UNIVERSITE DE CAEN
U.F.R. de Science

1ière SESSION 2003
16 juin 2003

MAITRISE E.E.A. (A.I.I.)
Examen: Commande numérique des systèmes

CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE

EL426T1
durée: 2h

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Les téléphones portables (même éteints) et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Seul document autorisé : document manuscript de 4 pages format A4.

Tous les exercices sont indépendants.

Rappels

– Pour

$$G_c(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + {\omega_0}^2}$$

Dépassement :

$$D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (1)$$

Temps du premier maximum :

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2)$$

– $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

– Pour la fonction $g(x) = \arcsin(x)$, la dérivée est donnée par :

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 1 : Analyse d'un système

On considère le système défini par la fonction de transfert :

$$Y_s(z) = \frac{\alpha z^{-1}(1+z^{-1})}{1-(2+\beta)z^{-1}+z^{-2}}U(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}U(z) \tag{3}$$

avec $T_e = 0.1s$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

A : Analyse du système à commander

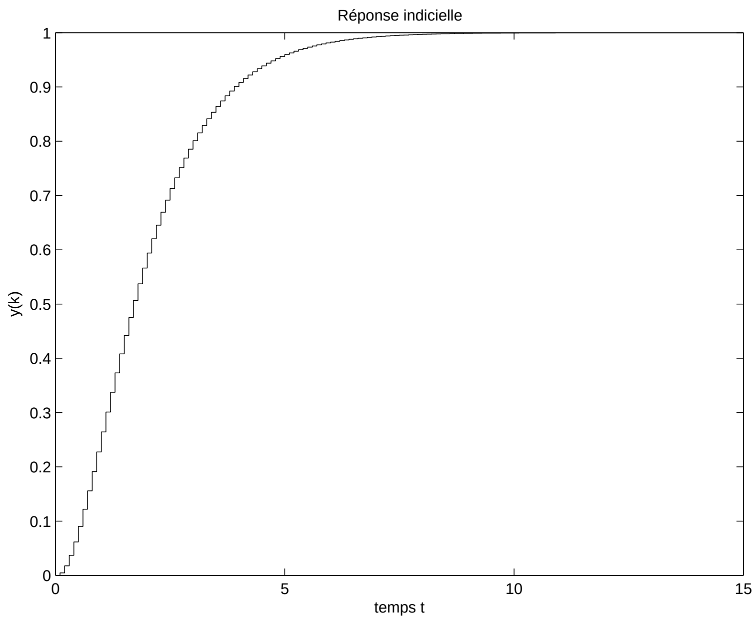

FIG. 1 – *Réponse indicielle 1*

1. Quel est l'ordre de la fonction de transfert définie par (3) ? Quelles sont ses pôles et ses zéros ? La fonction de transfert est-elle stable ?
2. On donne les réponses à un échelon (réponses indicielles) de trois fonctions de transfert (voir les figures 1, 2 et 3. Laquelle correspond à la fonction de transfert définie par 3. **Justifier en quelques mots**.
3. En prenant pour vecteur d'état :

   $$\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix}$$

   avec $x(k)$ tel que :

   $$(q^2 - (2+\beta)q + 1)x(k) = u(k)$$

   déterminer une représentation d'état du système défini par la fonction de transfert (3).

B : Analyse d'un correcteur RST

Une perturbation agit en sortie du système :

