UNIVERSITE DE CAEN
U.F.R. de Science

2^ième^ SESSION 2004
Septembre 2004

MAITRISE E.E.A. (A.I.I.)
Examen: Commande numérique des systèmes
EL426T1
durée: 2h

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Les téléphones portables (même éteints) et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Seul document autorisé : document manuscrit de 4 pages format A4.

Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Points d'équilibre d'un système non linéaire

On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ h(x_1(t)) - \frac{c}{m} x_2(t) \end{bmatrix}$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les deux variables d'état. La fonction h est définie par :

$$h(x_1) = -\frac{k}{m}(x_1 - a^2 x_1^3).$$

Tous les paramètres a, c, k et m sont strictement positifs.

1. A partir des équations d'état du système et de l'expression de la fonction h, déterminer les points d'équilibre de ce système non linéaire en fonction de a, c, k et m.

2. Etudier la stabilité des points d'équilibre déterminés à la question précédente.

Exercice 2 : Commande par retour d'état d'un moteur CC

On considère la commande numérique d'un moteur à courant continu. Le modèle qui relie la tension appliquée au moteur $u(k)$ à la position angulaire $y(k)$ de l'axe du moteur est donné par la fonction de transfert :

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 z + b_1}{(z-1)(z-a)}}_{G(z)} U(z)$$

avec $a \in]0,\ 1[$, $b_0 + b_1 \neq 0$ et $b_1 + ab_0 \neq 0$.

Questions

1. Déterminer les pôles et les zéros de la fonction de transfert $G(z)$. Cette fonction de transfert est-elle stable ?

2. Ecrire la représentation d'état sous forme commandable associée à la fonction de transfert $G(z)$.

3. On désire mettre au point un correcteur par retour d'état mesuré défini par:

$$u(k) = -Kx(k) + \Gamma y^{\star}(k)$$

où $x(k)$ est le vecteur d'état de la représentation d'état sous forme commandable, $y^{\star}(k)$ le signal de référence, et où K et Γ sont les gains du correcteur à déterminer. On suppose que $x(k)$ est mesuré. K va être déterminé de façon à placer les pôles en boucle fermée. Par la suite, on les notera z_i^*.

   (a) Combien de pôles va-t-on placer ?

   (b) Exprimer K en fonction de z_i^*, a, b_0 et b_1.

   (c) Déterminer Γ de façon à assurer la poursuite d'un échelon sans erreur statique.

   (d) Dans le cas où une erreur se serait glissée dans la valeur des paramètres b_0 et b_1, le correcteur mis au point dans la question précédente permet-il d'assurer la poursuite d'échelon avec une erreur statique nulle ? Le justifier.

4. On désire maintenant mettre au point un correcteur par retour d'état mesuré avec intégrateur, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{array}{rcl} x_I(k+1) & = & x_I(k) + (y^*(k) - y(k)) \\ u(k) & = & -Kx(k) - k_I x_I(k) \end{array}$$

où le vecteur K et k_I sont à déterminer de façon à placer les pôles du système en boucle fermée. Cette structure de commande a été choisie de façon à assurer le rejet de perturbation en échelon.

   (a) Etablir le système augmenté associé.

   (b) Combien de pôles va-t-on placer ? Dans la suite, on les supposera en 0.

   (c) Exprimer le vecteur K et k_I en fonction de a, b_0 et b_1.

   (d) Calculer la fonction de transfert $T_{y^{\star} \to y}(z)$ en fonction de a, b_0 et b_1.

   (e) A partir du résultat de la question précédente, déterminer si le système en boucle fermée est capable de suivre sans erreur statique des signaux de référence en forme d'échelon.

Exercice 4 : QCM

Répondre aux questions suivantes en cochant une seule réponse parmi les 3 proposées. Tout choix devra être justifié *brièvement*. *Les réponses devront être portées directement sur la feuille. Elle sera jointe à la copie avec la mention du numéro d'anonymat (numéro de place). Pour chaque mauvaise réponse, un nombre* NÉGATIF *de points sera compté.*

• Un correcteur RST a été mis au point pour commander le procédé

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z - 0.75}{(z - 0.8)(z - 0.9)}$$

avec pour polynôme caractéristique du système en boucle fermée $P_c(z^{-1}) = 1 - 0.5z^{-1}$. Quel choix du polynôme $T(z^{-1})$ permet d'obtenir la poursuite d'un signal de référence en échelon avec une erreur statique nulle et une dynamique de poursuite plus rapide que la dynamique de régulation ?

$T(z^{-1}) = 0.25$ ☐ $T(z^{-1}) = 1 - 0.5z^{-1}$ ☐ $T(z^{-1}) = 4 - 2z^{-1}$ ☐

Justification :

• Les figures 1 représentent les sorties de trois systèmes oscillants en fonction du temps pour deux conditions initiales différentes.

