UNIVERSITE DE CAEN
U.F.R. de Science

$2^{\text{ième}}$ SESSION 2005
Septembre 2005

Master EEA 1A, Pro AEII et Recherche ESCI

Examen : Automatique
AE404T1
durée : 2h

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Les téléphones portables (même éteints) et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

<u>**Seul document autorisé : document manuscrit de 4 pages format A4.**</u>

Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Mise au point d'un correcteur RST

On considère le système défini par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_1(z) & = & \dfrac{B_1(z^{-1})}{A_1(z^{-1})}U(z) + V_1(z) \\ Y_2(z) & = & \dfrac{B_2(z^{-1})}{A_2(z^{-1})}Y_1(z) + V_2(z) \end{array} \right. \tag{1}$$

avec

- $A_1(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - a_1 z^{-1})$, $B_1(z^{-1}) = K_1 z^{-1}(1 + b_1 z^{-1})$;
- $A_2(z^{-1}) = (1 - a_2 z^{-1})$, $B_2(z^{-1}) = K_2$;
- $Y_1(z)$ et $Y_2(z)$ les transformées en Z de deux signaux du système qui sont mesurés ;
- $U(z)$ la transformée en Z du signal de commande ;
- $V_1(z)$ et $V_1(z)$ les transformées en Z de deux signaux de perturbation.

On a $a_1 \in]0;\ 1[$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$. La sortie du système qui est commandée est le signal $y_2(k)$.

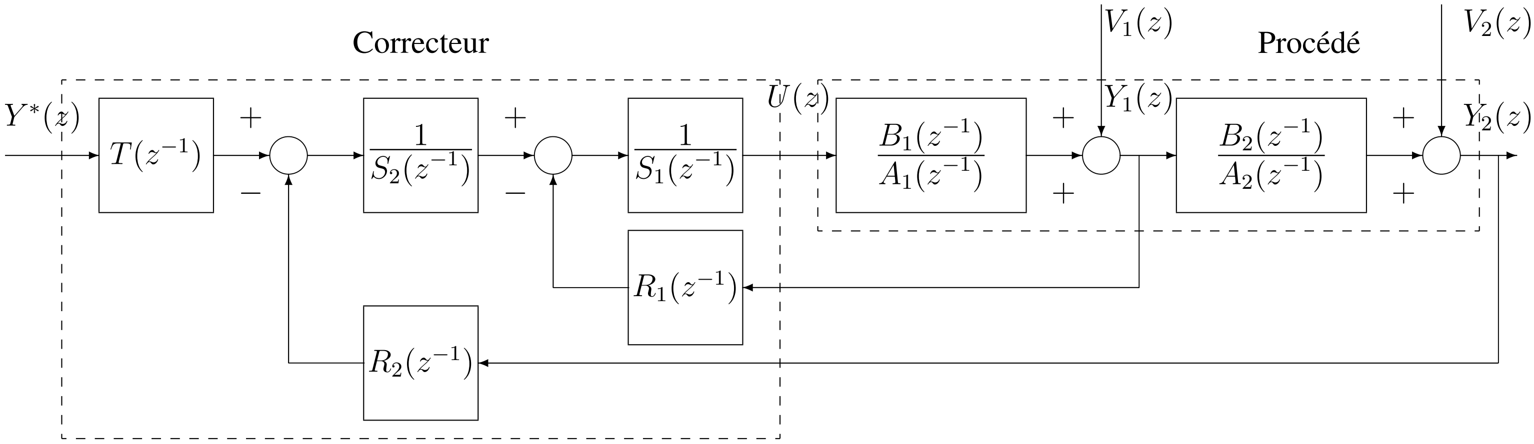

FIG. 1 – Système en boucle fermée total

On veut mettre au point un correcteur tel que

- un signal de consigne $y^\star(k)$ en échelon doit être poursuivi par le signal $y_2(k)$ avec une erreur statique nulle ;
- l'effet d'un signal de perturbation $v_1(k)$ en échelon doit être rejeté sur la sortie $y_2(k)$;
- l'effet d'un signal de perturbation $v_2(k)$ sinusoïdale de pulsation ω_0 doit être rejeté sur la sortie $y_2(k)$;

