



Du cahier des charges au correcteur ou la quête d'un problème polynomial

Stéphane FONT

Service Automatique - Gif



Problématique

- **Qu'est qu'un cahier des charges ?**
- **Point de vue historique.**
- **Avant 90 : focalisation sur la méthode / méthodologie implicite**
- **1981 Zames idée de la mu-synthèse**
- **1989 : réponse (calculable) : H-infini**
- **90-00 H-infini ne répond pas au problème posé mais offre beaucoup de choix**
- **Besoin méthodologique fort pour la mise en œuvre**
- **00 + essais de développements de méthodes plus générales pour la prise en compte plus direct des cahiers des charges.**



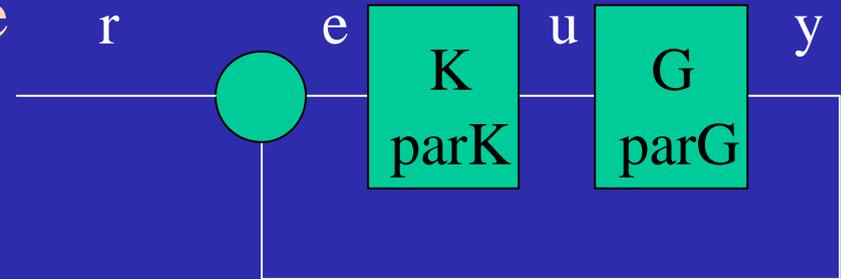
Problématique

- Poser les problèmes sous forme d'optimisation que l'on peut résoudre efficacement.
- Depuis 1990 la théorie de la robustesse a été développée dans cet esprit
 - Formulation de *critères généraux*
 - *Formalisation* du cahier des charges
 - Prise en compte d'*incertitudes de modèle*
 - Prise en compte de *dynamiques inconnues*
 - Résolution de *problèmes d'optimisation*



Problématique

- Quelques exemples de problèmes d'optimisations

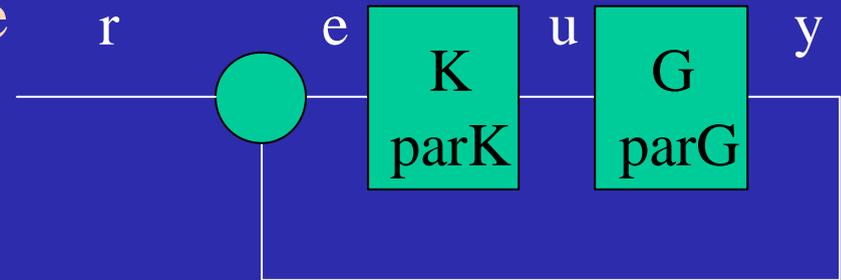


- LQG $\Rightarrow \min_K \int e(t)^2 dt + \int u(t)^2 dt$
- LQG avec structure $\Rightarrow \min_{parK} \int e(t)^2 dt + \int u(t)^2 dt$



Problématique

- Quelques exemples de problèmes d'optimisations



- Optimisation H_∞ $\longrightarrow \min_K gab \left(\frac{e(j\omega)}{r(j\omega)} \right)$
- Commande robuste structurée $\longrightarrow \min_{parK} \max_{parG} \int e(t)^2 dt + \int u(t)^2 dt$
- Et bien d'autres (commande, analyse, identification ...)



Problématique

- Dans le cas général ces problèmes sont **non polynomiaux (NP)**

- Temps de calcul exorbitant

➔ Non adapté pour l'ingénierie

- Exemples : Marge de gain multivariable

$$\min_{parG / BoucleStable} \|parG\|$$

- Recherche de la plus petite combinaison de gain (de capteur) qui déstabilise un système bouclé
- C'est un problème NP



Problématique

- Dans le cas général ces problèmes sont **non polynomiaux (NP)**

- Temps de calcul exorbitant

➔ Non adapté pour l'ingénierie

- Exemples : Marge de gain multivariable

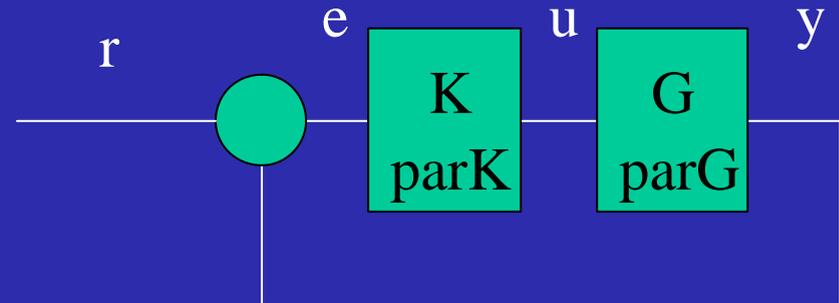
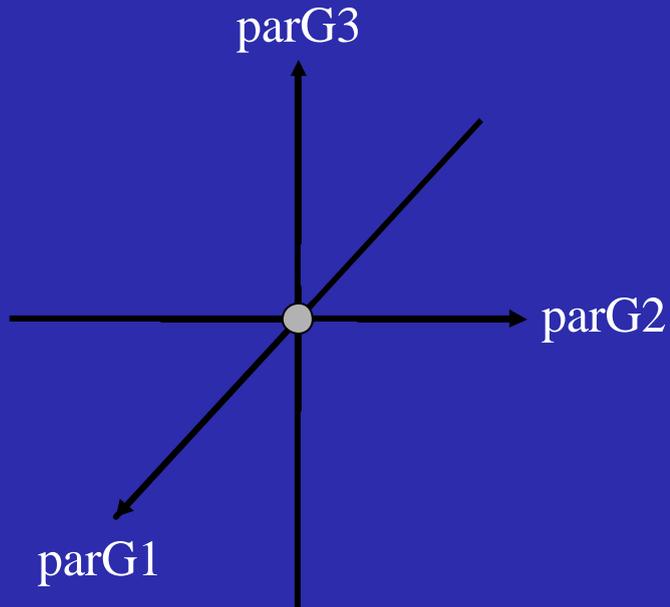
$$\min_{parG / BoucleStable} \|parG\|$$

- Recherche de la plus petite combinaison de gain (de capteur) qui déstabilise un système bouclé
- C'est un problème NP



Exemple d'analyse de stabilité mu-analyse

Analyse : recherche de pires cas

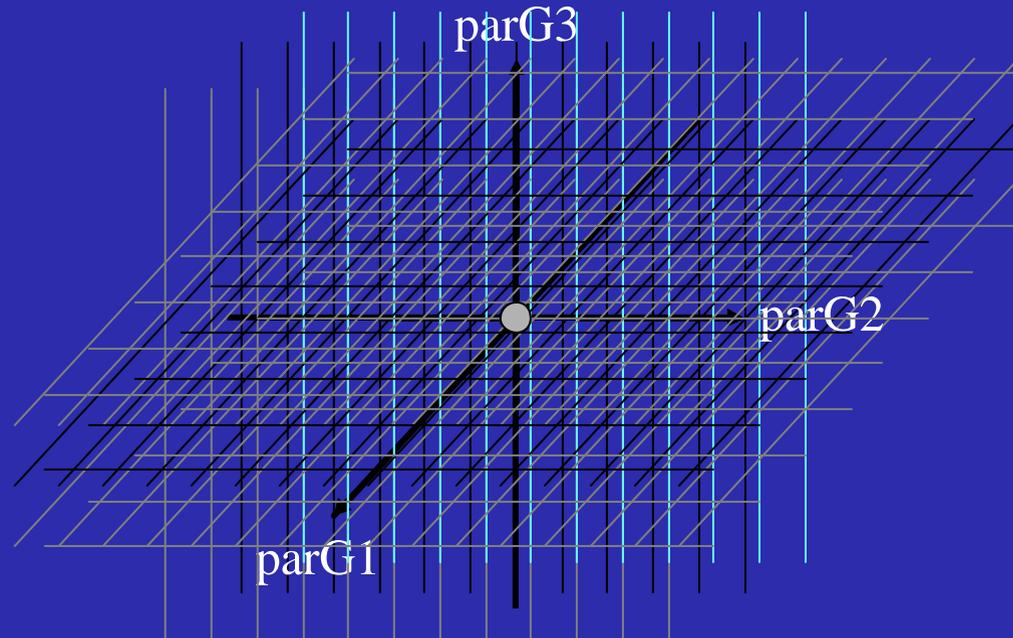
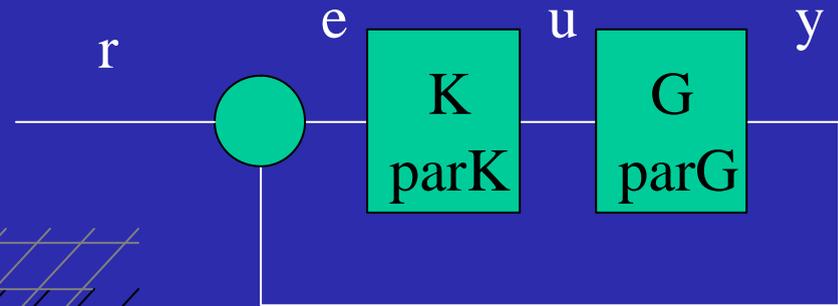


- Trouver la configuration déstabilisante la plus proche du nominal (●)
- Utilisation : aéronautique, machine outils, et cas particulier des marges dans de nombreuses applications



