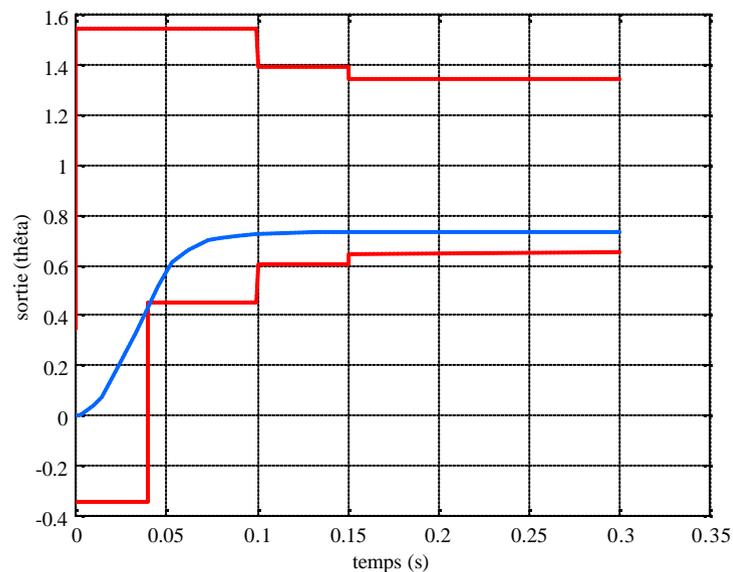
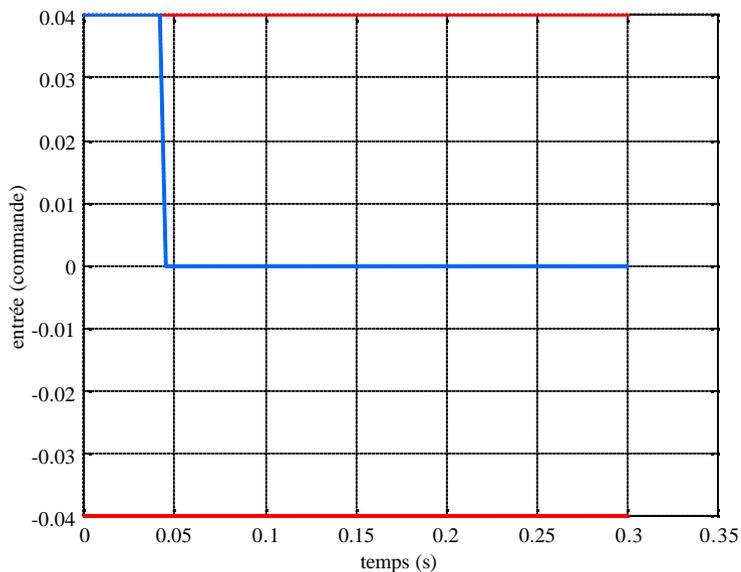
## Cas d'un MCC – Analyse de faisabilité

- Analyse de faisabilité pour  $u_{\min}(t) = u_{\max}(t) = 0.04$

- Problème à résoudre :

$$\begin{aligned} & \min \quad g \\ & u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t) \\ & (y_{\min}(t) - g) \leq G(u(t)) \leq (y_{\max}(t) + g) \end{aligned}$$

- $?_{\text{opt}}$  calculé égal à  $0.34 > 0 \Rightarrow$  Problème non faisable



# Approche par les trajectoires (6/9)

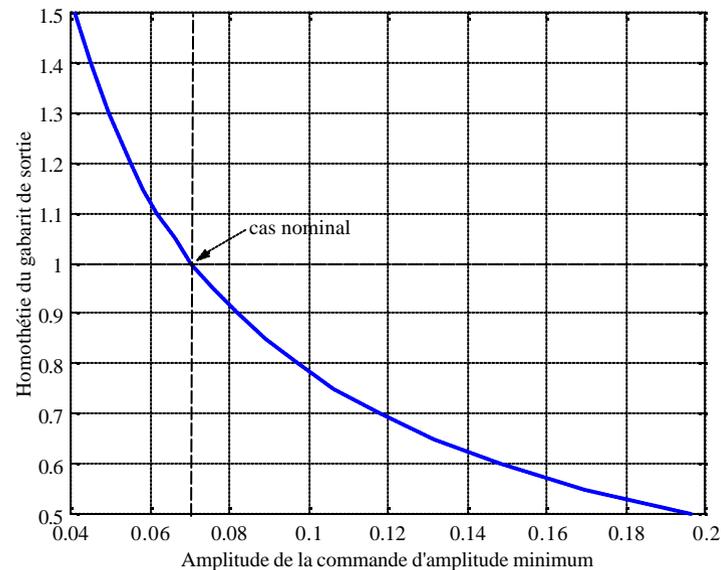
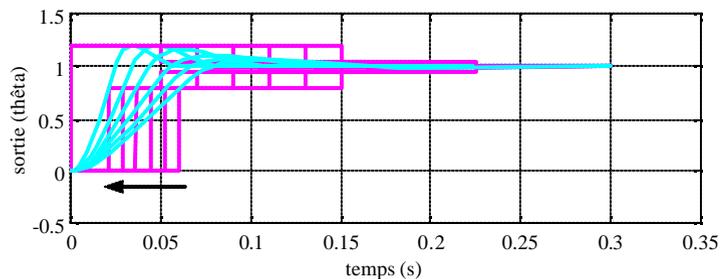
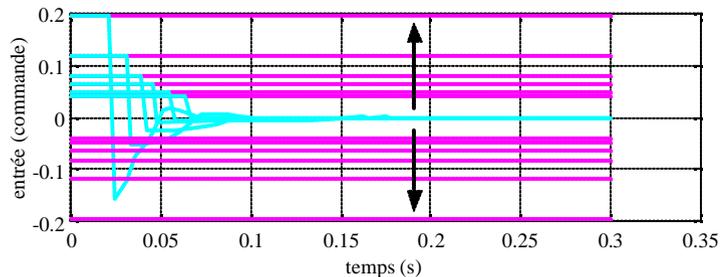
## Cas d'un MCC – Analyse de performances

