
Automatique fréquentielle : des critères graphiques à l'optimisation LMI

Gérard Scorletti* — **Vincent Fromion**** — **Stéphane Font*****

* LAP-ISMRA Université de Caen, 6 Bd. du Maréchal Juin, F14050 Caen
scorletti@greyc.ismra.fr

** LASB INRA-Montpellier, 2 place P. Viala, F34060 Montpellier
fromion@ensam.inra.fr

*** Service Automatique Supélec, Plateau du Moulon, F91192 Gif-sur-Yvette
font@supelec.fr

RÉSUMÉ. L'automatique fréquentielle classique connaît une forte évolution avec l'émergence d'outils de Conception Assistée par Ordinateur basés sur l'optimisation convexe comme alternative au réglage à la main d'asservissements à partir de tracés graphiques. Les bénéfices sont importants : exploration rapide des compromis d'un cahier des charges, commande multivariable, analyse fine des effets d'incertitudes, etc. Cette évolution n'est pas le fruit du hasard : elle est l'aboutissement de la formalisation rigoureuse des concepts classiques de l'automatique fréquentielle. Ces travaux qui se sont principalement concentrés sur les systèmes linéaires stationnaires avec l'approche H_∞ sont en cours de généralisation aux systèmes non linéaires à travers l'utilisation de la norme incrémentale. L'objectif de cet article est d'évoquer de façon informelle les différents aspects de cette mutation (version longue disponible dans [SCO 02]).

ABSTRACT. Recently, a strong evolution occurs in the feedback control using frequency domain approach. Computer Aided Design tools involving optimisation emerges as an alternative to traditional tuning based on frequency diagrams as Bode, Black and so one. Benefits are impressive: direct investigation of possible trade-offs, precise analysis of uncertainty effects and so one. This evolution does not happen by chance: it is the result of a rigorous formulation of classical concepts of automatic control. These results mainly focus on linear time invariant systems with the so called H_∞ approach: its extension to nonlinear systems is under progress with the incremental norm approach. This paper purpose is to illustrate different aspects of this evolution in a non formal way (the long version available in [SCO 02]).

MOTS-CLÉS : automatique fréquentielle, robustesse, commande H_∞ , μ analyse, optimisation LMI, analyse non linéaire, séquençement de gains.

KEYWORDS: Classical control, robustness, H_∞ control, μ analysis, LMI optimization, nonlinear analysis, gain scheduling control.

1. Introduction

Les applications industrielles sont plus que jamais au coeur des enjeux actuels de l'automatique. Ce renouveau est lié à l'augmentation constante des exigences de qualité et de performance des systèmes asservis et l'exigence de plus en plus forte du "meilleur compromis". Les cahiers des charges d'asservissements industriels sont de plus en plus complexes et serrés. Tout cela a pour conséquence dans bien des cas d'invalider l'hypothèse de linéarité : les effets non linéaires des systèmes ne sont plus négligeables, ou même s'ils le sont, des correcteurs non linéaires sont souvent nécessaires pour satisfaire aux exigences de performance. Enfin, il faut prendre en compte dans le processus de synthèse l'évolution ou l'ajustement permanent du cahier des charges. Face à cela, l'automatique fréquentielle apparaît comme un outil incontournable, même si les outils classiques, généralement basés sur des critères graphiques et développés des années 30 aux années 60 ne sont pas adaptés pour traiter de problèmes aussi complexes. L'automatique fréquentielle a subi une profonde mutation depuis le début des années 80, ce qui se traduit par une activité de recherche très dynamique dans ce domaine. Le moteur de cette mutation est l'optimisation. L'optimisation a remplacé l'utilisation des critères graphiques qui ont permis, par leur simplicité, de populariser l'automatique fréquentielle. L'idée essentielle de cette nouvelle approche, et sans aucun conteste son succès actuel, est avant tout liée au fait qu'elle s'appuie sur les principes qui ont fait le succès de l'approche classique tout en l'étendant à l'ensemble des classes de systèmes usuellement considérés par les ingénieurs. L'objectif de ce papier est de montrer que, sous la forme de logiciels de conception assistée par ordinateurs, des outils basés principalement sur l'optimisation, étendant largement les critères graphiques tout en gardant leur simplicité, sont en cours de développement. Leur ambition est d'aborder les enjeux industriels actuels.

2. Automatique fréquentielle : un peu d'histoire

Face à ces défis, l'automatique fréquentielle apparaît comme un outil incontournable. L'automatique fréquentielle est une branche importante de l'automatique en tant que science de l'ingénieur, qui est très ancienne puisque ces origines remontent aux années 30.

Automatique fréquentielle classique. Des années 30 aux années 50, se développe l'automatique fréquentielle "classique" : on peut citer, par exemple, les travaux de Black [BLA 34], Nyquist [NYQ 32], Bode [BOD 45], Horowitz [HOR 63]. Cela correspond grossièrement à ce qui est couramment enseigné lors de la formation initiale des ingénieurs. C'est assez paradoxal quand on sait qu'elle se base sur la théorie des fonctions d'une variable complexe, une théorie très profonde et subtile qu'on ne peut pas demander aux ingénieurs de maîtriser. En fait, le succès de l'automatique fréquentielle est lié au développement d'outils de mise en œuvre que l'on peut appliquer sans maîtriser la théorie des fonctions d'une variable complexe. Il s'agit d'outils utilisant des critères graphiques basés sur des représentations fréquentielles (diagrammes de Bode, Black, Nyquist) et nécessitant la manipulation de schéma-blocs (préférés

à la manipulation d'équations). Le réglage d'asservissement de systèmes, en général monovariables, se fait "à la main" avec un fort recours au savoir-faire. Dès les origines, les avantages de la boucle de rétroaction (rejet de perturbations non mesurées et robustesse) ont été mis en avant.

Approche entrée/sortie. Très tôt (dans les années 60/70), l'extension de l'analyse de la stabilité des systèmes bouclés développée en automatique fréquentielle, des systèmes linéaires stationnaires aux systèmes non linéaires non stationnaires est entreprise : on peut citer les travaux de Sandberg [SAN 65], Zames [ZAM 60, ZAM 66], Safonov [SAF 80]. Elle est basée sur la théorie des opérateurs. Face au succès des outils de l'automatique classique, la motivation est d'offrir aux ingénieurs des outils équivalents mais pour les systèmes non linéaires. Beaucoup de résultats d'ordre en général théorique sont obtenus, avec, dans quelques cas, des outils (toujours graphiques) accessibles à l'ingénieur : voir, par exemple, le critère du cercle ou le critère de Popov. Cet axe de recherche décline à la fin des années 70, peut-être à cause de la difficulté à obtenir des outils accessibles alors que c'était une des motivations de départ.

Théorie de la robustesse. Les années 80 ont vu émerger une théorie de la robustesse des systèmes linéaires stationnaires à partir des résultats de l'analyse des systèmes non linéaires par l'approche entrée sortie (comme par exemple le théorème du petit gain ou le lemme de Kalman Yakubovich Popov). Evoquée par Zames en 1966 [ZAM 66] : *"One of the broader implications of the theory here concerns the use of functional analysis for the study of poorly defined systems. It seems possible, from only coarse information about a system, and perhaps even without knowing details of internal structure, to make useful assessments of quantitative behavior."* (cité par Safonov [SAF 80]), il faudra attendre la fin des années 70 et le début des années 80 pour que cette idée soit véritablement exploitée (Safonov [SAF 80]). L'accent est alors mis sur l'analyse de la robustesse des systèmes linéaires stationnaires multivariables [ZAM 81, DOY 81, SAF 81b] donnant naissance à la μ analyse [DOY 82b] (k_m analysis [SAF 82]). Cette avancée s'est basée sur un cadre mathématique rigoureux. Ce qui est remarquable, c'est qu'au-delà de la formalisation des spécifications de robustesse, ce cadre propose aussi une formalisation pertinente des spécifications de performance (proposée par Zames [ZAM 81]), formalisation respectant les concepts de base de l'automatique fréquentielle classique¹. C'est cette formalisation qui est à l'origine de l'approche H_∞ . Elle doit son nom à l'utilisation de la norme H_∞ (pondérée). Dans cette approche, la synthèse de la loi de commande est obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation ouvrant la voie à l'utilisation d'outils de conception assistée par ordinateur en automatique fréquentielle, en complément (voire parfois en remplacement pour des problèmes pratiquement inaccessibles aux outils classiques) du "réglage à la main" de l'automatique classique. Dans cette approche, le cahier des charges est placé au centre : comment régler l'asservissement d'un système multivariable de façon à remplir un cahier des charges ? Quels sont les compromis entre les différentes spécifications ?

1. La limitation fondamentale de l'automatique fréquentielle classique est liée à l'absence d'une formalisation rigoureuse du cahier des charges.

Optimisation convexe et informatique. Un outil de conception assistée ne peut être intéressant que dans la mesure où l’algorithme de synthèse est efficace. Au début des années 90, l’optimisation convexe, notamment l’optimisation convexe sous contraintes LMI (Linear Matrix Inequality), s’est fortement développée du fait de l’intérêt de ces problèmes d’optimisation en automatique [BOY 94], des forts progrès au niveau de leur résolution [NES 93] et de la puissance de calcul de plus en plus importante pour un coût de plus en plus faible. Nous verrons dans le fil de ce papier que cette classe de problèmes d’optimisation occupe une place centrale dans les avancées récentes (postérieures aux années 80) de l’automatique fréquentielle, comparable à celle des critères graphiques dans l’automatique fréquentielle classique. Le premier apport important de l’informatique à l’automatique fréquentielle a été la possibilité d’obtenir rapidement des tracés graphiques. Avec l’optimisation convexe, apparaît le second progrès important : synthèse rapide de lois de commande en mettant à profit la puissance de calcul disponible.