Exemple d'analyse de stabilité mu-analyse

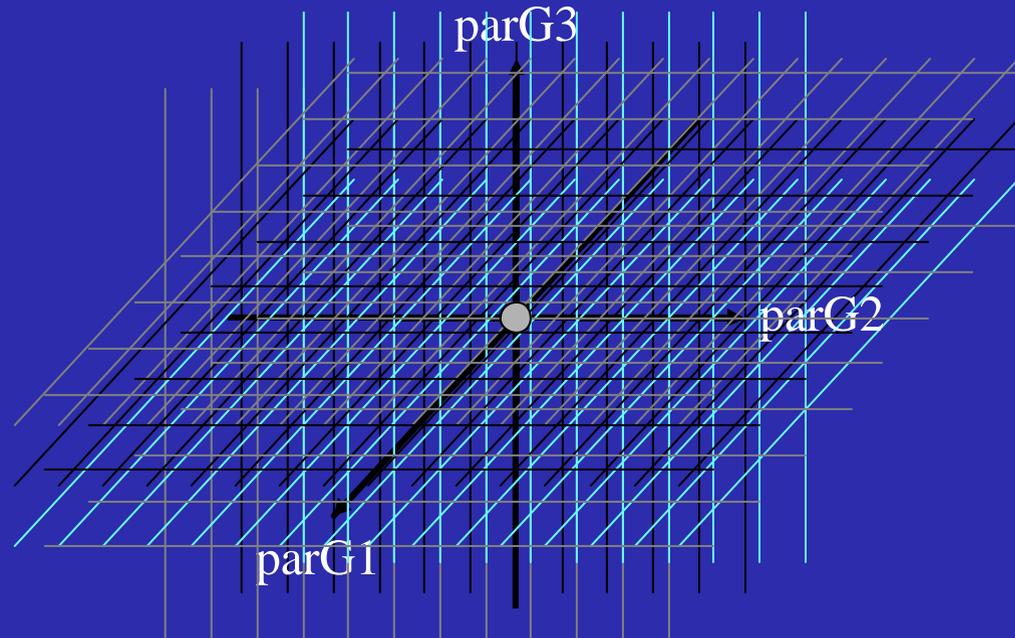
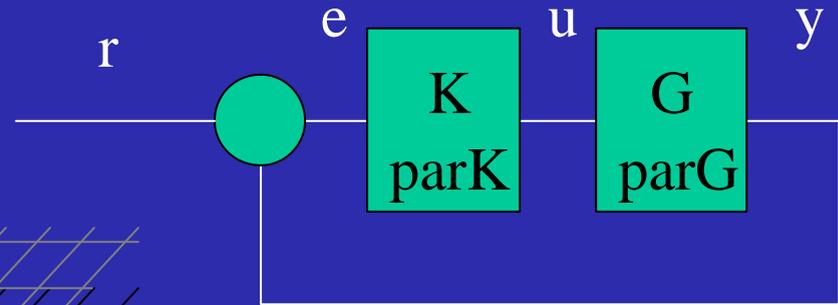
Analyse : recherche de pires cas





Exemple d'analyse de stabilité mu-analyse

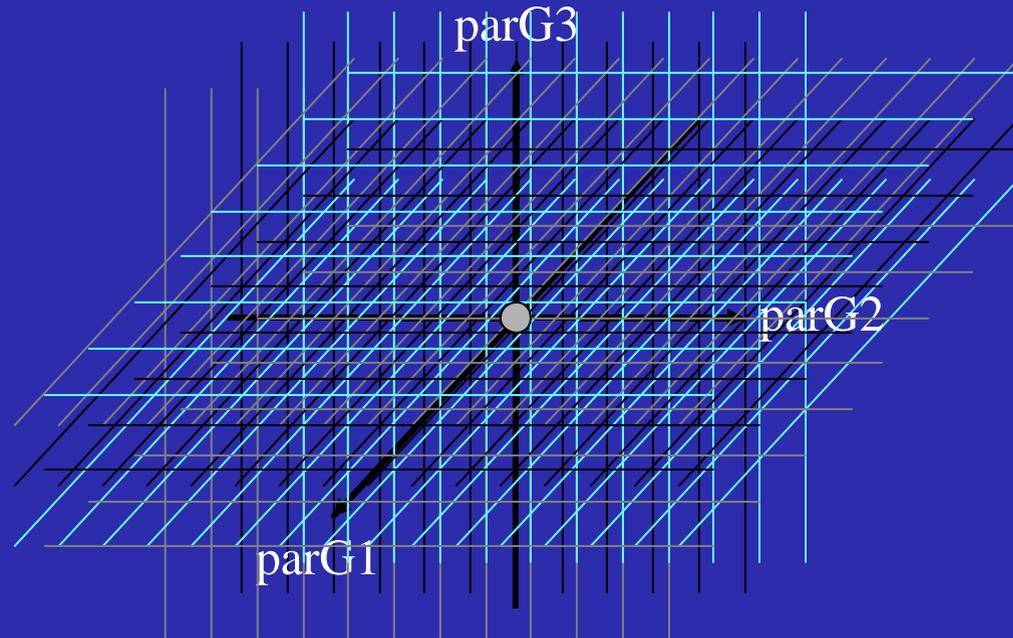
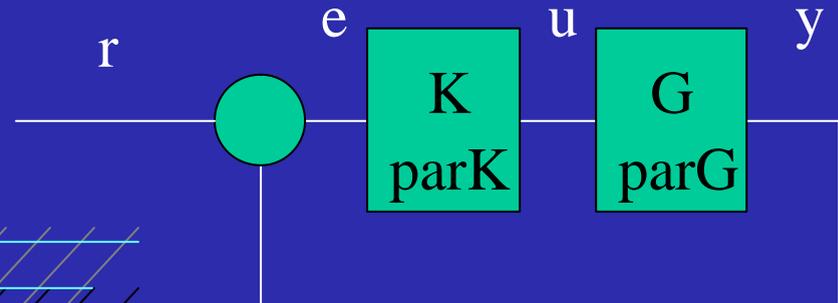
Analyse : recherche de pires cas





Exemple d'analyse de stabilité mu-analyse

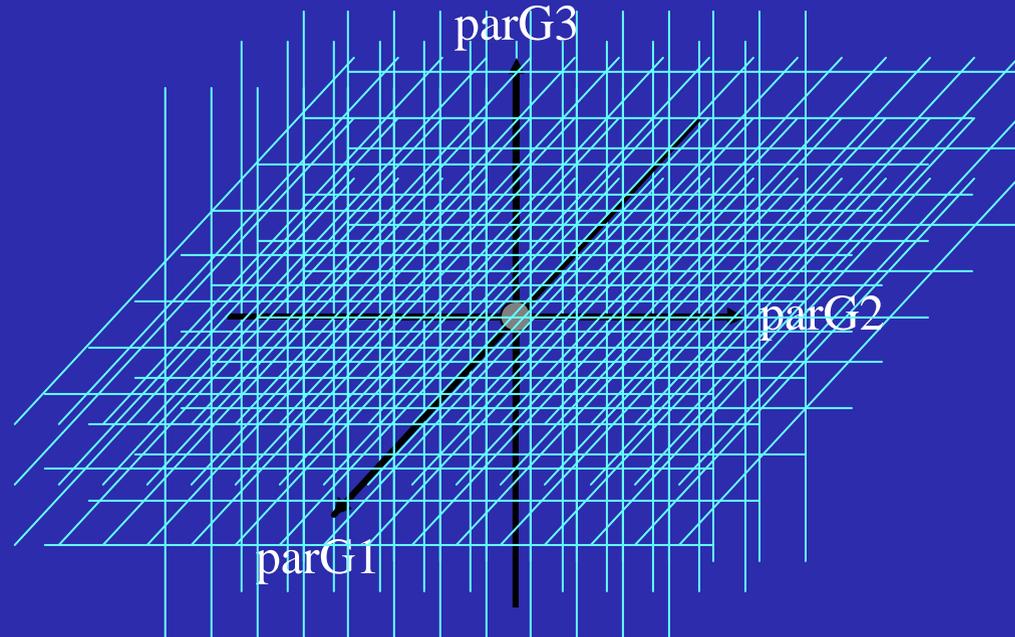
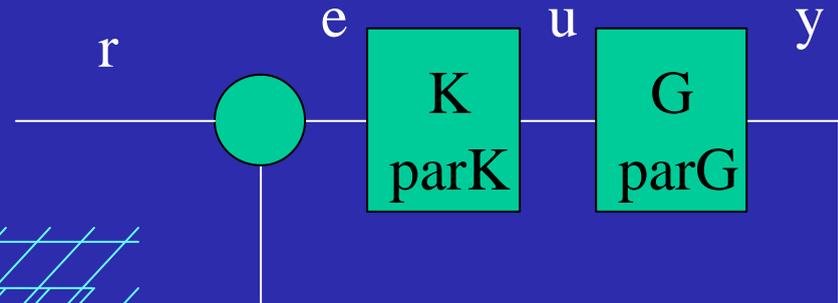
Analyse : recherche de pires cas





Exemple d'analyse de stabilité mu-analyse

Analyse : recherche de pires cas



- Résolution du problème \rightarrow NP
- *Non praticable pour plus de 6 ou 7 paramètres*



Exemple d'analyse de stabilité

Complexité

Exemple :