- Commande d'amplitude minimale pour des enveloppes de sortie
- Le problème à résoudre s'écrit :

$$\min \mathbf{g}$$

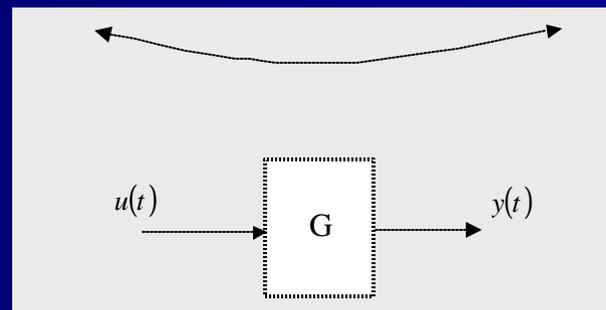
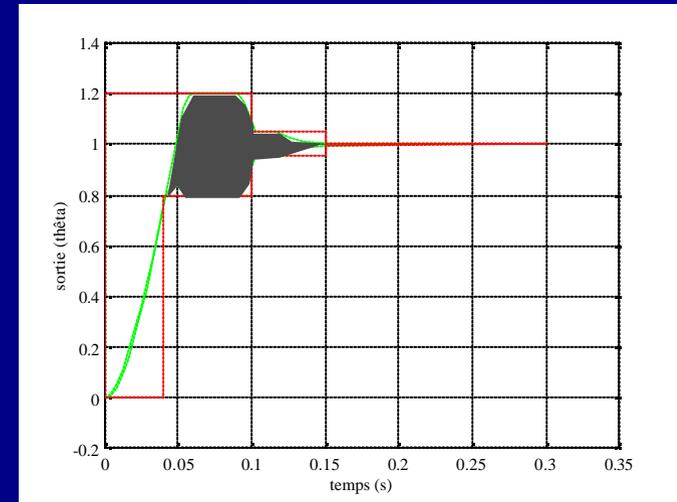
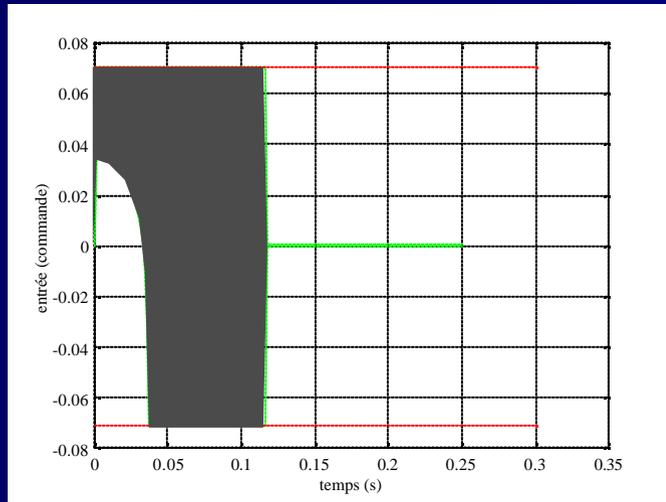
$$(u_{\min}(t) - \mathbf{g}) \leq u(t) \leq (u_{\max}(t) + \mathbf{g})$$

$$y_{\min}\left(\frac{t}{h}\right) \leq G(u(t)) \leq y_{\max}\left(\frac{t}{h}\right)$$



