UNIVERSITE DE CAEN
U.F.R. de Science

$1^{\text{ière}}$ SESSION 2006
Juin 2006

Master EEA 1A, Pro AEII et Recherche ESCI

Examen : Automatique
AE404T1
durée : 2h

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Les téléphones portables (même éteints) et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Seul document autorisé : document manuscrit de 2 pages maximum format A4 contenant uniquement un résumé des résultats théoriques du cours. Ce document, portant le numéro de place devra être rendu avec la copie.

Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Modélisation et rejet de perturbations

On considère le signal de perturbation $v(k)$ définie par l'équation aux différences suivante :

$$v(k) = 2v(k-1) - v(k-2) + \delta(k)$$

avec $v(k) = 0$, pour $k \leq 0$.

Questions

1. Donner le modèle de ce signal de perturbation.
2. De quel type de signal s'agit-il ?
3. On considère la commande d'un système (procédé) qui est soumis à ce signal de perturbation en sortie. On suppose que l'on mesure l'état du système. Proposer une structure de correcteur par retour d'état mesuré permettant d'assurer le rejet asymptotique de cette perturbation. On ne calculera pas les gains du retour d'état.
4. On considère la commande d'un système (procédé) qui est soumis à ce signal de perturbation en sortie. On suppose que l'on mesure l'état du système. On veut mettre au point un correcteur RST qui assure le rejet de perturbation. Donner les pré spécifications qui doivent être vérifiées par S.

Exercice 2 : Mise au point d'un correcteur RST

On considère le système défini par la fonction de transfert :

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}U(z) + V(z) \tag{1}$$

avec $Y(z)$ la transformée en Z du signal de sortie, $U(z)$ la transformée en Z du signal de commande, $V(z)$ la transformée en Z du signal de perturbation, $A(z^{-1}) = 1 - az^{-1}$ et $B(z^{-1}) = Kz^{-1}$ avec $a \in]0,\ 1[$ et $K > 0$. La période d'échantillonnage T_s vaut $0,1$ seconde.

A : Problème de commande numéro 1

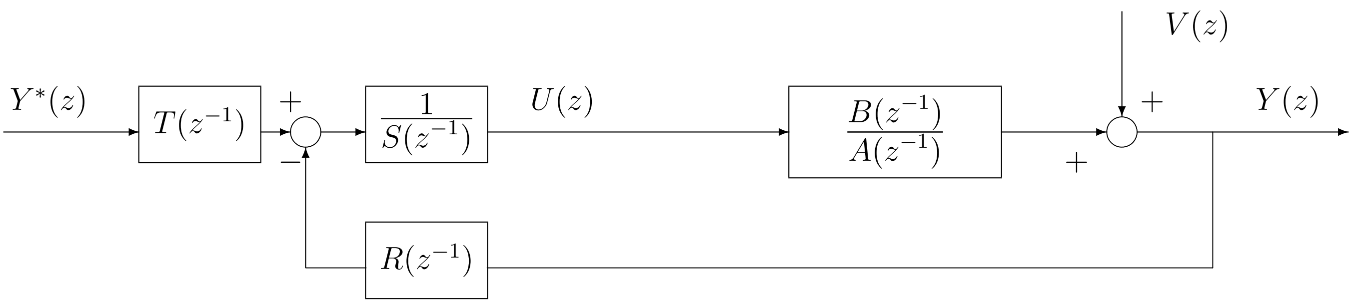

FIG. 1 – Système en boucle fermée total

On va déterminer un correcteur RST qui permet de satisfaire le cahier des charges suivant.

- Les signaux de référence considérés sont des échelons. La poursuite doit s'effectuer avec une erreur statique nulle. Elle doit être la plus rapide possible.
- Un signal de perturbation v en forme d'échelon en sortie du système doit être rejeté, avec un temps de rejet de l'ordre d'une seconde.

Le système en boucle fermée correspondant est représenté Figure 1.

Questions

1. Déterminer un polynôme caractéristique du premier ordre $P_c(z^{-1})$ permettant d'assurer une dynamique compatible avec le cahier des charges.
2. Déterminer les pré spécifications du polynôme $S(z^{-1})$.
3. Ecrire l'équation de Bezout.
4. A partir de la résolution de l'équation de Bezout, déterminer les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$.
5. Déterminer le polynôme $T(z^{-1})$. Le justifier en quelques mots.