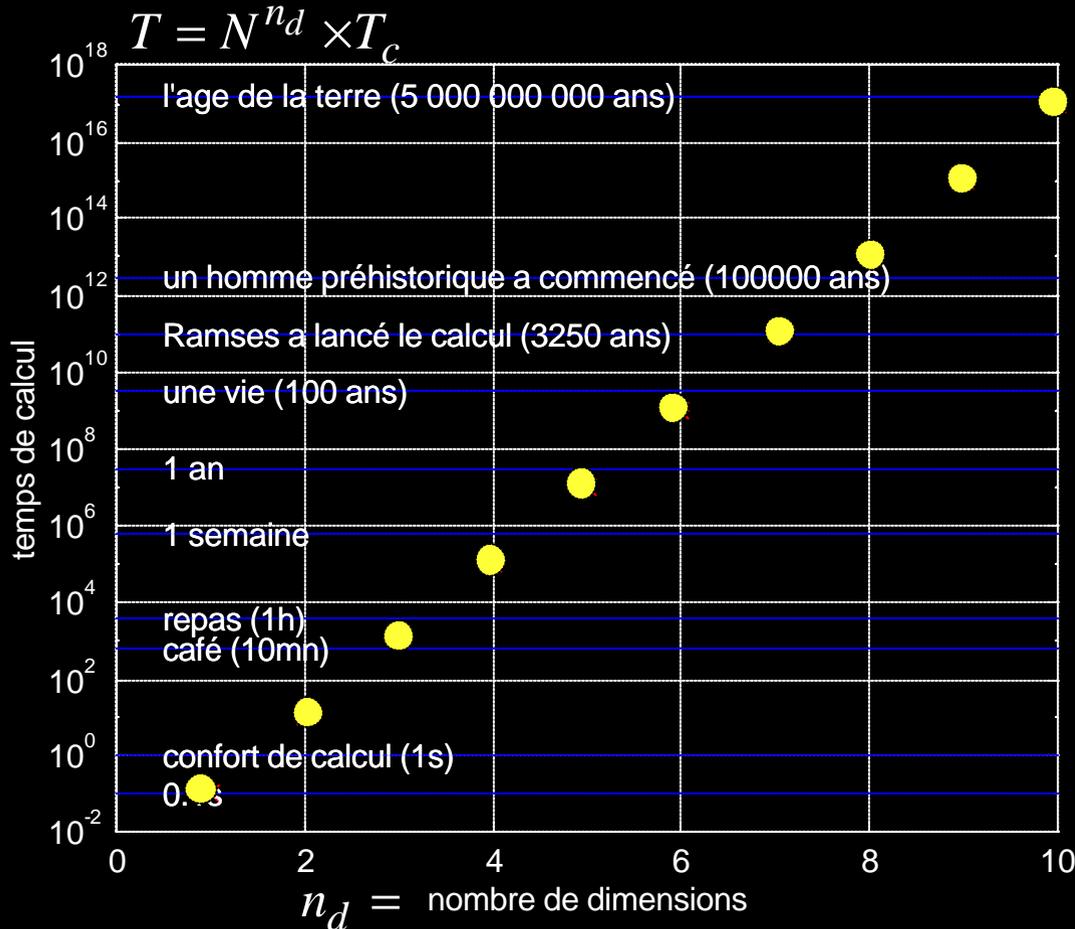
Temps d'un calcul

$T_c = 0.001s$

Nombre de points

$N = 100$

$\rightarrow T = N^{n_d} \times T_c$





Exemple d'analyse de stabilité

Complexité

Exemple :

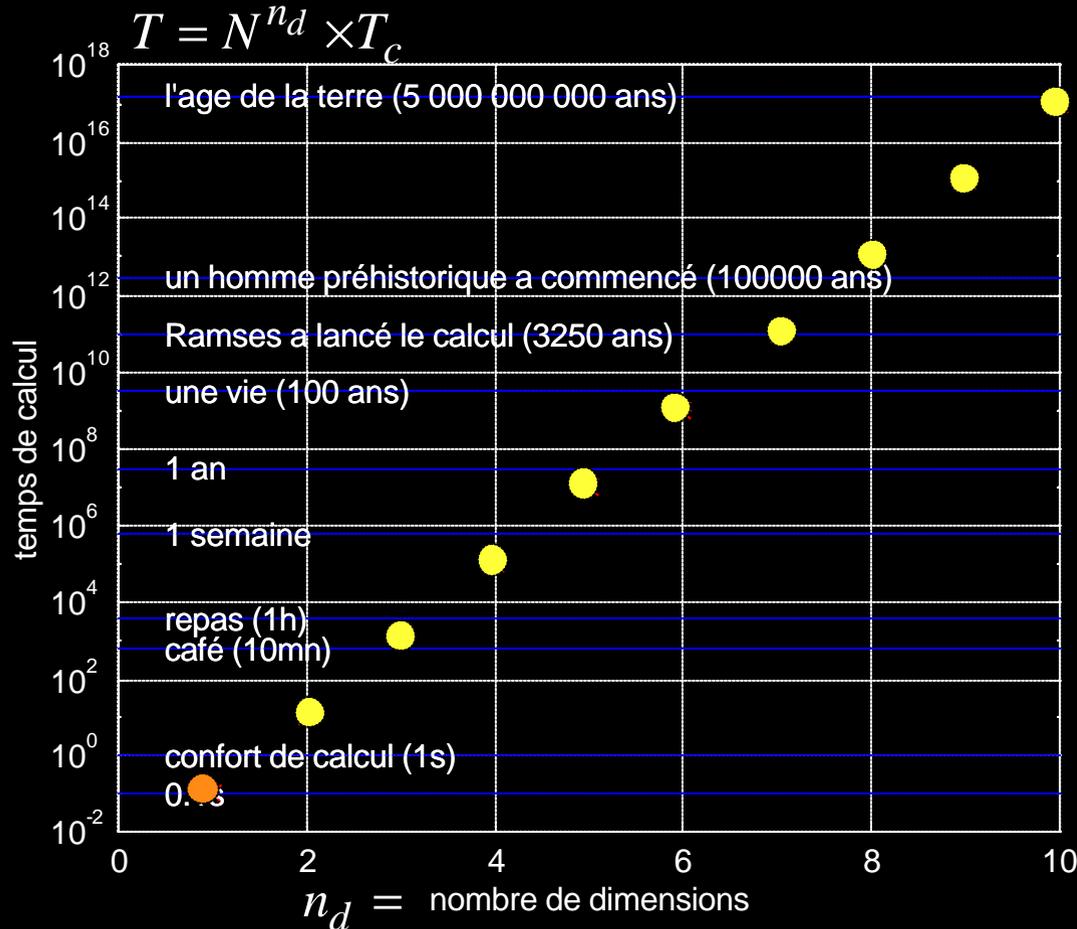
Temps d'un calcul

$T_c = 0.001s$

Nombre de points

$N = 100$

$\rightarrow 1p \ T = 0.1 \ s$





Exemple d'analyse de stabilité

Complexité

Exemple :

