UNIVERSITE DE CAEN
U.F.R. de Science

2ième SESSION 2003
12 septembre 2003

MAITRISE E.E.A. (A.I.I.)
Examen: Commande numérique des systèmes

CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE CORRIGE

EL426T1
durée: 2h

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Les téléphones portables (même éteints) et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Seul document autorisé : document manuscript de 4 pages format A4.

Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Analyse d'un système

On considère le système défini par la fonction de transfert :

$$Y(z) = \frac{1 + bz^{-1}}{1 - az^{-1}} \left(V(z) + \frac{Kz^{-1}}{1 - z^{-1}} U(z) \right) \tag{1}$$

avec $Y(z)$ la transformée en Z du signal de sortie $y(k)$, $V(z)$ la transformée en Z du signal de perturbation $v(k)$, $U(z)$ la transformée en Z du signal de commande $u(k)$, $a \in]0,\ 1[$ et $b \in]0,\ 1[$. On a mis au point le correcteur défini par :

$$U(z) = \frac{(1-a)(1-az^{-1})}{K(1+bz^{-1})} \left(Y^\star(z) - Y(z) \right) \tag{2}$$

avec $Y^\star(z)$ la transformée en Z du signal de consigne.

1. Représenter le système en boucle fermée défini par les équations (1) et (2) par un schéma bloc.

2. Calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée entre la perturbation $v(k)$ et la sortie $y(k)$ du système.

3. Le système en boucle fermée peut-il effectuer le rejet de signaux de perturbation $v(k)$

   (a) en échelon ?

   (b) en rampe ?

   (c) en sinusoïde ? si oui, pour quelle(s) pulsation(s) ?

   Justifier *brièvement* par un argument.

4. Etablir l'expression de $T_{y^\star \to y}(z)$ et l'expression de $T_{y^\star \to u}(z)$ en fonction de a, b et K.

5. En l'absence de perturbation ($v(k) = 0$) et pour une consigne $y^\star(k)$ un échelon unitaire, déterminer les 5 premiers pas de la sortie $y(k)$ et de la commande $u(k)$. Application numérique : $a = 0,1$, $b = 0,9$ et $K = 1$.

6. La fonction de transfert reliant le signal de commande u à la sortie y :

$$Y(z) = \frac{Kz^{-1}(1 + bz^{-1})}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})} U(z)$$

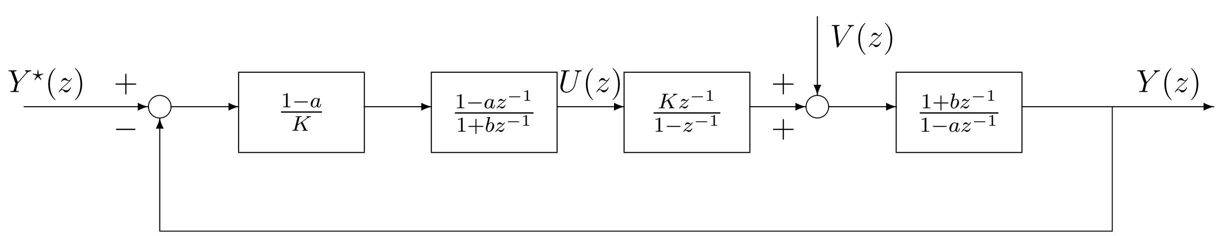
   a été obtenue par transposition du modèle continu suivant[1] :

$$G(p) = K_c \frac{b_1 p + b_0}{p(\tau p + 1)}$$

   A partir du résultat de la question précédente, représenter l'allure probable de l'évolution entre les instants d'échantillonnage de la sortie du système continu G commandé par le correcteur défini par(2), en l'absence de perturbation ($v(k) = 0$) et pour une consigne $y^\star(k)$ un échelon unitaire. Vis-à-vis du procédé continu, le correcteur est-il aussi satisfaisant que le laisse supposer la question précédente? Justifier.