# Approche par les trajectoires (7/9)

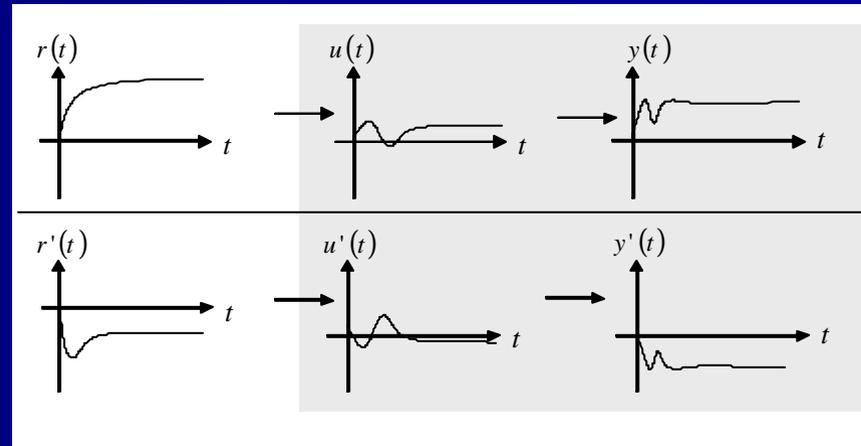
## Cas d'un MCC – Transfert de gabarit



# Approche par les trajectoires (8/9)

## Relations trajectoires-transferts

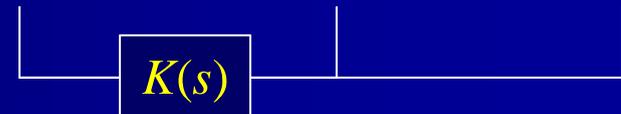
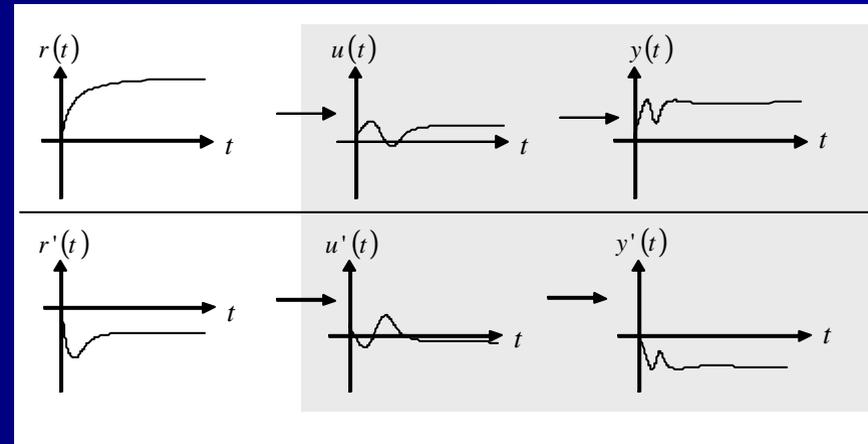
■ Étude des trajectoires



# Approche par les trajectoires (8/9)

## Relations trajectoires-transferts

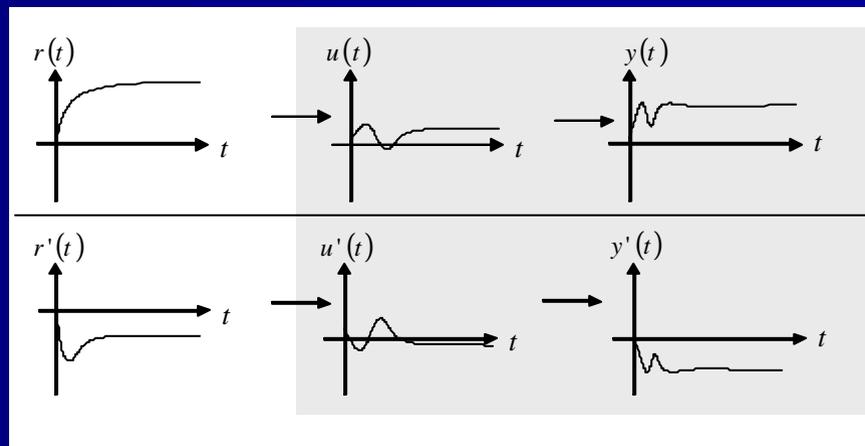
- Etude des trajectoires
- + Prise en compte du fait que plusieurs contraintes simultanées en entrées/sorties devront être respectée en utilisant un même correcteur



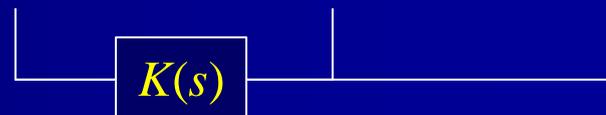
# Approche par les trajectoires (8/9)

## Relations trajectoires-transferts

- Etude des trajectoires
- + Prise en compte de du fait que plusieurs contraintes simultanées en entrées/sorties devront être respectée en utilisant un même correcteur



