

MAITRISE E.E.A. (A.I.I.)  
Examen: Commande numérique des systèmes  
CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE

EL426T1  
durée: 2h

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Les téléphones portables (même éteints) et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Seul document autorisé : document manuscrit de 4 pages format A4.

Tous les exercices sont indépendants.

## Exercice 1 : Analyse d'un système bouclé avec seuil

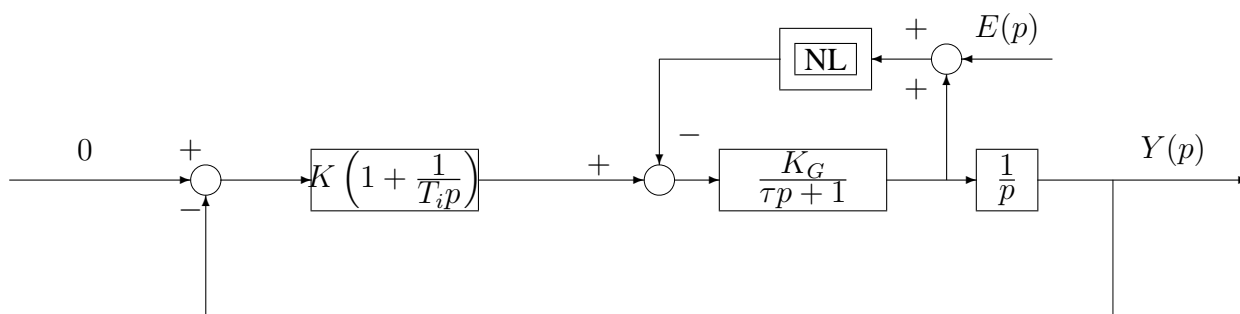


FIG. 1 – Système en boucle fermée

On considère un moteur à courant continu commandé en position par un correcteur Proportionnel Intégral décrit figure 6. La présence de frottements dans le moteur est modélisée par le bloc NL dont la caractéristique est représentée figure 3.

L'exercice consiste en trois parties indépendantes.

### A : Manipulation de schéma-bloc

Par manipulation de schéma-blocs, montrer que le système bouclé représenté figure 6 peut se ramener au système bouclé représenté figure 2. On déterminera l'expression de  $G$  en fonction

de  $T_i$ ,  $\tau$ ,  $K$  et  $K_G$ .

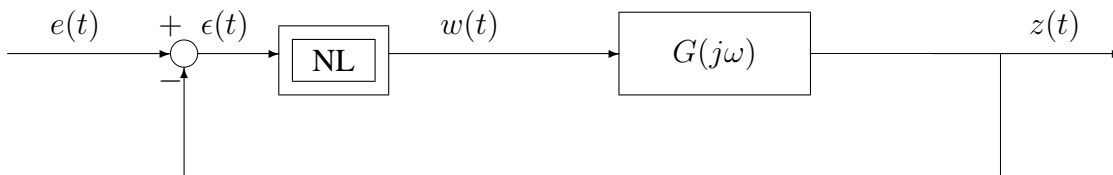


FIG. 2 – Système avec non linéarité séparable

## B : Calcul du gain complexe équivalent

1. Déterminer la sortie  $w(t)$  de la non linéarité NL pour l'entrée

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{\omega}], \quad \epsilon(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t).$$

On donnera la fonction qui relie  $w(t)$  à  $t$  pour  $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$  et on tracera l'allure de  $w(t)$  sur la figure 3. La feuille où se trouve la figure 3 sera jointe à la copie avec la mention du numéro d'anonymat (numéro de place).

2. A partir de l'expression de  $w(t)$ , montrer que pour  $\epsilon_1 \in ]a, +\infty[$ ,

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M_1}{\pi\epsilon_1} \left( 1 + \frac{M_2 - M_1}{M_1} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\epsilon_1^2}} \right).$$

En déduire que pour  $\forall \epsilon_1 \in [0, a]$

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M_1}{\pi\epsilon_1}.$$

Dans la suite,  $\frac{M_2 - M_1}{M_1} = -\frac{1}{2}$ .

3. On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f(x) = x \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} \right).$$

Cette fonction est-elle monotone ? Si oui, croissante ou décroissante. **Justifier**

4. En déduire le lieu critique dans le plan complexe. On prendra soin de l'orienter.
5. Le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert  $G(j\omega)$  est représenté figure 4. En régime libre, le système peut-il présenter des oscillations stables ?

## C : Etude des oscillations forcées

On désire étudier le régime forcé du système bouclé (figure 2) pour des entrées  $e(t) = \epsilon_1 \sin(\omega_1 t)$  à la pulsation  $\omega_1 = 600\pi$  rad/s. Pour un jeu particulier de valeurs de  $T_i$ ,  $\tau$ ,  $K$ ,  $K_G$ ,  $a$  et  $M_1$ , on obtient le tracé de  $|Z(\epsilon_1, \omega_1)|$  en fonction de  $\epsilon_1$  représenté figure 5. Pour les valeurs suivantes de  $\epsilon_1$  présenté dans le tableau 2, est ce que  $\epsilon(t)$  tends vers un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega_1$  ? Si oui, donner le ou les amplitudes possibles  $\epsilon_1$ .