Corrigé

1. Voir figure.



[1] Transposition avec bloqueur d'ordre 0.

2. Avec $Y^\star(z) = 0$, l'équation (1) se réécrit:

$$(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})Y(z) = (1 + bz^{-1})\left((1 - z^{-1})V(z) + Kz^{-1}U(z)\right)$$

et l'équation (2) :

$$K(1 + bz^{-1})U(z) = -(1 - a)(1 - az^{-1})Y(z)$$

On élimine $U(z)$ entre ces deux équations : on ajoute à la première équation la seconde équation multipliée par z^{-1} :

$$\left((1 - z^{-1})(1 - az^{-1}) + z^{-1}(1 - a)(1 - az^{-1})\right) Y(z) = (1 + bz^{-1})(1 - z^{-1})V(z)$$

D'où

$$T_{v\to y}(z) = \frac{(1 + bz^{-1})(1 - z^{-1})}{(1 - az^{-1})^2}$$

3. (a) oui car $T_{v\to y}(z) = (1 - z^{-1})F(z)$
   (b) non car $T_{v\to y}(z) \neq (1 - z^{-1})^2F(z)$
   (c) non car $T_{v\to y}(z)$ n'a pas de zéros complexes conjugués.

4. Avec $V(z) = 0$, l'équation (1) se réécrit :

$$(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})Y(z) = (1 + bz^{-1})Kz^{-1}U(z)$$

et l'équation (2) se réécrit :

$$K(1 + bz^{-1})U(z) = (1 - a)(1 - az^{-1})(Y^\star(z) - Y(z)).$$

On élimine $U(z)$ entre ces deux équations : on ajoute à la première équation la seconde équation multipliée par z^{-1} :

$$\left((1 - z^{-1})(1 - az^{-1}) + z^{-1}(1 - a)(1 - az^{-1})\right) Y(z) = z^{-1}(1 - a)(1 - az^{-1})Y^\star(z)$$

D'où

$$T_{y^\star\to y}(z) = \frac{(1 - a)z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

D'autre part, en élimine $Y(z)$ entre ces deux équations : on multiplie la première équation par $(1 - a)$ et on y retranche la seconde équation multipliée par $(1 - z^{-1})$:

$$\left(K(1 - z^{-1})(1 + bz^{-1}) + Kz^{-1}(1 - a)(1 + bz^{-1})\right) U(z) = (1-a)(1-az^{-1})(1-z^{-1})Y^\star(z)$$

D'où

$$T_{y^\star\to u}(z) = \frac{(1 - a)(1 - z^{-1})}{K(1 + bz^{-1})}$$

5. D'après la question précédente : $y(k)-ay(k-1) = (1-a)y^\star(k-1)$ et $u(k)+bu(k-1) = \dfrac{1 - a}{K}y^\star(k)$. Par suite,

$$\begin{array}{lllll} y(0) = 0 & y(1) = 0 & y(2) = 1 - a & y(3) = 1 - a^2 & y(4) = 1 - a^3 \\ u(0) = 0 & u(1) = \dfrac{1 - a}{K} & u(2) = -b\dfrac{1 - a}{K} & u(3) = b^2\dfrac{1 - a}{K} & u(4) = -b^3\dfrac{1 - a}{K} \end{array}$$

6. Comme $b > 0$, la commande change alternativement de signe :

$$u(0) = 0 \quad u(1) > 0 \quad u(2) < 0 \quad u(3) > 0 \quad u(4) < 0$$

De plus, comme $a = 0,1$, on a $y(4) \simeq 1$ et comme $b = 0,9$, $u(4) = -0,9^4$ pas négligeable devant 0. De plus, d'après la relation de récurrence, $u(k) = -(-0,9)^k$: donc $u(k)$ tends vers 0 mais très lentement. Le procédé continu présentera donc une oscillation entre les instants d'échantillonnage. Voir les figures 1.