Approche entrée/sortie : le retour. Grâce à l’émergence de l’optimisation LMI, on est devenu capable de mettre en œuvre un grand nombre des résultats de l’analyse entrée/sortie de la stabilité des systèmes non linéaires. Par suite, les travaux des années 60/70 ont été repris vers le milieu des années 90 (voir par exemple des travaux de Megretsky [MEG 97]).

Commande robuste non linéaire. Devant le succès à la fois sur les aspects théoriques et pratiques de la commande robuste, une extension aux systèmes non linéaires a été proposée [FRO 95a, FRO 99, FRO 01]. La démarche adoptée est très similaire à celle de la commande robuste linéaire. Notamment, une formalisation rigoureuse du cahier des charges respectant les concepts de bases de l’automatique fréquentielle classique a été proposée : elle est basée sur l’utilisation de la norme incrémentale (pondérée), proposée comme extension de la norme H_∞ pondérée.

3. CAO en automatique fréquentielle : la commande H_∞ comme exemple

A la base de la commande H_∞ se trouve l’article de Zames de 1981 [ZAM 81]. Dans cette section, nous allons illustrer le fait que la commande H_∞ est la principale méthode de conception assistée par ordinateur de l’automatique fréquentielle. On peut la qualifier de méthode néoclassique (les concepts sous-jacents sont ceux de l’automatique fréquentielle classique ; la principale différence est que la commande H_∞ repose sur une formalisation mathématique rigoureuse du problème) et postmoderne (les outils utilisés sont basés sur les outils de l’approche moderne : représentation d’état, LQG, etc.). Nous allons d’abord illustrer le lien entre la synthèse H_∞ et la synthèse fréquentielle classique. La présentation adoptée est très informelle : l’objectif est de discuter simplement des problèmes plus que de les présenter rigoureusement. Une telle présentation semble nécessaire du fait, par exemple, que l’intérêt de la synthèse H_∞ basée sur le modelage de fonctions de transfert en boucle fermée n’est pas toujours largement reconnu (voir par exemple [ÅST 00]). Pour des documents introductifs à la synthèse H_∞ , voir par exemple les cours [DUC 99, DAM 01, SCO 01], le

livre [SKO 96] ainsi que la thèse [FON 95]; pour des exemples de mise en œuvre, voir par exemple [FON 94, FER 96, FER 99]. La figure 1 illustre le processus de concep-

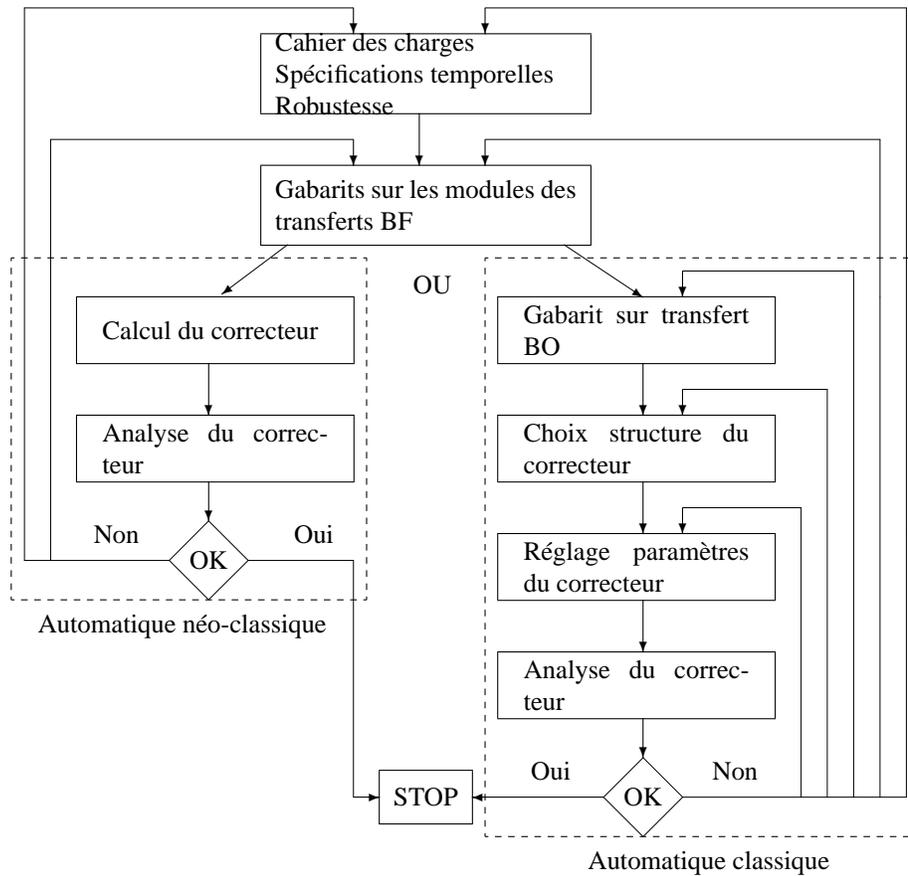


Figure 1. Liens entre Automatique fréquentielle classique et néo classique (H_∞)

tion de lois de commande en automatique fréquentielle classique et en automatique fréquentielle néoclassique (commande H_∞). Il est commenté sur un exemple.

CAO en automatique fréquentielle à travers un exemple. On considère le système en boucle fermée représenté figure 2. On désire mettre au point un correcteur monovariante K qui assure une certaine rapidité pour la réponse $y(t)$ à un échelon de référence $r(t)$, avec une limitation du dépassement et une erreur statique nulle. Dans l'approche fréquentielle, la première étape (étape "Gabarits sur les modules des transferts BF" (Boucle Fermée) sur la figure 1) est de traduire (approximativement) cette spécification en contraintes sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée :

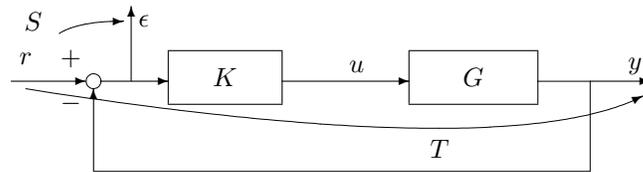


Figure 2. *Système en boucle fermée*

$S(j\omega)$ qui relie $r(j\omega)$ à l'erreur de suivi de trajectoire $\epsilon(j\omega)$: pour des références en échelon, $|S(j\omega)|$ doit présenter une pente de $+20dB/decades$ en basses pulsations avec des gains suffisamment faibles pour assurer la rapidité et une erreur statique faible et $T(j\omega)$ qui relie $r(j\omega)$ à la sortie $y(j\omega)$: la valeur maximale de $|T(j\omega)|$ peut être limitée pour essayer de contraindre le dépassement. Enfin, pour assurer une bonne

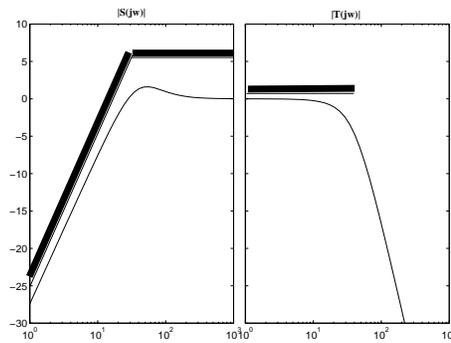


Figure 3. *Tracé de $|S(j\omega)|$ et de $|T(j\omega)|$*

robustesse vis-à-vis d'incertitudes multiplicatives inverses (marge de module), la valeur maximale de $|S(j\omega)|$ doit être contrainte. Ainsi, les spécifications du cahier des charges se formalisent naturellement par des contraintes portant sur les modules des fonctions de transfert du système en boucle fermée. Notre objectif est ici de rechercher un correcteur $K(p)$ qui satisfasse le cahier des charges. Les méthodes d'automatique fréquentielle classique reposent sur une recherche manuelle de la loi de commande $K(p)$. Comme ces fonctions dépendent non linéairement du correcteur $K(p)$ que l'on cherche à mettre au point : $S(p) = \frac{1}{1+G(p)K(p)}$ et $T(p) = \frac{G(p)K(p)}{1+G(p)K(p)}$. Une recherche "manuelle" de $K(p)$ de façon à satisfaire ces contraintes peut être très complexe, même dans le cas d'une structure simple pour le correcteur $K(p)$. L'idée fondamentale des méthodes de synthèse de lois de commande en automatique fréquentielle classique consiste à transformer ces contraintes portant sur des fonctions de transfert du système en boucle fermée en contraintes portant sur la fonction de transfert du système en boucle ouverte $L(p) = G(p)K(p)$, en utilisant les liens qui existent entre

les fonctions de transfert en boucle fermée et la fonction de transfert en boucle ouverte². L'intérêt est que $L(p)$ est une fonction linéaire de $K(p)$. L'étape suivante du processus de conception est donc de rechercher les contraintes que doit satisfaire la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ pour que le cahier des charges soit rempli (*étape "Gabarit sur transfert BO" (Boucle Ouverte) sur la figure 1*). Une fois que celles-ci sont déterminées, le correcteur $K(j\omega)$ doit être recherché manuellement de façon à ce que $L(j\omega)$ les satisfassent. La tâche est facilitée par le fait que $L(j\omega)$ est une fonction linéaire de $K(j\omega)$. Cette recherche se fait à l'aide du diagramme de Bode, du diagramme de Black, etc., de la fonction de transfert $L(j\omega)$. Pour cela, il est nécessaire de choisir une structure adaptée pour la loi de commande (*étape "Choix de la structure du correcteur" sur la figure 1*) comme par exemple un Proportionnel Integral avec ou sans avance de phase, etc. La structure étant déterminée, les paramètres du correcteur doivent être réglés de façon à ce que la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$ remplisse le cahier des charges (*étape "Réglage des paramètres du correcteur" sur la figure 1*). Il est enfin impératif de vérifier si le correcteur obtenu remplit bien le cahier des charges initial (*étape "Analyse du correcteur" sur la figure 1*). Si ce dernier n'est pas satisfait, alors soit il n'existe pas de correcteur remplissant le cahier des charges, soit un mauvais choix a été fait à l'une des étapes du processus de conception : cela peut venir une mauvaise traduction des spécifications temporelles du cahier des charges en contraintes sur les fonctions de transfert en boucle fermée³ ou des contraintes sur les fonctions de transfert en boucle fermée en contraintes sur la fonction de transfert en boucle ouverte ou encore d'un mauvais choix de structure ou de paramètres pour le correcteur. Vu l'abondance des possibilités, sans un bon savoir-faire et de la patience, il est donc difficile de clairement identifier pourquoi le correcteur obtenu ne remplit pas le cahier des charges, où le processus de conception doit être repris et enfin comment il doit être modifié.