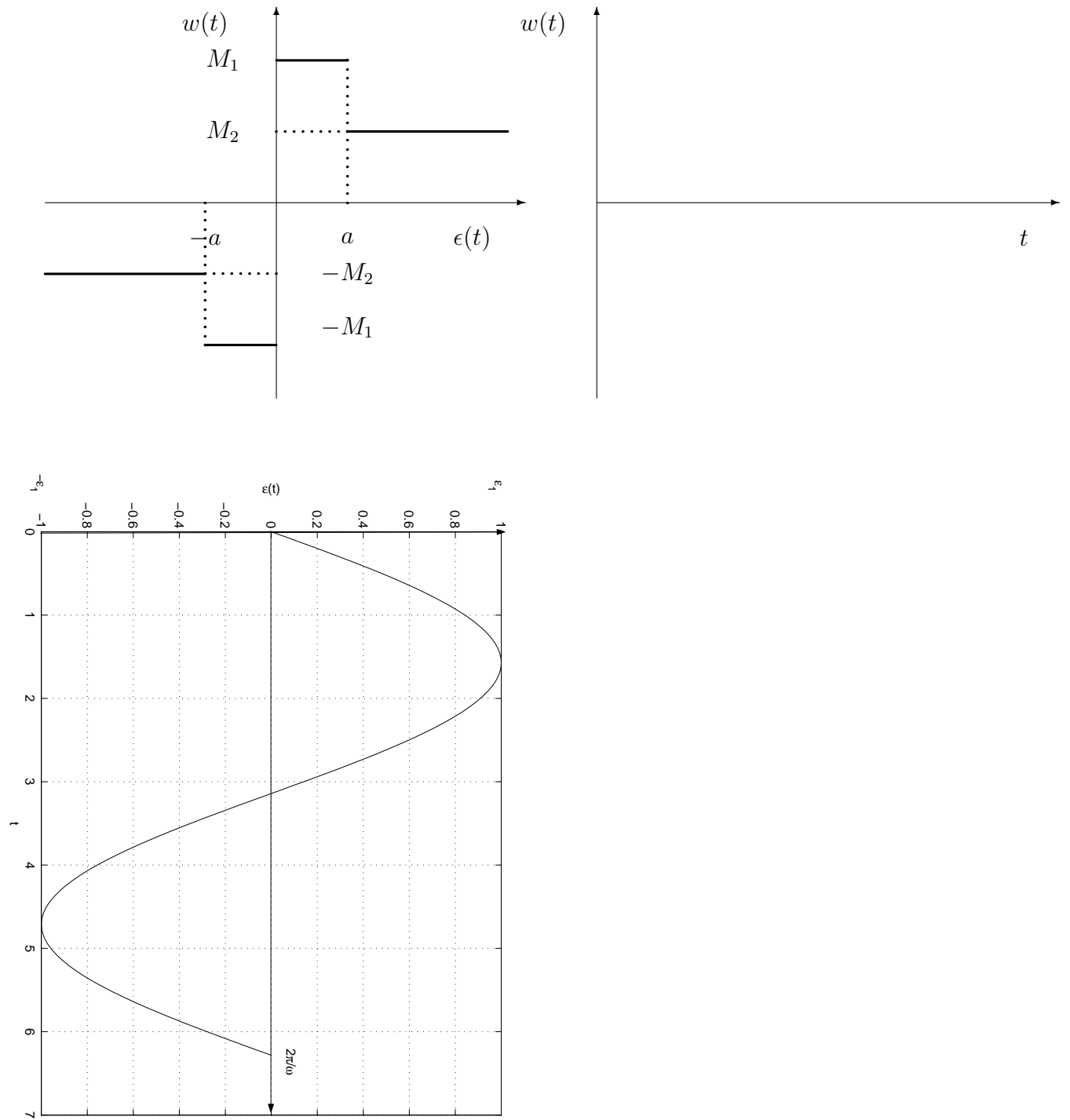


FIG. 3 – Non linéarité de type relais

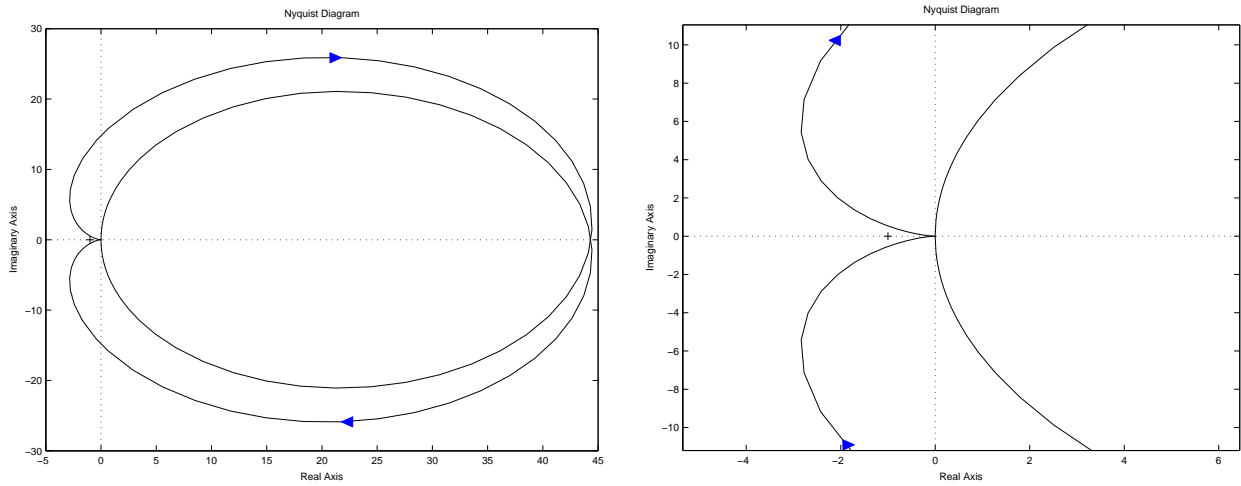


FIG. 4 – Nyquist de  $G(j\omega)$

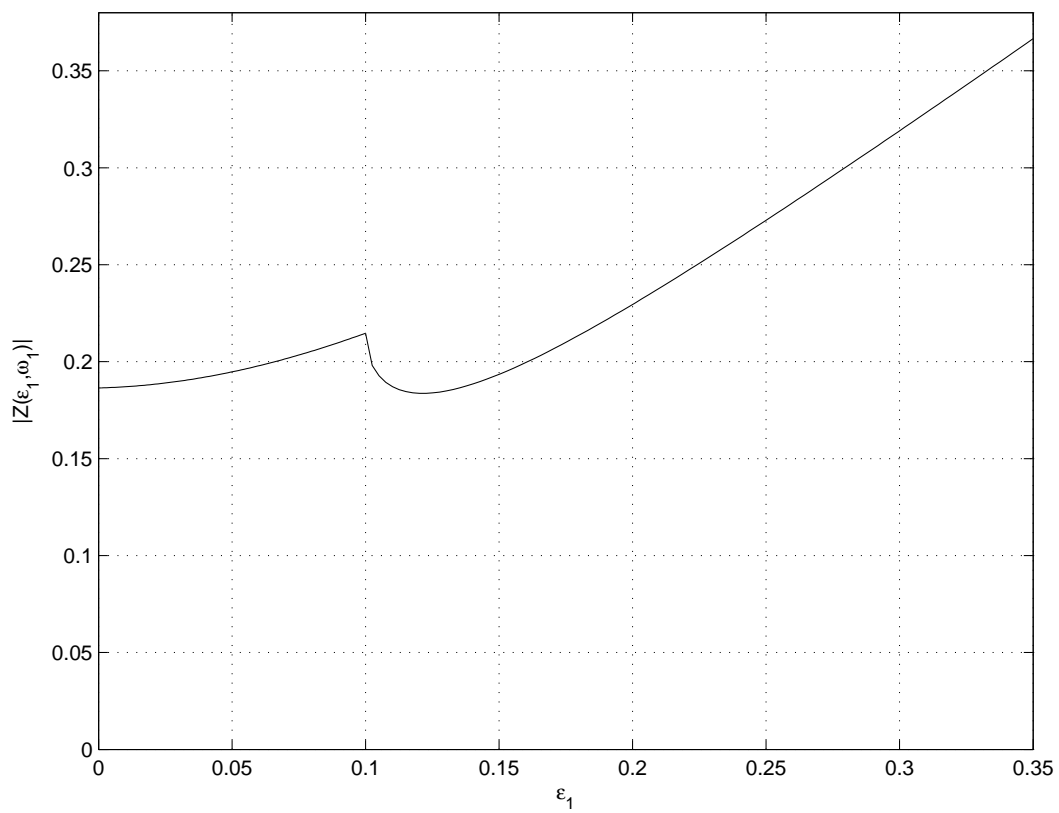


FIG. 5 – Tracé de  $|Z(\epsilon_1, \omega_1)|$  en fonction de  $\epsilon_1$

$\epsilon_1$	$\epsilon(t)$ sinusoïdal $\omega_1$	Si oui, valeur(s) possible(s) de $\epsilon_1$
0.1	oui <input type="checkbox"/> non <input type="checkbox"/>	
0.2	oui <input type="checkbox"/> non <input type="checkbox"/>	
0.3	oui <input type="checkbox"/> non <input type="checkbox"/>	