Pour cela, on considère un correcteur défini par 5 polynômes en z^{-1} notés $S_1(z^{-1})$, $R_1(z^{-1})$, $S_2(z^{-1})$, $R_2(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$ de façon à obtenir le système en boucle fermé représenté Figure 1. L'objectif de la première partie de l'exercice est de déterminer les polynômes $S_1(z^{-1})$ et $R_1(z^{-1})$ de façon à assurer le rejet de la perturbation $v_1(k)$; l'objectif de la seconde partie est de déterminer $S_2(z^{-1})$, $R_2(z^{-1})$ et $T_2(z^{-1})$ de façon à assurer le rejet de la perturbation $v_2(k)$ ainsi que le suivi de la consigne $y^\star(k)$.

Partie I : Mise au point de $S_1(z^{-1})$ et $R_1(z^{-1})$

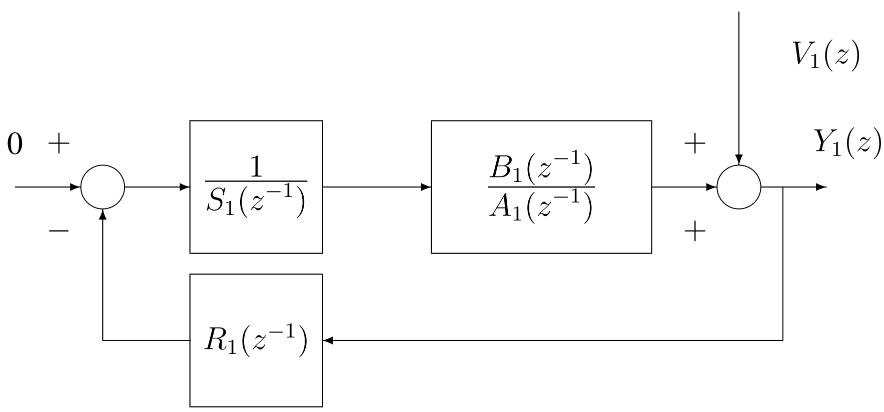

FIG. 2 – Système en boucle fermée interne

L'objectif de cette partie est de déterminer les polynômes $S_1(z^{-1})$ et $R_1(z^{-1})$ de façon à ce que le système bouclé représenté Figure 2 vérifie :

- son polynôme caractéristique $P_{c_1}(z^{-1})$ est donné par $1 - a_1 z^{-1}$;
- l'effet de signal de perturbation $v_1(k)$ en échelon sur le signal $y_1(k)$ est rejeté.

Questions

1. Est-il nécessaire d'introduire une (ou plusieurs) pré spécification(s) dans le polynôme $S_1(z^{-1})$? Justifier. Si oui, le(s) déterminer.

2. Ecrire et simplifier si nécessaire l'équation de Bezout. Justifier que cette équation admet une solution.

3. Résoudre l'équation de Bezout pour déterminer les polynômes R_1 et S_1 en fonction de K_1, a_1 et b_1.

Partie II : Mise au point de $S_2(z^{-1})$, $R_2(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$

L'objectif de cette partie est, conservant les polynômes $S_1(z^{-1})$ et $R_1(z^{-1})$ déterminés dans la partie précédente, de déterminer les polynômes $S_2(z^{-1})$, $R_2(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$ de façon à ce que le système bouclé représenté figure 3 vérifie :

- son polynôme caractéristique $P_{c_2}(z^{-1})$ est le polynôme $P_{c_2}(z^{-1}) = 1 - a_1\alpha z^{-1}$;
- l'effet d'un signal de perturbation $v_2(k)$ sinusoïdale de pulsation ω_0 doit être rejeté sur la sortie $y_2(k)$;