La synthèse H_∞ est née de la recherche d'un outil qui, à partir des contraintes sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée, recherche directement s'il existe un correcteur $K(p)$ tel que les fonctions de transfert en boucle fermée satisfassent les contraintes sur leur module et, si oui, fournit un tel correcteur (*étape "Calcul du correcteur" sur la figure 1*). Avec un tel outil, si l'algorithme ne fournit pas de correcteur, c'est que soit il n'existe pas de correcteur remplissant le cahier des charges, soit que la traduction des spécifications temporelles du cahier des charges en contraintes sur les fonctions de transfert en boucle fermée est mauvaise⁴. Il en résulte, d'une part, une considérable simplification du processus de conception et, d'autre part, la possibilité de réellement tester l'existence d'un correcteur vérifiant le cahier des charges. Comment cela pourrait-il être possible ? Si on est capable de représenter les gabarits fréquentiels sur les modules des fonctions de transfert en boucle

2. Ces contraintes sur la fonction de transfert en boucle ouverte sont traduites sur une ou plusieurs représentations graphiques (diagrammes de Bode, de Nyquist et/ou de Black Nichols). C'est l'utilisation de ces représentations graphiques qui rend ces méthodes extrêmement attractives.

3. Rappelons que le passage des unes aux autres est assez approximatif.

4. Idem.

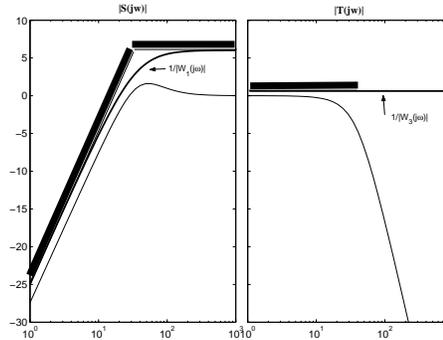


Figure 4. Tracé de $|S(j\omega)|$ et de $|T(j\omega)|$

fermée, $|S(j\omega)|$ et $|T(j\omega)|$ par l'inverse du module de fonctions de transfert $|W_1(j\omega)|$ et $|W_3(j\omega)|$, appelées *pondérations*, (voir figure 4) alors la vérification des gabarits s'écrit : $\forall \omega, |S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_1(j\omega)|}$ et $\forall \omega, |T(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_3(j\omega)|}$ c'est-à-dire, en introduisant la définition de la norme H_∞ d'une fonction de transfert stable $F(p)$ qui est donnée par⁵ : $\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} |F(j\omega)|$ on a

$$\|W_1 S\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \|W_3 T\|_\infty \leq 1. \quad [1]$$

Chaque pondération contient le modèle des signaux appliqués à l'entrée de la fonction de transfert en boucle fermée et le modèle des signaux que l'on veut avoir à sa sortie. Par exemple, dans le cas de la fonction de sensibilité S , avec $\epsilon = Sr$, on peut définir l'ensemble des signaux r par la fonction de transfert W_r tel que : $\{r(j\omega) \text{ tel que } |r(j\omega)| \leq |W_r(j\omega)|\}$ et l'ensemble des signaux de sortie ϵ par la fonction de transfert W_ϵ telle que : $\{\epsilon(j\omega) \text{ tel que } |\epsilon(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_\epsilon(j\omega)|}\}$. On aura alors $W_1 = W_\epsilon W_r$. On a donc ici un critère mathématique (les conditions (1)) qui indique si le cahier de charges traduit par des contraintes fréquentielles est vérifié. Reste maintenant à trouver l'algorithme qui permet de tester s'il existe un correcteur K tel que le critère (1) soit satisfait et si oui de le calculer.

De la nécessité d'un algorithme "efficace". Si l'on dispose d'un tel algorithme, le processus de conception de la loi de commande reste par nature itératif du fait du passage assez approximatif des spécifications temporelles du cahier des charges aux contraintes sur le module des fonctions de transfert en boucle fermée. Par suite, il est nécessaire de disposer d'un algorithme de calcul du correcteur efficace. Par efficace, il faut comprendre que l'algorithme se termine normalement en un temps raisonnable

5. Dans le cas d'une matrice de fonctions de transfert, on a : $\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \sigma_{max}(F(j\omega))$ où σ_{max} désigne la valeur singulière maximale.

(généralement en un temps qui est une fonction polynomiale d'une grandeur caractéristique du problème de commande) sur un résultat déterminé. Par exemple, on désire rechercher une loi de commande pour un système d'ordre n par l'exécution d'un algorithme. Le temps que va mettre sa résolution sur un ordinateur est fonction de la taille n du système à commander. Les problèmes considérés comme faciles (faible complexité) seront ceux pour lesquels le temps de résolution est une fonction polynomiale de la taille du problème (par exemple une fonction en n^3), ceux qui seront considérés comme difficile seront ceux pour lesquels le temps de résolution est une fonction exponentielle de la taille du problème (par exemple une fonction en 2^n). Il est clair que la résolution des problèmes difficiles mène rapidement à des temps de calcul rédhibitoire (par exemple supérieurs à plusieurs milliers d'années). Il est important de noter que la complexité d'un problème est intrinsèque, c'est-à-dire indépendante par exemple des évolutions technologiques des ordinateurs : l'augmentation de la rapidité de calcul des ordinateurs ne sera jamais suffisante pour mener à des temps de calcul réalistes.

Retour à l'exemple. On recherche donc une loi de commande $K(p)$ telle que le système bouclé (voir figure 2) soit stable et que :

$$\|W_1 S\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \|W_3 T\|_\infty \leq 1. \quad [2]$$

ce qui peut se récrire : trouver $K(p)$ telle que le système en boucle fermée est stable, $\forall \omega$, $\left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$ et $\forall \omega$, $\left| W_3(j\omega) \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$.

Les deux dernières conditions peuvent être vues comme un problème d'optimisation particulier appelé problème de faisabilité où la variable d'optimisation est la fonction de transfert $K(j\omega)$. Malheureusement, elles ne sont pas convexes en $K(j\omega)$.

Quelques notions d'optimisation. Un problème d'optimisation peut s'écrire sous la forme :

$$\min_{\xi \in \mathcal{C}} f(\xi)$$

où \mathcal{C} est l'ensemble des contraintes, ξ est la variable d'optimisation (ξ est de dimension finie quand $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$), la fonction f (avec $f(\xi) \in \mathbb{R}$) est l'objectif ou la fonction de coût. L'ensemble \mathcal{C} des contraintes peut être défini par un ensemble d'inégalités et d'égalités. Si leur nombre est fini et si ξ est de dimension finie alors on parle de problèmes d'optimisation de dimension finie. Un problème d'optimisation particulier (mais important) est le *problème de faisabilité* : trouver ξ , s'il existe, tel que $\xi \in \mathcal{C}$. En automatique, cela peut correspondre à rechercher un correcteur qui satisfasse les spécifications d'un cahier des charges. Dans le cas général, la résolution par un algorithme est un problème "compliqué". Pourquoi ? Très grossièrement, à partir d'un point initial ξ_0 , les algorithmes efficaces disponibles recherchent un minimum local. Si la fonction f admet plusieurs minima, le résultat va dépendre du point initial ξ_0 . Un cas très intéressant est celui où il n'existe qu'un seul minimum local (minimum local = minimum global) : indépendamment du point initial, le minimum global sera alors atteint. Cette propriété est obtenue dans le cas où f est une fonction convexe et où \mathcal{C}

est convexe : on parle alors d'*optimisation convexe*. Un certain nombre de classes de problèmes d'optimisation convexe de dimension finie admettent des algorithmes de résolution efficaces. Parmi ceux-ci, se trouve l'*optimisation LMI*. Dans ce cas-là, la fonction f est affine en ξ et $\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T F(\xi)x > 0\}$ avec $F(\xi) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i$, où les F_i sont m matrices symétriques données de $\mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$. Cette contrainte est appelée *contrainte Inégalité Matricielle Affine* ou *contrainte LMI*. Notation $F(\xi) > 0$. Le symbole > 0 signifie définie positive. Les problèmes d'optimisation convexe sur des contraintes LMI ne sont résolus numériquement de façon efficace que depuis le début des années 90 [NES 94, VAN 96]. C'est le résultat d'une avancée en optimisation convexe vers la fin des années quatre-vingt. Des boîtes à outils ont été développées dans les logiciels généraux de calcul scientifique (voir par exemple sous Scilab [NIK 95] et sous Matlab [El 95, GAH 95, LAB 02]) pour traiter cette classe de problèmes d'optimisation.