TAB. 1 – Tableau à compléter

## Correction exercice 1

### A : Manipulation de schéma-bloc

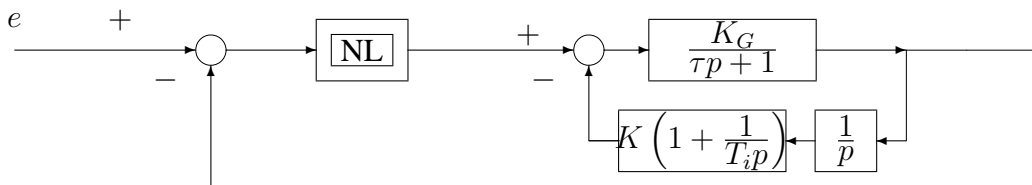


FIG. 6 – Système en boucle fermée équivalent

$$G(p) = \frac{K_G T_i p^2}{\tau T_i p^3 + T_i p^2 + K K_G T_i p + K K_G}$$

### B : Calcul du gain complexe équivalent

1. voir la figure complétée.

- Si  $\epsilon_1 \leq a$  alors  $\forall t \in [0, \frac{\pi}{\omega}]$ ,  $w(t) = M_1$
- Si  $\epsilon_1 > a$  alors soit  $\alpha$  tel que  $\epsilon_1 \sin(\alpha) = a$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \frac{\alpha}{\omega}] & \quad w(t) = M_1 \\ \forall t \in ]\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\pi-\alpha}{\omega}[ & \quad w(t) = M_2 \\ \forall t \in [\frac{\pi-\alpha}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}] & \quad w(t) = M_1 \end{aligned}$$

2. Soit  $\epsilon_1 \in ]a, +\infty[$ . Alors La non linéarité considérée étant symétrique par rapport à 0 :

$$\begin{aligned} N(\epsilon_1) &= \frac{2j}{\pi \epsilon_1} \int_0^\pi w\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{-ju} d(u) \\ &= \frac{2j}{\pi \epsilon_1} \left( \int_0^\alpha M_1 e^{-ju} d(u) + \int_\alpha^{\pi-\alpha} M_2 e^{-ju} d(u) + \int_{\pi-\alpha}^\pi M_1 e^{-ju} d(u) \right) \\ &= \frac{2j}{\pi \epsilon_1} \left( M_1 \left[ \frac{e^{-ju}}{-j} \right]_0^\alpha + M_2 \left[ \frac{e^{-ju}}{-j} \right]_\alpha^{\pi-\alpha} + M_1 \left[ \frac{e^{-ju}}{-j} \right]_{\pi-\alpha}^\pi \right) \\ &= \frac{2}{\pi \epsilon_1} (M_1 (-e^{-j\alpha} + 1 + 1 - e^{j\alpha}) + M_2 (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})) \\ &= \frac{2}{\pi \epsilon_1} (2M_1(1 - \cos(\alpha)) + 2M_2 \cos(\alpha)) \\ &= \frac{4}{\pi \epsilon_1} (M_1 + (M_2 - M_1) \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

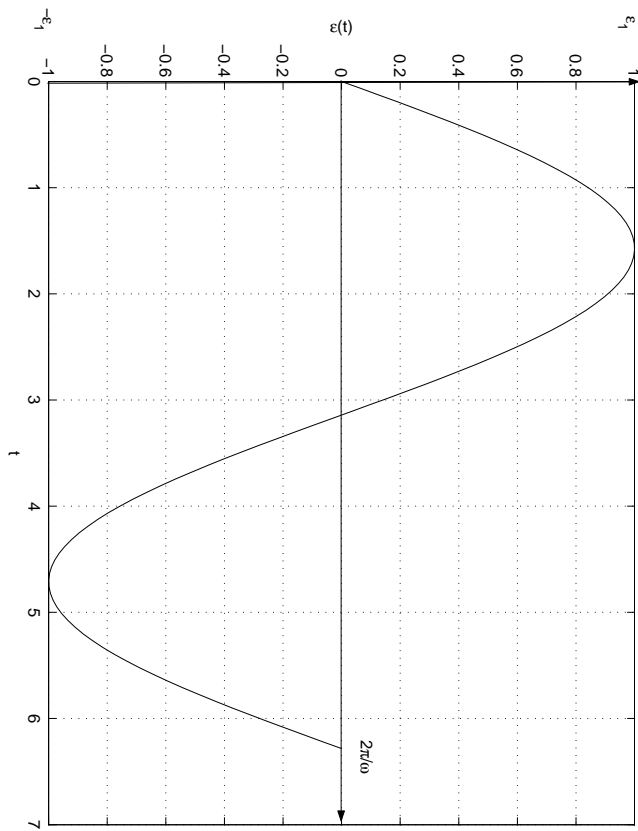
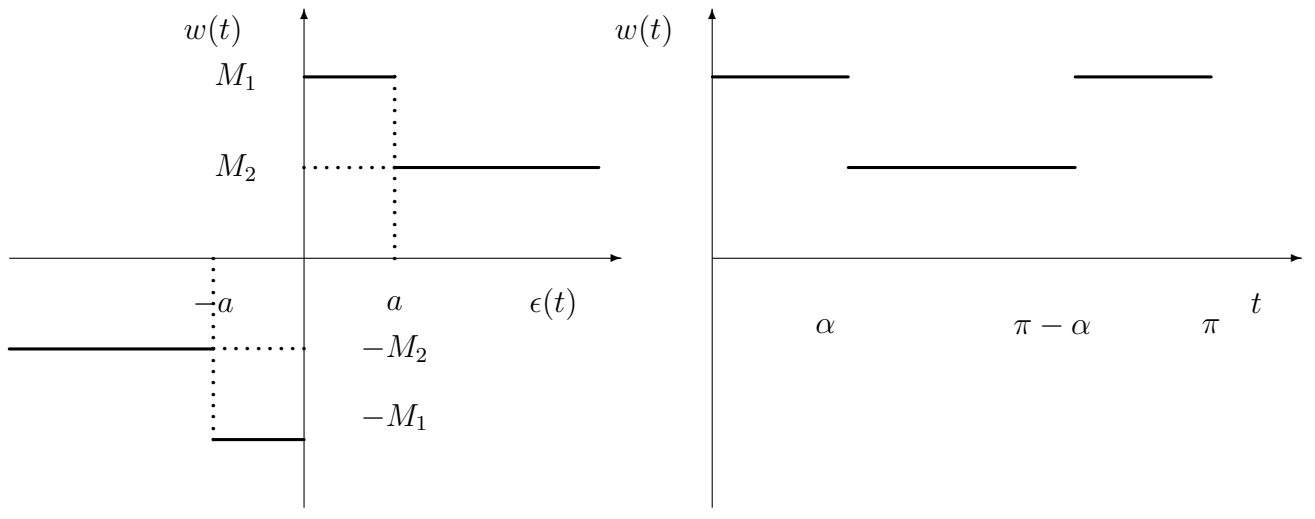


FIG. 7 – Non linéarité de type relais

Or, comme  $\epsilon_1 \sin(\alpha) = a$ , on a :

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{\epsilon_1^2}}$$

D'où

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M_1}{\pi\epsilon_1} \left( 1 + \left( \frac{M_2}{M_1} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{a^2}{\epsilon_1^2}} \right)$$

Par continuité, on en déduit que pour  $\epsilon < a$ ,

$$N(\epsilon_1) = \frac{4M_1}{\pi\epsilon_1}$$

3.

$$\forall x \in ]0,1[, \quad f'(x) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{\geq 0}$$

$f'(x)$  est donc positive sur  $]0, 1[$ . La fonction  $f$  est donc monotone et croissante.