Temps d'un calcul

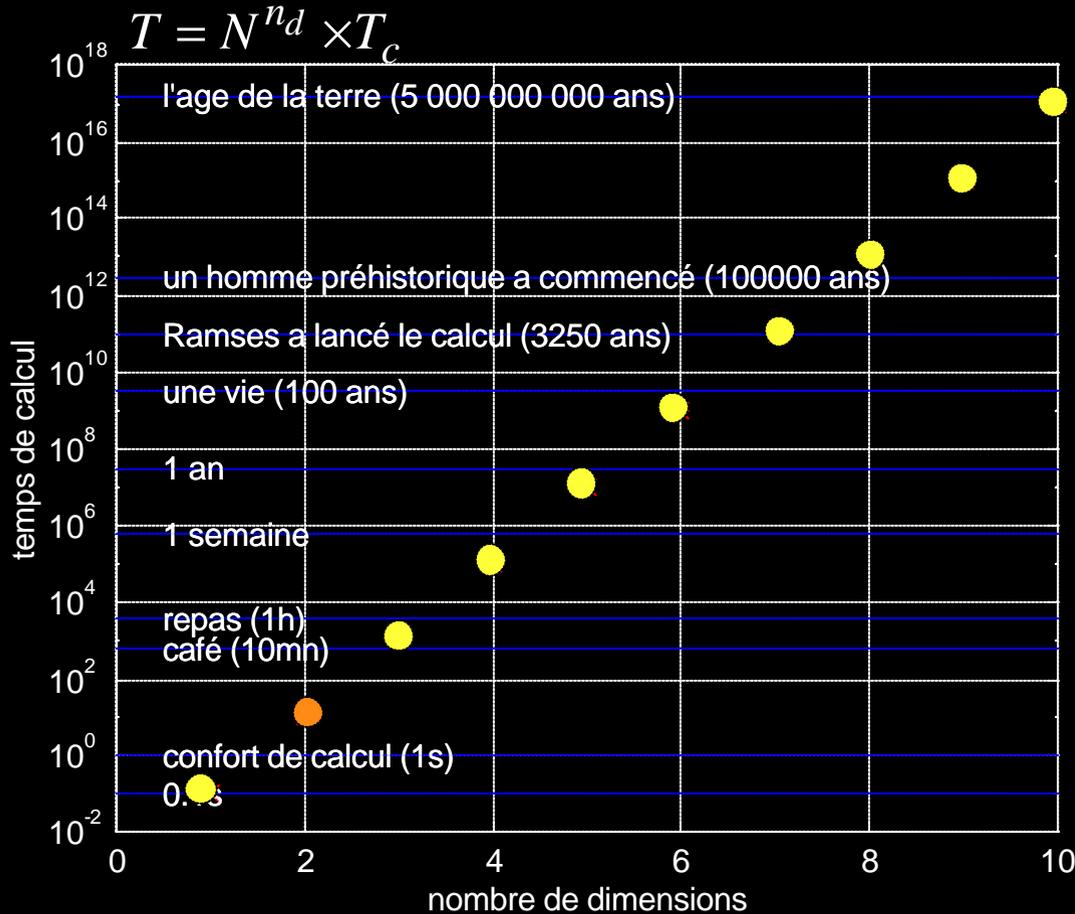
$T_c = 0.001s$

Nombre de points

$N = 100$

→ 1p $T = 0.1 s$

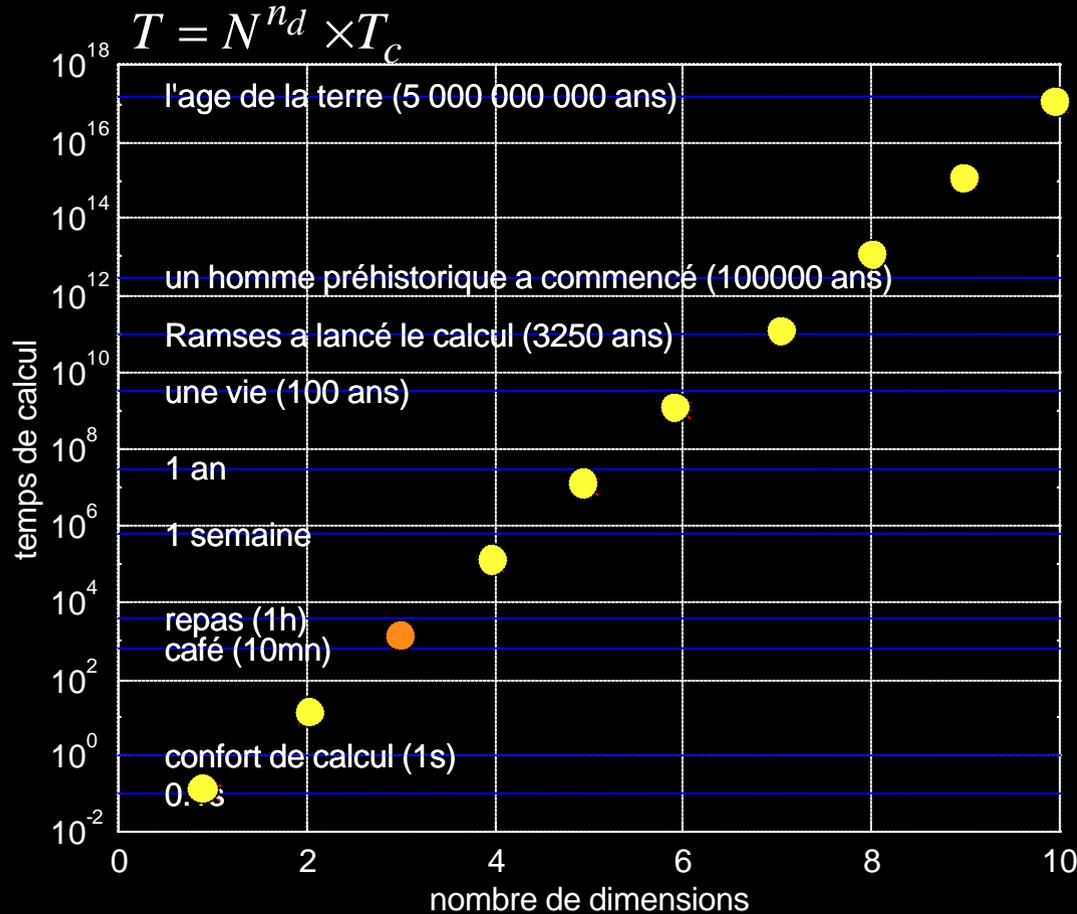
→ 2p $T = 10 s$





Exemple d'analyse de stabilité

Complexité



Exemple :

Temps d'un calcul

$T_c = 0.001s$

Nombre de points

$N = 100$

→ 1p $T = 0.1 s$

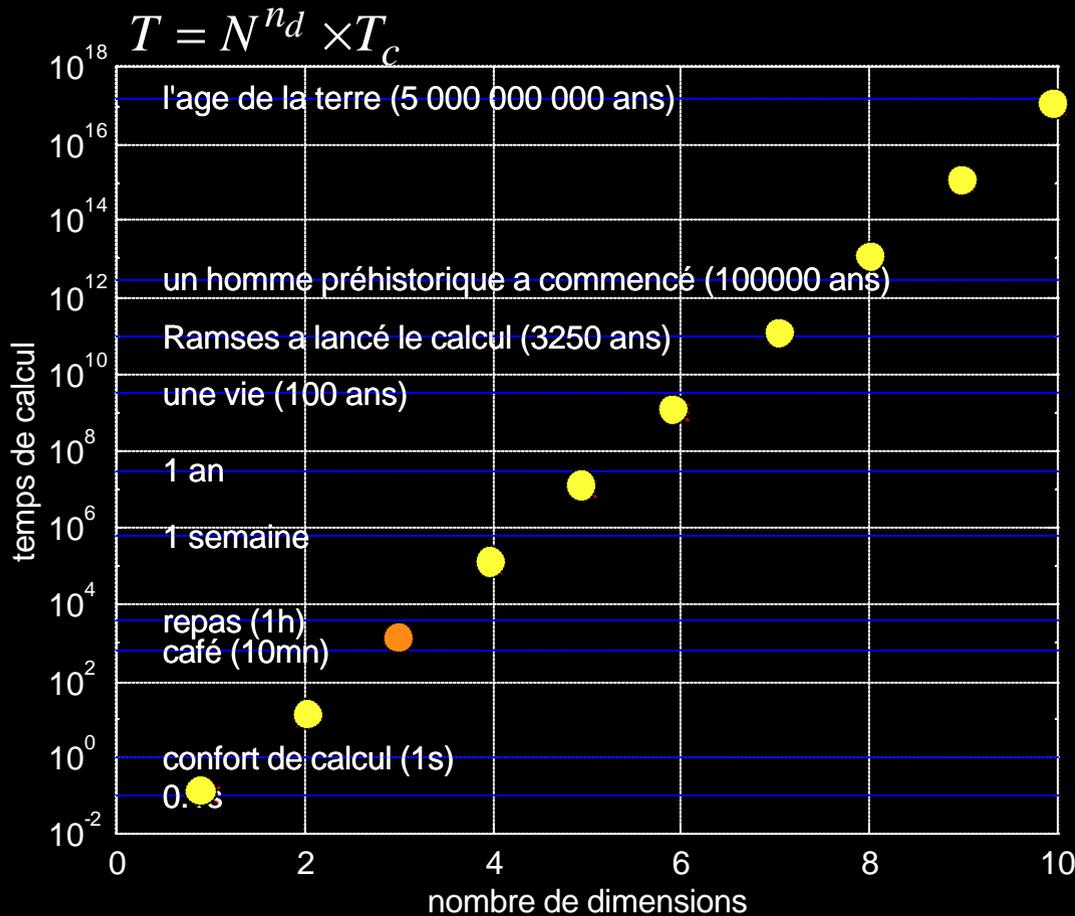
→ 2p $T = 10 s$

→ 3p $T = 1000 s$



Exemple d'analyse de stabilité

Complexité



Exemple :