Retour à l'exemple. Le problème (2) se formule donc comme un problème de faisabilité, *a priori* non convexe. Pour mettre le problème sous une forme convexe, on utilise la paramétrisation de Youla (voir par exemple [MAC 89, BOY 91, HBA 02]) qui définit l'ensemble de tous les correcteurs stabilisant un système G . Tout correcteur stabilisant s'écrit comme une transformation linéaire fractionnaire bien déterminée (c'est-à-dire ici une fonction rationnelle) en Q , fonction de transfert stable : $K(p) = (Y(p) - M(p)Q(p))(X(p) - N(p)Q(p))^{-1}$ où $X(p)$, $Y(p)$, $M(p)$ et $N(p)$ sont déterminés à partir de $G(p)$. En faisant varier $Q(p)$ sur l'ensemble des fonctions de transfert stables, l'ensemble des correcteurs stabilisant le système G est obtenu. La propriété fondamentale de cette paramétrisation des correcteurs stabilisant est que lorsque l'on exprime les fonctions de transfert en boucle fermée en fonction du paramètre Q , on obtient des fonctions qui dépendent *affinement* de Q . Par exemple, dans l'exemple précédent, dans le cas où G est stable, on peut obtenir : $S(p) = I - G(p)Q(p)$ et $T(p) = G(p)Q(p)$. Par suite, en remplaçant la variable d'optimisation K par la variable d'optimisation Q , on obtient : trouver $Q(p)$ stable telle que $\forall \omega, |W_1(j\omega)(1 + G(j\omega)Q(j\omega))| \leq 1$ et $\forall \omega, |W_3(j\omega)Q(j\omega)| \leq 1$. La bonne nouvelle est que chaque contrainte du problème de droite définit un ensemble convexe en Q . Comme l'intersection d'ensembles convexes est convexe, c'est donc un problème d'optimisation convexe. Le problème de droite est donc un problème d'optimisation (faisabilité) convexe. La mauvaise nouvelle est qu'il est convexe mais de dimension infinie : la variable d'optimisation Q appartient à un ensemble de dimension infinie (ensemble des fonctions de transfert) et le nombre de contraintes d'optimisation est infini : par exemple, les deux contraintes inégalités sont définies pour tout ω . Sous cette forme-là, le problème d'optimisation (faisabilité) ne peut espérer qu'une résolution approchée : typiquement, Q va être recherché dans un sous-espace de dimension finie de l'espace des fonctions de transfert stables et telle que les conditions précédentes ne sont satisfaites que pour un nombre fini de pulsations. Cela permet d'approcher la solution par la résolution de problèmes d'optimisation de dimension finie mais de grande dimension. Un autre défaut est que le correcteur obtenu peut être d'ordre important. L'idéal serait de trouver une solution sous la forme d'un problème d'optimisation convexe de dimension finie.

Que faire ? Dans un premier temps, on peut considérer un cas de figure simplifié : une seule contrainte sur la fonction de transfert en boucle fermée $S(p)$: trouver $K(p)$ telle que le système en boucle fermée est stable et telle que :

$\forall \omega, \left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$. On parle alors de synthèse *mono critère* : on cherche à satisfaire une seule spécification de performance. On est alors ramené au problème de synthèse H_∞ . Soit le système P . Le problème H_∞ standard s'écrit : étant

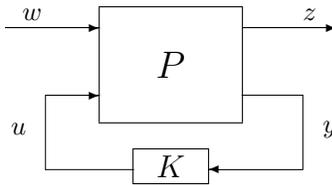


Figure 5. Problème sous forme standard

donné $\gamma > 0$, existe-il une loi de commande K telle que le système bouclé représenté figure 5 et noté $P \star K$ soit asymptotiquement stable et $\|P \star K\|_\infty < 1$? Si oui, construire une loi de commande K assurant pour le système en boucle fermée les deux propriétés précédentes. Pour obtenir une formulation de dimension finie du problème, la démarche est de passer en représentation d'état. D'une part, pour un ordre donné, le correcteur est alors paramétrisé par les matrices de sa représentation d'état (soit un nombre fini de variables de décision). D'autre part, un résultat fondamental, le lemme borné réel (cas particulier du lemme de Kalman Yakubovitch Popov [POP 73]⁶) des années 60 permet de transformer la vérification de la contraintes 2 (qui doit être vraie pour toute pulsation ω) en la résolution d'un problème d'optimisation de dimension finie. En deux mots, soit $H = D + C(pI - A)^{-1}B$ une fonction de transfert stable décrite par une représentation d'état minimale. Alors

$$\forall \omega, |H(j\omega)| \leq \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } \underline{P} > 0 \text{ telle que} \\ \left[\begin{array}{cc} A^T \underline{P} + \underline{P} A + C^T C & \underline{P} B + C^T D \\ B^T \underline{P} + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{array} \right] \leq 0 \end{cases} \quad [3]$$

Le second problème est un problème d'optimisation (faisabilité) LMI (donc convexe) dont la variable d'optimisation est \underline{P} (donc de dimension finie). Ce résultat est fondamental dans la recherche de formulations sous forme de problèmes d'optimisation de dimension finie. De plus, il permet de comprendre le lien entre les critères graphiques et l'optimisation LMI. Vérifier que $\forall \omega, |H(j\omega)| \leq \gamma$ peut être effectué en

6. Le lemme de Kalman Yakubovitch Popov a été introduit pour l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires stationnaires rebouclé sur des non linéarités statiques : cela illustre le rôle joué dans la commande robuste par les outils développés pour l'analyse des systèmes non linéaires dans les années 70.

regardant si le diagramme de Nyquist de H est inclus dans le disque de centre 0 et de rayon γ . La pratique de l'automatique fréquentielle classique est basée sur l'examen des tracés fréquentiels. Ce résultat met en avant la possibilité de rechercher certaines propriétés des tracés fréquentiels par la résolution d'un problème d'optimisation de dimension finie. Ceci est à la base des avancées de l'automatique fréquentielle moderne. Pour notre problème, en se basant sur cette formulation, une solution au problème de synthèse H_∞ a été donnée [GAH 94] sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI, de dimension finie. Une condition équivalente à (3) peut être obtenue sous la forme d'une équation de Riccati [ZHO 95]. A partir de cette formulation, pour une classe moins générale de système P^7 , une autre solution au problème de synthèse H_∞ a été proposée [DOY 89] sous la forme de résolutions d'une série d'équations de Riccati. La résolution numérique est plus efficace que pour la première solution. Historiquement, la solution par équations de Riccati est antérieure à la solution par optimisation LMI. Cependant, la démarche adoptée pour l'obtenir est beaucoup moins générale et beaucoup moins transposable à d'autres problèmes contrairement à la première solution.

Revenons à notre exemple de départ, c'est-à-dire un nombre de spécifications de performance supérieur à un : trouver $K(p)$ telle que le système en boucle fermée est stable avec $\forall \omega$, $\left| W_1(j\omega) \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$ et $\forall \omega$, $\left| W_3(j\omega) \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq 1$. On parle de synthèse *multicritère* (on cherche à remplir plusieurs critères de performance). A partir de la solution du problème de synthèse H_∞ , on peut essayer de rechercher une solution exprimable comme un problème d'optimisation de dimension finie suivant deux axes :

1) reprendre les grandes idées de la démonstration du problème de synthèse (mono critère) H_∞ et les mettre en œuvre sur le problème de synthèse multicritère (voir par exemple [CHI 96]). Le problème d'optimisation obtenu basé sur une condition nécessaire et suffisante est alors *non convexe*. Pour éviter une résolution difficile, il est en général nécessaire de considérer des conditions qui ne sont que suffisantes mais qui se formulent comme des problèmes d'optimisation convexe [CHI 96, FOL 97, SCH 97, MAG 99, PEA 00] (par exemple, par restriction du problème d'optimisation non convexe de départ). Par suite, si le problème d'optimisation n'admet pas de solution, cela n'indique pas que le problème de départ n'admet pas de solution : il n'a pas été "démontré" qu'il n'existe pas de correcteur remplissant le cahier des charges. On parle alors de "conservatisme" ;

2) se ramener à un problème de synthèse monocritère dont on peut garantir que la solution satisfait le problème de synthèse multicritère initial [FON 95]. Pour cela, dans notre exemple, on considère le problème : trouver K tel que

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1 \quad [4]$$

7. Ce qui est en général peu limitatif en pratique !

Du fait des propriétés de la norme H_∞ ⁸, on a (4) \Rightarrow (1), c'est-à-dire s'il existe un correcteur K qui satisfait (4) alors elle satisfait (1). De plus, c'est un cas particulier du problème de synthèse H_∞ qui se formule comme un problème d'optimisation convexe de dimension finie.

Devant cette alternative, quel choix effectuer ? On peut donner deux éléments de réponse, le premier dans le cas général, le second dans l'exemple considéré. Pour un ingénieur automaticien, la seconde approche apparaît plus intéressante que la première. En effet, dans la première, le conservatisme apparaît au niveau du problème d'optimisation lui-même. Cela veut dire que, dans sa mise en œuvre pratique, l'ingénieur automaticien devra avoir de bonnes notions d'optimisation, un certain savoir-faire dans ce domaine, ce qui rend l'outil peu accessible. Dans la seconde approche, le conservatisme apparaît au niveau de la formulation du problème d'automatique lui-même. Pour résoudre cette difficulté, l'ingénieur est amené à modifier la traduction dans le domaine fréquentiel du cahier des charges. Par suite, lors de la mise en œuvre, il n'est pas nécessaire qu'il connaisse et travaille sur le problème d'optimisation utilisé. Dans l'optique de disposer d'un outil de conception facilement accessible à un ingénieur automaticien, cette approche est plus pertinente. D'autre part, dans l'exemple considéré, la seconde approche n'est pas si "conservative" que cela. Notons que :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty = \sup_\omega \sqrt{|W_1(j\omega)S(j\omega)|^2 + |W_3(j\omega)T(j\omega)|^2}$$

$\|W_1 S\|_\infty = \sup_\omega |W_1(j\omega)S(j\omega)|$ et $\|W_3 T\|_\infty = \sup_\omega |W_3(j\omega)T(j\omega)|$. Pratiquement, pour de larges gammes de pulsation ω , $|W_1(j\omega)S(j\omega)|$ et $|W_3(j\omega)T(j\omega)|$ ne sont pas proches simultanément de 1 et donc la contrainte :

$$\sqrt{|W_1(j\omega)S(j\omega)|^2 + |W_3(j\omega)T(j\omega)|^2} \leq 1$$

et les deux contraintes $|W_1(j\omega)S(j\omega)| \leq 1$ et $|W_3(j\omega)T(j\omega)| \leq 1$ peuvent être vérifiées simultanément sans difficulté. Les satisfaire simultanément peut être difficile pour des gammes de pulsation limitées. Par suite, remplacer (1) par (4) n'est pas très limitatif. Il faut noter que ce raisonnement est essentiellement basé sur un savoir-faire en automatique fréquentielle et non en optimisation.