4. – Pour  $\epsilon_1 \in ]a, \infty[$  en prenant  $x = \frac{a}{\epsilon_1}$ , on a  $N(\epsilon_1) = \frac{4M_1}{a\pi} f\left(\frac{a}{\epsilon_1}\right)$ . Par suite,  $N(\epsilon_1)$  est une fonction décroissante en  $\epsilon_1$ . De plus,  $N(a) = \frac{4M_1}{a\pi}$  et  $\lim_{\epsilon_1 \rightarrow \infty} N(\epsilon_1) = 0$ .

– Pour  $\epsilon_1 \in ]0, a[$ ,  $N(\epsilon_1) = \frac{4M_1}{\pi\epsilon_1}$  qui est une fonction décroissante avec  $\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} N(\epsilon_1) = +\infty$ .

Comme

$$C(\epsilon_1) = \frac{1}{N(\epsilon_1)}$$

on a le tracé figure 8.

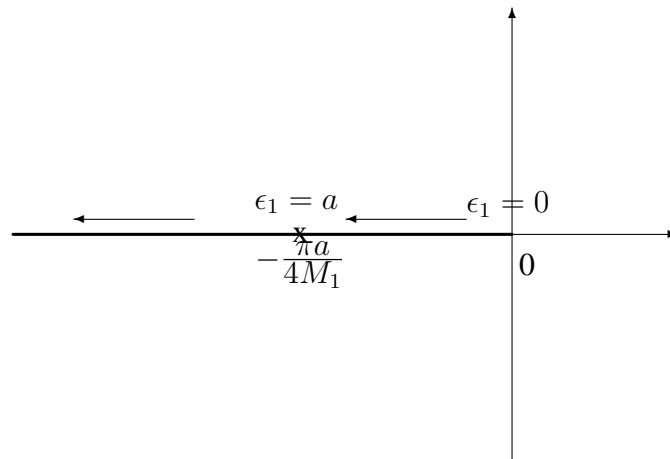


FIG. 8 – Lieux critiques

5. Il n'y a pas d'intersection entre le tracé des lieux critiques et le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$ . Il n'y aura donc pas d'oscillations.

## C : Etude des oscillations forcées

il faut déterminer les points d'intersection avec la droite horizontale d'ordonnée  $e_1$  (voir figure 9).

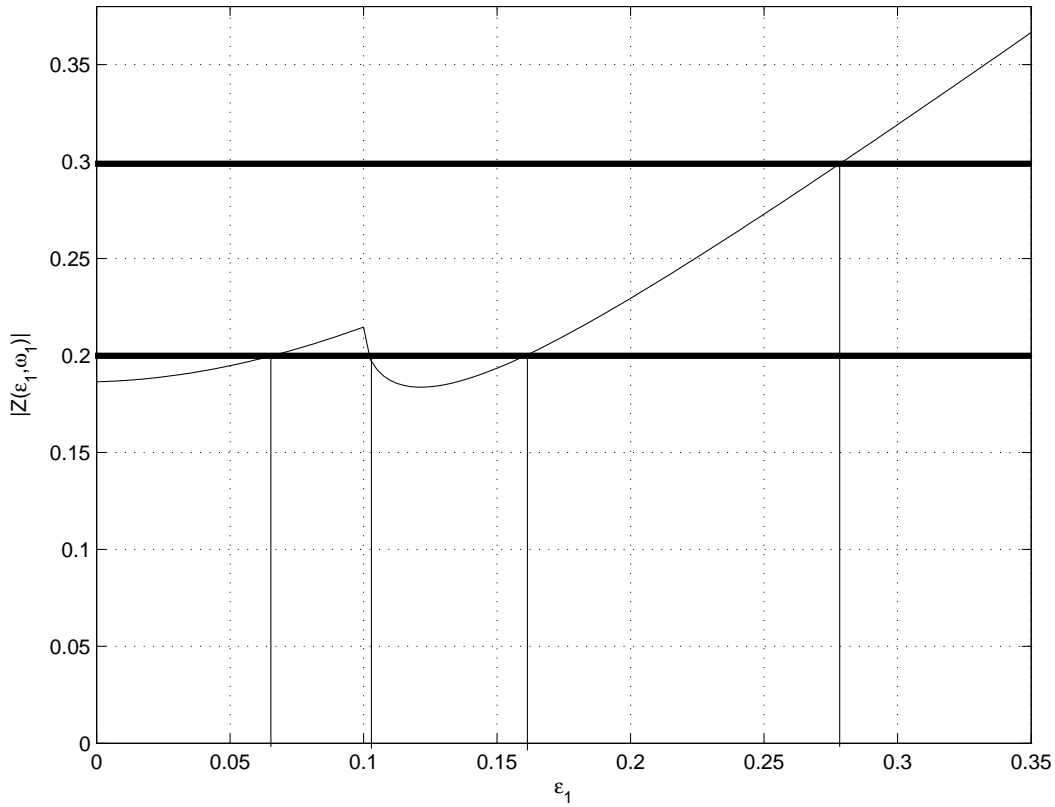


FIG. 9 – Tracé de  $|Z(\epsilon_1, \omega_1)|$  en fonction de  $\epsilon_1$

$\epsilon_1$	$\epsilon(t)$ sinusoïdal $\omega_1$	Si oui, valeur(s) possible(s) de $\epsilon_1$
0.1	non	
0.2	oui	$\epsilon_1 = 0.067, \epsilon_1 = 0.105, \epsilon_1 = 0.16$
0.3	oui	$\epsilon_1 = 0.28$

TAB. 2 – Tableau à compléter

## Exercice 2 : Mise au point d'un correcteur RST

On considère le système défini par :

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}U(z) + V_y(z) \quad (1)$$

avec  $A(z^{-1}) = (1 - az^{-1})$ ,  $B(z^{-1}) = Kz^{-1}$ ,  $a \in ]0, 1[$ ,  $K > 0$  et  $T_s = 1$  s.  $Y(z)$  désigne la transformée en Z du signal de sortie,  $U(z)$  la transformée en Z du signal de commande,  $V_y(z)$  la transformée en Z du signal de perturbation.