Temps d'un calcul

$T_c = 0.001 s$

Nombre de points

$N = 100$

→ 1p $T = 0.1 s$

→ 2p $T = 10 s$

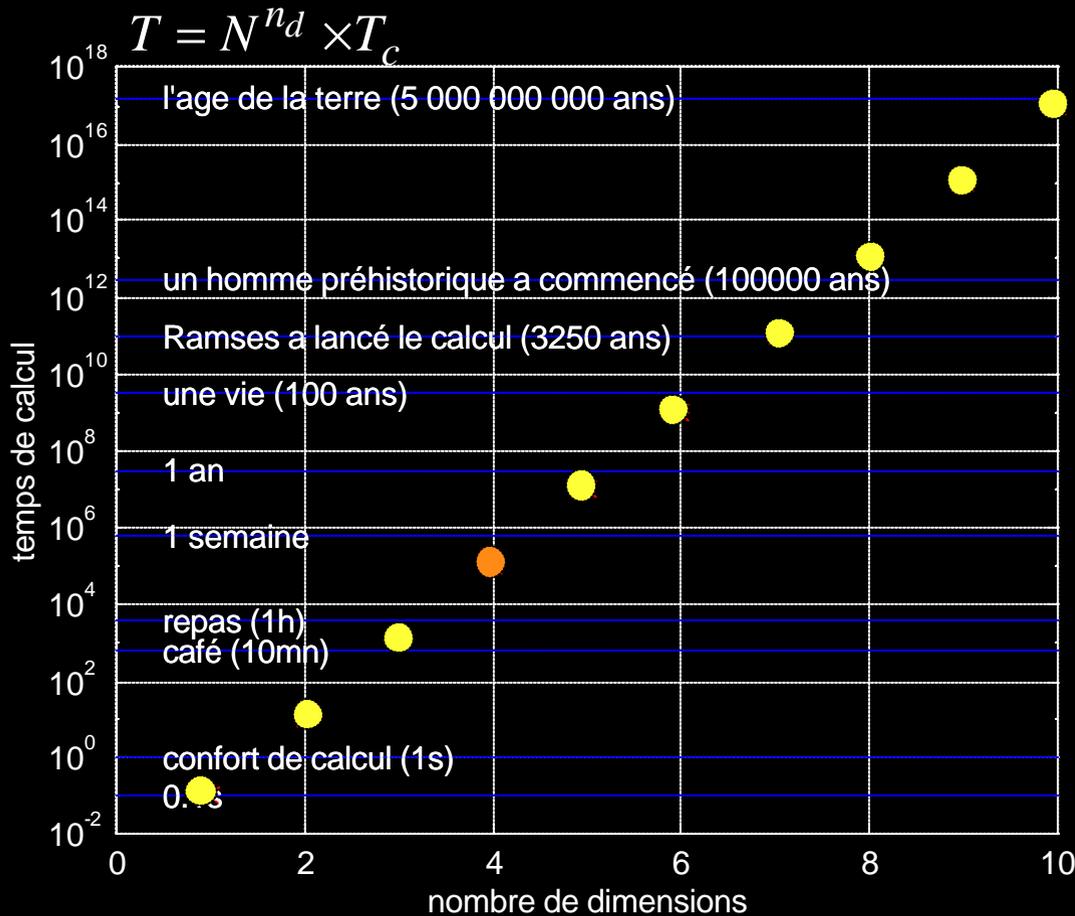
→ 3p $T = 1000 s$

$= 16,6 mn$



Exemple d'analyse de stabilité

Complexité



Exemple :

Temps d'un calcul

$T_c = 0.001 s$

Nombre de points

$N = 100$

→ 1p $T = 0.1 s$

→ 2p $T = 10 s$

→ 3p $T = 1000 s$

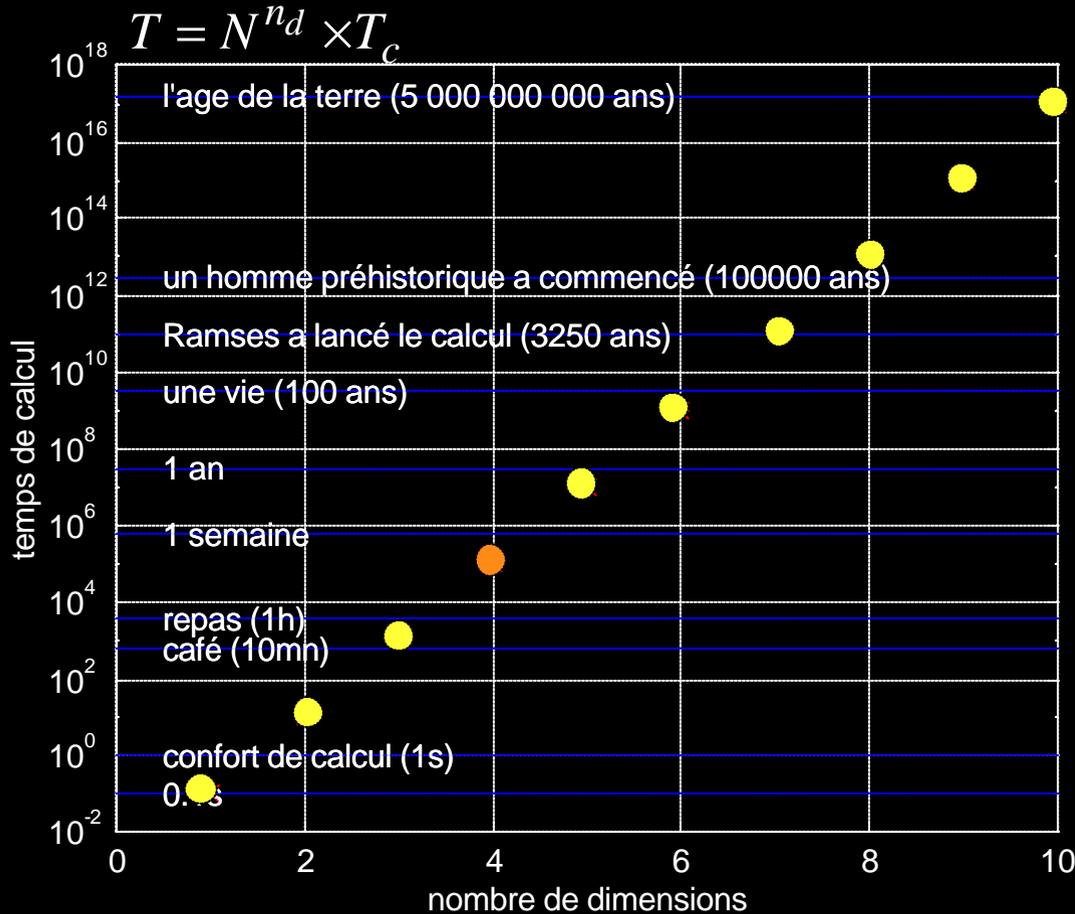
$= 16,6 mn$

→ 4p $T = 1666 mn$



Exemple d'analyse de stabilité

Complexité



Exemple :

Temps d'un calcul

$T_c = 0.001 s$

Nombre de points

$N = 100$

→ 1p $T = 0.1 s$

→ 2p $T = 10 s$

→ 3p $T = 1000 s$

= 16,6 mn

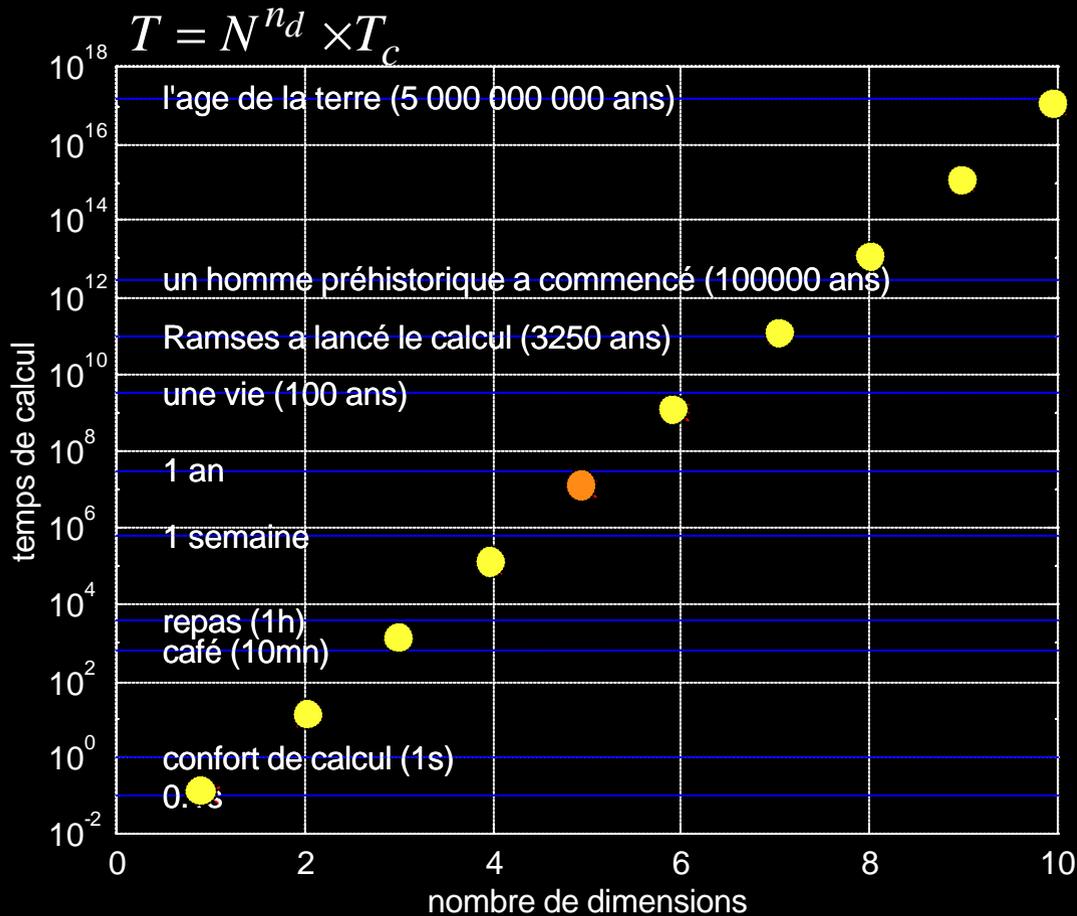
→ 4p $T = 1666 mn$

= 27.7 h



Exemple d'analyse de stabilité

Complexité



Exemple :