B : Problème de commande numéro 2

On considère le problème de commande précédent dans lequel la perturbation n'est plus une perturbation de sortie. Elle agit maintenant sur la sortie du système de la façon suivante :

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}U(z) + \frac{B_v(z^{-1})}{A_v(z^{-1})}V(z) \tag{2}$$

avec $B_v(z^{-1}) = 1$ et $A_v(z^{-1}) = 1 - a_v z^{-1}$ où $a_v = 0,97$.

Questions

1. Tracer le schéma bloc du système en boucle fermée correspondant au nouveau problème de commande.
2. A partir de ce schéma, calculer la fonction de transfert $T_{v\to y}(z)$ entre la perturbation V et la sortie Y en fonction de $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$, $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $A_v(z^{-1})$ et $B_v(z^{-1})$.
3. Calculer l'ordre de grandeur du temps de rejet de la perturbation échelon v en utilisant le correcteur RST déterminé dans la partie A.
4. Le rejet de perturbation n'étant plus assuré avec la dynamique souhaitée, on décide de recalculer deux nouveaux polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ tout en conservant le polynôme $P_c(z^{-1})$ déterminé précédemment. A partir de l'expression de la fonction de transfert $T_{v\to y}(z)$ déterminée dans la première question, déterminer la nouvelle pré spécification de S assurant le rejet de la perturbation avec une dynamique déterminée par $P_c(z^{-1})$.
5. Déduire de la question précédente l'équation de Bezout.
6. A partir de la résolution de l'équation de Bezout, déterminer les nouveaux polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$.
7. Est-il nécessaire de modifier le polynôme $T(z^{-1})$ calculé à la question 5 de la partie A ? Justifier en quelques mots.

Exercice 3 : Analyse d'un système à non linéarité séparable

On veut étudier le régime libre du système en boucle fermée représenté Figure 2.

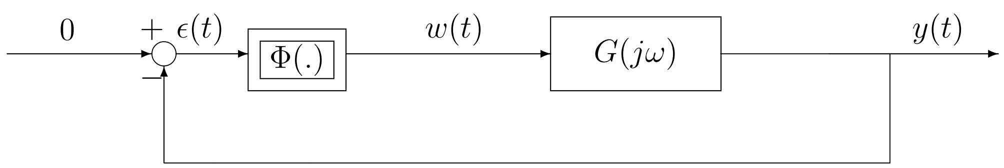

FIG. 2 – Système en boucle fermée

Φ est un relais avec hystérésis. Il admet pour gain complexe équivalent :

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M}{\pi\epsilon_1}\left(\sqrt{1-\left(\frac{h}{2\epsilon_1}\right)^2} - j\frac{h}{2\epsilon_1}\right) \quad \text{avec} \quad M = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2}.$$