Le système 1 peut-il être linéaire ☐ non linéaire ☐ entre les deux ☐

Justification :

Le système 2 peut-il être linéaire ☐ non linéaire ☐ entre les deux ☐

Justification :

Le système 3 peut-il être linéaire ☐ non linéaire ☐ entre les deux ☐

Justification :

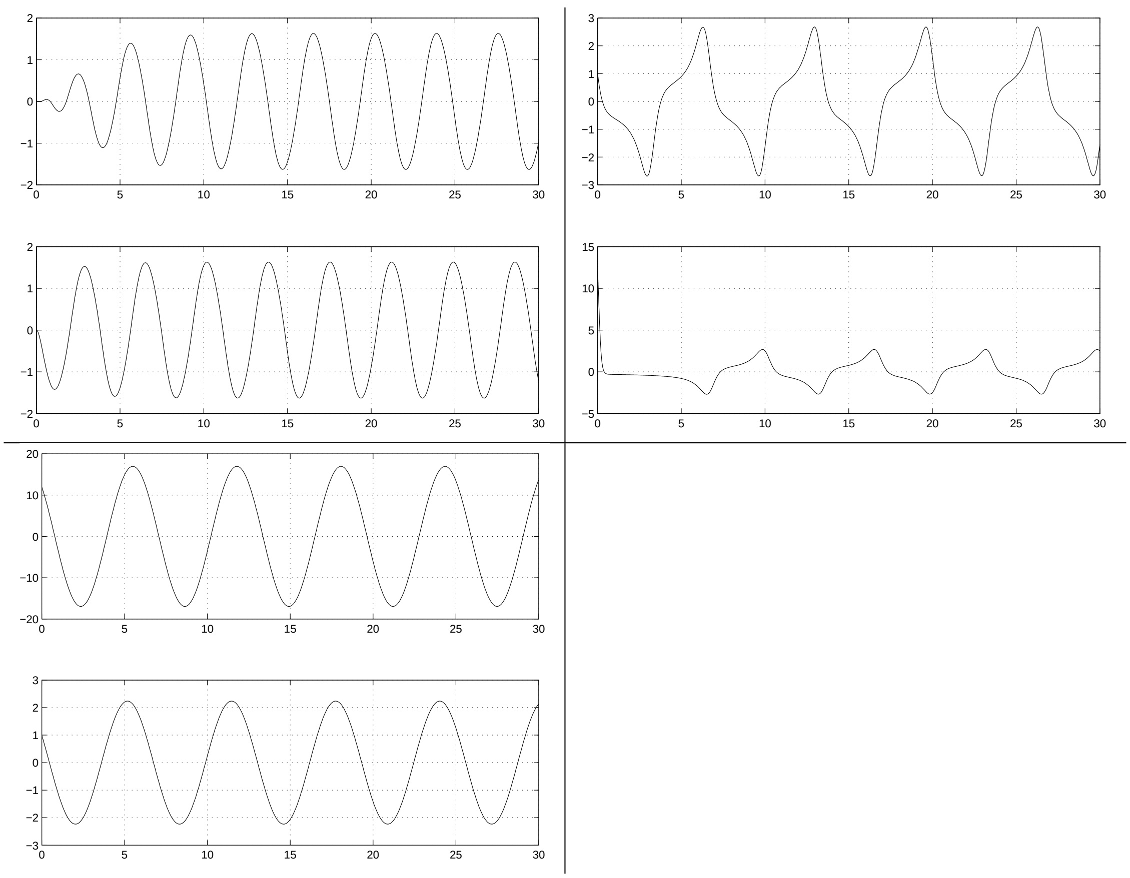

Figure 1: Sortie du système 1 (en haut à gauche), 2 (en haut à droite), 3 (en bas)

• On considère trois systèmes bouclés non linéaires de la forme donnée par la figure 2.

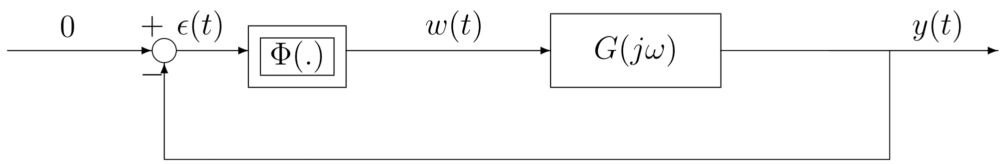

Figure 2: Système avec non linéarité séparable en régime libre

Les figures 3 présentent le diagramme de Nyquist pour chaque fonction de transfert $G(p)$ ainsi que le tracé des lieux critiques pour chaque non linéarité Φ.

Le système 1 a des oscillations stables □ est instable □ est stable □
Justification :

Le système 2 a des oscillations stables □ est instable □ est stable □
Justification :

Le système 3 a des oscillations stables □ est instable □ est stable □
Justification :