$$Y(z) = Y_s(z) + V_y(z)$$

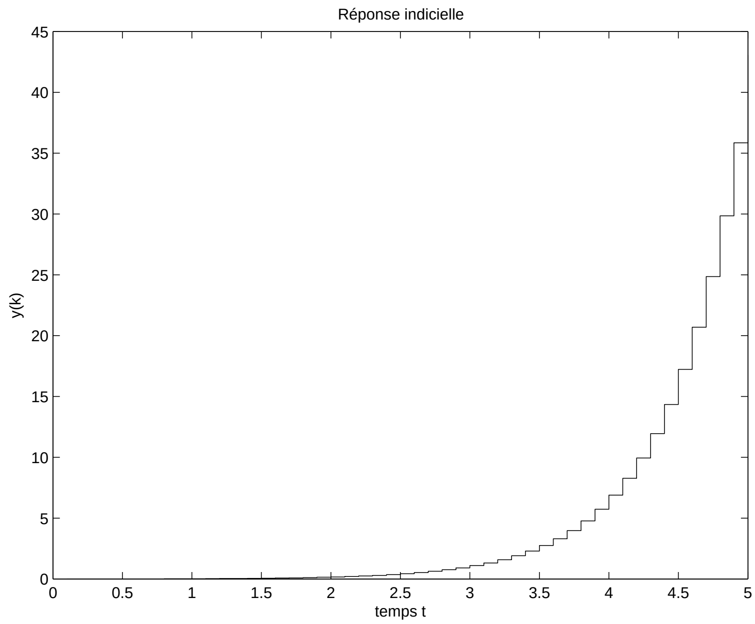

FIG. 2 – *Réponse indicielle 2*

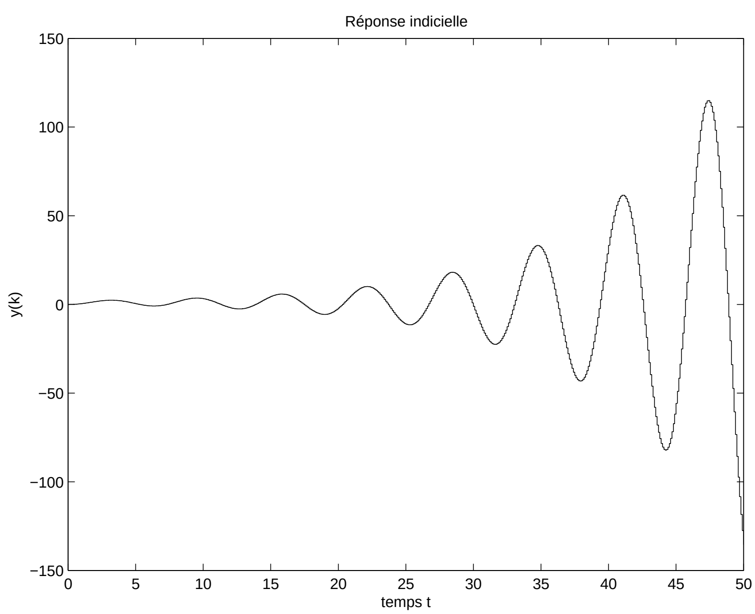

FIG. 3 – *Réponse indicielle 3*

où $Y(z)$ est la transformée en z de la sortie mesurée. Pour $\alpha = 0.1529$ et $\beta = 0.0336$, on a mis au point le correcteur RST :

$$S(z^{-1})U(z) + R(z^{-1})Y(z) = T(z^{-1})Y^*(z)$$

où $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$ sont définis par :

$$\begin{aligned}
R(z^{-1}) &= (1 - 0.8327z^{-1})(10.066 - 15.676z^{-1} + 6.204z^{-2}) \\
S(z^{-1}) &= (1 + 0.7897z^{-1})(1 - 1.9601z^{-1} + z^{-2}) \\
T(z^{-1}) &= 3.2708 - 5.4470z^{-1} + 2.2678z^{-2}
\end{aligned}$$

Le système en boucle fermée est représenté figure 4.

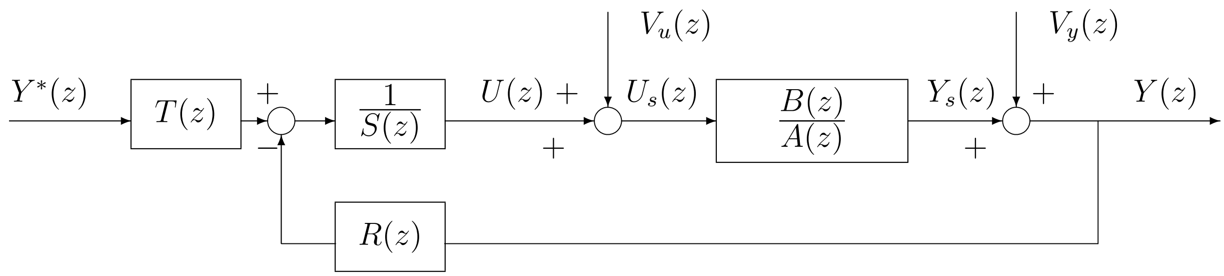

FIG. 4 – *Boucle fermée avec correcteur RST*

1. Calculer la fonctions de transfert du système en boucle fermée entre la perturbation de sortie $v_y(k)$ et la sortie $y(k)$ du système en fonction des polynômes $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$.
2. Le système en boucle fermée peut-il effectuer le rejet de signaux de perturbation de sortie $v_y(k)$
   (a) en échelon ?
   (b) en rampe ?
   (c) en sinusoïde ? si oui, pour quelle(s) pulsation(s) ?
3. La fonctions de transfert du système en boucle fermée entre la consigne $y^\star(k)$ et la sortie $y(k)$ du système est donnée par :

$$T_{y^\star \to y}(z) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

   (a) Le système en boucle fermée peut-il effectuer la poursuite de signaux de consigne $y^*(k)$ en échelon ? **Justifier**.
   (b) Une erreur de quelques pourcents a été faite sur les coefficients de $B(z^{-1})$. La poursuite de consigne $y^*(k)$ en échelon peut-elle se faire (sans erreur statique) ?

Correction exercice 1

A : Analyse du système à commander

1.

$$Y_s(z) = \frac{\alpha(z+1)}{z^2 - (2+\beta)z + 1}U(z)$$

Fonction de transfert d'ordre 2. Un zéro en -1 et deux pôles solutions de l'équation

$$z^2 - (2+\beta)z + 1 = 0$$

soit $\frac{1}{2}(2+\beta+\sqrt{\beta(\beta+4)})$ et $\frac{1}{2}(2+\beta-\sqrt{\beta(\beta+4)})$.
Comme $\beta > 0$, $\frac{1}{2}(2+\beta+\sqrt{\beta(\beta+4)}) > 1$, la fonction de transfert est instable.