⇒ Relations d'interconnexion



$$\{u_i'(t) * r_{i+1}(t) = u_{i+1}(t) * r_i(t)\}_{i=1, \dots, k-1}$$

- Dualité entre l'approche par les trajectoires et l'approche par les transferts

# Approche par les trajectoires (9/9)

## Bilan sur l'approche

- **Démarche :**  
problème d'ensemble  $\Rightarrow$  problème de faisabilité  $\Rightarrow$  problème d'optimalité
- **Analyse intrinsèque** du système  
 $\Rightarrow$  Mise en œuvre simple dans le cas de simple transfert de gabarits
- Étude des relations entre l'approche transfert et l'approche trajectoire  
 $\Rightarrow$  **équivalence**

# Formulation pour la mise en œuvre numérique (1/6)

- Pour la résolution il faut gérer :
  - ☞ la dimension infinie de l'ensemble des paramètres
  - ☞ l'évaluation des contraintes fonctionnelles
  - ☞ la complexité des relations (Laplace, convolution)

# Formulation pour la mise en œuvre numérique (2/6)

## Dimension infinie de l'espace des paramètres

- $u(t)$ ,  $L(s)$  et  $Q(s)$  sont des éléments d'ensembles de dimensions infinies

- Problème d'optimisation :

$$\min_{f \in \mathfrak{S}} J(f) \quad (\infty)$$

$$\{f \in C_i\}_{i=1, \dots, k}$$

$\mathfrak{S}$  de dimension infinie

# Formulation pour la mise en œuvre numérique (2/6)

## Dimension infinie de l'espace des paramètres

- $u(t)$ ,  $L(s)$  et  $Q(s)$  sont des éléments d'ensembles de dimensions infinies

- Problème d'optimisation :

$$\min_{f \in \mathfrak{S}} J(f) \quad (\infty)$$

$$\{f \in C_i\}_{i=1, \dots, k}$$

$\mathfrak{S}$  de dimension infinie

→ approximer  $J_{opt}$  par  $J_{n,opt}$  :

$$\min_{f \in \mathfrak{S}_n} J(f) \quad (n)$$

$$\{f \in C_i\}_{i=1, \dots, k}$$

$\{\mathfrak{S}_n\}_{n=1,2,\dots}$  imbriqués de dimensions finies

- Qualité d'approximation ?

$$\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S} \quad ? \quad \Rightarrow \quad J_{n,opt} \rightarrow J_{opt}$$

# Formulation pour la mise en œuvre numérique (3/6)

## Approximation avec convergence simple

### ■ Approximation avec garanties de convergence simple

$$\forall \epsilon > 0, \forall f \in \mathfrak{S}, \text{ il existe } \{f_n\}_{n=1,2,\dots} \text{ et } n_{\epsilon,f} \in \mathbb{N}^+$$

$$\text{tel que : } \begin{cases} \forall n, f_n \in \mathfrak{S}_n \\ \forall n \geq n_{\epsilon,f}, \|f_n - f\| \leq \epsilon \end{cases}$$

- ☞ Garantie de **convergence asymptotique**
- ☞ Pas de garantie de qualité d'approximation en dimension finie
- ☞ Exemples : base de retard purs, base de Laguerre...
- ☞ Base d'avance et de retard de phase

# Formulation pour la mise en œuvre numérique (4/6)

## Approximation avec convergence uniforme

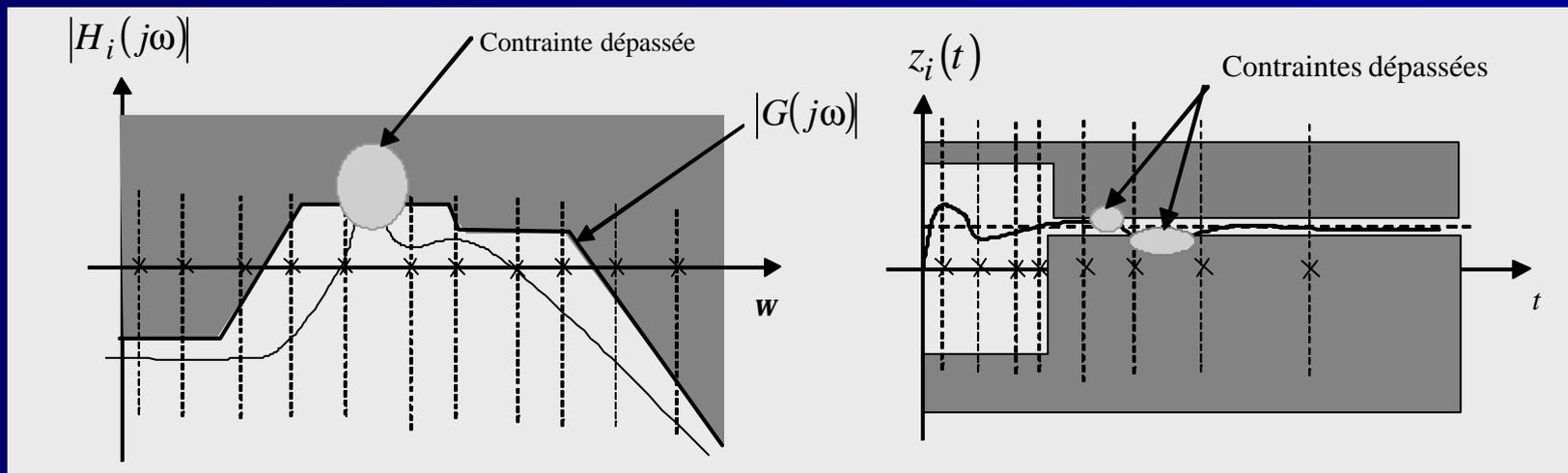
- Approximation avec garanties de convergence uniforme