Temps d'un calcul

$T_c = 0.001 s$

Nombre de points

$N = 100$

→ 1p $T = 0.1 s$

→ 2p $T = 10 s$

→ 3p $T = 1000 s$

= 16,6 mn

→ 4p $T = 1666 mn$

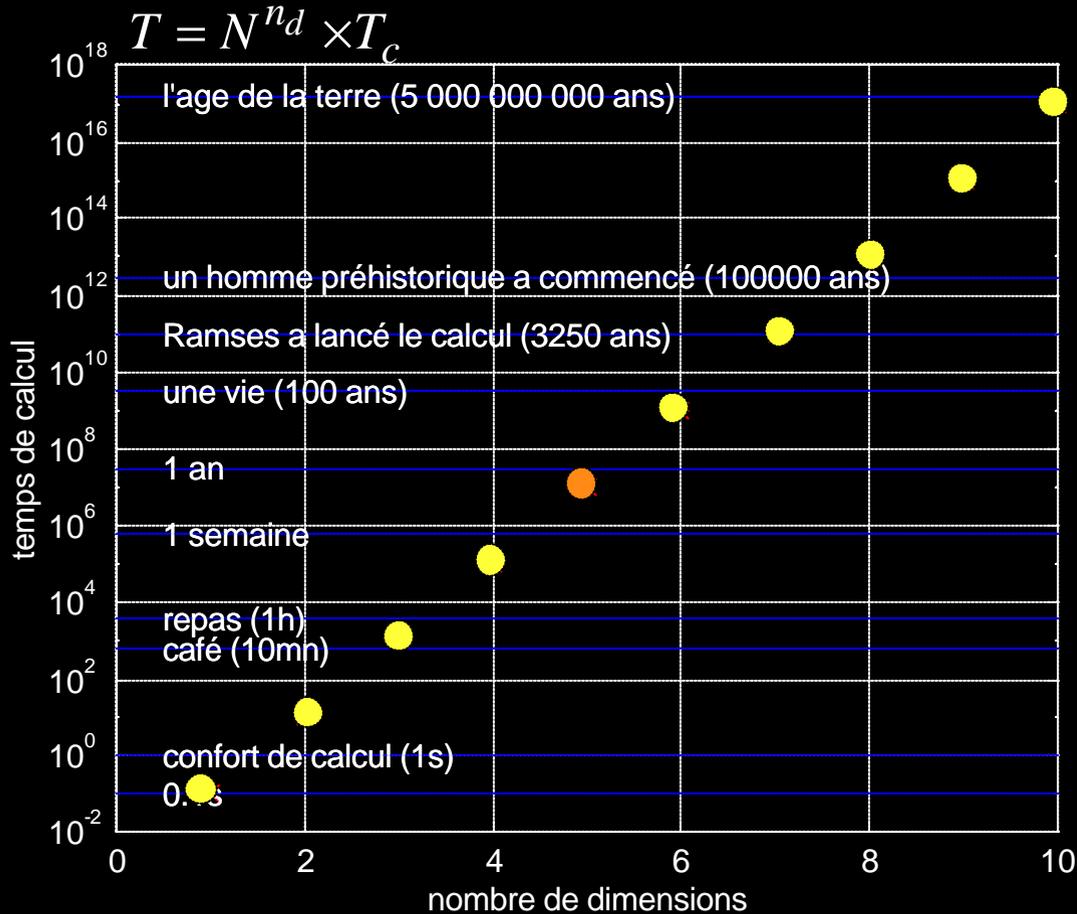
= 27.7 h

→ 5p $T = 2777 h$



Exemple d'analyse de stabilité

Complexité



Exemple :

Temps d'un calcul

$T_c = 0.001 s$

Nombre de points

$N = 100$

→ 1p $T = 0.1 s$

→ 2p $T = 10 s$

→ 3p $T = 1000 s$

= 16,6 mn

→ 4p $T = 1666 mn$

= 27.7 h

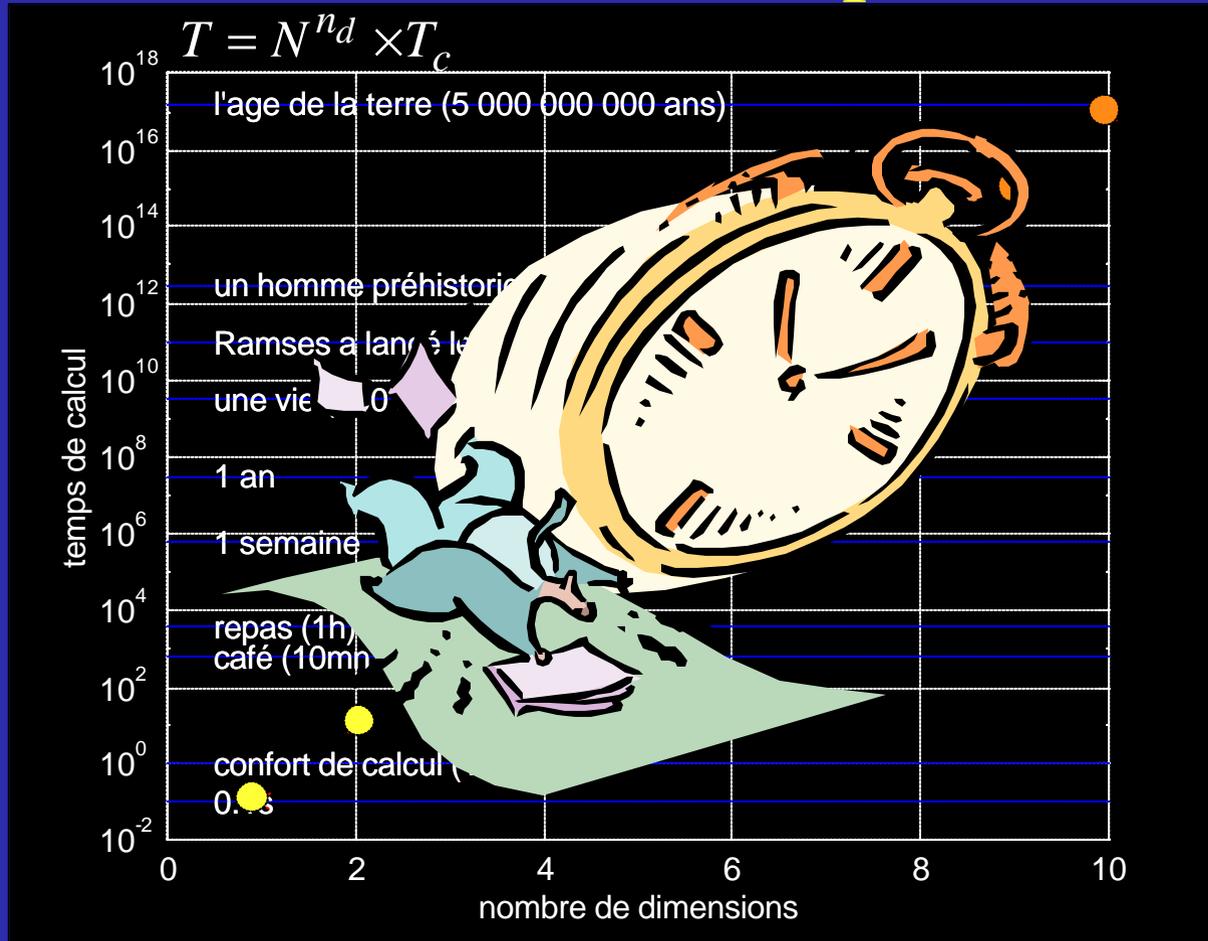
→ 5p $T = 2777 h$

= 115 jours



Exemple d'analyse de stabilité

Complexité



Exemple :

Temps d'un calcul

$T_c = 0.001s$

Nombre de points

$N = 100$

→ 1p $T = 0.1 s$

→ 2p $T = 10 s$

→ 3p $T = 1000 s$

= 16,6 mn

→ 4p $T = 1666 mn$

= 27.7 h

→ 5p $T = 2777 h$

= 115 jours

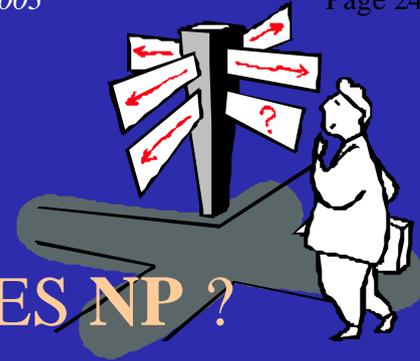


Problématique

- Des demandes industrielles très actuelles :
 - Formulation de *critères généraux*
 - *Formalisation du cahier des charges*
 - Prise en compte de *cahier des charges plus complet (complexe), dans le cas non linéaire ...*
 - Prise en compte de *incertitudes de modèle*
 - Prise en compte de *dynamiques inconnues*
 - Résolution de *problèmes de performance optimale*
 - Formulation de *problème calculables*
 - Recherche de méthodes : *générales, simples à mettre en œuvre, de type CAO*
 - Formulation de problèmes avec fortes *contraintes structurelles* (ordre, PID ...)



Problématique



QUE FAIRE FACE A CES PROBLEMES NP ?



Optimisation directe

- Introduire de l'a priori
 - Partir proche de l'optimum
 - Ajouter des contraintes

- Pas de propriétés garanties
- Minimum local



Formulation convexe

- Immersions / Multiplieurs
- Relaxation

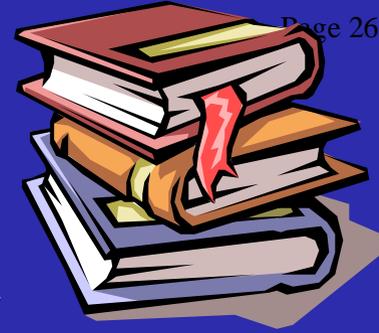
- Propriété forte de convergence
- Minimum global

Ce n'est pas incompatible !