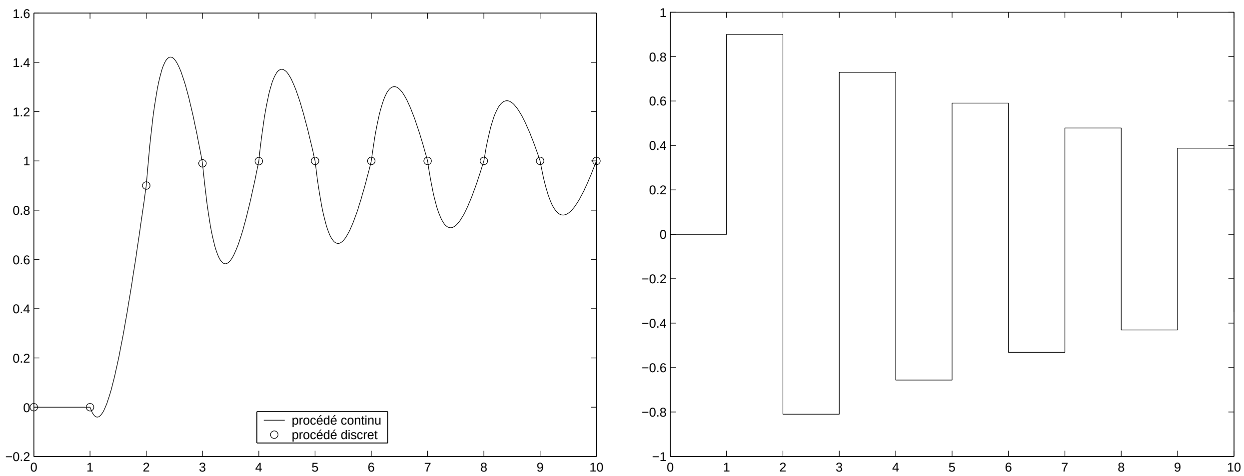


Figure 1: Réponses temporelles : sortie à gauche et commande à droite

Exercice 2 : Mise au point d'un correcteur RST

On considère le système défini par la fonction de transfert :

$$Y(z) = \frac{Kz^{-1}(1 - bz^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})} U(z) \tag{3}$$

avec $Y(z)$ la transformée en Z du signal de sortie, $U(z)$ la transformée en Z du signal de commande, $a \in]0,\ 1[$ et $b \in]0,\ 1[$.

A : Cahier des charges 1

On va déterminer un correcteur RST qui permet de satisfaire le cahier des charges suivant.

- $P_c(z^{-1}) = (1 - bz^{-1})$
- Un signal de consigne en échelon doit être poursuivi avec une erreur statique nulle.
- Un signal de perturbation V_y en forme de rampe en sortie du système doit être rejeté.

