UNIVERSITE DE CAEN
U.F.R. de Science

1ière SESSION 2005
09 juin 2005

Master EEA 1A, Pro AEII et recherche ESCI

Examen : Automatique
AE404T1
durée : 2h

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Les téléphones portables (même éteints) et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Seul document autorisé : document manuscrit de 4 pages format A4.

Tous les exercices sont indépendants.

Rappels

– Pour

$$G_c(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + {\omega_0}^2}$$

Dépassement :

$$D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{1}$$

Temps du premier maximum :

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2}$$

Exercice 1 : Mise au point d'un correcteur RST

On considère le système défini par :

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}(U(z) + V_u(z)) + V_y(z) \tag{3}$$

avec $A(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$, $B(z^{-1}) = Kz^{-1}$, $K > 0$ et $T_s = 1$ s. $Y(z)$ désigne la transformée en Z du signal de sortie, $U(z)$ la transformée en Z du signal de commande, $V_y(z)$ et $V_u(z)$ les transformées en Z des signaux de perturbation.

A : Cahier des charges 1

On veut déterminer un correcteur RST défini par l'équation :

$$S(z^{-1})U(z) + R(z^{-1})Y(z) = T(z^{-1})Y^*(z) \tag{4}$$

avec $Y^\star(z)$ la transformée en Z du signal de référence, $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$ des polynômes en z^{-1} à déterminer avec le terme constant de $S(z^{-1})$ qui est égal à 1 :

$$\begin{aligned}
R(z^{-1}) &= r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \ldots + r_{nr} z^{-nr} \\
S(z^{-1}) &= 1 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \ldots + s_{ns} z^{-ns} \\
T(z^{-1}) &= t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \ldots + t_{nt} z^{-nt}
\end{aligned}$$

afin de satisfaire le cahier des charges suivant :
- $P_c(z^{-1}) = 1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}$ pour assurer un certain temps du premier maximum et un certain dépassement ;
- un signal de consigne en échelon doit être poursuivi avec une erreur statique nulle ;
- un signal de perturbation V_u en échelon en entrée du système doit être rejeté ;
- un signal de perturbation V_y en rampe en sortie du système doit être rejeté.

Questions

1. Déterminer et justifier le(s) pré spécification(s) du polynôme S.

2. Ecrire l'équation de Bezout. Justifier que cette équation admet une solution.

3. Résoudre l'équation de Bezout pour déterminer les polynômes R et S en fonction de K, α et β.

4. Déterminer α et β correspondant à un temps du premier maximum de 12 secondes et un dépassement de 15%.

5. Proposer et justifier le choix d'un polynôme T et les deux polynômes $A_{star}(z^{-1})$ et $B_{star}(z^{-1})$ d'un modèle de poursuite du premier ordre pour assurer un temps de montée de 9 secondes et un dépassement nul.

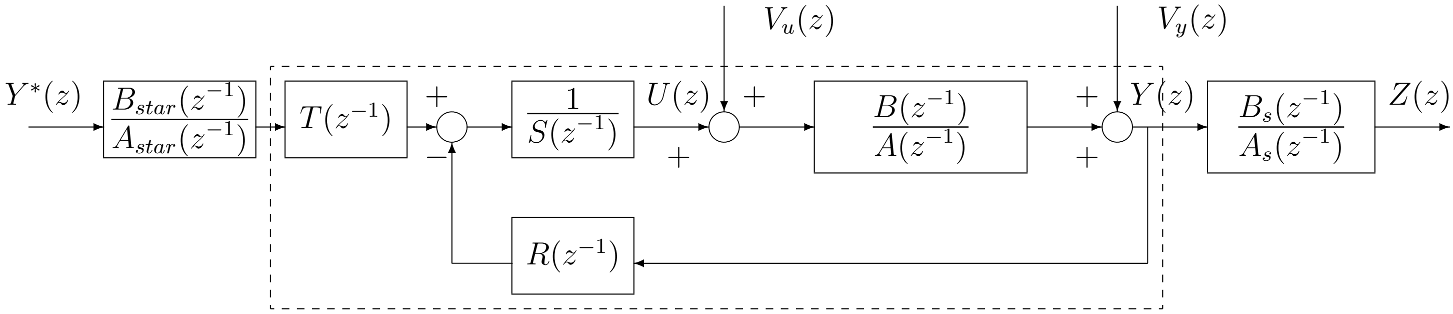

FIG. 1 – Boucle fermée avec correcteur RST (section B : Cahier des charges 2)

B : Cahier des charges 2

On suppose que le signal $y(k)$ qui est mesuré n'est pas la sortie du système à commander. La sortie du système à commander est maintenant le signal $z(k)$ défini par :

$$Z(z) = \frac{B_s(z^{-1})}{A_s(z^{-1})} Y(z)$$

avec $A_s(z^{-1}) = 1 - az^{-1}$ où $a = 0,8669$ et $B_s(z^{-1}) = z^{-1}$. Pour étudier la poursuite et le rejet de perturbation, le signal de sortie pris en compte est donc maintenant $z(k)$ et non $y(k)$.