*L'exercice consiste en deux parties indépendantes.*

### A : Cahier des charges 1

On veut déterminer un correcteur RST défini par l'équation :

$$S(z^{-1})U(z) + R(z^{-1})Y(z) = T(z^{-1})Y^*(z) \quad (2)$$



avec  $Y^*(z)$  la transformée en Z du signal de référence,  $R(z^{-1})$ ,  $S(z^{-1})$  et  $T(z^{-1})$  des polynômes en  $z^{-1}$  à déterminer avec le terme constant de  $S(z^{-1})$  qui est égal à 1 :

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots + r_{nr} z^{-nr} \\ S(z^{-1}) &= 1 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \dots + s_{ns} z^{-ns} \\ T(z^{-1}) &= t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \dots + t_{nt} z^{-nt} \end{aligned}$$

afin de satisfaire le cahier des charges suivant :

- $P_c(z^{-1}) = 1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}$  ;
- un signal de consigne en échelon doit être poursuivi avec une erreur statique nulle ;
- un signal de perturbation  $V_y$  sinusoïdal de pulsation  $\omega_0$  en sortie du système doit être rejeté.

### Questions

1. Déterminer le(s) pré spécification(s) du polynôme  $S$ .
2. Ecrire l'équation de Bezout.
3. Résoudre l'équation de Bezout pour déterminer les polynômes  $R$  et  $S$  en fonction de  $K$ ,  $a$ ,  $\omega_0$ ,  $T_s$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .
4. Proposer un choix pour  $T$ . Le justifier en quelques mots.

## B : Cahier des charges 2

On suppose que le signal  $y(k)$  n'est pas directement mesuré. A la place de  $y(k)$ , on dispose du signal  $y_m(k)$  donné par un capteur défini par :

$$Y_m(z) = \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} Y(z) + V_m(z)$$

avec  $A_m(z^{-1})$  et  $B_m(z^{-1})$  sont deux polynômes en  $z^{-1}$  donnés.  $V_m(z)$  désigne la transformée en Z d'un signal de perturbation agissant en sortie du capteur. Ce signal est en forme d'échelon.

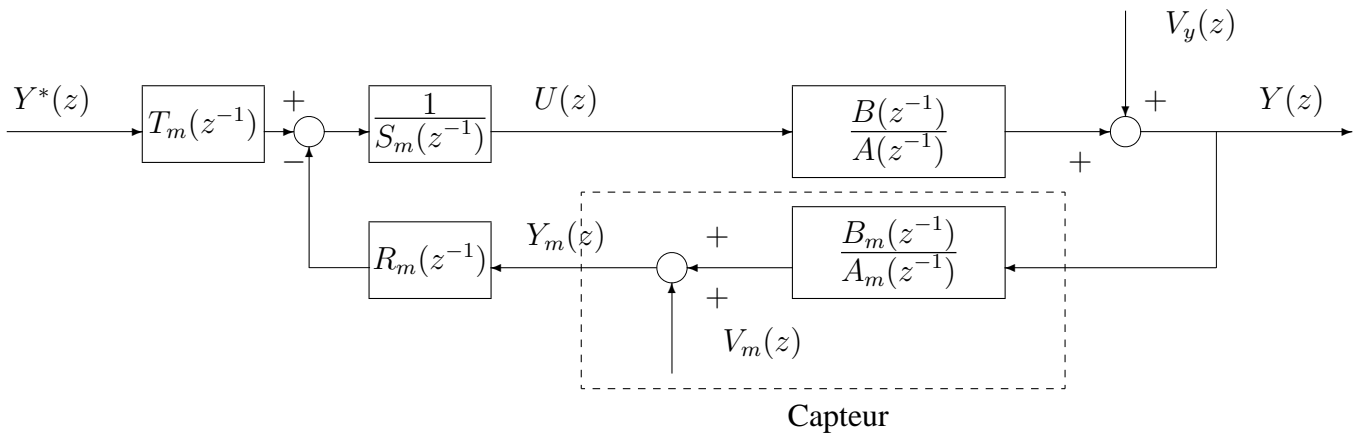


FIG. 10 – Boucle fermée avec correcteur RST (section B : Cahier des charges 2)

On veut déterminer un correcteur RST défini par l'équation :

$$S_m(z^{-1})U(z) + R_m(z^{-1})Y_m(z) = T_m(z^{-1})Y^*(z) \quad (3)$$

où  $R_m(z^{-1})$ ,  $S_m(z^{-1})$  et  $T_m(z^{-1})$  sont des polynômes en  $z^{-1}$  à déterminer. Le système en boucle fermée obtenu est représenté figure 10.

Le cahier des charges à satisfaire est le suivant :

- $P_c(z^{-1}) = 1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}$  ;
- un signal de consigne en échelon doit être poursuivi avec une erreur statique nulle ;
- un signal de perturbation  $V_y$  sinusoïdal de pulsation  $\omega_0$  en sortie du système doit être rejeté ;
- un signal de perturbation  $V_m$  échelon en sortie du capteur doit être rejeté.

## Questions

1. Calculer les fonctions de transfert en boucle fermée  $T_{y^* \rightarrow y}(z)$ ,  $T_{v_y \rightarrow y}(z)$  et  $T_{v_m \rightarrow y}(z)$  en fonction de  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $A_m(z^{-1})$ ,  $B_m(z^{-1})$ ,  $R_m(z^{-1})$ ,  $S_m(z^{-1})$  et  $T_m(z^{-1})$ .
2. En déduire l'expression du polynôme caractéristique du système en boucle fermée.
3. A partir de la réponse à la question 1, déterminer les conditions que doivent satisfaire  $R_m(z^{-1})$  et  $S_m(z^{-1})$  de façon à assurer le rejet des signaux de perturbation  $V_y$  et  $V_m$ . En déduire des pré spécifications sur les polynômes  $R_m(z^{-1})$  et  $S_m(z^{-1})$ .
4. Ecrire l'équation de Bezout permettant d'obtenir  $P_c(z^{-1}) = 1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}$ . On ne résoudra pas cette équation.
5. Proposer un choix pour  $T_m(z^{-1})$ . Le justifier en quelques mots.

## Correction exercice 2

### A : Cahier des charges 1

1.  $S(z^{-1}) = (1 - 2 \cos(\omega_0 T_s) z^{-1} + z^{-2}) S_0(z^{-1})$
2.  $\underbrace{(1 - a z^{-1})(1 - 2 \cos(\omega_0 T_s) z^{-1} + z^{-2})}_{A_{bezout}(z^{-1})} S_0(z^{-1}) + \underbrace{K z^{-1}}_{B_{bezout}(z^{-1})} R(z^{-1}) = \underbrace{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}}_{P_{bezout}(z^{-1})}$
3. L'équation de Bezout admet une solution car

$$dP_{bezout}(z^{-1}) = 2 \leq 3 + 1 - 1$$

De plus  $dR(z^{-1}) = 3 - 1 = 2$  et  $dS_0(z^{-1}) = 1 - 1 = 0$ . Donc  $R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$  et  $S_0(z^{-1}) = 1$ . En égalant les termes de même degré des polynômes à droite et à gauche de l'équation de Bezout, on obtient :

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{a}{K} \\ r_1 &= \frac{\beta - (1 + 2a \cos(\omega_0 T_s))}{K} \\ r_0 &= \frac{\alpha + (a + 2 \cos(\omega_0 T_s))}{K} \end{aligned}$$

4.  $T(z^{-1}) = \frac{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}}{K}$  car  $T_{y^* \leftarrow y}$  est un filtre à réponse impulsionnelle finie de gain statique égal à 1. Régime transitoire le plus rapide.