Questions

1. Déterminer les pré spécifications du polynôme S.

2. Ecrire et réduire l'équation de Bezout.

3. Résoudre l'équation de Bezout pour déterminer R et S.

4. Proposer un choix pour T. Le justifier en quelques mots.

B : Rejet de perturbation mesuré

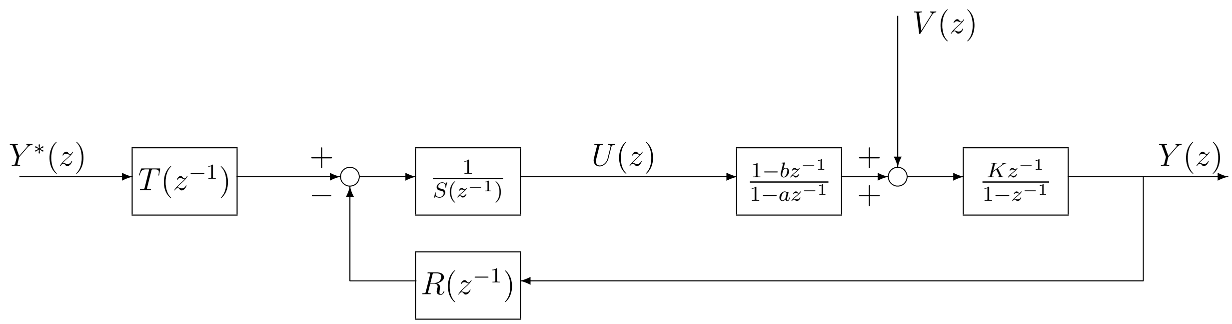


Figure 2: Boucle fermée avec correcteur RST

On considère maintenant que le système défini par la fonction de transfert :

$$Y(z) = \frac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}} \left(V(z) + \frac{1-bz^{-1}}{1-az^{-1}} U(z) \right) \tag{4}$$

où $V(z)$ est la transformée en Z d'une perturbation en rampe. Un correcteur RST a déjà été mis au point :

$$U(z) = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y^\star(z) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y(z)$$

les polynômes R, S et T sont donc connus. Le polynôme S est tel que $S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})S_0(z^{-1})$ avec $S_0(1) \neq 0$. Le système en boucle fermée est représenté figure 2.

1. Etude du rejet de perturbation :

   (a) Calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée entre la perturbation $v(k)$ et la sortie $y(k)$ du système.

   (b) En déduire que le rejet d'une perturbation $v(k)$ en forme de rampe ne peut pas être effectué.

2. Rejet de la perturbation $v(k)$ à partir de sa mesure : on suppose maintenant que la perturbation $v(k)$ en forme de rampe est mesurée. Cette mesure va être utilisée pour calculer la commander $u(k)$ par :

$$U(z) = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y^\star(z) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y(z) + \frac{R_m(z^{-1})}{S_m(z^{-1})} V(z) \tag{5}$$

   où

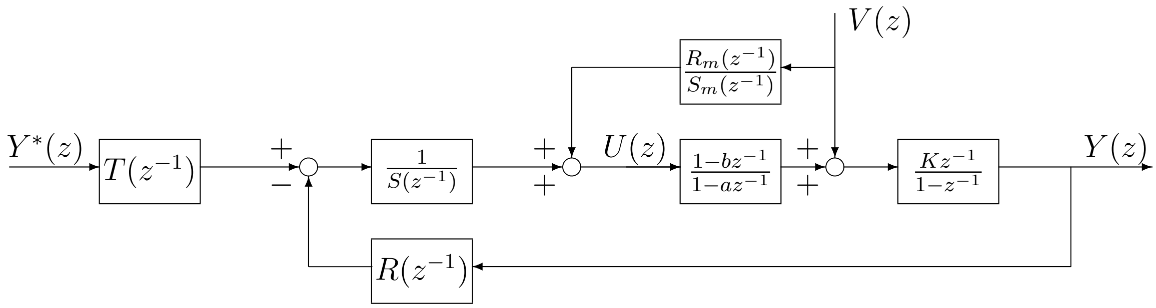


Figure 3: Boucle fermée avec correcteur RST + mesure de la perturbation

- R, S et T sont ceux définis question B.1 ;
- R_m et S_m sont deux polynômes à déterminer de façon à assurer le rejet.

Voir la figure 3.

(a) A partir des équations du correcteur (5) et des équations du système (4), calculer la fonction de transfert de $v(k)$ vers $y(k)$: $T_{v\to y}(z)$ en fonction des polynômes R, S_0, R_m, S_m, a, b et K.

(b) Ecrire la condition que doit satisfaire cette fonction de transfert pour assurer le rejet de perturbation en rampe.

(c) En déduire que le rejet de perturbation en rampe sera effectué si les polynômes R_m et S_m sont solutions de l'équation de Bezout :

$$(1-az^{-1})S_m(z^{-1}) + (1-bz^{-1})R_m(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

(d) Résoudre cette équation de Bezout.