Les outils

- Pourquoi cette évolution actuelle ?
 - Elle est indissociable
 - de l'évolution des **moyens de calculs**
 - des **méthodes théoriques** de résolution
- Aujourd'hui : moyens efficaces de résolution de l'optimisation convexe



Les outils

- Les catégories :

- Programmation linéaire
- Optimisation quadratique I
- Optimisation quadratique II
- Optimisation semi-définie (LMI)
- Cas général convexe

- LP
$$\min_{Ax \leq b} c^T x$$

- QPI
$$\min_{Ax \leq b} x^T C_1 x + C_2 x$$

- QPII
$$\min c^T x$$

$$x^T A_1 x + A_2 x < b_1$$

$$x^T A_{n-1} x + A_n x < b_m$$

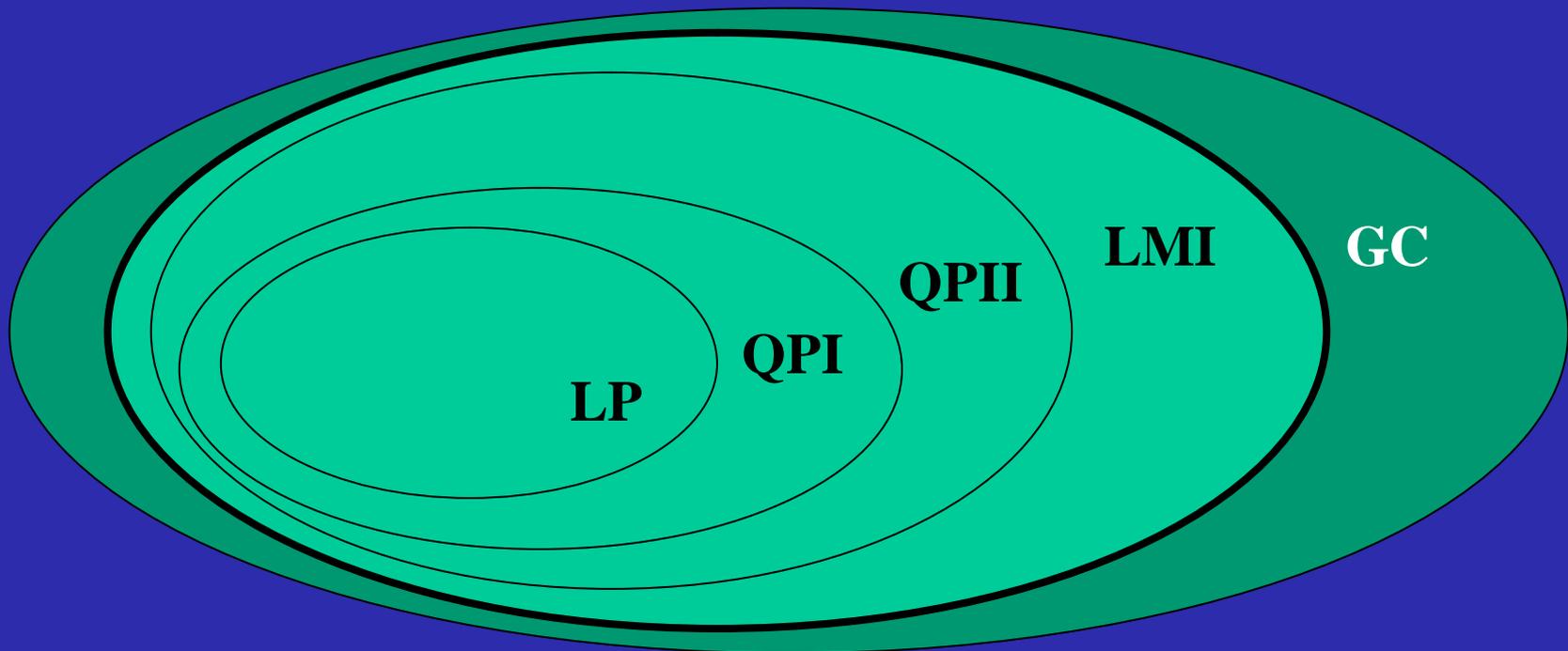
- LMI
$$\min_{F(x) > 0} c^T x$$

- GC
$$\min_{x \in C_{convexe}} f_{convexe}(x)$$



Les outils

- Comparaison des catégories :

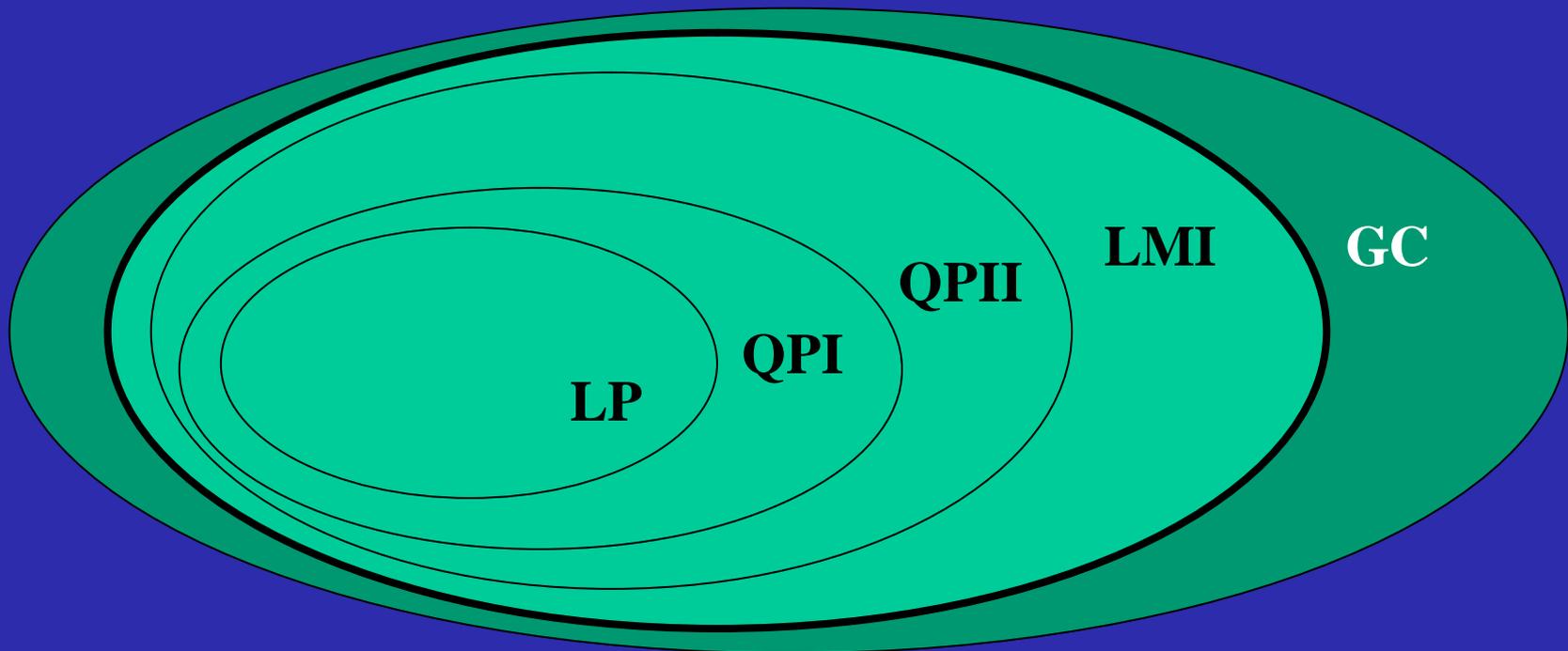


De très nombreux problèmes classiques sont exprimables en optimisation semi-définie



Les outils

- Comparaison des catégories :



De très nombreux problèmes classiques sont exprimables en optimisation semi-définie → **effet fédérateur**



Quelques références (1/2)

- F. Alizadeh, J.P. Haeberly, M.L. Overton, A new primal dual interior point method for semidefinite programming, In Proceedings of the fifth SIAM Conference of applied Linear Algebra, Snowbird, Utah, June 1994.
- F. Alizadeh, Interior point method in semidefinite programming with application to combinatorial optimization, SIAM Journal on Optimization, 5 (1), pp. 13-51, February 1995.
- H. Akcay, B. Niness, Rational basis functions for robust identification from frequency and time domain measurements, Automatica, 34, pp. 1101-1117, 1998.
- B.D.O. Anderson, From Youla-Kucera to Identification, Adaptive and Nonlinear Control, IEEE Transactions on Automatic Control, 34, pp. 1485-1506, 1998.
- S. Boyd, C. Barrat, Linear Controller Design: Limits of Performance, Prentice-Hall, 1991
- S. Boyd, V. Balakrishnan, C. Barrat, N. Khaishi, X. Li, D. Meyer, S. Norman, A new CAD method and associated architectures for linear controllers, IEEE Transactions on Automatic Control, 33 (3), pp. 268-283, March 1988.
- S. Boyd, C. Barrat, S. Norman, Linear controller design: limits of performance via convex optimization, IEEE Transactions on Automatic Control, 78 (3), pp.529-574, March 1988.
- S. Boyd, C. Crusius, A. Hansson, Control Applications of Nonlinear Convex Programming, Journal of Process Control, 8 (5-6), pp. 313-324, 1998
- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balaskrishnan, Linear Matrix Inequalities in systems and control theory, SIAM Publications, June 1994.
- A. Ben-Tal, A. Nemirovski, Robust convex optimization, Mathematics of operations research, 23, pp. 769-805, 1998.
- S. Boyd, L. Vandenberghe, Introduction to convex optimization with Engineering Applications, Lecture Notes for Electrical Engineering Department Stanford University, 1995.
- S. Boyd, L. Vandenberghe, M. Grant, Efficient convex optimization for engineering design, In Proceedings IFAC Symposium on Robust Control Design, Rio de Janeiro, Brazil, 1994.
- B.Clément, S.Hbaieb, G. Duc, S. Font, Paramétrisation de Youla : application ... la commande robuste par optimisation convexe, APII Journal Européen des Systèmes Automatisés, 35, (1-2), pp. 33-48, février 2001.
- G.B. Dantzig, Linear programming and extensions, Princeton University press, 1963.
- G. Duc, S. Font, Commande Hinfini et mu analyse : des outils pour la robustesse, Édition Hermes, 1999.
- G. Ferreres, F. Demourant, Retuning of a robust controller by a LP method, Proceedings of the IFAC Workshop of Control Applications of Optimization, St Peterbourg, Russie, 2000.
- G. Ferreres, F. Demourant, Le rajustement de correcteurs robustes par optimisation LP/QP, Journées Doctorales d'Automatique, p 69, Toulouse, France, 2001.
- D.J. Fowell, R.A. Bender, Computing the estimator controller from a compensator, International Journal of Control, 41, pp. 1565-1575, 1985
- A. Hansson, A primal dual interior point method for robust optimal control of linear discrete-time systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 45, pp. 1639-1655, 2000.
- H. A. Hindi, S. Boyd, Robust Solutions to L1, L2 and Linfini Uncertain Linear Approximation Problems using convex optimization, Presented at the American Control Conference, June 1998.