$\forall \epsilon > 0$ , il existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}^+$  tel que :

$$\forall f \in \mathfrak{S}, \exists \{f_n\}_{n=1, \dots} / \begin{cases} f_n \in \mathfrak{S}_n \\ \forall n \geq n_\epsilon, \|f_n - f\| \leq \epsilon \end{cases}$$

- ☞ Garantie de convergence asymptotique
- ☞ Possibilité de **chiffrer la qualité d'approximation** en dimension finie
- ☞ Sur certains espaces, cette propriété peut être obtenue :
  - espace de fonctions continues à variations bornées et à temps de réponse fini
  - ⇒ base d'approximation affine par morceaux

- Évaluation sur un nombre fini de points



- Vérification *a posteriori* : gridding adaptatif
- Vérification *a priori* : utilisation de conditions de régularité pour garantir le respect des gabarits à e prés

# Formulation pour la mise en œuvre numérique (6/6)

## Complexité des calculs

- Contraintes faisant intervenir des produits de convolution et des transformations de Laplace
- Dans le cas d'une entrée affine par morceaux, on démontre que le produit de convolution et la transformée de Laplace en un point s'expriment par des **opérateurs matriciels linéaires**

$$(G * u)(t_i) = A \cdot \begin{pmatrix} u(t_1) \\ u(t_2) \\ \vdots \\ u(t_n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (L(u))(w_i) = B \cdot \begin{pmatrix} u(t_1) \\ u(t_2) \\ \vdots \\ u(t_n) \end{pmatrix}$$

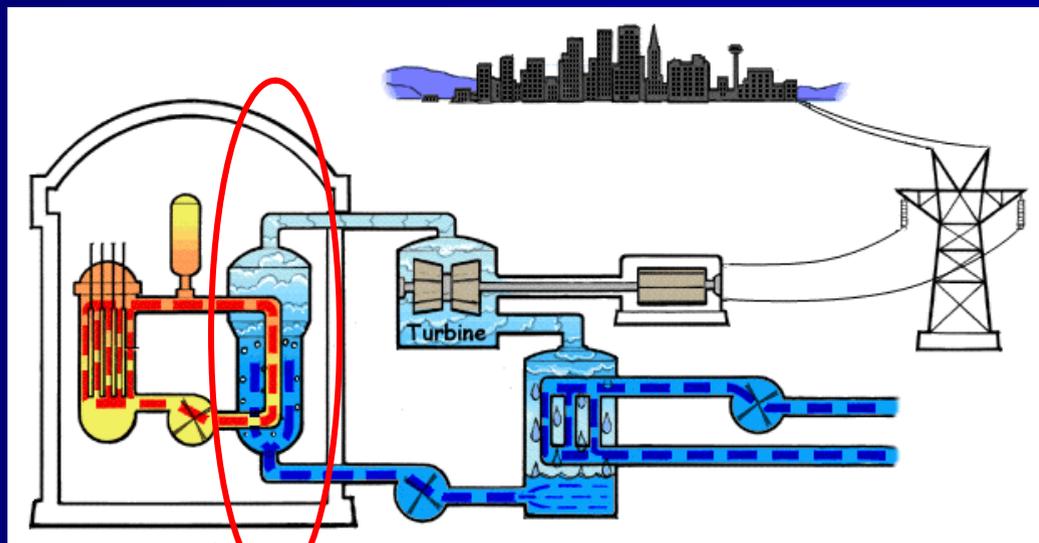
⇒ Expression des problèmes d'optimisation sous forme LP, LQ, LMI...