2. La réponse indicielle 1 est celle d'une fonction de transfert stable. Les réponses indicielles 2 et 3 correspondent à des fonctions de transfert instables. La réponse indicielle 3 correspond à deux pôles complexes conjugués de module plus grand que 1. La réponse indicielle de la fonction de transfert considérée est donc la deuxième.

3.
$$\left\{\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (2+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

B : Analyse d'un correcteur RST

1. De l'équation :

$$Y(z) = Y_s(z) + V_y(z)$$

et de

$$Y_s(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z)$$

On en déduit :

$$A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})U(z) + A(z^{-1})V_y(z)$$

En éliminant $U(z)$ entre cette équation et l'équation ci-dessous

$$S(z^{-1})U(z) + R(z^{-1})Y(z) = 0$$

on obtient

$$(A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}))Y(z) = A(z^{-1})S(z^{-1})V_y(z)$$

Soit

$$\frac{Y(z)}{V_y(z)} = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

2. (a) non car $A(1)S(1) \neq 0$

   (b) non car $A(z^{-1})S(z^{-1}) \neq (1-z^{-1})^2 Q(z^{-1})$

   (c) rejet sinus pulsation ω_0 si

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) = (1 - 2\cos(\omega_0 T_e)z^{-1} + z^{-2})\overline{Q}(z^{-1})$$

   ici dans $A(z^{-1})$, le polynôme d'ordre 2 $1-(2+\beta)z^{-1}+z^{-2}$ ne peut pas se mettre sous la forme $1-2\cos(\omega 0 T_s)z^{-1}+z^{-2}$ car $2+\beta > 1$. Dans $S(z^{-1})$, le polynôme d'ordre 2 $1-1.9601z^{-1}+z^{-2}$ se met sous cette forme avec $2\cos(\omega_0 T_e) = 1.9601$ soit $\omega_0 = 2$ rad/s.
   Conclusion: rejet de sinus à la pulsation $\omega_0 = 2$ rad/s.

3.
$$T_{y^\star \to y}(1) = \frac{B(1)T(1)}{A(1)S(1) + B(1)R(1)} = 1$$

Donc suivi d'échelon.

4. non car le correcteur ne contient pas d'effet intégrateur.

Exercice 2 : Commande par retour d'état mesuré

On considère la commande numérique d'un pendule sur chariot. Le modèle est donné par la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + v_y(k) \end{aligned} \tag{4}$$

Le vecteur d'état du système :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

est mesuré, ainsi que la sortie $y(k)$. On va déterminer un correcteur numérique qui permet de satisfaire le cahier des charges suivant.

1. Les signaux de référence considérés sont des échelons. La sortie doit tendre vers la valeur de l'échelon, sans erreur statique notable, avec le temps du premier maximum de l'ordre de trois secondes et un dépassement de 12%.
2. Un signal de perturbation en forme d'échelon en sortie du système doit être rejeté.

La période d'échantillonnage est $T_e = 0.1s$.

Questions

1. On désire mettre au point un correcteur par retour d'état mesuré avec intégrateur, c'est-à-dire de la forme :
$$\begin{aligned} x_I(k+1) &= x_I(k) + (y^*(k) - y(k)) \\ u(k) &= -k^T x(k) - k_I x_I(k) \end{aligned}$$
où le vecteur k et k_I sont à déterminer. Pourquoi a-t-on choisi cette structure de commande ? **Justifier en quelques mots**.
2. Etablir système augmenté associé.
3. Le vecteur k et k_I vont être calculés de façon à placer les pôles du système en boucle fermée. Combien de pôles va-t-on placer ? Les déterminer en fonction du cahier des charges. Dans la suite, on les notera z_i^*.
4. Exprimer le vecteur k et k_I en fonction de la localisation des pôles en boucle fermée z_i^* précédemment déterminée.
5. Dans le cas où seule la sortie $y(k)$ est mesurée, on peut vérifier que le système est observable. Par suite, un observateur peut être mis au point pour l'obtention d'un correcteur par retour d'état estimé.
   (a) la (dynamique de) poursuite est-elle modifiée par rapport à la commande par retour d'état mesuré ? **Justifier en deux mots**.
   (b) Même question pour le rejet de perturbation de sortie.

Correction exercice 2

1. correcteur qui contient un intégrateur pour rejet et poursuite échelons

2.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{F_a} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{g_a} u(k)$$

$$u(k) = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_I \end{bmatrix}}_{k_a^T} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$$

3. 3 pôles à placer. On prend 2 pôles complexes conjugués comme pôles dominants et un pôle en $z_3^* = 0$ comme pôle auxiliaire.
   - Calcul des pôles complexes conjugués en continu.

$$D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Leftrightarrow \xi = \sqrt{\frac{\ln(D)^2}{\pi^2 + \ln(D)^2}}$$