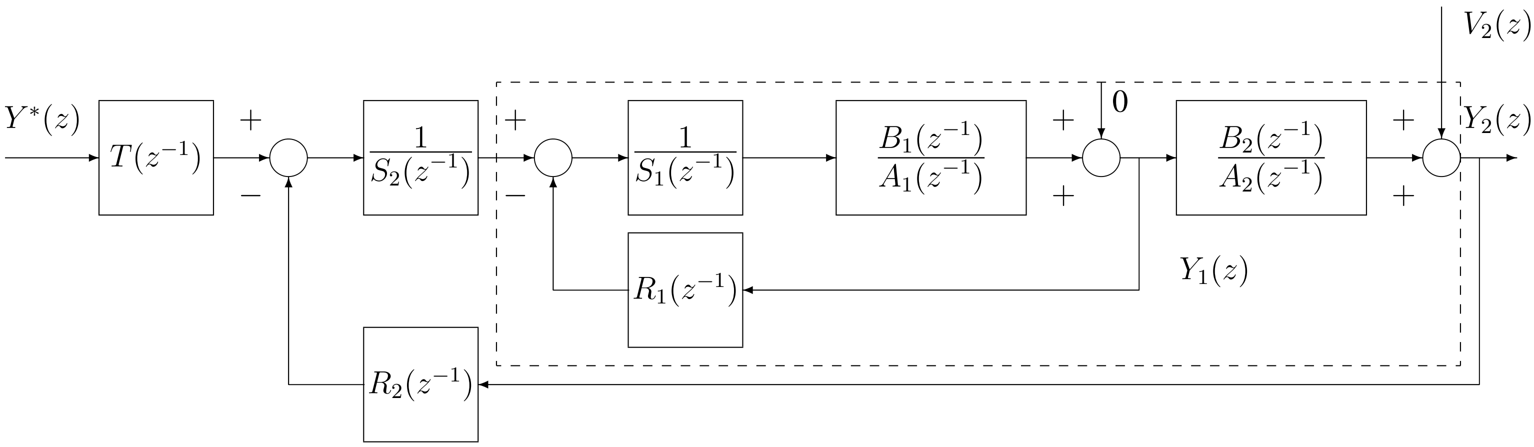

FIG. 3 – Système en boucle fermée total

Questions

1. Calculer les fonctions de transfert en boucle fermée $T_{y^\star \to y_2}(z)$ et $T_{v_2 \to y_2}(z)$ en fonction de a_1, a_2, b_1, K_1, K_2, $S_2(z^{-1})$, $R_2(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$.

2. Déterminer et justifier le(s) pré spécification(s) du polynôme $S_2(z^{-1})$.

3. Ecrire et simplifier si nécessaire l'équation de Bezout. Justifier que cette équation admet une solution. Il n'est pas demandé de la résoudre.

4. Proposer et justifier le choix d'un polynôme T assurant la poursuite d'échelon avec le temps de réponse le plus faible possible.

5. A partir du schéma représenté Figure 4, déterminer les fonctions de transfert en boucle fermée $T_{y^\star\to u}(z)$, $T_{v_1\to u}(z)$ et $T_{v_2\to u}(z)$ en fonction de a_1, a_2, b_1, K_1, K_2, $S_2(z^{-1})$, $R_2(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$.