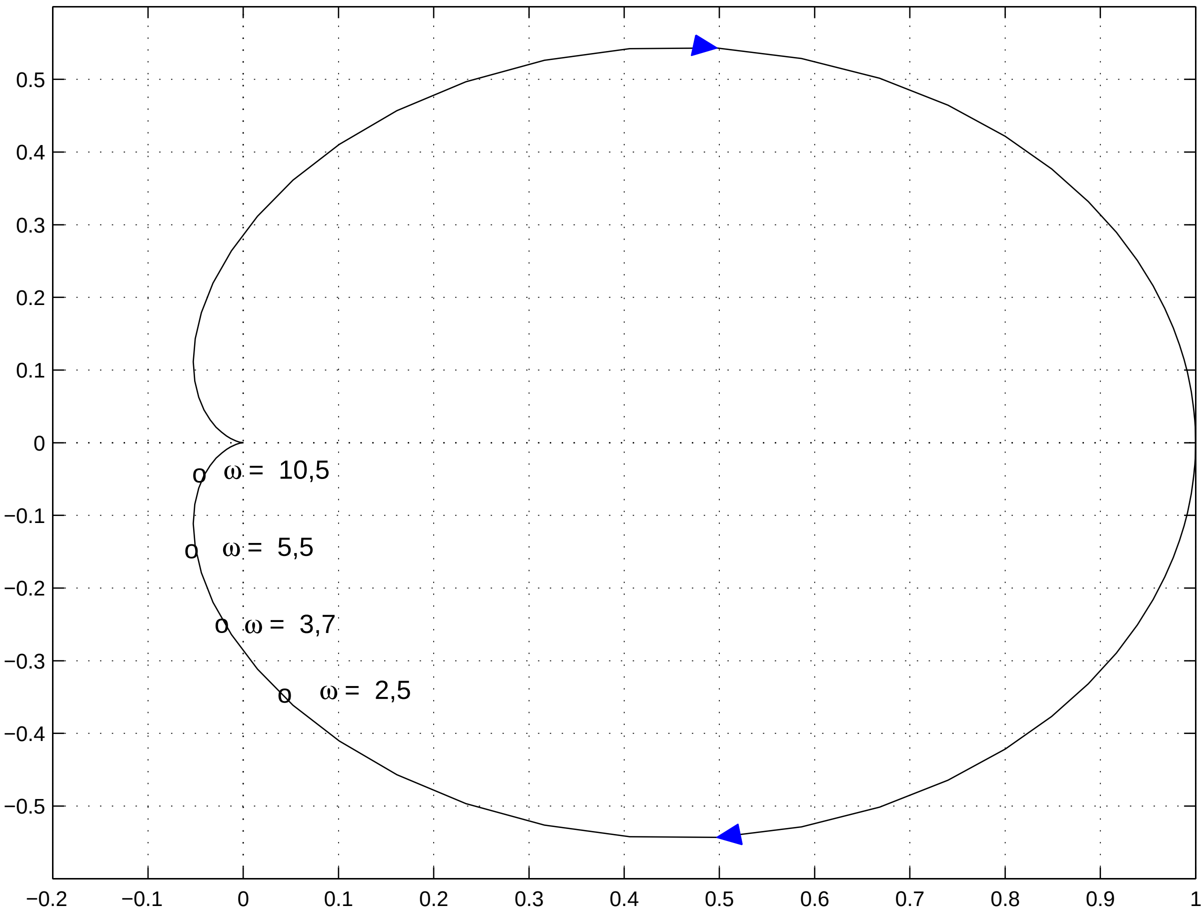

FIG. 3 – Diagramme de Nyquist de G pour $K_G = 1$

$G(p)$ est la fonction de transfert définie par :

$$G(p) = K_G \frac{10}{(p+1)(p+10)}.$$

Le diagramme de Nyquist de G pour $K_G = 1$ est représenté Figure 3.

Questions

1. Tracer le lieu critique de la non linéarité Φ dans le plan complexe.
2. Existe-il un point d'intersection entre le lieu critique et le diagramme de Nyquist de $G(p)$ pour $K_G = \frac{1}{4}$? Pour $K_G = 1$?
3. Le système bouclé représenté Figure 2 peut-il présenter des oscillations en régime libre pour $K_G = \frac{1}{4}$? pour $K_G = 1$? Justifier. Si oui, sont-elles stables et quelle est la période des oscillations ?
4. Pour quelles valeurs de $K_G > 0$ le système bouclé représenté Figure 2 présente-il des oscillations stables ?

Exercice 4 : Calcul du gain complexe équivalent d'une non linéarité

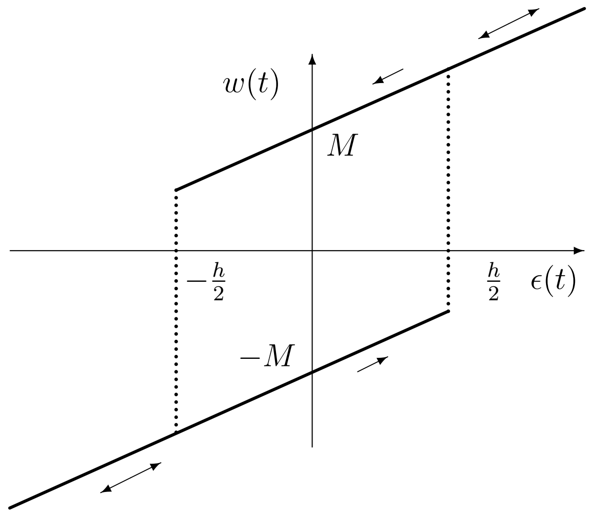

FIG. 4 – Pente avec hystérésis

On considère la fonction non linéaire Φ tel que $w = \Phi(\epsilon)$ définie par sa caractéristique représentée Figure 4. La pente des demi-droites est $K \geq 0$.