## B : Cahier des charges 2

1. Le système en boucle fermée est décrit par trois équations.

– la première est celle du procédé :

$$A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})U(z) + A(z^{-1})V_y(z) \quad (4)$$

– La seconde correspond au capteur :

$$A_m(z^{-1})Y_m(z) = B_m(z^{-1})Y(z) + A_m(z^{-1})V_m(z) \quad (5)$$

– La seconde correspond au correcteur :

$$S_m(z^{-1})U(z) = T_m(z^{-1})Y^*(z) - R_m(z^{-1})Y_m(z) \quad (6)$$

On élimine  $Y_m(z)$  entre l'équation (6) et l'équation (5) en faisant  $A_m(z^{-1})(6) - R_m(z^{-1})(5)$ .

On obtient :

$$A_m(z^{-1})S_m(z^{-1})U(z) = -R_m(z^{-1})B_m(z^{-1})Y(z) - A_m(z^{-1})R_m(z^{-1})V_m(z) + A_m(z^{-1})T_m(z^{-1})Y^*(z) \quad (7)$$

On élimine  $U(z)$  entre l'équation (4) et l'équation (7) en faisant  $B(z^{-1})(7) + A_m(z^{-1})S_m(z^{-1})(4)$ .

On obtient :

$$Y(z) = \underbrace{\frac{A(z^{-1})A_m(z^{-1})S_m(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}}_{T_{v_y \rightarrow y}(z)} V_y(z) - \underbrace{\frac{B(z^{-1})A_m(z^{-1})R_m(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}}_{T_{v_m \rightarrow y}(z)} V_m(z) + \underbrace{\frac{B(z^{-1})A_m(z^{-1})T_m(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}}_{T_{y^* \rightarrow y}(z)} Y^*(z) \quad (8)$$

avec  $P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})A_m(z^{-1})S_m(z^{-1}) + B(z^{-1})B_m(z^{-1})R_m(z^{-1})$ .

2. Le polynôme caractéristique est donné par

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})A_m(z^{-1})S_m(z^{-1}) + B(z^{-1})B_m(z^{-1})R_m(z^{-1}).$$

3. – Rejet de  $V_m$  en échelon : le modèle d'un échelon est donné par  $1 - z^{-1}$ . On aura donc rejet s'il existe un polynôme  $Q$  tel que

$$B(z^{-1})A_m(z^{-1})R_m(z^{-1}) = (1 - z^{-1})Q(z^{-1})$$

– Rejet de  $V_y$  en sinus de pulsation  $\omega_0$  : le modèle d'un échelon est donné par  $1 - 2 \cos(\omega_0 T_s)z^{-1} + z^{-2}$ . On aura donc rejet s'il existe un polynôme  $\bar{Q}$  tel que

$$A(z^{-1})A_m(z^{-1})S_m(z^{-1}) = (1 - 2 \cos(\omega_0 T_s)z^{-1} + z^{-2})\bar{Q}(z^{-1})$$

Par suite on doit avoir

$$R_m(z^{-1}) = (1 - z^{-1})R_0(z^{-1})$$

et

$$S_m(z^{-1}) = (1 - 2 \cos(\omega_0 T_s)z^{-1} + z^{-2})S_0(z^{-1})$$

où  $R_0$  et  $S_0$  sont deux polynômes à déterminer.

4.

$$\underbrace{A(z^{-1})A_m(z^{-1})(1 - 2 \cos(\omega_0 T_s)z^{-1} + z^{-2})}_{A_{\text{bezout}}(z^{-1})} S_0(z^{-1}) + \underbrace{B(z^{-1})B_m(z^{-1})(1 - z^{-1})}_{B_{\text{bezout}}(z^{-1})} R_0(z^{-1}) = \dots \underbrace{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}}_{P_{\text{bezout}}(z^{-1})}$$

5. On choisit

$$T_m(z^{-1}) = \frac{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}}{B(1)A_m(1)}$$

de façon à ce que la fonction de transfert  $T_{y^* \rightarrow y}(z)$  soit un filtre à réponse impulsionnelle finie de gain statique égal à un.

### Exercice 3 : Points d'équilibre d'un système non linéaire

On considère le système non linéaire suivant<sup>1</sup> :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ah(x_1(t)) + k_1 x_1(t) + x_2(t) \\ h(x_1(t)) + x_1(t) \end{bmatrix}$$

où  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont les deux variables d'état. On a  $A = 0.091$ ,  $k_1 = -0.6032$  et la fonction  $h_1$  qui est définie par :

$$h(x_1) = 13.24x_1^3 - 21.22x_1|x_1|.$$

Sa caractéristique est représentée figure 11.

1. A partir des équations d'état du système et de la courbe caractéristique de la fonction  $h$ , déterminer les points d'équilibre de ce système non linéaire.
2. Etudier la stabilité du point d'équilibre  $(0,0)$ . On utilisera le fait que  $\frac{dx|x|}{dx} = 2|x|$ .

### Correction exercice 3

1.  $x_{eq}$  est le vecteur à deux composantes  $x_{eq1}$  et  $x_{eq2}$  tel que

$$\begin{bmatrix} Ah(x_{eq1}) + k_1 x_{eq1} + x_{eq2} \\ h(x_{eq1}) + x_{eq1} \end{bmatrix} = 0$$

La seconde équation s'écrit  $h(x_{eq1}) = -x_{eq1}$ .  $x_{eq1}$  est alors obtenu en déterminant les points d'intersection entre la courbe caractéristique de  $h(x_1)$  et la droite de pente  $-1$  passant en 0 (voir la figure 12).

On obtient alors trois valeurs possibles pour  $x_{eq1}$  :  $-0.05$ ,  $0$  et  $0.05$ . Les valeurs correspondantes pour  $x_{eq2}$  sont obtenus à partir de la première équation qui donne :

$$x_{eq2} = -Ah(x_{eq1}) - k_1 x_{eq1}$$

A.N. On obtient donc les points d'équilibre  $(-0.05, -0.0348)$ ,  $(0,0)$ ,  $(0.05, 0.0348)$ .