Quelques références (2/2)

- S. Hbaïeh, S. Font, Analyse de sp, cifications par synthŠse convexe : approche par convergence uniforme, Notes techniques, Contrat Nø P33/C03529/0/EP960, Novembre 2001.
- S. Hbaïeh, S. Font, SynthŠse de lois de commandes optimales par optimisation convexe, Journ,es Doctorales d'Automatique, Toulouse, France, septembre 2001.
- S. Hbaïeh, S. Font, P. Bendotti, C-M. Falinower, Finite dimensional Q-parameterization for continuous time control design, 10th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Lisbonne, Portugal, July 2002.
- S. Hbaïeh, S. Font, P. Bendotti, C-M. Falinower, Convex optimal control design via piecewise linear approximations, 15th IFAC World Congress, Barcelone, Espagne, July 2002.
- S. Hbaïeh, S. Font, P. Bendotti, C-M. Falinower, Convex optimization for control analysis - Application to the Steam Generator Water Level, 11th IEEE international Conference on Control Applications, Glasgow, Scotland, September 2002.
- S. Hbaïeh, S. Font, P. Bendotti, C-M. Falinower, An LMI formulation of convex optimal control design for continuous time applications, 4th Asian Control Conference, Singapore, September 2002.
- H. Hindi, B. Hassidi, S. Boyd, Multiobjective H2/H?-optimal control via finite dimensional Q-parametrization and LMI, American Control Conference, pp. 3244-3248, 1998.
- N Kamkar, A new polynomial time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4 (4), p. 373-395, 1984
- V. Kucera, *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*, New York Wiley, 1974.
- A. Megretski, A. Rantzer, System analysis via integral quadratic constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (6), pp. 819-830, 1997.
- B. Ninness, F. Gustafsson, A unifying construction of orthonormal bases for system identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (4), April 1997.
- N.H. Niemann, Application to the dual Youla parameterization, In proceedings of European Control Conference EDD'99, Karlsruhe, Germany, September 1999.
- S.G. Nash, A. Sofer, On the complexity of a practical interior-point method, *SIAM Journal of Optimisation*, 8 (3), pp. 833-349, August 1998.
- N. H. Niemann, J. Stoustrup, Gain scheduling using the Youla parameterization, submitted to the IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- V. Pareto, *Cours d'conomie Politique*, Rouge, 1896.
- Z. Szabo, J. Bokor, F. Schipp, Identification of rational approximate models in H? Using generalized orthonormal basis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (1), January 1999.
- J.M. Schumacher, Compensator synthesis using (C,A,B)-pairs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25, pp. 1133-1138, 1980.
- C.W. Scherer, Multiobjective H2/Hinfini control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40, pp. 1054-1062, 1995.
- C.W. Scherer, From Mixed to Multi-Objective Control, *IEEE Conference on Decision and Control*, 1999.
- C.W. Scherer, P. Gahinet, M. Chilali, Multiobjective output feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, pp. 896-911, 1997.
- K.C. Tan, K.K. tan, Y. Ci, Robust controller design for linear systems via evolutionary computation, proceeding of the fifth conference on control, automation, robotic and vision, pp. 434-439, Singapore, 1998.
- R.J. Vanderbei, LOQO user?s manuel, Technical report SOL 92-05, dept. Of civil engineering, and operations researches, Princeton University, Princeton, NY, 1992.
- J. K Ward, R. H. Middleton, Sequential approach to control systems synthesis with constraints, 14th triennial World Congress IFAC, Beijing, P. R. China, 1999.
- D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno, Modern Wiener Hopf design of optimal controller, part II : multivariable case, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21, pp. 319-338, 1976.



Quelques références

- Points d'entrées

- S. Boyd, V. Balakrishnan, C. Barrat, N. Khaishi, X. Li, D. Meyer, S. Norman, A new CAD method and associated architectures for linear controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 (3), pp. 268-283, March 1988.
- S. Boyd, C. Barrat, S. Norman, Linear controller design: limits of performance via convex optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 78 (3), pp.529-574, March 1988.
- S. Boyd, C. Barrat, *Linear Controller Design: Limits of Performance*, Prentice-Hall, 1991
- S. Boyd, C. Crusius, A. Hansson, Control Applications of Nonlinear Convex Programming, *Journal of Process Control*, 8 (5-6), pp. 313-324, 1998
- B. Ninness, F. Gustafsson, A unifying construction of orthonormal bases for system identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (4), April 1997.
- N.H. Niemann, Application to the dual Youla parameterization, In proceedings of European Control Conference EDD'99, Karlsruhe, Germany, September 1999.
- Z. Szabo, J. Bokor, F. Schipp, Identification of rational approximate models in H_∞ Using generalized orthonormal basis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (1), January 1999.



Une nécessité industrielle

- Collaborations industrielles :

Optimisation d'un réseau multi-énergie. Collaboration avec EDF / projet fédérateur, Guillaume SANDOU.

Modélisation (pour l'optimisation), reformulation, optimisation convexe et mixte.

Analyse de cahier des charges en automatique par optimisation convexe. Slim HBAIEB, Collaboration avec EDF, thèse soutenue septembre 2002.

Optimisation convexe, reformation, LMI.

Guidage optimale d'engin volant.

approche par optimisation convexe et optimisation générale.

En collaboration avec THALES AIR DEFENSE.

Retouche de correcteur (retunning). Développement d'outils interactifs. Étude des bruits numériques sur les critères (XXX).

Optimisation générale.



Une nécessité industrielle

- Collaborations industrielles :

Optimisation d'un réseau multi-énergie. Collaboration avec EDF / projet fédérateur, Guillaume SANDOU.

Modélisation (pour l'optimisation), reformulation, optimisation convexe et mixte.

Analyse de cahier des charges en automatique par optimisation convexe. Slim HBAIEB, Collaboration avec EDF, thèse soutenue septembre 2002.

Optimisation convexe, reformation, LMI.

Guidage optimale d'engin volant.

approche par optimisation convexe et optimisation générale.

En collaboration avec THALES AIR DEFENSE.

Retouche de correcteur (retuning). Développement d'outils interactifs.

Étude des bruits numériques sur les critères (XXX).

Optimisation générale.



Une nécessité industrielle

- Collaborations industrielles :

Optimisation d'un réseau multi-énergie. Collaboration avec EDF / projet fédérateur, Guillaume SANDOU.

Modélisation (pour l'optimisation), reformulation, optimisation convexe et mixte.

Analyse de cahier des charges en automatique par optimisation convexe. Slim HBAIEB, Collaboration avec EDF, thèse soutenue septembre 2002.

Optimisation convexe, reformation, LMI.

Guidage optimale d'engin volant.

approche par optimisation convexe et optimisation générale.

En collaboration avec THALES AIR DEFENSE.

Retouche de correcteur (retunning). Développement d'outils interactifs.

Étude des bruits numériques sur les critères (XXX).

Optimisation générale.



Conclusions

- Pourquoi un tel domaine ?
 - Mise au point de méthodes CAO utilisables par l'ingénieur, utilisant la puissances de calcul maintenant disponible.
- Un pari sur l'évolution des puissances de calcul
 - Et si les méthodes de calcul explosaient (calcul parallèle) il y aurait sans doute de nombreuses autres avancées.



Conclusions

- Poursuite des travaux de recherche
 - Poursuite du premier thème :
le pouvoir dire NON,
 - amélioration de la calculabilité,
 - étude de nouvelles formulations LMI.
 - Extension à de nouveaux critères :
 - Vers le non linéaire / cadre convexe / incrémental
 - Vers le retuning
 - Qualification de performance maximale et étude de faisabilité de cahier des charges sur engin au sol (avec : XXX).
 - Optimisation convexe, optimisation générale, analyse de cahier des charges



Du cahier des charges au correcteur ou la quête d'un problème polynomial

Stéphane FONT

Service Automatique - Gif