Questions

1. Déterminer la sortie $w(t)$ de la non linéarité Φ pour l'entrée $\epsilon(t)$ définie par :

$$\forall t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}], \qquad \epsilon(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t)$$

avec $\epsilon_1 > \dfrac{h}{2}$ et en prenant pour condition initiale $-M$. On donnera la fonction qui relie $w(t)$ à t pour $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ et on tracera l'allure de $w(t)$ sur la figure 5. *La feuille où se trouve la figure 5 sera jointe à la copie avec la mention du numéro d'anonymat (numéro de place).*

2. A partir de l'expression de $w(t)$, calculer la valeur du gain complexe équivalent $N(\epsilon_1)$ en fonction de ϵ_1, M, K, et h avec $\epsilon_1 > \dfrac{h}{2}$. Dans l'expression obtenue, en faisant $K = 0$ vérifier que l'on retrouve l'expression du gain complexe équivalent d'un relais avec hystérésis :

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M}{\pi\epsilon_1}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\epsilon_1}\right)^2} - j\frac{h}{2\epsilon_1}\right).$$

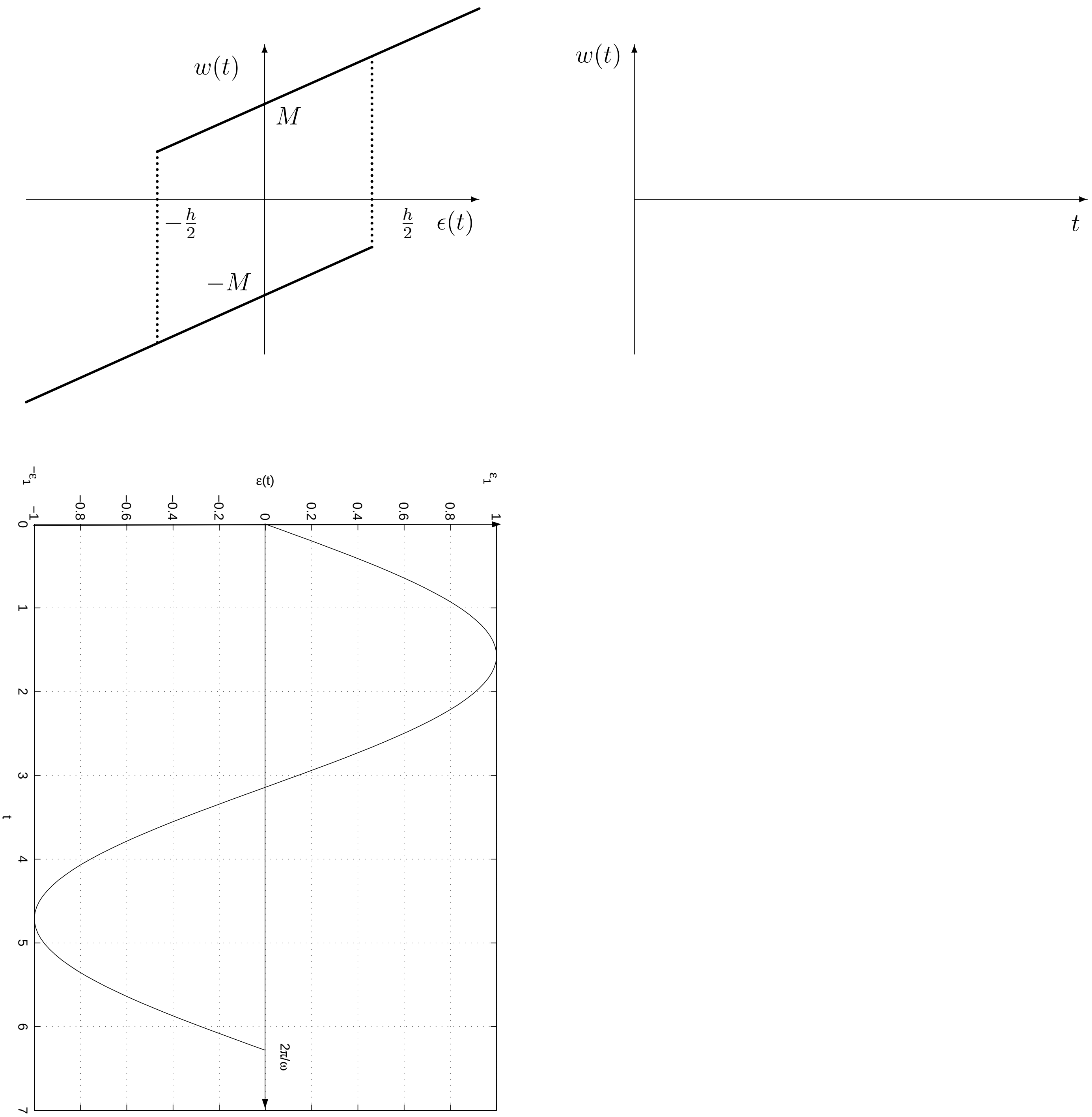

FIG. 5 – Sortie de Φ à une entrée sinusoïdale