- Collaboration avec le département Recherche et développement Contrôle Commande EDF Chatou
- Générateur de vapeur à eau pressurisée pour centrale nucléaire
  - ☞ système non trivial
  - ☞ un cahier des charges existe pour référence (compromis, contraintes temporelles et fréquentielles...)
  - ☞ exemple riche pour lequel EDF possède une grande expertise

# Application au cas du Générateur de vapeur (2/7)

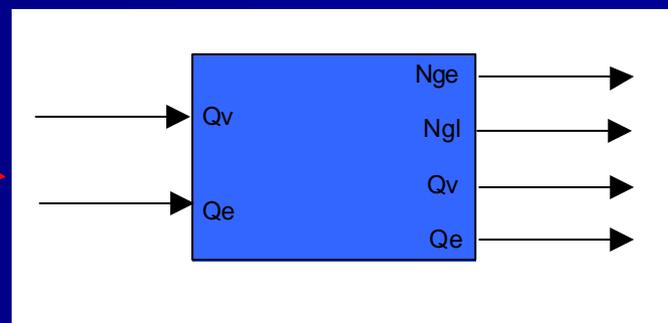
## Application et modèle

- Centrale nucléaire à eau pressurisée



- Présentation du modèle

- ↪  $Q_e$  : débit d'eau élémentaire
- ↪  $Q_v$  : débit de vapeur désiré
- ↪  $N_{ge}$  et  $N_{gl}$  : mesures de niveau d'eau



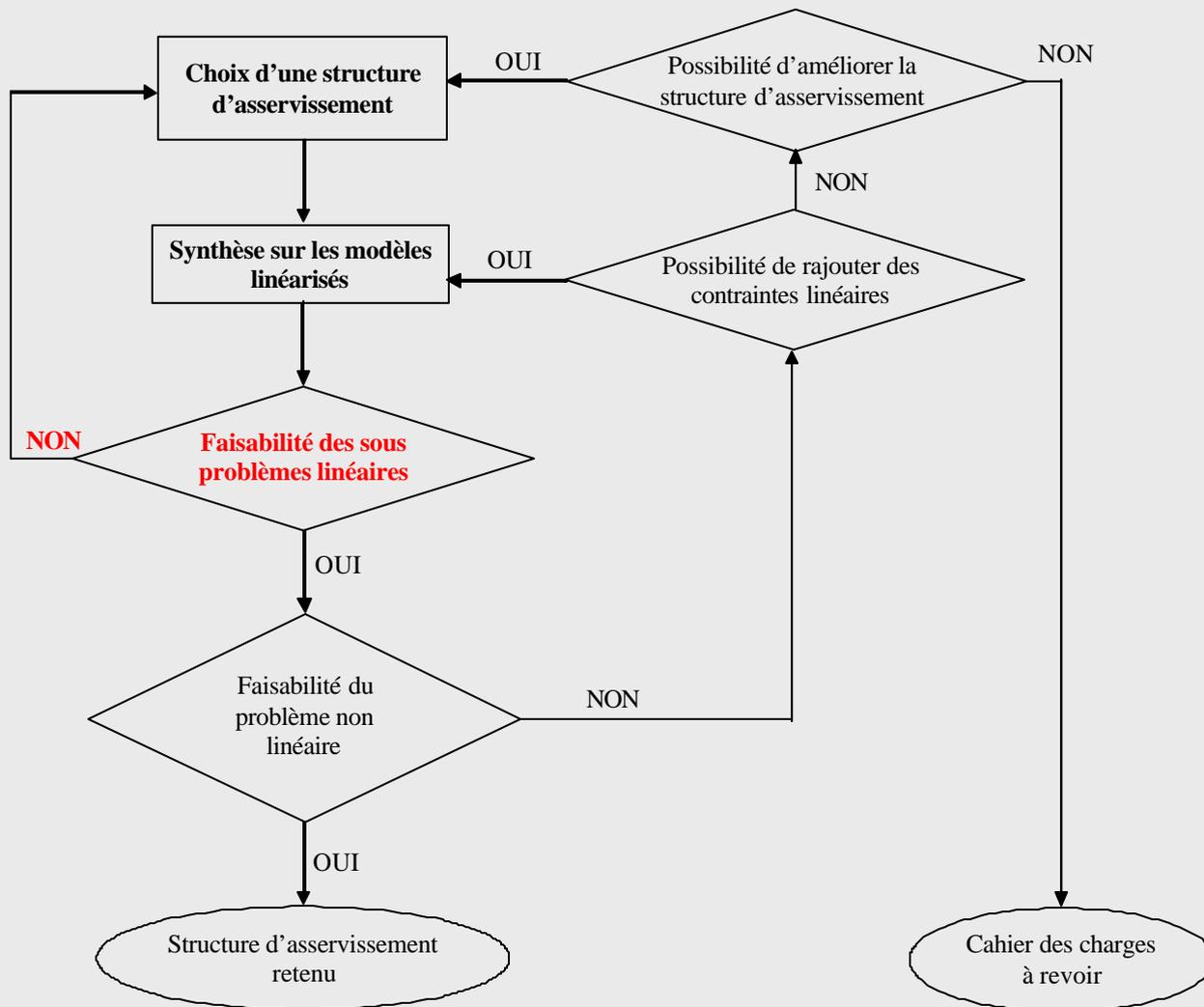
# Application au cas du GV (3/7)