   Pour $D = 0.12$, on a $\xi = 0.56$

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{t_{max}\sqrt{1-\xi^2}}$$

   soit $\omega_0 = 1.26$ rad/s. Les pôles en continu sont donc

$$-\xi\omega_0 \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_0$$

   - Pôles en discret :

$$\begin{aligned} z_1^* &= e^{-\xi\omega_0 T_e}\cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 T_e) + e^{-\xi\omega_0 T_e}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 T_e) \\ z_2^* &= e^{-\xi\omega_0 T_e}\cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 T_e) - e^{-\xi\omega_0 T_e}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 T_e) \end{aligned}$$

   soit $0.9267 \pm 0.0974i$

4.

$$F_a - g_a k_a^T = \begin{bmatrix} a - bk_1 & -1 - bk_2 & -bk_I \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} \det(zI - (F_a - g_a k_a^T)) &= \begin{vmatrix} z - (a - bk_1) & 1 + bk_2 & bk_I \\ -1 & z & 0 \\ 1 & 1 & z - 1 \end{vmatrix} \\ &= bk_I \begin{vmatrix} -1 & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} z - (a - bk_1) & 1 + bk_2 \\ -1 & z \end{vmatrix} \\ &= z^3 - (1 + a - bk_1)z^2 + (-bk_I + bk_2 + 1 + (a - bk_1))z \\ &\quad -bk_I - bk_2 - 1 \end{aligned}$$

Remarque : ce qui suit peut être fortement simplifié en notant que $z_3^* = 0$.

En égalant à $P_c(z) = z^3 - (z_1^* + z_2^* + z_3^*)z^2 + (z_1^* z_2^* + z_3^*(z_1^* + z_2^*))z - z_1^* z_2^* z_3^*$ on obtient le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 1 + a - bk_1 & = z_1^* + z_2^* + z_3^* \\ -bk_I + bk_2 + 1 + (a - bk_1) & = z_1^* z_2^* + z_3^*(z_1^* + z_2^*) \\ bk_I + bk_2 + 1 & = z_1^* z_2^* z_3^* \end{cases}$$

La première équation donne :

$$k_1 = \frac{1}{b}(1 + a - (z_1^* + z_2^* + z_3^*))$$

En combinant les 3 équations :

$$k_2 = \frac{1}{2b}(z_1^* z_2^* + z_3^*(z_1^* + z_2^*) - 1)$$

Enfin

$$k_I = \frac{1}{2b}(2z_1^* z_2^* z_3^* - z_1^* z_2^* - z_3^*(z_1^* + z_2^*) - 1)$$

5. (a) non car dans les deux cas, les fonctions de transfert $T_{y^* \to y}$ sont identiques.
   (b) oui.

Exercice 3 : Mise au point d'un correcteur RST

On considère le système défini par la fonction de transfert :

$$Y_s(z) = \frac{\alpha z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - az^{-1})(1 - \frac{z^{-1}}{a})} U(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) \tag{5}$$

avec $T_e = 0.1s$, $\alpha > 0$ et $a > 0$.

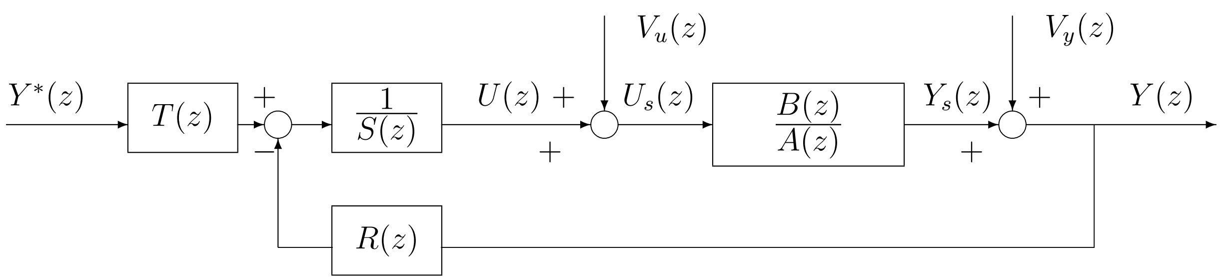

FIG. 5 – *Boucle fermée avec correcteur RST*

On va déterminer un correcteur RST qui permet de satisfaire le cahier des charges suivant.

1. $P_c(z^{-1}) = (1 - az^{-1})(1 - az^{-1})$
2. Un signal de consigne en échelon doit être poursuivi avec une erreur statique nulle.
3. Un signal de perturbation en forme d'échelon en entrée du système doit être rejeté.

Questions

1. Déterminer les pré spécifications du polynôme S.
2. Ecrire l'équation de Bezout.
3. Résoudre l'équation de Bezout pour déterminer R et S.
4. Proposer un choix pour T. Le justifier en quelques mots.
5. Quel est l'ordre du système en boucle fermée (voir figure 5) ?