8. La norme H_∞ d'une matrice de fonctions de transfert est supérieure à la norme H_∞ de chacun des éléments de la matrice.

Morale de cette histoire. La synthèse H_∞ se base sur :

1) l'utilisation des concepts fondamentaux de l'automatique fréquentielle classique : le cahier des charges peut se traduire comme des gabarits sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée ;

2) une formalisation mathématique rigoureuse du problème d'automatique (par contraste avec l'automatique fréquentielle classique) à l'aide de norme H_∞ pondérée ;

3) la recherche d'une solution au problème sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante pour "qualifier" la difficulté du problème : ici un problème d'optimisation convexe mais de dimension infinie ;

4) si cette dernière ne dispose pas d'un algorithme de résolution efficace, recherche de solutions basées sur des conditions qui ne sont que suffisantes (conservatisme) mais disposant d'un algorithme de résolution efficace en général sous forme d'optimisation de préférence convexe et de préférence de dimension finie ; rôle central joué par l'optimisation LMI. C'est le cas de la synthèse H_∞ qui ne traite pas du problème posé par Zames [ZAM 81] ;

5) un outil simple d'utilisation : remplacement de la manipulation des diagrammes et autres représentations graphiques par des algorithmes d'optimisation. Les prérequis sont ceux de l'automatique fréquentielle classique à condition de choisir, dans le cas de solutions suffisantes, celles dont l'utilisation ne nécessite pas de connaissance en optimisation.

Les bénéfices de la synthèse H_∞ pour l'ingénieur sont importants : (i) une considérable simplification du processus de mise au point des lois de commande : on est passé du réglage à la main à la conception assistée par ordinateur, (ii) une résolution de problèmes jusque-là difficilement abordables (explorer rapidement les compromis d'un cahier des charges, commande des systèmes multivariables, etc.), des prérequis relativement limités pour sa mise en œuvre : bagage de l'automatique fréquentielle classique : il n'est pas nécessaire de connaître les espaces de Hardy ou l'optimisation convexe pour utiliser la synthèse H_∞ ! Dans le cadre de la recherche de méthodologies, la démarche qui a abouti à la synthèse H_∞ est un cas d'école pour le chercheur.

4. Théorie de la robustesse en linéaire stationnaire : des critères graphiques à l'optimisation

Les méthodes de synthèse assistée par ordinateur de lois de commande sont basées sur un modèle du système à commander. Malheureusement, il est expérimentalement plus probable d'obtenir une modélisation où les paramètres et la structure ne sont qu'approximativement connus. Par essence, une modélisation ne peut pas être certaine. De plus, au cours du temps, ses caractéristiques peuvent évoluer. Cette remarque a motivé l'introduction de la notion de *famille de modèles*. L'idée sous-jacente est que, puisqu'il est illusoire de décrire précisément un système physique par un modèle, il serait fructueux de considérer une famille de modèles pouvant potentiellement contenir un modèle adéquat. Le terme adéquat peut paraître obscur : il traduit simplement le fait

que le comportement du système est assez fidèlement modélisé pour refléter correctement ses propriétés qualitatives. Il est important d'insister sur le fait qu'un modèle ne peut pas représenter de façon exacte un système réel. En résumé, l'indétermination⁹ est dans la nature même des objets physiques. L'utilisation d'une famille de modèles susceptible de contenir le modèle le plus adéquat constitue l'idée de base de la robustesse [DOY 78, SAF 78, DOY 81, SAF 81a, SAF 81b, DOY 82a, SAF 82, FON 95]. L'analyse consiste alors à garantir une propriété sur le système réel (stabilité, rapidité, etc.) en vérifiant si elle est satisfaite pour tous les éléments de la famille de modèles. Ce concept de famille de modèles est au centre de l'automatique fréquentielle classique. Malheureusement, comme dans le cas de la synthèse, la formalisation est en général assez pauvre¹⁰. A la fin des années 70, sont apparues des classes de familles de modèles plus riches. L'analyse des systèmes représentés par une famille de modèles (ou μ/k_m analyse) est plus amplement évoquée dans le rapport [SCO 02]. Dans ce papier, nous nous réduisons à noter que les résultats de la μ/k_m analyse résultent du même cheminement que ce qui a mené à la synthèse H_∞ .

1) Utilisation des concepts fondamentaux de l'automatique fréquentielle classique : un système est représenté par une famille de modèles et comme support du raisonnement, les schéma blocs sont préférés aux équations.

2) Formalisation mathématique rigoureuse du problème d'automatique : comme dans le cas de la formalisation de la performance, la formalisation de la robustesse repose sur l'utilisation de la norme H_∞ pondérée. Un même cadre (norme H_∞ pondérée) permet ainsi de traiter de la performance et de la robustesse.

3) Recherche d'un algorithme efficace : rôle de l'optimisation de préférence convexe, de préférence de dimension finie ; notamment rôle central de l'optimisation LMI (quite à modifier la formulation du problème).

4) Un outil simple d'utilisation : ici encore, remplacement de la manipulation des diagrammes et autres représentations graphiques par l'utilisation d'algorithme d'optimisation. De plus, les prérequis sont ceux de l'automatique fréquentielle classique.

En conclusion, dans le cadre de l'automatique fréquentielle appliquée aux systèmes linéaires stationnaires, une forte évolution est intervenue dans les années 80. Les concepts de base de l'automatique fréquentielle classique ont été conservés : le cahier des charges se traduit par des contraintes sur les modules des fonctions de transfert en boucle fermée (notamment nécessité de la rétroaction pour le rejet de perturbation non mesurée (objectif de désensibilisation)), un système physique est représenté par une famille de modèles : importance de la robustesse et enfin le rôle fondamental des schéma-blocs. Une solution élégante a été apportée au défaut le plus important de l'automatique fréquentielle qui est l'absence de formalisation mathématique précise du cahier des charges. Cela a permis des développements théoriques importants qui

9. Le terme couramment employé est celui d'incertitude. Nous pensons que le terme indétermination est plus adapté. En effet, il souligne qu'un système ne peut être exactement "mesuré". Le terme incertitude a une connotation probabiliste. Néanmoins, pour être cohérent avec l'usage courant, nous utiliserons dans ce mémoire le terme incertitude.

10. A l'exception notoire d'Horowitz [HOR 63].

ont mené à des solutions exactes, très souvent de complexité importante. Le cadre théorique est actuellement très complet. Parallèlement à cela, des solutions dotées d’algorithmes efficaces, faisant appel à l’optimisation convexe, ont été recherchées. Elles sont basées sur des conditions suffisantes. Du fait de ce conservatisme, elle nécessite une certaine expertise de la part de l’utilisateur. De notre point de vue, il faut privilégier celles qui nécessitent essentiellement une expertise en automatique, par rapport à celle qui nécessite aussi une expertise en optimisation. Si le volet “théorie” a été bien cerné, beaucoup de travail est encore nécessaire sur le volet “outils et méthodes”.

5. Non linéaire : de la pratique des ingénieurs à la norme incrémentale

Du fait de l’augmentation constante des exigences de qualité et de performance des systèmes asservis et l’exigence de plus en plus forte du “meilleur compromis”, les cahiers des charges d’asservissements industriels sont de plus en plus complexes et serrés. Tout cela a pour conséquence dans bien des cas d’invalider l’hypothèse de linéarité : les effets non linéaires des systèmes ne sont plus négligeables, ou même s’ils le sont, des correcteurs non linéaires sont souvent nécessaires pour satisfaire aux exigences de performance. La question majeure dans ce contexte est de trouver un cadre théorique capable de formuler la vérification des performances qualitatives ou quantitatives recherchées par la caractérisation de propriétés mathématiques du modèle non linéaire. Cette question n’a été que peu abordée dans la littérature. Il ne s’agit pas ici de nier les progrès théoriques importants réalisés tout au long de ces 30 dernières années dans la compréhension des systèmes dynamiques non linéaires mais simplement de remarquer leur peu de prise dans le monde des ingénieurs. L’aéronautique, domaine où l’automatique joue un rôle important, est révélatrice de cette situation. Aussi paradoxal que cela puisse paraître, aucun cadre mathématique n’était encore récemment capable d’expliquer de façon satisfaisante le comportement dynamique d’un engin volant (avion, missile) et donc encore moins une quelconque possibilité d’en quantifier la performance. Cet exemple rend bien compte de l’inadéquation des outils théoriques actuels à traiter certaines applications. Cela explique aussi les difficultés qu’ont les “nouvelles techniques de commande” à s’imposer : les qualités et les défauts des anciennes méthodes n’étant pas clairement analysés, il est difficile de savoir en quoi l’emploi de nouvelles techniques comble en partie leurs défauts et si elles préservent les qualités des anciennes. C’est l’ensemble de ces points qui ont conduit certains auteurs à introduire un nouveau cadre théorique : la norme incrémentale pondérée. L’introduction de ce nouveau concept est le résultat de l’examen de deux questions spécifiques qui semblaient bien séparées à l’origine : la première question, de nature théorique, s’intéressait au problème de l’extension de l’approche H_∞ dans le cadre non linéaire. La seconde se rapportait à la technique des gains variables. La suite du document résume les argumentaires qui ont conduit à introduire la norme incrémentale pondérée. Mais avant de développer tout cela, nous introduisons quelques définitions et notations.