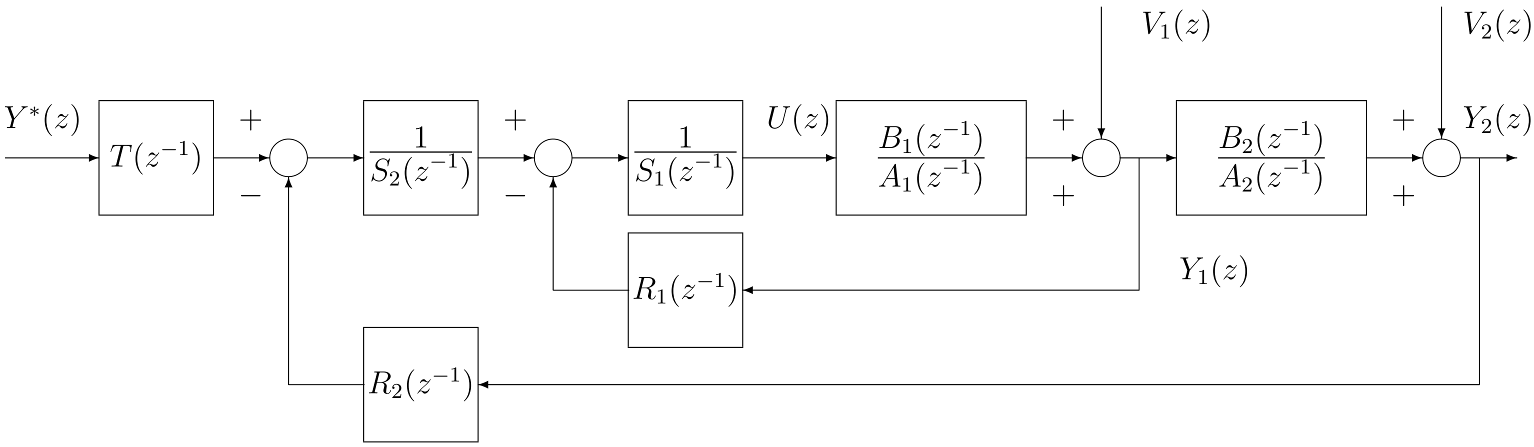

FIG. 4 – Système en boucle fermée total

Exercice 2 : Relation fonctions de transfert et réponses indicielles

Pour chacune des fonctions de transfert discrètes données ci-dessous, indiquer la réponse indicielle correspondante sur la figure 5. Tout choix devra être justifié brièvement.

- $G_a(z) = 0,079\dfrac{z+1}{z^2 - 1,842z + 1}$;
- $G_b(z) = 0,4\dfrac{z-0,75}{(z-0,8)(z-0,5)}$;
- $G_c(z) = 0,111\dfrac{z-0,1}{(z-0,8)(z-0,5)}$;
- $G_d(z) = \dfrac{z-0,1}{(z+0,8)(z-0,5)}$.