Questions

1. Calculer les fonctions de transfert en boucle fermée $T_{y^\star \to z}(z)$, $T_{v_y \to z}(z)$ et $T_{v_u \to z}(z)$ en fonction de $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $A_s(z^{-1})$, $B_s(z^{-1})$, $A_{star}(z^{-1})$, $B_{star}(z^{-1})$, $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$.

2. Avec le correcteur RST déterminé dans la partie A, justifier pourquoi la poursuite ne s'effectue plus avec un temps de montée de 9 secondes. Déterminer un ordre de grandeur sur le temps de montée obtenu.

3. On conserve le modèle de poursuite (c'est-à-dire $A_{star}(z^{-1})$ et $B_{star}(z^{-1})$) ainsi que les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ déterminés dans la partie A. Déterminer un nouveau polynôme $T(z^{-1})$ pour assurer la poursuite avec un temps de montée de 9 secondes.

Exercice 2 : Points d'équilibre d'un système non linéaire

On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1(t) + x_2(t) \\ h(x_1(t)) + x_2(t) \end{bmatrix}$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les deux variables d'état. La fonction h est une zone morte définie par sa caractéristique représentée figure 2 ; a est un paramètre strictement positif.

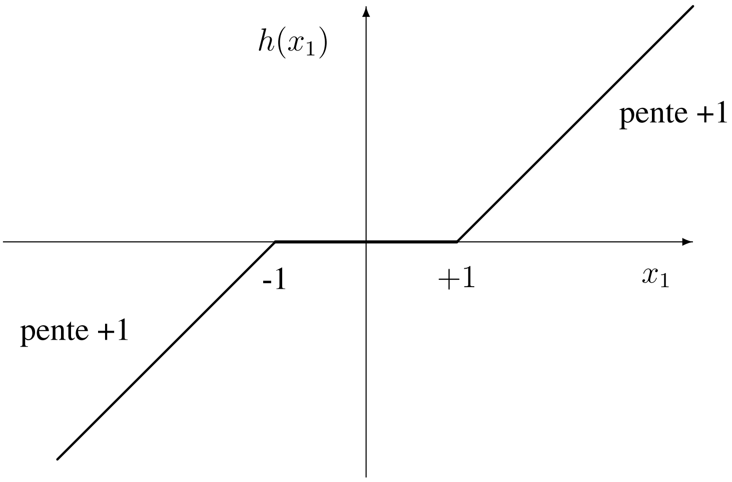

FIG. 2 – Zone morte

Questions

1. Ecrire les équations définissant la zone morte.

2. A partir des équations d'état du système, déterminer les points d'équilibre de ce système non linéaire en fonction du paramètre a.

3. Etudier la stabilité des différents points d'équilibre en fonction du paramètre a.

Exercice 3 : Commande par retour d'état

On considère la commande numérique par retour d'état d'un système d'ordre 1 modélisé par la représentation d'état :

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & ax(k)+bu(k) \\ y(k) & = & x(k)+v_y(k) \end{array} \tag{5}$$

avec $x(k)$ un vecteur de dimension 1, $b \neq 0$ et $a \in]0,\ 1[$. La période d'échantillonnage est de 1s. Le vecteur d'état du système $x(k)$ est mesuré, ainsi que la sortie $y(k)$. On va déterminer un correcteur numérique qui permet de satisfaire le cahier des charges suivant :

1. Le système en boucle fermée aura un pôle en a et les autres en 0.

2. Les signaux de référence considérés sont des échelons. La sortie doit tendre vers la valeur de l'échelon, sans erreur statique notable.

3. Un signal de perturbation en forme de rampe en sortie du système doit être rejeté.

Questions

1. On désire mettre au point un correcteur par retour d'état mesuré de la forme :

$$\begin{array}{lcl} x_d(k+1) & = & F_d x_d(k)+G_d(y^*(k)-y(k)) \\ u(k) & = & -Kx(k)-K_d x_d(k) \end{array} \tag{6}$$

   où K et K_d sont à déterminer. Les matrices F_d et G_d sont définies par :

$$F_d = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

   Par rapport au cahier des charges, pourquoi a-t-on choisi cette structure de commande ? Justifier les matrices F_d et G_d ci-dessus.

2. Etablir le système augmenté associé à partir des équations (5) et (6).

3. En utilisant l'expression (7) de F_d et G_d, exprimer K et K_d en fonction de a et b de façon à placer les pôles du système en boucle fermée comme il est indiqué dans le cahier des charges.

4. Calculer la fonction de transfert entre la perturbation de sortie $v_y(k)$ et la sortie $y(k)$. Vérifier que le rejet de perturbation en forme de rampe est bien assuré.

5. Dans l'éventualité où l'état $x(k)$ n'est pas mesuré, est-il nécessaire de mettre au point un observateur ?