Notations et définitions. \mathcal{L}_2 est l'espace des fonctions à valeurs dans \mathcal{R}^n et définies sur \mathcal{R} dont la norme, définie par $\|f\|_2 = (\int \|f(t)\|^2 dt)^{1/2}$, est finie. $P_T f$ est définie par $P_T f(t) = f(t)$ pour $t \leq T$ et 0 pour les autres valeurs de t . L'espace étendue associé \mathcal{L}_2^e est l'espace des fonctions à valeurs sur \mathcal{R}^n et définies sur \mathcal{R} dont la troncature causale appartient à \mathcal{L}_2 . Dans la suite, nous supposons que le système dynamique est décrit par le système suivant : $y = \Sigma(u)$:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)); & x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad [5]$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $y(t) \in \mathcal{R}^m$, et $u(t) \in \mathcal{R}^p$. Les fonctions f et h sont respectivement définies de $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$ dans \mathcal{R}^n et \mathcal{R}^m . On les suppose C^2 , (uniformément) Lipschitz continues et telles que $f(x_0, 0) = 0$ et que $h(x_0, 0) = 0$. Sous ses hypothèses, Σ est bien-posé, i.e. $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u)$, la solution de la partie différentielle du système est unique et appartient à \mathcal{L}_2^e pour tout $x_0 \in \mathcal{R}^n$ et pour tout $u \in \mathcal{L}_2^e$. De plus, la sortie du système appartient elle aussi à \mathcal{L}_2^e . Σ est \mathcal{L}_2 gain stable sur \mathcal{L}_2 s'il existe $\gamma \geq 0$ et $\beta \geq 0$ telles que $\|\Sigma(u)\|_2 \leq \gamma\|u\|_2 + \beta$ pour tout $u \in \mathcal{L}_2$. Σ est incrémentalement borné sur \mathcal{L}_2 s'il existe $\eta \geq 0$ telle que $\|\Sigma(u_1) - \Sigma(u_2)\|_2 \leq \eta\|u_1 - u_2\|_2$ pour tous $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_2$. Le gain incrémental de Σ , noté $\|\Sigma\|_\Delta$, correspond à la valeur minimale de η . Enfin Σ est incrémentalement stable s'il est stable, c'est-à-dire s'il va de \mathcal{L}_2 dans \mathcal{L}_2 et s'il a un gain incrémental fini. On associe à Σ , sa linéarisation (sa dérivée de Gâteaux), le long d'une entrée spécifique $u_r \in \mathcal{L}_2^e$:

$$\bar{y} = D\Sigma_G[u_r](\bar{u}) \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= C(t)\bar{x}(t) + D(t)\bar{u}(t) \\ \bar{x}(t_0) &= 0 \end{cases} \quad [6]$$

avec $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_r(t), u_r(t))$, $B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_r(t), u_r(t))$, $C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(x_r(t), u_r(t))$ et $D(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(x_r(t), u_r(t))$ et où $x_r(t) = \phi(t, t_0, x_0, u_r)$ est la solution du système (5) pour l'entrée $u_r(t)$ et l'état initial $x(t_0) = x_0$. Enfin, nous restreignons notre attention au système bouclé représenté sur la figure 6 où G est le système non linéaire défini de \mathcal{L}_2^e dans \mathcal{L}_2^e qu'il s'agit de commander et K est le correcteur défini \mathcal{L}_2^e dans \mathcal{L}_2^e .

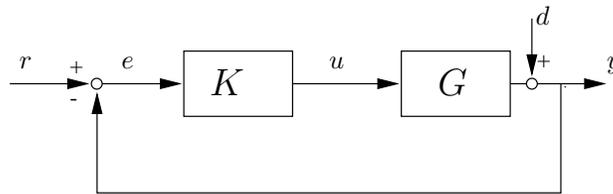


Figure 6. Système bouclé non linéaire

Les gains variables pour aborder la commande des systèmes non linéaires. Devant la nécessité de commander des systèmes bouclés non linéaires tout en ne dis-

posant que de méthodologies de synthèse de lois de commande pour des systèmes linéaires stationnaires, les ingénieurs ont développé un ensemble de méthodologies pragmatiques. Ces méthodologies, de nature heuristique, reposent en grande partie sur l'idée que les linéarisations stationnaires du système associées à l'ensemble des points de fonctionnement (ceci ne concerne pas uniquement les points d'équilibre du système), peuvent permettre non seulement d'analyser certains aspects des propriétés du système bouclé non linéaire mais aussi constituer la base de la synthèse du correcteur. Ce type d'approche est communément utilisée dans les situations suivantes : commande d'un système non linéaire par un unique correcteur linéaire stationnaire, d'un système linéaire par un correcteur non linéaire (PID-non linéaire, correcteur flou) et de systèmes non linéaires par des correcteurs linéaires interpolés/séquencés (gains variables). La nature commune des problèmes théoriques liés à l'utilisation de l'heuristique dans les trois types de configuration conduit à les confondre avec la dernière qui est le cas le plus général. Dans la suite, nous nous intéressons plus spécifiquement à cette dernière, tout en notant qu'elle englobe sous beaucoup d'aspects, les problèmes rencontrés dans les deux autres configurations. De façon classique, l'ensemble des méthodologies pragmatiques/heuristiques qui ont été développées autour cette approche "linéaire" de la commande non linéaire est rassemblé sous le terme de séquençement de gains ("gain scheduling" en anglais). Historiquement, le développement de ce type de correcteurs a été important dans le domaine aéronautique. Actuellement, les gains variables sont largement utilisés pour des applications industrielles (aéronautiques civile et militaire, commande de moteurs, centrales nucléaires, applications agro-alimentaires, etc.). De façon paradoxale, bien qu'employées de façon intensive, les commandes à gains variables, dans leurs formes traditionnelles, offrent rarement des garanties sur les propriétés du système bouclé (même en ce qui concerne la stabilité). De façon générale, l'analyse de tels systèmes repose avant tout sur une validation *a posteriori* de la boucle fermée à travers la réalisation d'un très grand nombre de simulations temporelles¹¹. C'est la stabilisation exponentielle de l'ensemble des trajectoires du système non linéaire qui constitue de loin la justification la plus communément admise dans le cadre des gains variables¹². En fait, dans le cadre non linéaire, chercher à stabiliser exponentiellement l'ensemble des linéarisations d'un système bouclé est une demande très forte. Au delà de la stabilisation exponentielle, les praticiens ont l'habitude de demander dans la plupart des applications que le correcteur linéaire stationnaire associé à un point d'équilibre du système satisfasse les "canons" de l'automatique linéaire classique (marges de gain/phase, etc.). Suivant ces remarques, il semble indispensable de savoir si de telles demandes peuvent être théoriquement justifiées. Comme nous le rappelons dans la suite de ce document, la réponse à ces deux questions est affirmative et trouve sa justification dans la dé-

11. A travers cela, nous soulignons avant tout la pratique des ingénieurs.

12. Pour s'en convaincre, il suffit de consulter les deux récents "surveys" sur le sujet (Shamma et Rugh, *Automatica* 2000, Leith et Leithead dans *IJC* 2000) qui laissent clairement entrevoir que "l'approche gains variables" est avant tout le fruit d'un pari technique reposant sur l'idée que la stabilisation exponentielle des linéarisations d'un système peut, dans des cas favorables, conduire à une commande satisfaisante du système non linéaire.

sensibilisation. Cela n'est évidemment pas un hasard. En effet, même si la stabilité semble être au coeur de la problématique des gains variables, elle ne semble pas être la cause de l'emploi de cette approche par les praticiens. En effet, les ingénieurs en utilisant de telles solutions n'ont que très rarement comme objectif premier de stabiliser le système¹³ mais plutôt celui de rendre le système bouclé "plus performant". La performance étant une notion recouvrant un nombre impressionnant de critères, il est important de préciser qu'elle doit être entendue ici comme un indicateur permettant de mesurer la capacité du feed-back à améliorer le comportement du système face à des effets inconnus liés aussi bien à des perturbations non mesurées qu'à des erreurs de modèle, etc. Certains diront, sans doute à juste titre, que la performance ne s'arrête pas à l'unique obtention de propriétés de désensibilisation du système bouclé. En fait, il est important de souligner ici que cette caractérisation de la performance du système en terme de désensibilisation est l'unique indicateur qui soit propre à mesurer (et donc à prendre en compte) l'intérêt du feed-back dans le cadre de la commande des systèmes¹⁴[BLA 34, BOD 45, ZAM 81, DES 80]. Il est clair que si le praticien choisit de prendre la voie toujours délicate de l'utilisation de solutions de type gains variables, c'est qu'il a mesuré (la plupart du temps à travers un nombre important de simulations) les avantages que ceux-ci procurent vis-à-vis d'une loi de commande en boucle ouverte ou encore vis-à-vis de l'utilisation d'un unique correcteur. De fait, la conclusion de cette courte discussion est une tautologie : si les praticiens utilisent les gains variables c'est que cela permet d'améliorer la performance du système. Nous ajoutons à ce constat l'idée que cela concerne principalement la désensibilisation.

La désensibilisation : rappels. Nous rappelons dans ce paragraphe, en nous restreignant au problème classique de la rejection de perturbation de sortie, comment les objectifs de rejection de perturbation conduisent à contraindre de façon directe les linéarisations du système. Pour cela, associons, $y = H_{yr}(r, d)$, le système en boucle fermée de la figure 7, à un système en boucle ouverte équivalent, $y = Ho_{yr}(r, 0)$ décrit sur la figure 8. Si le correcteur de la figure 8 est tel que $K_o = K(I + GK)^{-1}$ alors on a pour $d = 0$ $Ho_{yr}(r, 0) \triangleq H_{yr}(r, 0)$ ce qui implique l'équivalence des deux systèmes lorsque la perturbation agissant sur la sortie est prise nulle. L'effet induit par la perturbation d sur la sortie du système en boucle ouverte est donné par $\delta H_{yr}(r, d) = d + GK(I + GK)^{-1}(r - d) - GK(I + GK)^{-1}(r)$ et donc $\delta H_{yr}(r, d) = S(r - d) - S(r)$ avec $S = (I + GK)^{-1}$. Pour la boucle ouverte, l'effet induit par la perturbation de sortie est donnée de façon évidente par $\delta Ho_{yr}(r, d) = GK(I + GK)^{-1}(r) + d - GK(I + GK)^{-1}(r) = d$. Nous pouvons sur la base des deux quantités précédentes, caractériser quantitativement l'intérêt d'une loi de commande

13. En effet, dans de très nombreux cas, les systèmes sont naturellement stables (il suffit de penser aux avions civils).