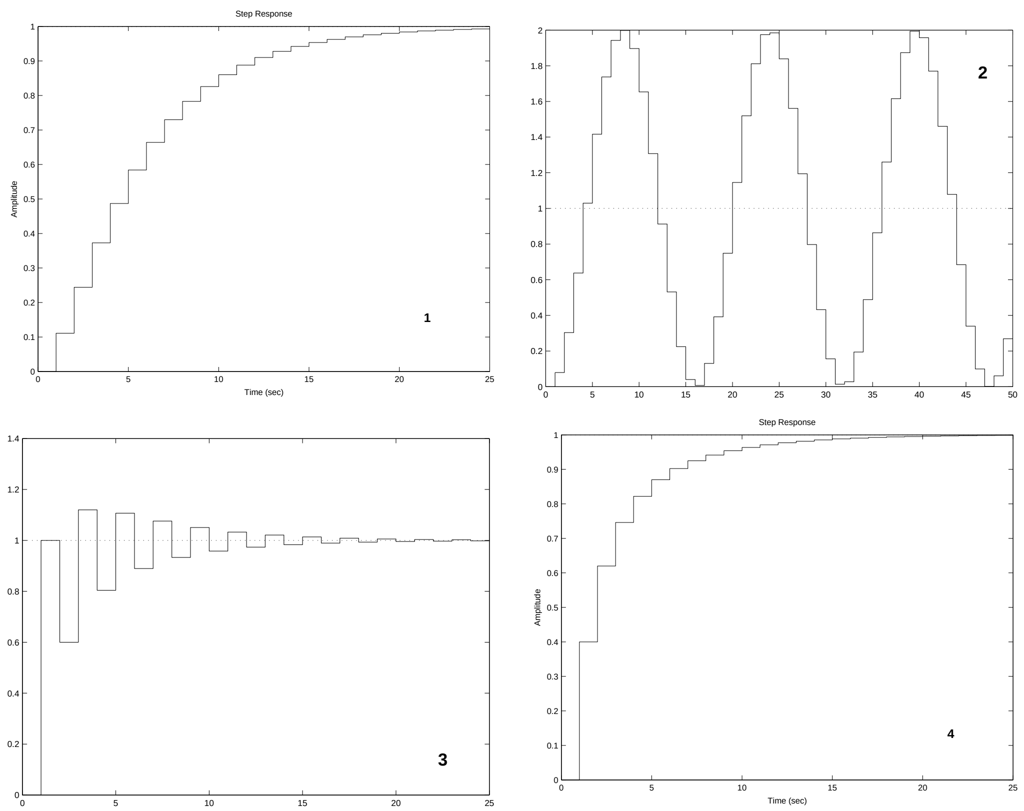

FIG. 5 – Réponses indicielles (en haut : 1 à gauche, 2 à droite ; en bas : 3 à gauche, 4 à droite)

Exercice 3 : NL

On veut étudier le régime libre du système en boucle fermée représenté Figure 6.

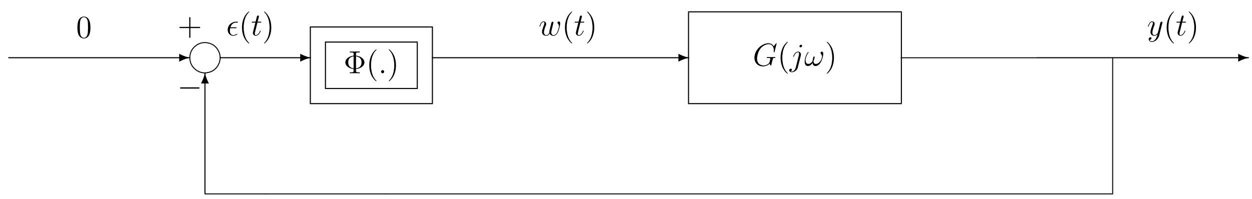

FIG. 6 – Système en boucle fermée

Φ est une saturation définie par la figure 7 et caractérisée par le paramètre $K > 0$. $G(p)$ est défini par :

$$G(p) = \frac{0,25(p+1)^2}{(p+0,5)^2(p^2+0,2p+1)}.$$

Questions

1. Déterminer la sortie $w(t)$ de la non linéarité Φ pour l'entrée

$$\forall t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}], \qquad \epsilon(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t)$$

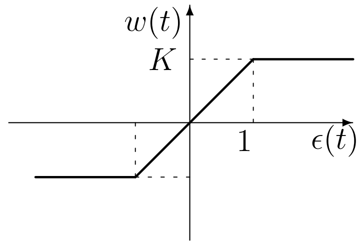

FIG. 7 – Saturation

où $\epsilon_1 > 1$. On donnera la fonction qui relie $w(t)$ à t pour $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ et on tracera l'allure de $w(t)$ sur la figure 8. *La feuille page 7 sur laquelle se trouve la figure 8 sera jointe à la copie avec la mention du numéro d'anonymat (numéro de place).*

2. A partir de l'expression de $w(t)$, montrer que pour $\epsilon_1 \in]1, +\infty[$,

$$N(\epsilon_1) = \frac{2K}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\epsilon_1}\right) + \frac{1}{\epsilon_1}\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_1^2}}\right)$$

3. En déduire le lieu critique dans le plan complexe. On prendra soin de l'orienter.

4. Les diagrammes de Nyquist et de Bode de la fonction de transfert $G(j\omega)$ sont représentés figure 9 et figure 10. En régime libre, pour $K = 2\pi$, le système peut-il présenter des oscillations ? Sont-elles stables ? Si oui, déterminer leur(s) pulsation(s) propre(s).