---

1. C'est le modèle simplifié du mouvement d'un missile dans le plan vertical, pour une orientation donnée des gouvernes.

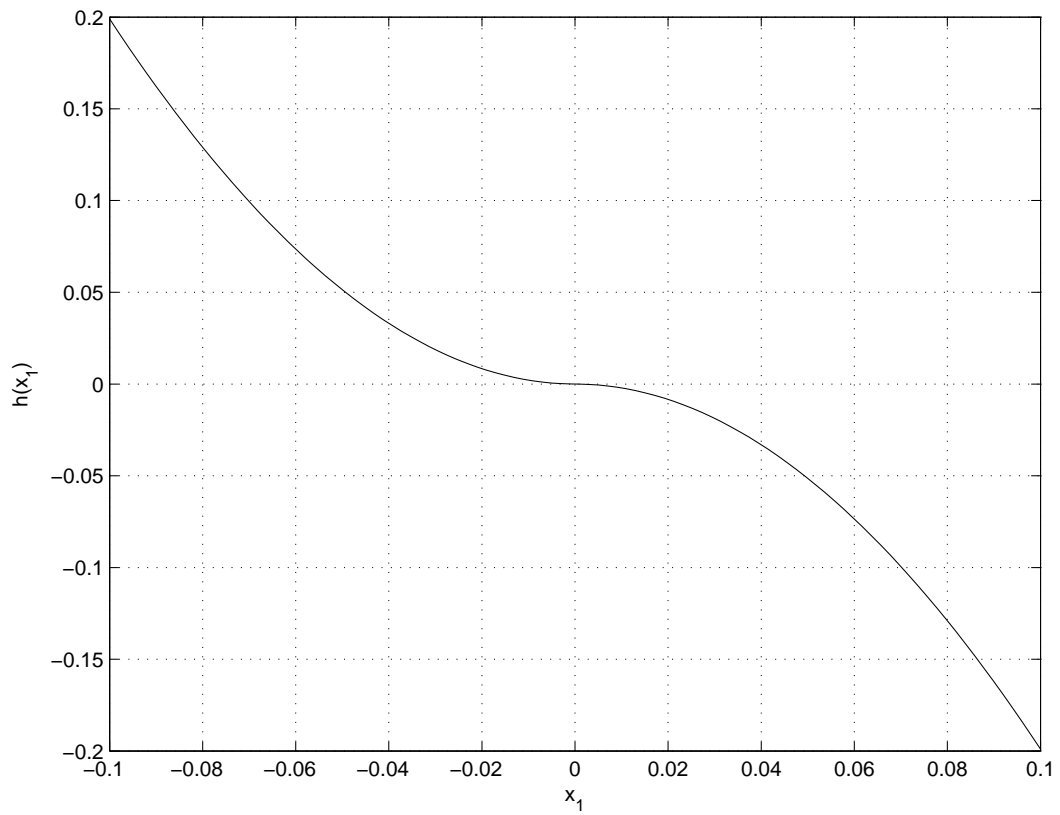


FIG. 11 – *Courbe caractéristique de  $h(x_1)$*

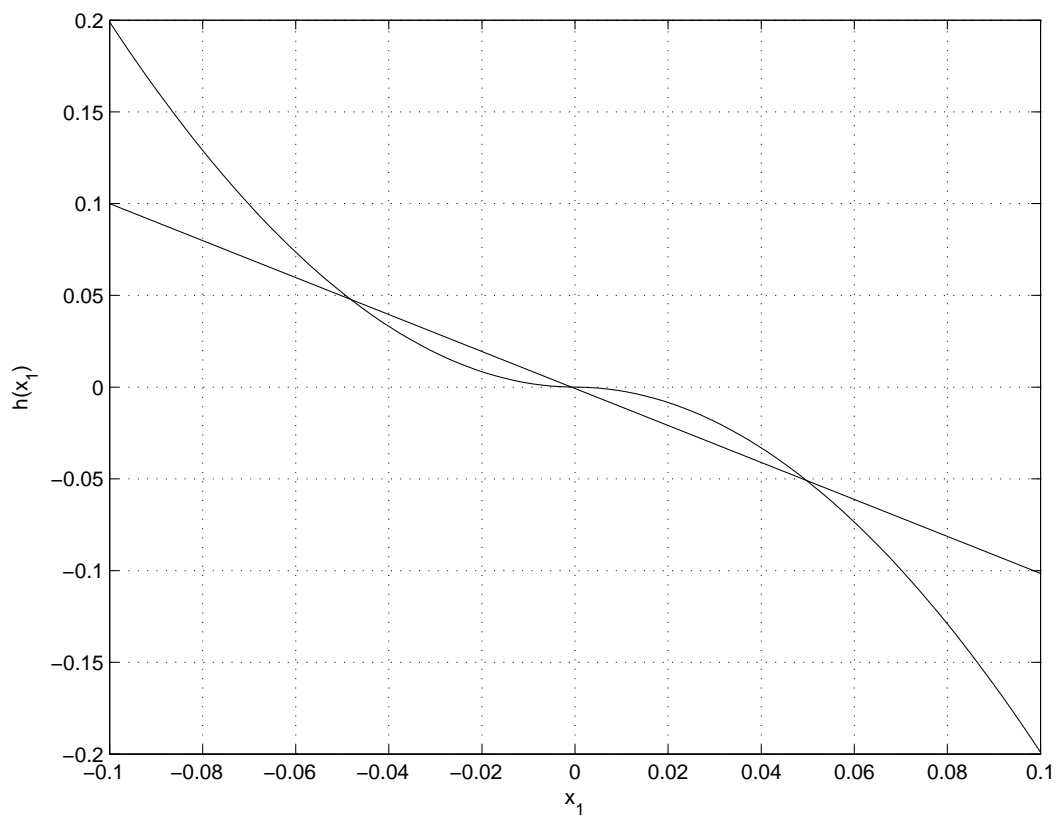


FIG. 12 – *Courbe caractéristique de  $h(x_1)$*

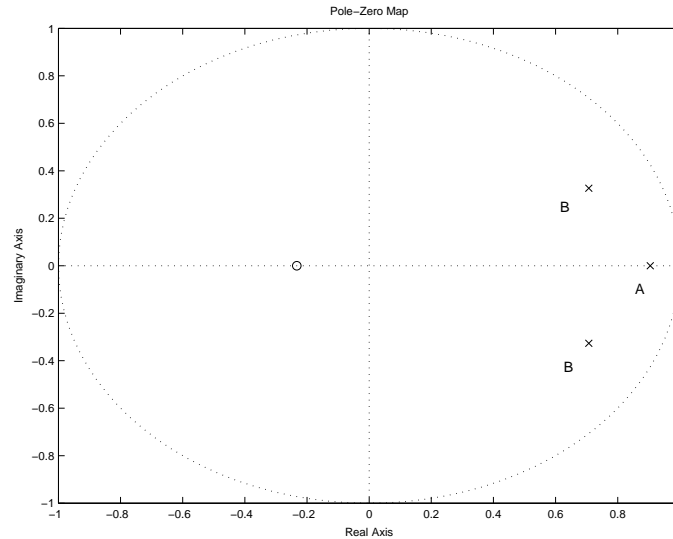


FIG. 13 – Localisations des pôles (x) et des zéros (o)

2.  $\frac{dh(x_1)}{dx_1} = 13.24 \times 3x_1^2 - 21.22 \times 2|x_1|$ . Par suite la matrice jacobienne est donnée par :

$$\begin{bmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$\det \left( \lambda I - \begin{bmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - k_1 \lambda - 1 = \left( \lambda - \frac{k_1}{2} \right)^2 - 1 - \frac{k_1^2}{4}$$

D'où les racines sont  $\frac{k_1}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{k_1^2}{4}}$ . Les deux racines sont réelles, l'une étant strictement positive. Par suite, le point d'équilibre (0,0) est instable.