Corrigé

A

1. Pour rejeter une perturbation en forme de rampe :

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^2 Q(z^{-1})$$

Ce qui implique que : $S(z^{-1}) = (1-z^{-1})S_0(z^{-1})$ puisque $A(z^{-1}) = (1-z^{-1})(1-az^{-1})$.

2. l'équation de Bezout s'écrit :

$$(1-z^{-1})^2(1-az^{-1})S_0(z^{-1}) + Kz^{-1}(1-bz^{-1})R(z^{-1}) = 1 - bz^{-1}$$

Par suite, $S_0(z^{-1}) = (1-bz^{-1})S_1(z^{-1})$. D'où l'équation de Bezout réduite :

$$\underbrace{(1-z^{-1})^2(1-az^{-1})}_{A_{bezout}} S_1(z^{-1}) + \underbrace{Kz^{-1}}_{B_{bezout}} R(z^{-1}) = \underbrace{1}_{P_{bezout}}$$

Cette équation de Bezout admet une solution minimale unique car $d^\circ P_{bezout} \leq d^\circ A_{bezout} + d^\circ B_{bezout} - 1$. De plus,

$$d^\circ S_1 = d^\circ B_{bezout} - 1 = 1 - 1 = 0$$

et

$$d^\circ R = d^\circ A_{bezout} - 1 = 3 - 1 = 2$$

Par suite, $S_1(z^{-1}) = 1$ et $R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$. En écrivant l'égalité des coefficients des polynômes de gauche et de droite, la résolution de l'équation de Bezout mène donc à :

terme constant	$1 = 1$
terme en z^{-1}	$-(2+a) + Kr_0 = 0$
terme en z^{-2}	$(2a+1) + Kr_1 = 0$
terme en z^{-3}	$-a + Kr_2 = 0$

Ce système d'équations linéaires est équivalent à :

$$\begin{cases} r_0 = \dfrac{2+a}{K} \\ r_1 = -\dfrac{1+2a}{K} \\ r_2 = \dfrac{a}{K} \end{cases}$$

3. Compensation de la dynamique du système en boucle fermée pour avoir un régime transitoire rapide ; réponse impulsionnelle finie : $T(z^{-1}) = \frac{1}{K}$

B

1. (a) L'équation du système s'écrit :

$$(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})Y(z) = Kz^{-1}(1 - az^{-1})V(z) + Kz^{-1}(1 - bz^{-1})U(z)$$

L'équation du correcteur s'écrit (avec $Y^\star(z) = 0$) :

$$S(z^{-1})U(z) = -R(z^{-1})Y(z)$$

Pour éliminer $U(z)$ entre les deux équations, on ajoute à la première équation multipliée par $S(z^{-1})$ la seconde équation multipliée par $Kz^{-1}(1 - bz^{-1})$, ce qui donne :

$$\left((1 - z^{-1})(1 - az^{-1})S(z^{-1}) + Kz^{-1}(1 - bz^{-1})R(z^{-1})\right) Y(z) = Kz^{-1}(1 - az^{-1})S(z^{-1})V(z)$$

Soit

$$T_{v \to y}(z) = \frac{Kz^{-1}(1 - az^{-1})S(z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})S(z^{-1}) + Kz^{-1}(1 - bz^{-1})R(z^{-1})}$$

(b) Pour assurer le rejet de perturbation, il faut qu'il existe un polynôme $Q(z^{-1})$ tel que :

$$Kz^{-1}(1 - az^{-1})S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2 Q(z^{-1})$$

ce qui n'est pas le cas puisque $S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})S_0(z^{-1})$ avec $S_0(1) \neq 0$.