Correction exercice 3

1. Pour rejeter une perturbation échelon en entrée du système, il faut que $B(z^{-1})S(z^{-1}) = (1-z^{-1})Q(z^{-1})$, donc que $S(z^{-1}) = (1-z^{-1})S_0(z^{-1})$ où $S_0(z^{-1})$ est un polynôme à déterminer.
2. Elle s'écrit $A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = P_c(z^{-1})$ soit
$$(1-az^{-1})(1-\frac{z^{-1}}{a})(1-z^{-1})S_0(z^{-1}) + \alpha z^{-1}(1+z^{-1})R(z^{-1}) = (1-az^{-1})(1-az^{-1})$$
Pour $z=a$, l'équation s'écrit : $a^{-1}(1+a^{-1})R(a^{-1}) = 0$, donc
$$R(z^{-1}) = (1-az^{-1})R_0(z^{-1})$$
Par suite, l'équation de Bezout se simplifie :
$$\underbrace{(1-\frac{z^{-1}}{a})(1-z^{-1})}_{A_{bezout}(z^{-1})}S_0(z^{-1}) + \underbrace{\alpha z^{-1}(1+z^{-1})}_{B_{bezout}(z^{-1})}R_0(z^{-1}) = \underbrace{(1-az^{-1})}_{P_{bezout}}$$
3. L'équation admet une solution unique ssi
$$d^\circ P_{bezout} \leq d^\circ A_{bezout} + d^\circ B_{bezout} - 1.$$
Or $d^\circ P_{bezout} = 1$, $d^\circ A_{bezout} = 2$ et $d^\circ B_{bezout} = 2$. Comme $1 \leq 3$, la relation est vérifiée. De plus,
$$\begin{array}{lcl} d^\circ S_0 = d^\circ B_{bezout} - 1 = 1 & \Rightarrow & S_0(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1} \\ d^\circ R_0 = d^\circ A_{bezout} - 1 = 1 & \Rightarrow & R_0(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} \end{array}$$
L'équation se récrit alors :
$$(1-\frac{z^{-1}}{a})(1-z^{-1})(s_0+s_1z^{-1}) + \alpha z^{-1}(1+z^{-1})(r_0+r_1z^{-1}) = 1$$
On écrit l'égalité des coefficients des polynômes de gauche et de droite.
$$\begin{array}{lr} \text{terme constant} & s_0 = 1 \\ \text{terme en } z^{-1} & s_1 - \frac{1}{a} - 1 + \alpha r_0 = -a \\ \text{terme en } z^{-2} & \frac{1}{a} - \frac{s_1}{a} - s_1 + \alpha r_0 + \alpha r_1 = 0 \\ \text{terme en } z^{-3} & \frac{s_1}{a} + \alpha r_1 = 0 \end{array}$$
La dernière équation permet d'exprimer
$$r_1 = -\frac{s_1}{a\alpha}$$
En retranchant la seconde équation à la troisième, on obtient :
$$s_1 = -\frac{a - (\frac{2}{a}+1)}{2(\frac{1}{a}+1)}$$
Par suite
$$r_0 = \frac{1+\frac{1}{a} - a - s_1}{\alpha}$$
et
$$r_1 = \frac{a-(\frac{2}{a}+1)}{2a\alpha(\frac{1}{a}+1)}$$

4. En prenant $T(z^{-1}) = \frac{P_c(z^{-1})}{B(1)}$, on a
   - $T_{y^\star \to y}(1) = 1$, donc poursuite sans erreur statique
   - $T_{y^\star \to y}(z^{-1})$ est un filtre à réponse impulsionnelle finie, donc poursuite rapide par rapport à la régulation.
5. le système à commander est d'ordre 2 ainsi que le correcteur. Le système en boucle fermée sera donc d'ordre 4.

Exercice 4 : Analyse d'un système bouclé avec seuil

On considère la fonction non linéaire Φ tel que $w = \Phi(\epsilon)$ définie par sa caractéristique représentée figure 6. La pente de la droite est de 1.

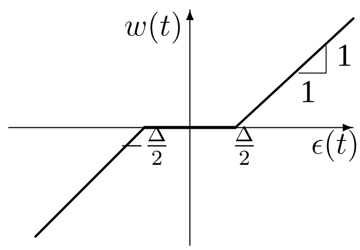

FIG. 6 – *Zone morte*

A : Calcul d'un gain complexe équivalent

1. Déterminer la sortie $w(t)$ de la non linéarité Φ pour l'entrée

$$\forall t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}], \quad \epsilon(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t).$$

   On donnera la fonction qui relie $w(t)$ à t pour $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ et on tracera l'allure de $w(t)$ sur la figure 7. *La feuille où se trouve la figure 7 sera jointe à la copie avec la mention du numéro d'anonymat (numéro de place).*
2. A partir de l'expression de $w(t)$, montrer que

$$N(\epsilon_1) = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sin(2\alpha) - \frac{2\Delta}{\pi\epsilon_1}\cos(\alpha)$$

   avec $\alpha = \arcsin\left(\frac{\Delta}{2\epsilon_1}\right)$.
3. A partir de l'expression de $w(t)$, montrer que

$$N(\epsilon_1) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{\Delta}{2\epsilon_1}\right) + \frac{\Delta}{2\epsilon_1}\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{2\epsilon_1}\right)^2}\right)$$