## Problème de commande

- Simulateur non linéaire + deux modèles linéarisés
- Cahier des charges :
  - ↗ erreur sur  $N_{ge}$  comprise entre  $\pm 20$  (si possible entre  $\pm 5$ )
  - ↗ erreur comprise entre  $\pm 0.5$  en moins de 100 secondes
  - ↗ commande  $u$  comprise entre 4 et 120
  - ↗ marge de retard supérieure à 20s à forte charge et à 25s à faible charge
  - ↗ Transitions en échelons et en rampes...
- Traduction du cahier des charges
- Recherche d'une structure d'asservissement

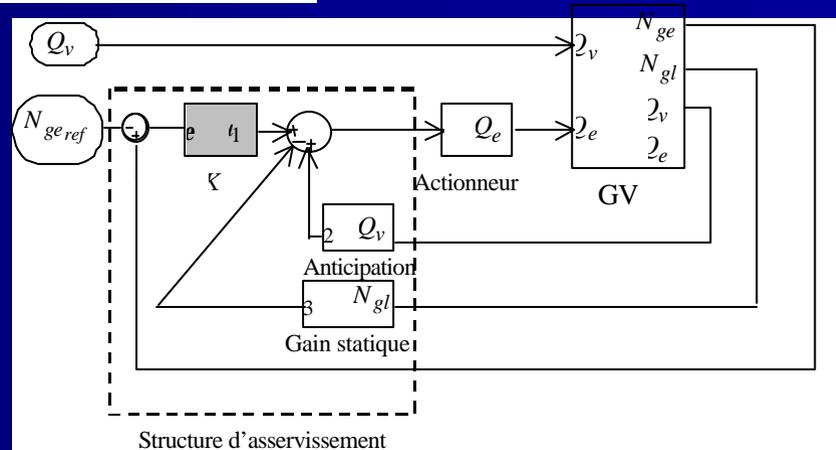
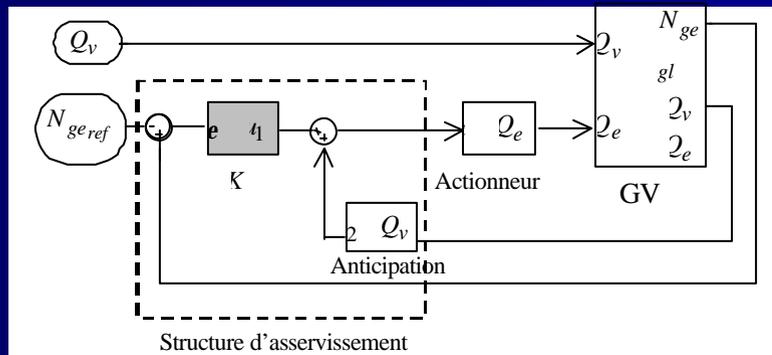
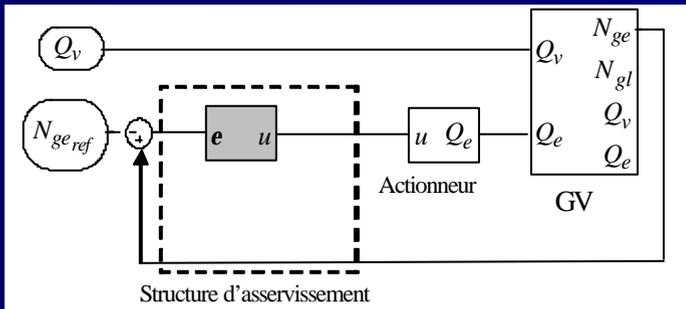
# Application au cas du GV (4/7)

## Méthodologie de synthèse



# Application au cas du GV (5/7)

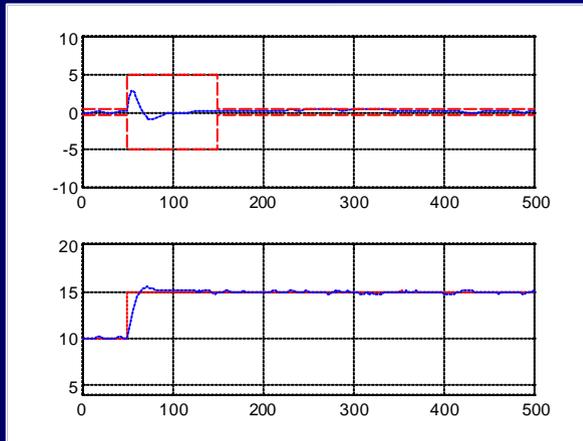
## Choix d'une structure d'asservissement