2. (a) L'équation du système s'écrit :

$$(1-z^{-1})(1-az^{-1})Y(z) = Kz^{-1}(1-az^{-1})V(z) + Kz^{-1}(1-bz^{-1})U(z)$$

L'équation du correcteur s'écrit (avec $Y^\star(z) = 0$) :

$$S(z^{-1})S_m(z^{-1})U(z) = -R(z^{-1})S_m(z^{-1})Y(z) + R_m(z^{-1})S(z^{-1})V(z)$$

Pour éliminer $U(z)$ entre les deux équations, on ajoute à la première équation multipliée par $S(z^{-1})S_m(z^{-1})$ la seconde équation multipliée par $kz^{-1}(1-bz^{-1})$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left((1-z^{-1})(1-az^{-1})S(z^{-1}) + Kz^{-1}(1-bz^{-1})R(z^{-1})\right) S_m(z^{-1})Y(z) = \cdots \\ \left(Kz^{-1}(1-az^{-1})S(z^{-1})S_m(z^{-1}) + Kz^{-1}(1-bz^{-1})R_m(z^{-1})S(z^{-1})\right) V(z)\end{aligned}$$

Soit

$$T_{v\to y}(z) = Kz^{-1}S(z^{-1})\frac{(1-az^{-1})S_m(z^{-1}) + (1-bz^{-1})R_m(z^{-1})}{\left((1-z^{-1})(1-az^{-1})S(z^{-1}) + Kz^{-1}(1-bz^{-1})R(z^{-1})\right) S_m(z^{-1})}$$

(b) Il suffit qu'il existe un polynôme $Q(z^{-1})$ tel que :

$$Kz^{-1}S(z^{-1})S(z^{-1})\left((1-az^{-1})S_m(z^{-1}) + (1-bz^{-1})R_m(z^{-1})\right) = (1-z^{-1})^2Q(z^{-1})$$

(c) Puisque $S(z^{-1}) = (1-z^{-1})S_0(z^{-1})$ avec $S_0(1) \neq 0$, une condition suffisante de rejet de perturbation est que :

$$\underbrace{(1-az^{-1})}_{A_{bezout}} S_m(z^{-1}) + \underbrace{(1-bz^{-1})}_{B_{bezout}} R_m(z^{-1}) = \underbrace{1-z^{-1}}_{P_{bezout}}$$

(d) Cette équation de Bezout admet une solution minimale unique car $d^\circ P_{bezout} \leq d^\circ A_{bezout} + d^\circ B_{bezout} - 1$. De plus,

$$d^\circ S_m = d^\circ B_{bezout} - 1 = 1 - 1 = 0$$

et

$$d^\circ R_m = d^\circ A_{bezout} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Par suite, $S_m(z^{-1}) = s_0$ et $R_m(z^{-1}) = r_0$. En écrivant l'égalité des coefficients des polynômes de gauche et de droite, la résolution de l'équation de Bezout mène donc à :

terme constant	$s_0 + r_0 = 1$
terme en z^{-1}	$-as_0 - br_0 = -1$

Ce système d'équations linéaires est équivalent à :

$$\begin{cases} s_0 = \dfrac{1-b}{a-b} \\ r_0 = \dfrac{1-a}{b-a} \end{cases}$$

Exercice 3 : Commande par retour d'état

On considère le procédé décrit par le modèle continu :

$$G(p) = \frac{e^{-p}}{p}.$$

Il va être commandé par une loi de commande numérique, à la période d'échantillonnage $T_e = 1s$. Répondre aux questions suivantes en choisissant une seule réponse parmi les 3 proposées en cochant la case correspondante. Tout choix devra être justifié brièvement. *Les réponses devront être portées directement sur les feuilles. Elles seront jointes à la copie avec la mention du numéro d'anonymat (numéro de place). Pour chaque mauvaise réponse, un nombre* NÉGATIF *de points sera compté.*

1. La transposition de $G(p)$ avec bloqueur d'ordre 0 est donnée par

   $\mathcal{G}(z) = \dfrac{z^{-2}}{1-z^{-1}}$ ☐ $\qquad \mathcal{G}(z) = \dfrac{z^{-2}}{2}\dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ ☐ $\qquad \mathcal{G}(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$ ☐