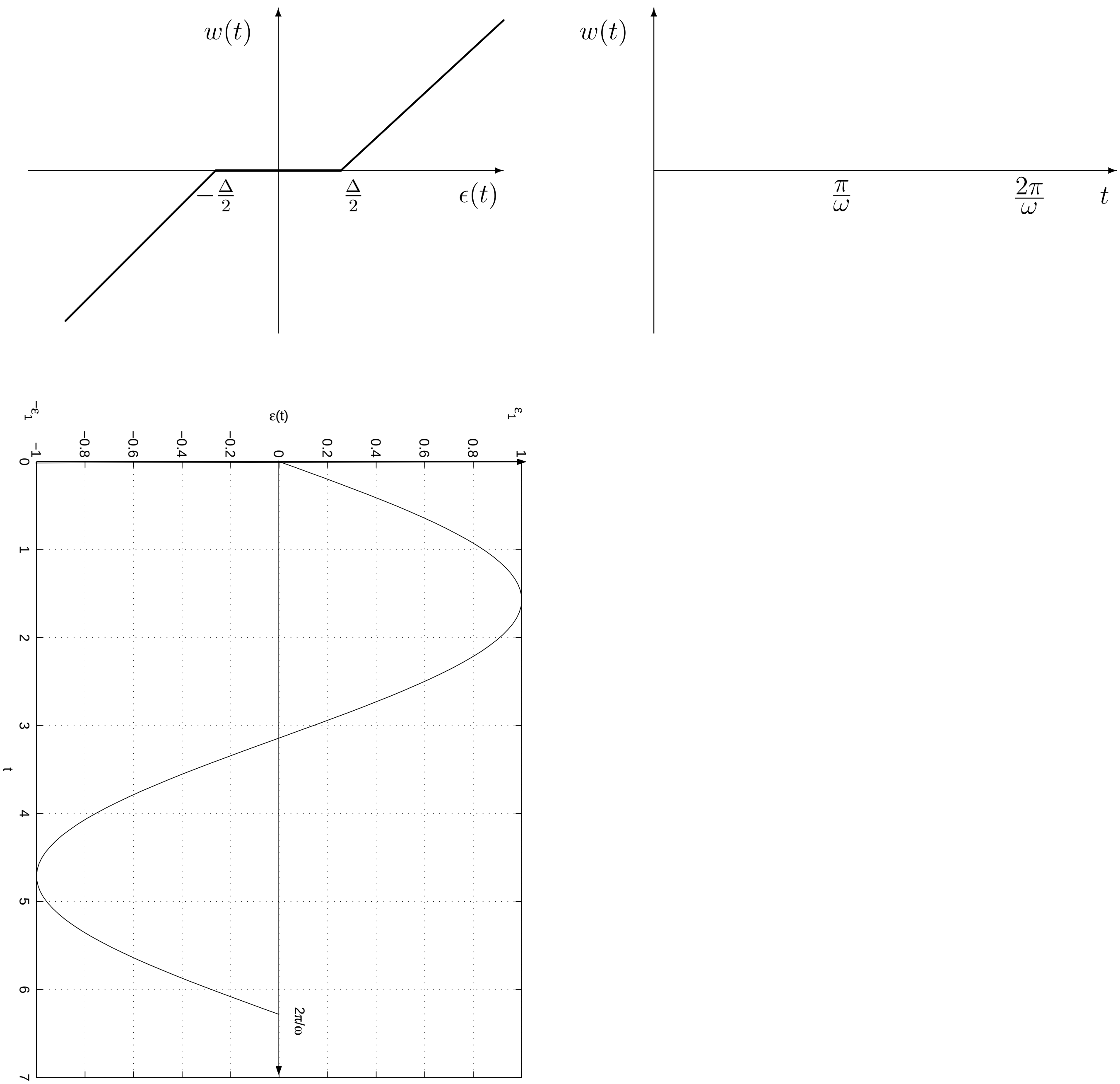

FIG. 7 – *Système bouclé avec relais*

B : Tracé du lieu critique

1. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}$$

   cette fonction est-elle monotone ? Si oui, croissante ou décroissante. **Justifier**

2. En déduire le lieu critique dans le plan complexe. On prendra soin d'orienter le lieu critique.

C : Etude d'un système avec non linéarité séparable

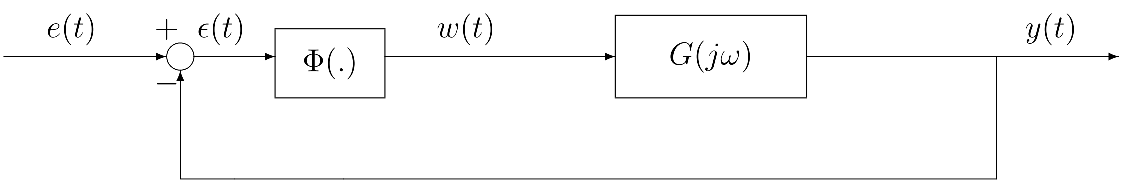

FIG. 8 – *Système avec non linéarité séparable*

On désire analyser le système bouclé représenté figure 8 avec

$$G(p) = \frac{(p+10)^2}{(p+1)^3}$$

et Φ la fonction non linéaire dont la caractéristique est donnée figure 6. Pour cela, on dispose du lieu critique déterminé question B et du Diagramme de Nyquist de $G(p)$ représenté figure 9.