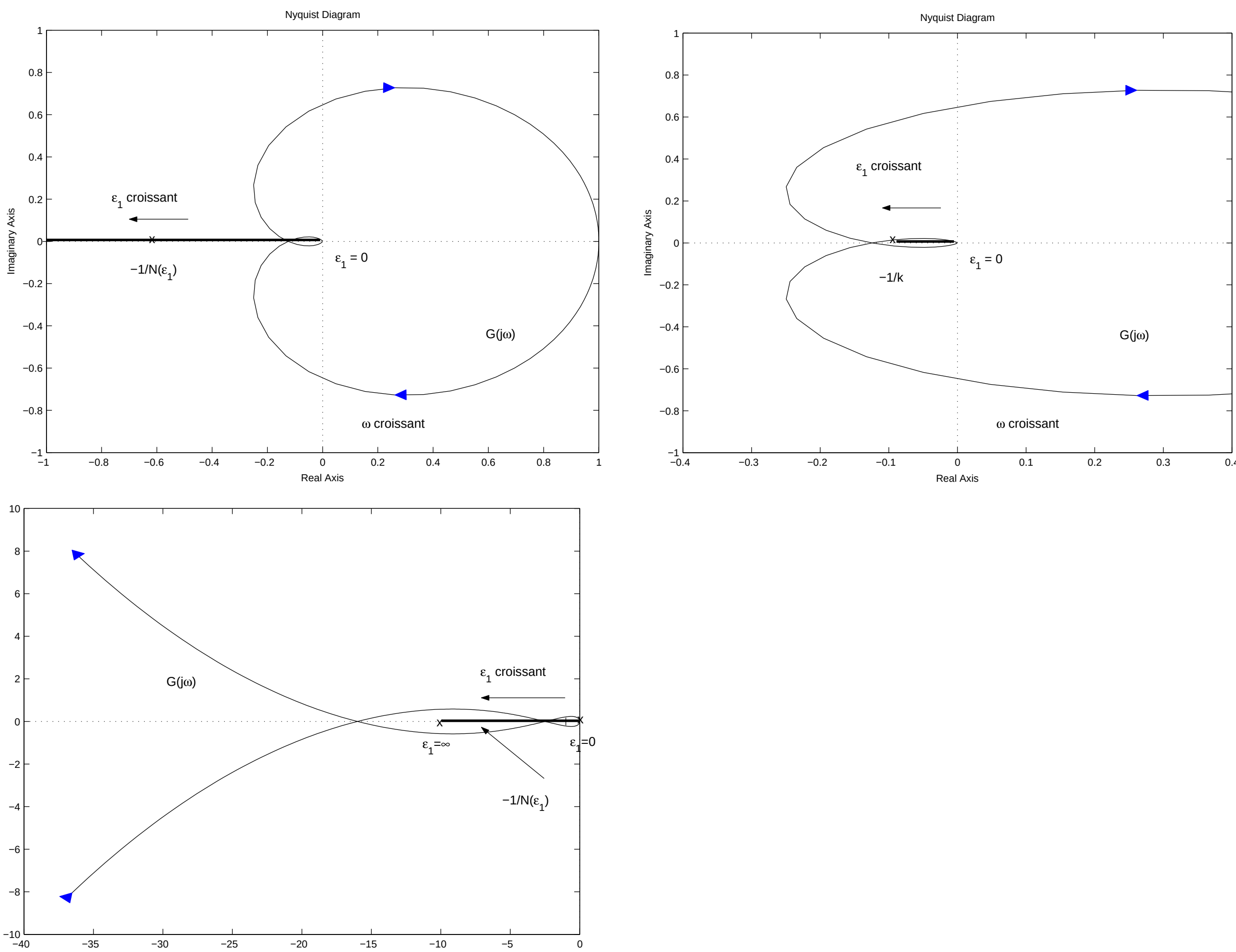

Figure 3: Diagrammes de Nyquist de $G(p)$ et tracé de $\dfrac{-1}{N(\epsilon_1)}$ pour ϵ_1 allant de 0 à $+\infty$ système bouclé 1 (en haut à gauche), 2 (en haut à droite), 3 (en bas)

Exercice 3 : Commande RST

On considère le système défini par la fonction de transfert :

$$Y(z) = \frac{1 - bz^{-1}}{1} V(z) + \frac{Kz^{-1} - Kbz^{-2}}{1 - z^{-1}} U(z) \tag{1}$$

avec $Y(z)$ la transformée en Z du signal de sortie $y(k)$, $V(z)$ la transformée en Z du signal de perturbation $v(k)$, $U(z)$ la transformée en Z du signal de commande $u(k)$, $a \in]0,\ 1[$ et $b \in]0,\ 1[$. La période d'échantillonnage est notée T_s.

On va déterminer un correcteur RST:

$$S(z^{-1})U(z) = T(z^{-1})Y^{\star}(z) - R(z^{-1})Y(z) \tag{2}$$

qui permet de satisfaire le cahier des charges suivant.

- $P_c(z^{-1}) = (1 - bz^{-1})$.
- Les signaux de consigne en échelon doivent être poursuivis avec une erreur statique nulle.
- Les signaux de perturbation V en forme d'échelon ou de sinusoïde à la pulsation ω_0 doivent être rejetés.

Questions

1. Représenter le système en boucle fermée défini par les équations (1) et (2) par un schéma bloc.
2. Calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée entre la perturbation $v(k)$ et la sortie $y(k)$ du système.
3. Déduire de la question précédente les pré spécifications du polynôme S.
4. Ecrire et réduire l'équation de Bezout.
5. Résoudre l'équation de Bezout pour déterminer R et S.