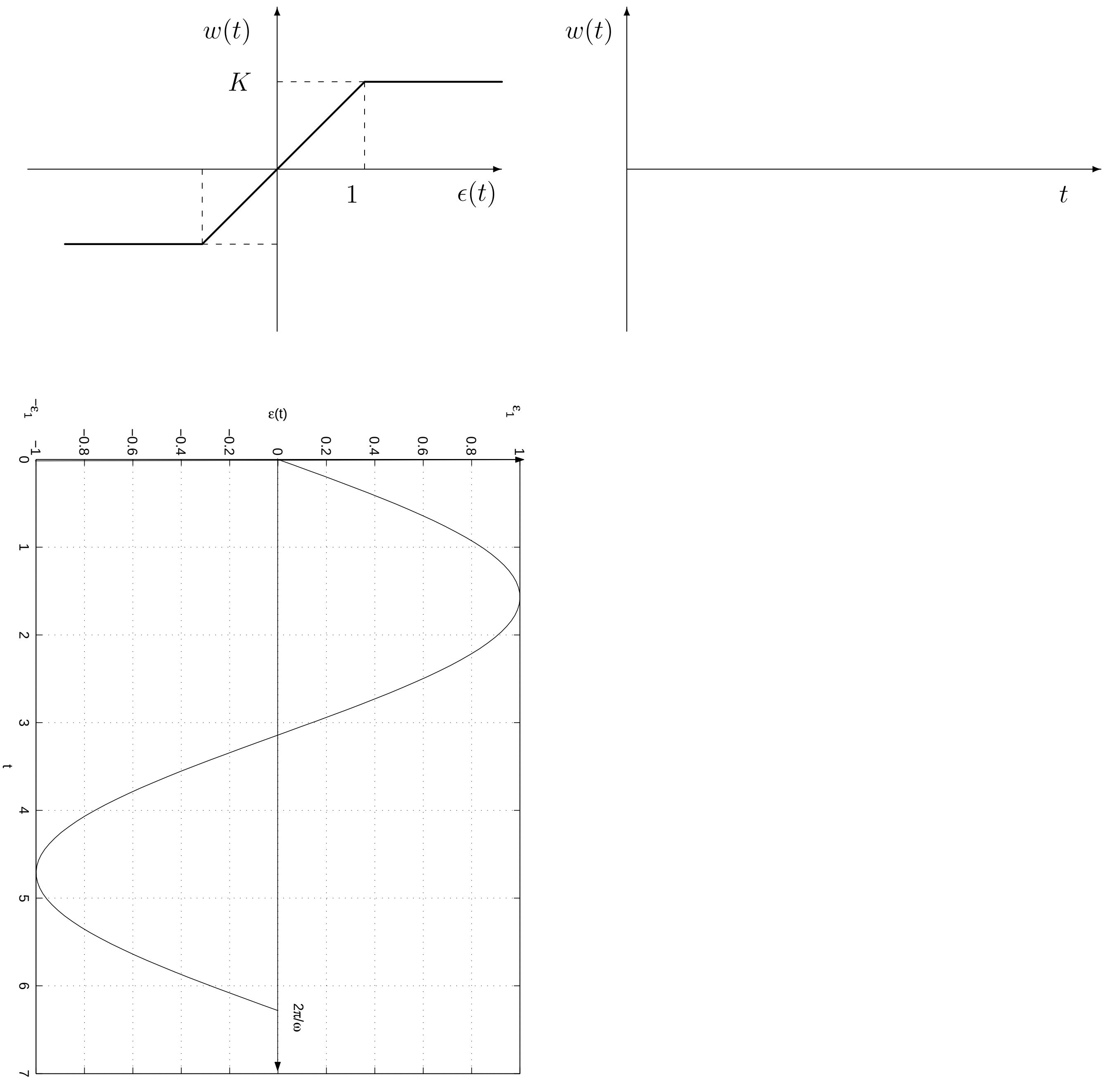

FIG. 8 – Non linéarité de type saturation

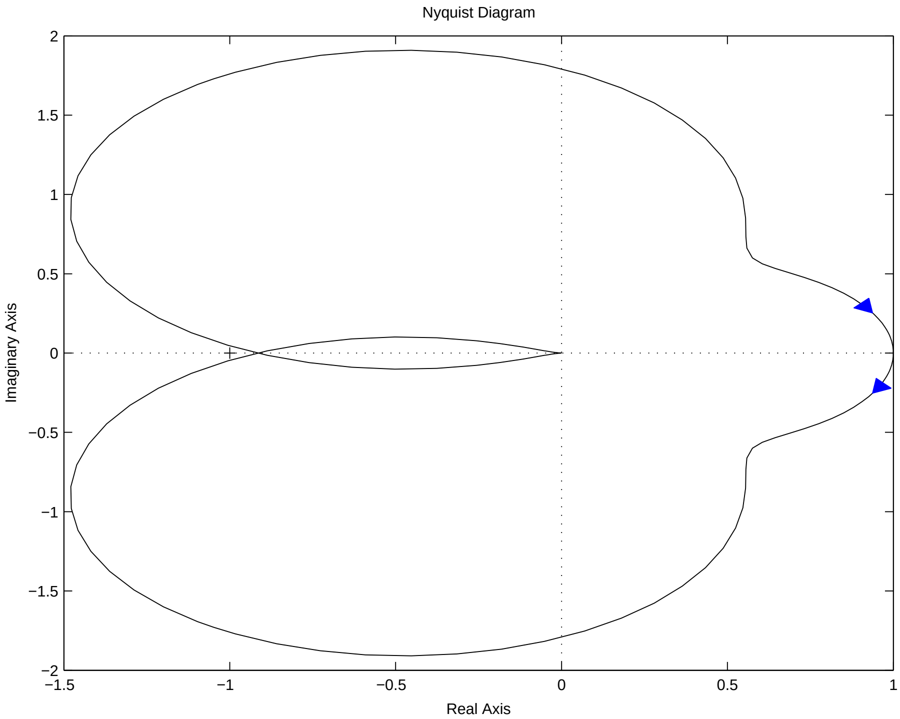