14. En disant cela, nous voulons souligner que c'est la nature indéterminée du système où des signaux agissant sur celui-ci qui conditionnent l'utilisation de lois à contre-réaction. En effet, si le système et son environnement sont parfaitement connus, on peut toujours associer à n'importe quel système bouclé un système en boucle ouverte ayant les mêmes performances ! Pour cela il suffit de simuler la boucle fermée et d'appliquer au système réel la trajectoire générée par le correcteur.

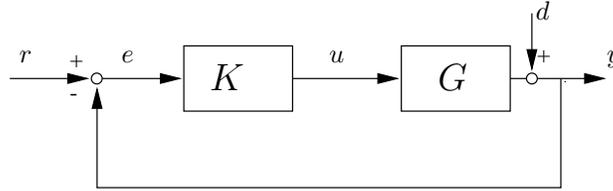


Figure 7. Le système en boucle fermée

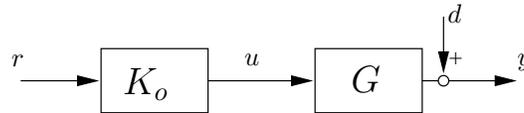


Figure 8. Le système en boucle ouverte équivalent

en boucle fermée vis-à-vis d'une loi de commande en boucle ouverte. En fait, on dira qu'il y a désensibilisation par bouclage si $\|\delta H_{yr}(r, d)\|_{2,T} < \|\delta H_{o_{yr}}(r, d)\|_{2,T}$ est satisfaite pour l'ensemble des signaux agissant sur le système. On peut démontrer qu'il est naïf de croire qu'un correcteur peut apporter une telle propriété pour toutes les perturbations possibles. En effet, si l'opérateur GK est strictement causal alors on a nécessairement $\|(I + GK)^{-1}\|_{\Delta} \geq 1$. Cette relation implique simplement qu'il existe $r, d \in \mathcal{L}_2^e$ telles que $\|S(r-d) - S(r)\|_{2,T} \geq \|d\|_{2,T}$ et donc nécessairement une perturbation de sortie qui soit telle que la loi de commande en boucle fermée ne soit pas meilleure que celle en boucle ouverte. Suivant ce résultat, la désensibilisation ne peut en fait être réalisée que pour une classe limitée de perturbations. Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi la désensibilisation contraint fortement les linéarisations du système. En fait, l'argument central de la démonstration repose sur l'utilisation du "théorème de la moyenne en norme". Ce théorème, à l'instar du théorème de la moyenne sur \mathcal{R} , permet de lier les propriétés d'une fonction et de sa dérivée. Dans le cadre des espaces fonctionnels, il va permettre de lier la constante de Lipschitz (la norme incrémentale) de l'opérateur à la norme induite de ses linéarisations. En fait, on peut démontrer qu'un système est incrémentalement stable et de gain inférieur ou égal à η **si et seulement si** l'ensemble de ses linéarisations sont \mathcal{L}_2 gains stables et de gain inférieur ou égal à η . On peut déduire sur la base du "théorème de la moyenne en norme" qu'il y a désensibilisation sur un sous-ensemble convexe P^e de \mathcal{L}_2^e avec un niveau ϵ c'est-à-dire pour tout $r \in \mathcal{L}_2^e$ et $d \in P^e$, on a $\|\delta H_{yr}(r, d)\|_{2,T} \leq \epsilon \|\delta H_{o_{yr}}(r, d)\|_{2,T}$ si et seulement si pour tout $u_0 \in \mathcal{L}_2^e$ et $w \in P^e$, on a $\|DS_G[u_0](w)\|_{2,T} \leq \epsilon \|w\|_{2,T}$.

Contraintes des linéarisations stationnaires. Intéressons nous aux conséquences de ce résultat en nous restreignant tout d'abord aux linéarisations stationnaires. Pour

cela supposons que la fonction de sensibilité est décrite par le système (5) et associons à chaque valeur constante de la référence son point d'équilibre, *i.e.*

$$Z_e = \{(x_e, u_e) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p \mid \phi(t, t_0, x_e, u_e) = x_e \forall t \geq t_0\} \quad [7]$$

De plus, associons à chaque couple de point appartenant Z_e , la linéarisation de S , qui est décrite par le système linéaire stationnaire suivant : avec $\bar{x}(t_0) = 0$, on a

$$DS_G(u_e) \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \end{cases} \quad [8]$$

où $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$, $C = \frac{\partial h}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $D = \frac{\partial h}{\partial u}(x_e, u_e)$. Dans ce cadre, la contrainte sur la linéarisation de S implique que DS_G est au moins \mathcal{L}_2 gain stable ou de façon équivalente possède une norme H_∞ finie (puisque DS_G est un système linéaire stationnaire). De plus, les objectifs de désensibilisation peuvent se reformuler en terme de norme H_∞ pondérée dès lors qu'il est possible de décrire l'ensemble des perturbations à rejeter de la façon suivante $P^e \subset \{d \in \mathcal{L}_2^e \mid \|DW_p^{-1}(d)\|_{2,T} \leq \epsilon \|d\|_{2,T}\}$ où DW_p est un opérateur linéaire stationnaire stable et d'inverse stable. On peut alors prouver qu'il y aura désensibilisation du système non linéaire si en chaque point d'équilibre du système $\|DS_G[u_0]W_p\|_\infty \leq 1$ est satisfait. Sur la base du raisonnement que nous venons de faire, nous venons de montrer que contraindre les linéarisations stationnaires à satisfaire les "canons" de l'automatique linéaire est non seulement une bonne chose mais surtout une nécessité si on désire obtenir un système bouclé non linéaire performant !

Les linéarisations sont nécessairement exponentiellement stables. Nous pouvons maintenant esquisser les arguments en ce qui concerne la nécessité de stabiliser exponentiellement les linéarisations du système bouclé. La désensibilisation du système ne peut être réalisée que si la fonction de sensibilité a un gain incrémental fini et donc, en utilisant le théorème de la moyenne, que si les linéarisations de la fonction de sensibilité sont elles-mêmes \mathcal{L}_2 gains stables. Dans le cas spécifique des linéarisations stationnaires, le résultat est acquis dès lors que la réalisation d'état des linéarisations est minimale. En effet, il est connu qu'un système linéaire stationnaire possédant une réalisation minimale et \mathcal{L}_2 gain stable est exponentiellement stable (la réciproque est aussi vraie). En fait, il en est de même dans le cas des linéarisations non stationnaires si la réalisation du système est uniformément contrôlable et observable [SIL 68].

Etendre l'approche H_∞ au système non linéaire : l'approche incrémentale.

Comme l'avons noté dans l'introduction, l'approche H_∞ a ouvert la voie de l'extension de concepts classiques de l'automatique au domaine non linéaire. Dans ce cadre, pour des raisons que nous n'explicitons pas ici¹⁵, deux extensions sont envisageables : l'approche H_∞ non linéaire (\mathcal{L}_2 gain de l'opérateur) [VAN 92, ISI 94, ISI 95] ; l'approche incrémentale (constante de Lipschitz de l'opérateur) [FRO 95b,

15. L'utilisation de normes induites, des espaces étendus et du théorème du faible gain constituent le socle de l'analyse de la robustesse que ce soit pour les systèmes linéaires ou non linéaires.

FRO 01]. Ce sont les problèmes liés à la spécification de la performance qui font que dans de nombreuses applications, l'approche incrémentale est préférable à l'approche H_∞ non linéaire. On peut dire que l'intérêt majeur de la norme incrémentale réside dans le fait qu'elle permet de traduire dans un contexte non linéaire un ensemble de spécifications typiques du cahier des charges d'un système bouclé (voir [FRO 99] où ce fait est amplement illustré et où l'intérêt d'une telle approche dans le contexte de l'analyse de loi de commande pour des missiles non linéaires est détaillé). Du point de vue qualitatif, le comportement asymptotique de la sortie d'un système incrémentalement stable pour une entrée donnée est asymptotiquement indépendant de la condition initiale. De plus, pour une entrée en échelon, la sortie tend vers une valeur constante. Enfin, si le système est stationnaire alors pour une entrée périodique (resp. pseudo périodique), la sortie tend vers un signal périodique (resp. pseudo périodique) (pour plus de détails, se reporter aux articles [FRO 96a, FRO 96b, FRO 97a, FRO 97b]). Du point de vue quantitatif, il est possible comme dans le cas linéaire, de reformuler les demandes de robustesse et de désensibilisation comme des problèmes de minimisation de norme incrémentale pondérée (pour plus de détails, se référer à [FRO 95b, FRO 01]). Afin d'expliquer les liens existant entre la norme incrémentale et les gains variables, nous allons évoquer maintenant l'utilisation de la norme incrémentale pour spécifier la réjection des perturbations de sortie.

Réjection des perturbations. Comme nous l'avons vu, l'utilisation de lois à contre-réaction est fortement liée à leur capacité à réduire l'effet des perturbations non mesurables agissant sur le système. Nous supposons ici que l'ensemble des perturbations agissant sur le système, $P^e \subset \mathcal{L}_2^e$, peut être à l'instar du cas linéaire, défini de la façon suivante : $P^e \triangleq \{d \in \mathcal{L}_2^e \mid \|W_p^{-1}(d) - W_p^{-1}(w + d)\| \leq \epsilon \|d\| \text{ pour tous } w \in \mathcal{L}_2^e\}$ où W_p et W_p^{-1} sont deux opérateurs causaux et incrémentalement stables. Sur la base des résultats présentés dans [FRO 01], on peut montrer que la désensibilisation par comparaison est obtenue sur P^e si la norme incrémentale pondérée de la fonction de sensibilité *i.e.* $S = (I + GK)^{-1}$, est inférieure ou égale à 1 c'est-à-dire $\|SW_p\|_\Delta \leq 1$.