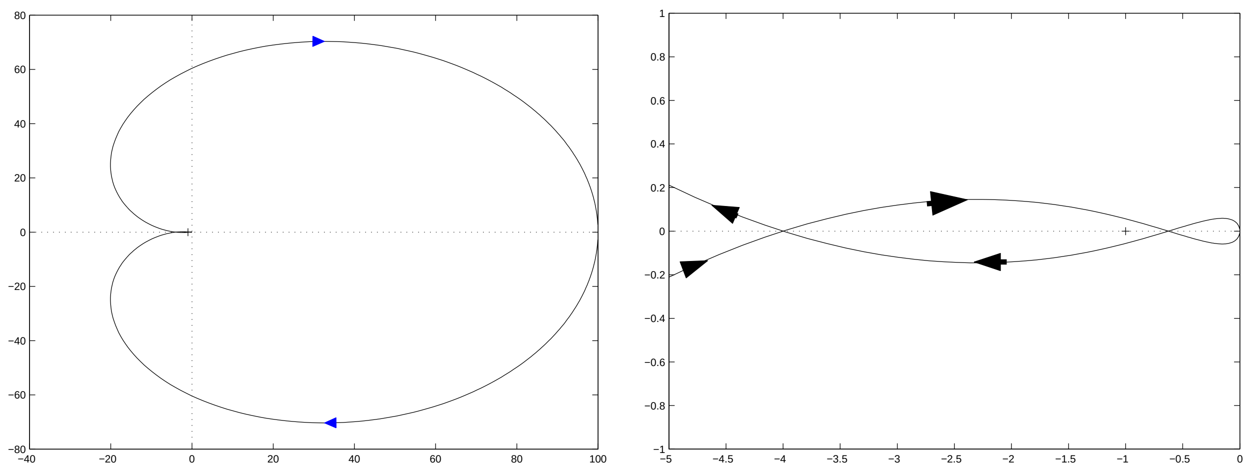

FIG. 9 – *Diagramme de Nyquist de $G(p)$ complet à gauche et zoomé à droite*

Questions

En régime libre ($e(t) = 0$), y-a-t-il oscillations ? Si oui, sont-elles stables ? Si elles existent, ne pas calculer la pulsation propre des oscillations.