FIG. 9 – Diagrammes de Nyquist

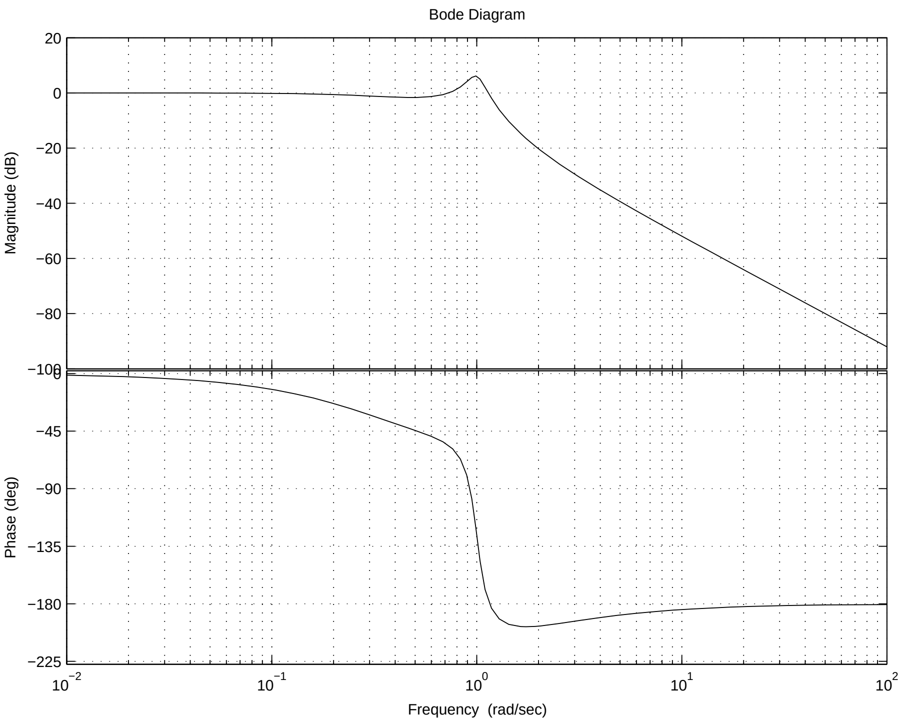

FIG. 10 – Diagrammes de Bode de $G(j\omega)$