6. Bibliographie

- [ÅST 00] ÅSTRÖM K. J., « *Lecture Notes on Iterative Identification and Control Design* », chapitre Model uncertainty and robust control, p. 63-100, 2000.
- [BLA 34] BLACK H. S., « Stabilized Feedback Amplifiers », *Bell System Technical Journal*, vol. 13, 1934, p. 1-18.
- [BOD 45] BODE H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, New York, 1945.
- [BOY 91] BOYD S., BARRATT C., *Linear Controller Design : Limits of Performance*, Prentice-Hall, 1991.
- [BOY 94] BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V., *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, vol. 15 de *Studies in Appl. Math.*, SIAM, Philadelphia, juin 1994.

- [CHI 96] CHILALI M., « Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multi-critère », PhD thesis, Université Paris Dauphine, Paris, France, 1996.
- [DAM 01] DAMEN A., WEILAND S., *Robust Control*, Polycopié de la Technische Universite d'Eindhoven disponible sur <http://www.er.ele.tue.nl/pages/people/index2.html>, 2001.
- [DES 80] DESOER C., WANG Y., « Foundations of feedback theory for nonlinear dynamical systems », *IEEE Trans. Cir. Sys.*, vol. 27, 1980, p. 104-123.
- [DOY 78] DOYLE J., « Guaranteed Margins for LQG Regulators », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-23, n° 4, 1978, p. 756-757.
- [DOY 81] DOYLE J., STEIN G., « Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, n° 1, 1981, p. 4-16.
- [DOY 82a] DOYLE J., WALL J. E., STEIN G., « Performance and Robustness Analysis for Structured Uncertainties », *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, 1982, p. 629-636.
- [DOY 82b] DOYLE J., « Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties », *IEE Proc.*, vol. 129-D, n° 6, 1982, p. 242-250.
- [DOY 89] DOYLE J., GLOVER K., KHARGONEKAR P. P., FRANCIS B. A., « State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 34, n° 8, 1989, p. 831-847.
- [DUC 99] DUC G., FONT S., *Commande H_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*, Hermès, 1999.
- [EI 95] EL GHAOUI L., NIKOUKHAH R., DELEBECQUE F., « LMITOOL : A front-end for LMI optimization, users's guide », février 1995, Available via anonymous ftp to <ftp.ensta.fr>, under /pub/elghaoui/lmitool.
- [FER 96] FERRERES G., FROMION V., DUC G., M'SAAD M., « Non-Conservative Robustness Evaluation of a Multivariable H_∞ Missile Autopilot », *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 6, n° 8, 1996, p. 743-769.
- [FER 99] FERRERES G., FROMION V., « H_∞ control for a flexible transmission system », *European Journal of Control*, vol. 5, n° 2-4, 1999, p. 185-192.
- [FOL 97] FOLCHER J., « Approche Multicritère par Formulation LMI de la Commande des Systèmes », PhD thesis, Université Paris VI, décembre 1997.
- [FON 94] FONT S., DUC G., « H_∞ control of an electromechanical drive with nonlinearities using a multiblock-Criterion », *Control Engineering Practice*, vol. 2, n° 6, 1994, p. 1019-1030.
- [FON 95] FONT S., « Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis : optimisation H_∞ et approche symbolique de la forme standard », PhD thesis, Université Paris XI Orsay, France, 1995.
- [FRO 95a] FROMION V., « Une approche incrémentale de la robustesse non linéaire ; application au domaine de l'aéronautique », PhD thesis, Université de Paris Sud Orsay, janvier 1995.
- [FRO 95b] FROMION V., MONACO S., NORMAND-CYROT D., « A possible extension of H_∞ control to the nonlinear context », *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, décembre 1995.
- [FRO 96a] FROMION V., MONACO S., NORMAND-CYROT D., « Asymptotic Properties of Incrementally Stable Systems », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 41, 1996, p. 721-723.

- [FRO 96b] FROMION V., MONACO S., NORMAND-CYROT D., « A link between input-output stability and Lyapunov stability », *Syst. Control Letters*, vol. 27, 1996, p. 243-248.
- [FRO 97a] FROMION V., « A dissipative point of view for incrementally bounded systems », submitted, 1997.
- [FRO 97b] FROMION V., « Some results on the behavior of Lipschitz continuous systems », *Proc. European Control Conf.*, 1997.
- [FRO 99] FROMION V., SCORLETTI G., FERRERES G., « Nonlinear Performance of a PID controlled missile : a simple explanation », *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, n° 9, 1999, p. 485-518.
- [FRO 01] FROMION V., MONACO S., NORMAND-CYROT D., « The weighted incremental norm approach : from linear to nonlinear H_∞ control », *Automatica*, vol. 37, n° 10, 2001, p. 1585-1592.
- [GAH 94] GAHINET P., APKARIAN P., « A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control », *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, 1994, p. 421-448.
- [GAH 95] GAHINET P., NEMIROVSKY A., LAUB A. L., CHILALI M., *LMI Control Toolbox*, The Mathworks Inc., 1995.
- [HBA 02] HBAIEB S., « Optimisation convexe pour la commande », PhD thesis, Université d'Orsay, Paris, France, 2002, In French.
- [HOR 63] HOROWITZ I. M., *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, New York, 1963.
- [ISI 94] ISIDORI A., « H_∞ control via measurement feedback for affine nonlinear systems », *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, n° 4, 1994, p. 553-574.
- [ISI 95] ISIDORI A., KANG W., « H_∞ Control via Measurement Feedback for General Nonlinear Systems », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 40, n° 3, 1995, p. 466-472.
- [LAB 02] LABIT Y., PEAUCELLE D., HENRION D., « SeDuMi Interface 1.02 : a Tool for Solving LMI Problems with SeDuMi », *CACSD Conference, Glasgow*, September 2002.
- [MAC 89] MACIEJOWSKI J. M., *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, 1989.
- [MAG 99] MAGAROTTO E., « Approche LMI pour la Synthèse de Correcteurs et d'Observateurs : Application aux Systèmes Spatiaux et aux Systèmes Bilinéaires », PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 1999.
- [MEG 97] MEGRETSKI A., RANTZER A., « System Analysis via Integral Quadratic Constraints », *IEEE Trans. Aut. Control*, 1997, p. 819-830.
- [NES 93] NESTEROV Y., NEMIROVSKY A., *Interior-point polynomial methods in convex programming*, N° 13 Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1993.
- [NES 94] NESTEROV Y., NEMIROVSKY A., *Interior point polynomial methods in convex programming : Theory and applications*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [NIK 95] NIKOUKHAH R., DELEBECQUE F., GHAOUI L. E., « LMIT00L : a Package for LMI optimization in Scilab », rapport, 1995, INRIA Rocquencourt.
- [NYQ 32] NYQUIST H., « Regeneration theory », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 11, 1932, p. 126-147.
- [PEA 00] PEAUCELLE D., « Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres », PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse III, Toulouse, France, 2000.

- [POP 73] POPOV V. M., *Hyperstability of Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [SAF 78] SAFONOV M. G., « Large Scale Systems Research : A perspective », *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 1978, p. 474-476.
- [SAF 80] SAFONOV M. G., *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*, MIT Press, Cambridge, 1980.
- [SAF 81a] SAFONOV M. G., ATHANS M., « A Multiloop Generalization of the Circle Criterion for Stability Margin Analysis », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, n° 2, 1981, p. 415-422.
- [SAF 81b] SAFONOV M., LAUB A., HARTMANN G., « Feedback Properties of Multivariable Systems : The Role and Use of the Return Difference Matrix », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 26, n° 1, 1981, p. 47-67.
- [SAF 82] SAFONOV M. G., « Stability Margin of Diagonally Perturbed Multivariable Feedback Systems », *IEE Proc., Part D*, vol. 129, n° 6, 1982, p. 251-256.
- [SAN 65] SANDBERG I. W., « Some Results in the Theory of Physical Systems Governed by Nonlinear Functional Equations », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, 1965, p. 871-898.
- [SCH 97] SCHERER C., GAHINET P., CHILALI M., « Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 42, n° 7, 1997, p. 896-911.
- [SCO 97] SCORLETTI G., « Approche Unifiée de l'analyse et la commande des systèmes par formulation LMI », PhD thesis, Université d'Orsay, Paris, France, 1997, In French.
- [SCO 01] SCORLETTI G., FROMION V., *Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle H_∞* , Polycopié Université/ENSI Caen disponible sur http://www.greyc.ismra.fr/LAP/Gerard_S/ENSI_comrob.html, 2001.
- [SCO 02] SCORLETTI G., FROMION V., FONT S., « Automatique fréquentielle : des critères graphiques à l'optimisation LMI », version longue, disponible sur http://www.greyc.ismra.fr/LAP/Gerard_S/robust.html, 2002.
- [SIL 68] SILVERMAN L., ANDERSON B., « Controllability, Observability and stability of linear systems », *SIAM J. Control*, vol. 6, 1968, p. :121-130.
- [SKO 96] SKOGESTAD S., POSTLETHWAITE I., *Multivariable Feedback Control*, John Wiley and Sons Chischester, 1996.
- [VAN 92] VAN DER SCHAFT A. J., « L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 37, n° 6, 1992, p. 770-784.
- [VAN 96] VANDENBERGHE L., BOYD S., « Semidefinite programming », *SIAM Review*, vol. 38, n° 1, 1996, p. 49-95.
- [ZAM 60] ZAMES G., « Nonlinear Operators for System Analysis », rapport n° 370, août 1960, Massachusetts Institut of Technology.
- [ZAM 66] ZAMES G., « On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems—Part I, II », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 11, 1966.
- [ZAM 81] ZAMES G., « Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, n° 2, 1981, p. 301-320.
- [ZHO 95] ZHOU K., DOYLE J., GLOVER K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.