Correction exercice 4

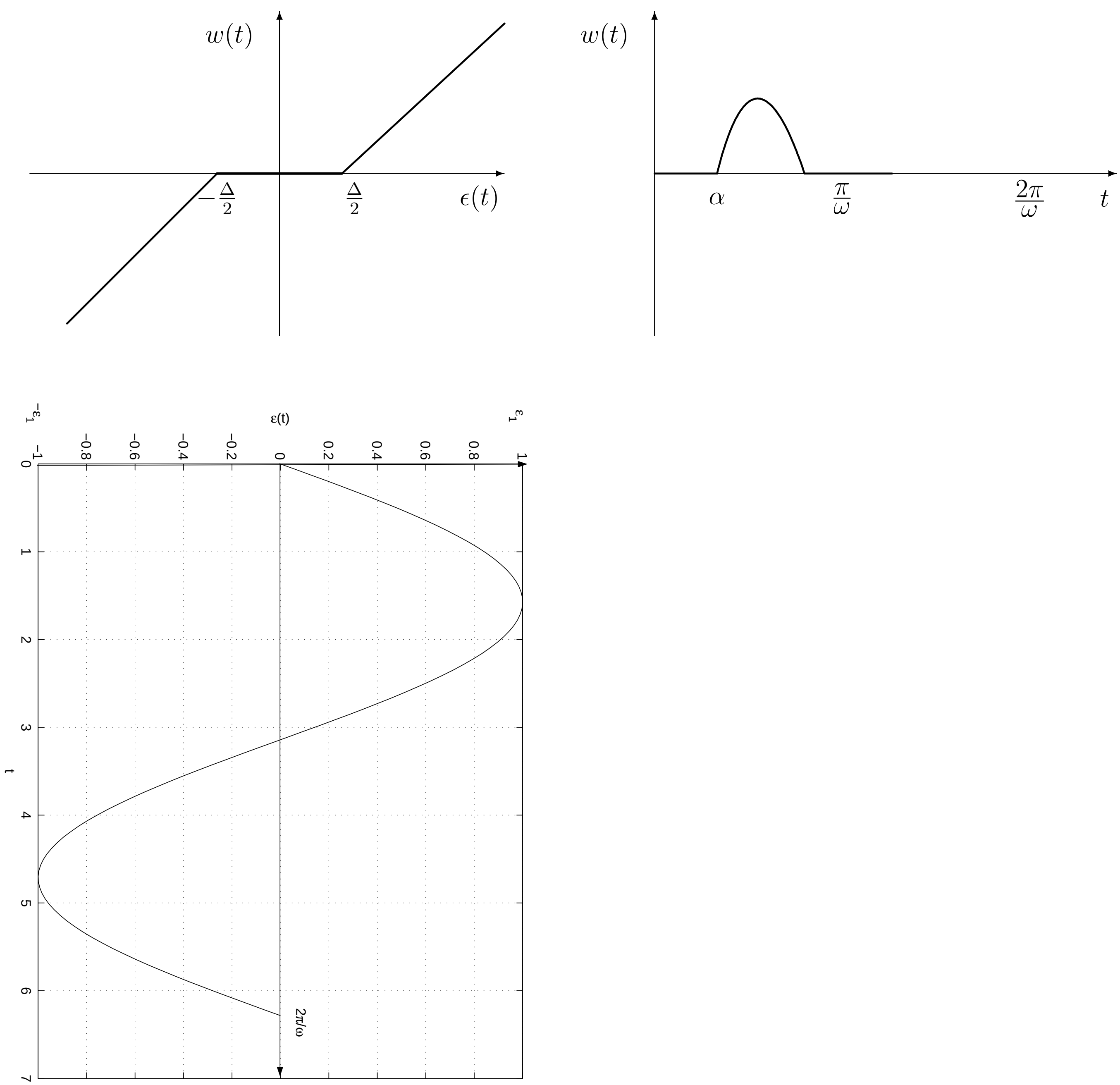

FIG. 10 – *Système bouclé avec relais*

A : Calcul du gain complexe équivalent

1.

$$\begin{cases} \forall t \in [0,\, \frac{\alpha}{\omega}] & w(t) = 0 \\ \forall t \in [\frac{\alpha}{\omega},\, \frac{\pi-\alpha}{\omega}] & w(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t) - \dfrac{\Delta}{2} \\ \forall t \in [\frac{\pi-\alpha}{\omega},\, \frac{\pi}{\omega}] & w(t) = 0 \end{cases}$$

Dans la suite, on pose $u = \omega t$.

2. La non linéarité est symétrique par rapport à 0 :

$$\begin{aligned} N(\epsilon_1) &= \frac{2j}{\pi\epsilon_1}\int_0^{\pi} w(\frac{u}{\omega})e^{-ju}d(u) \\ &= \frac{2j}{\pi\epsilon_1}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}(\epsilon_1\sin(u)-\frac{\Delta}{2})e^{-ju}d(u) \end{aligned}$$

Or

$$\left(\epsilon_1\sin(u)-\frac{\Delta}{2}\right)e^{-ju} = \epsilon_1\frac{1-e^{-2ju}}{2j}-\frac{\Delta}{2}e^{-ju}$$

D'où

$$N(\epsilon_1) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}(1-e^{-2ju})du}_{A} - \frac{j\Delta}{\pi\epsilon_1}\underbrace{\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}e^{-ju}du}_{B}$$

Or

$$A = \left[u+\frac{e^{-2ju}}{2j}\right]_{\alpha}^{\pi-\alpha} = \pi-2\alpha+\underbrace{\frac{1}{2j}(e^{2j\alpha}-e^{-2j\alpha})}_{\sin(2\alpha)}$$

et

$$B = \left[\frac{e^{-ju}}{-j}\right]_{\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{2}{j}\underbrace{\frac{1}{2}(e^{j\alpha}-e^{-j\alpha})}_{\cos(\alpha)}$$

Par suite,

$$N(\epsilon_1) = 1-\frac{2\alpha}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sin(2\alpha)-\frac{2\Delta}{\pi\epsilon_1}\cos(\alpha)$$

3. Comme $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$,

$$N(\epsilon_1) = 1-\frac{2\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}\cos(\alpha)\sin(\alpha)-\frac{2\Delta}{\pi\epsilon_1}\cos(\alpha)$$

Par définition, $\sin(\alpha) = \frac{\Delta}{2\epsilon_1}$. De plus, $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin(\alpha)^2}$. Par suite, on obtient :

$$N(\epsilon_1) = 1-\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{\Delta}{2\epsilon_1}\right)+\frac{\Delta}{2\epsilon_1}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{2\epsilon_1}\right)^2}\right)$$

B : Tracé du lieu critique

1. Calcul de la dérivée

$$\forall x\in[0,1],\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} > 0$$

$f(x)$ est donc croissante pour $x\in[0,1]$. Elle croit de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

2. $N(\epsilon_1) = 1-\frac{2}{\pi}f\left(\frac{1}{\epsilon_1}\right)$. Par suite, $N(\epsilon_1)$ est donc croissante de 0 à 1. Par suite, quand ϵ_1 va de 0 à l'infini, le point $C(\epsilon_1) = -\frac{1}{N(\epsilon_1)}$ décrit l'axe réel, de $-\infty$ au point $(-1,0)$.

C : Etude d'un système avec non linéarité séparable

Le lieu critique intersecte le tracé de $G(j\omega)$ au point $(-4{,}0)$. Il y aura donc oscillations.

Sont-elles stables ? L'intersection entre les deux tracés est telle qu'en parcourant le tracé de $G(j\omega)$ par ω allant de 0 à $+\infty$, on laisse à sa *droite* le lieu critique, c'est-à-dire le tracé de $C(\epsilon_1) = \frac{-1}{N(\epsilon_1)}$ orienté par ϵ_1 allant de 0 à $+\infty$. La condition du critère de Loeb n'étant pas remplie, l'oscillation ne sera pas stable.