## Exercice 4 : QCM

Répondre aux questions suivantes en choisissant une seule réponse parmi les 3 (ou 4) proposées en cochant la case correspondante. Tout choix devra être justifié brièvement. *Les réponses devront être portées directement sur la feuille. Elle sera jointe à la copie avec la mention du numéro d'anonymat (numéro de place). Pour chaque mauvaise réponse, un nombre NÉGATIF de points sera compté.*

- La figure 13 représente la localisation des pôles et des zéros d'une fonction de transfert discrète. Le(s) pôle(s) dominant(s) est (sont) en A  B  A et B

Justification :

- Sur la figure 14, sont représentées les réponses temporelles à un échelon de 4 fonctions de transfert discrètes. Sur la figure 15, sont représentées les localisations des pôles et des zéros de ces 4 fonctions de transfert discrètes, mais dans un ordre différent.

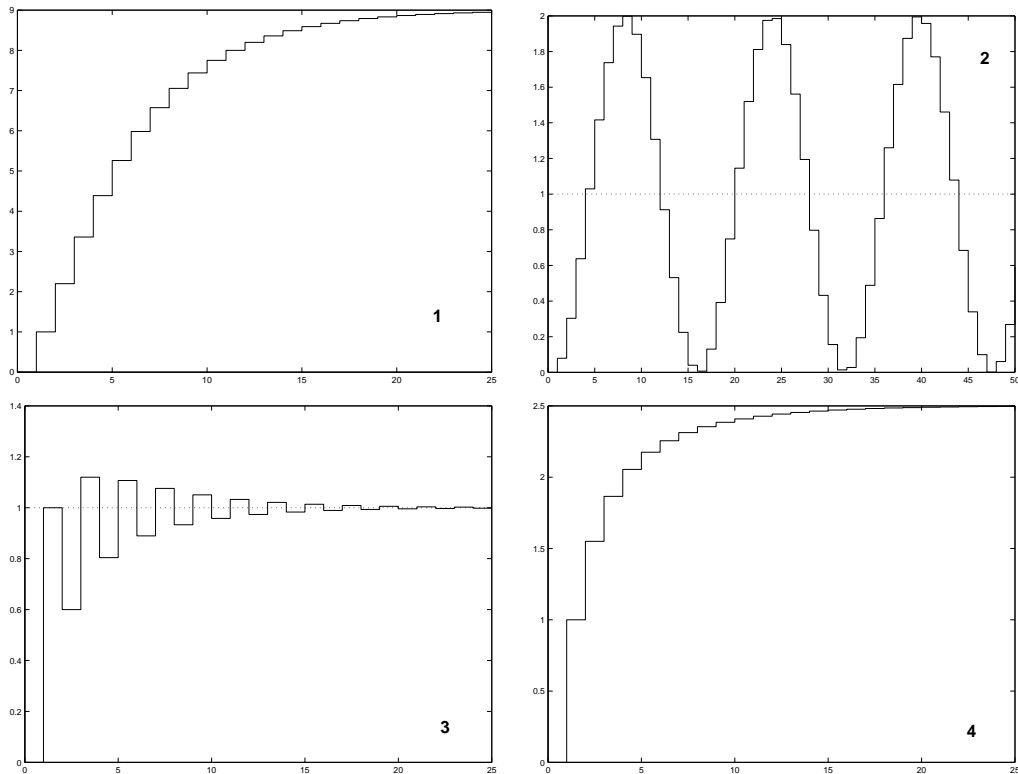


FIG. 14 – Réponses indicielles (en haut : 1 à gauche, 2 à droite; en bas : 3 à gauche, 4 à droite)

La réponse temporelle 1 correspond à la localisation des pôles 1  2  3  4

La réponse temporelle 2 correspond à la localisation des pôles 1  2  3  4

La réponse temporelle 3 correspond à la localisation des pôles 1  2  3  4

Justifications :

## Correction exercice 4

1. Le pôles dominant est en A

Justification : C'est le pôle le plus proche du point 1 dans le plan complexe.

2. – La réponse temporelle 1 correspond à la localisation des pôles 2 car dynamique lente du premier ordre. Sur la localisation des pôles 3, le pôle lent est influencé par un zéro, d'où la réponse temporelle 4 plus rapide.
- La réponse temporelle 2 correspond à la localisation des pôles 4 car oscillateur pur donc deux pôles complexes conjugués sur le cercle unité.
- La réponse temporelle 3 correspond à la localisation des pôles 1 car oscillation due à un pôle simple mais négatif.

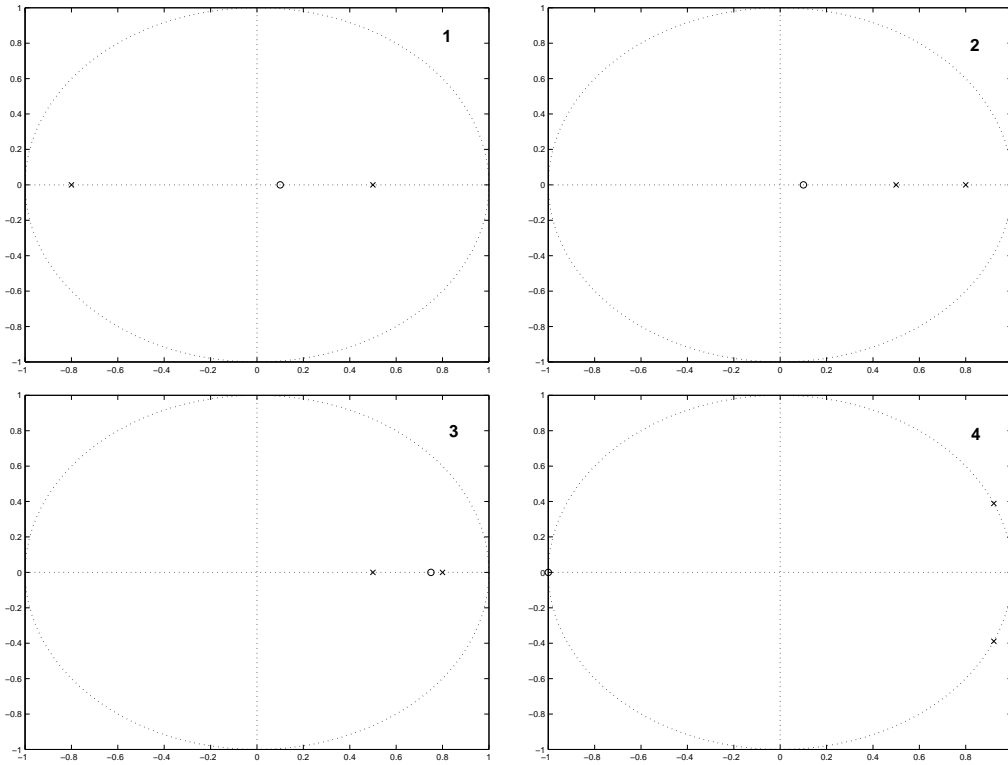


FIG. 15 – Localisations des pôles ( $x$ ) et des zéros ( $o$ ) (en haut : 1 à gauche, 2 à droite; en bas : 3 à gauche, 4 à droite)