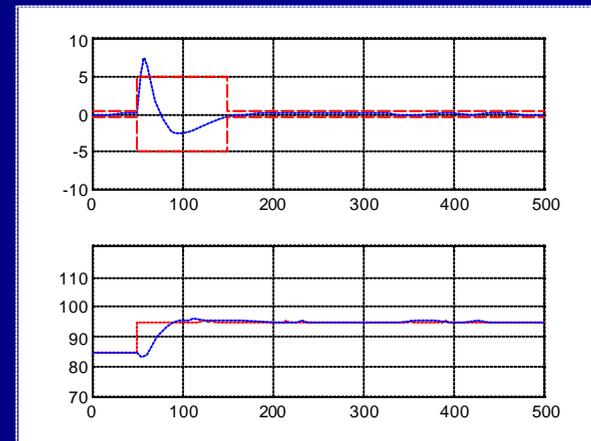
Complexité

# Application au cas du GV (6/7)

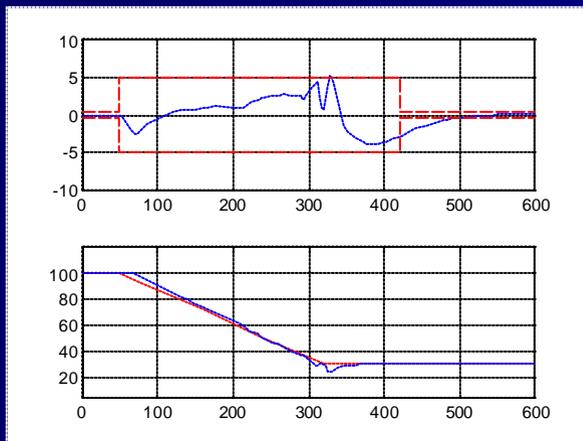
## Simulations



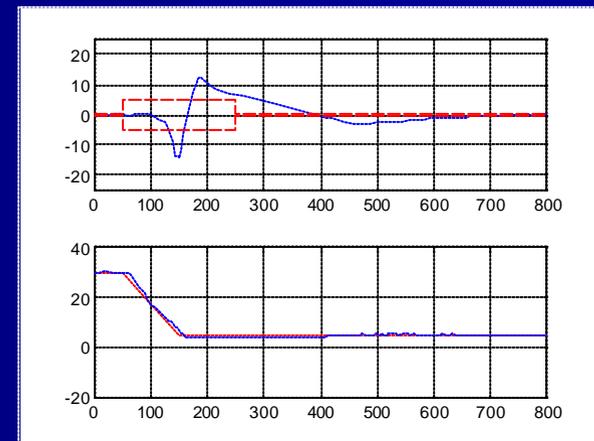
Réponses indicielles pour un échelon de 5% en  $Q_v$  à 10% de charge



Réponses indicielles pour un échelon de 10% en  $Q_v$  à 85% de charge



Réponse à une rampe de -15% par min de 100% à 30% de charge



Réponse à une rampe de -15% par min de 30% à 5% de charge

# Application au cas du GV (7/7)

## En résumé...

- Prise en compte proche du cahier des charges d'origine
- Approfondir la compréhension d'un cahier des charges : nature non linéaire des demandes, compromis...
- Pouvoir appréhender les limites atteignables par une correction linéaire
- Deux type de convergence utilisées :
  - ☞ Convergence simple : construction rapide du correcteur
  - ☞ Convergence uniforme : mise en œuvre plus puissante pour l'analyse

- **Deux approches** pour l'analyse des spécifications par optimisation convexe :
  - ☞ **Par les transferts** : paramétrisation des transferts de boucles, prise en compte des contraintes temporelles et fréquentielles
  - ☞ **Par les trajectoires** : analyse des trajectoires entrées-sorties d'un système, propagation de gabarits
- **Paramétrisation des transferts de boucles** (sens physique des paramètres...)
- Formalisation et application de deux **méthodes d'approximation** en dimension infinie
  - ☞ par convergence simple
  - ☞ par convergence uniforme
- **Application au générateur de vapeur EDF**  $\Rightarrow$  qualités et limitations de l'approche
- **Publications...**

- Développer l'**interface utilisateur** de ces outils permettant ainsi de rendre la formulation théorique du problème transparente
- Pour des fins de synthèse, développer des méthodes de **réduction a posteriori** garantissant une faible dégradation des performances demandées
- A plus long terme, **enrichir la classe des contraintes** étudiées (exemple : norme multi-variables sur plusieurs entrées / sorties)
- Considérer les problématiques traitées ici dans le cas **multi-modèles**



Supélec

**EDF**  
Electricité  
de France

# ***Analyse de cahier des charges par optimisation convexe***

**Soutenu par : Slim HBAIEB**

Directeur de thèse : M. Stéphane FONT

Supélec, Service Automatique, France