   Justification en quelques mots :

2. Quel est l'ordre de $\mathcal{G}$?

   1 ☐ 2 ☐ 3 ☐

   Justification en quelques mots :

3. Une représentation d'état de vecteur d'état x est associée à la fonction de transfert $\mathcal{G}(z)$. On veut mettre au point un correcteur par retour d'état qui assure :

   - rejet de perturbation d'entrée sinusoïdale de pulsation ω_0 ;
   - rejet de perturbation de sortie en échelon ;

   Parmi les trois choix de structure de correcteur, quelle est la plus simple (d'ordre le plus faible) qui permet de remplir le cahier des charges :

$$\begin{array}{rcl} x_d(k+1) & = & F_d x_d(k) + g_d(y^*(k) - y(k)) \\ u(k) & = & -k^T x(k) - k_d^T x_d(k) \end{array}$$

$$\text{où} \quad F_d = \begin{bmatrix} 1+2\cos(\omega_s T_e) & -(1+2\cos(\omega_s T_e)) & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ☐

$$\begin{array}{rcl} x_I(k+1) & = & x_I(k) + (y^*(k) - y(k)) \\ u(k) & = & -k^T x(k) - k_I x_I(k) \end{array}$$ ☐

$$\begin{array}{rcl} x_d(k+1) & = & F_d x_d(k) + g_d(y^*(k) - y(k)) \\ u(k) & = & -k^T x(k) - k_d^T x_d(k) \end{array}$$ ☐

$$\text{où} \quad F_d = \begin{bmatrix} 2\cos(\omega_s T_e) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Justification en quelques mots :

4. Le correcteur mis au point pour remplir le cahier des charges précédents permet la poursuite par le système en boucle fermée de :

échelons (seuls) □	sinus à 1 pulsation donnée (seules) □	échelons et sinus à 1 pulsation donnée □

   Dans le cas d'une poursuite de sinusoïdes à une pulsation donnée, indiquer la pulsation de celle-ci :

   Justification :

Corrigé

1. La fonction de transfert discrète échantillonnée bloquée de l'intégrateur donne :

$$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

   auquel se "rajoute" un terme z^{-1} pour le retard pur d'une période d'échantillonnage. La bonne solution est donc le premier choix.

2. D'ordre 2 (penser à mettre la fonction de transfert sous la forme d'un rapport de deux polynômes en z et à examiner l'ordre du dénominateur).

3. Pour assurer le :

   - rejet de perturbation d'entrée sinusoïdale de pulsation ω_0 ;
   - rejet de perturbation de sortie en échelon ;

   Le correcteur doit faire apparaître le modèle des perturbations soit

$$D(z^{-1}) = (1-z^{-1})(1-2\cos(\omega_0 T_e)z^{-1}+z^{-2}) = 1-(1+2\cos(\omega_s T_e)z^{-1}+(1+2\cos(\omega_s T_e))z^{-2}-z^{-3}$$

   Le bon choix est donc le premier.

4. Poursuite d'échelon et de sinus à la pulsation ω_s car avec cette structure de commande, on poursuit les signaux de même nature que ceux qui sont rejetés.

Exercice 4 : Analyse des systèmes non linéaires

On considère le système représenté figure 4. La fonction de transfert correspond à celle d'un moteur à courant continu entraînant un axe sur lequel est monté un ressort de rappel. La caractéristique du ressort de rappel est donnée par la non linéarité représentée figure 5. Le dispositif est commandé par un correcteur PI. Un tel dispositif peut par exemple représenter la commande du papillon d'un moteur à essence.

1. Mise en forme du problème : Par manipulation de schéma-blocs, montrer que l'étude de la stabilité du système représenté figure 4 peut se ramener à l'étude du système représenté figure 6. On déterminera Φ et G.

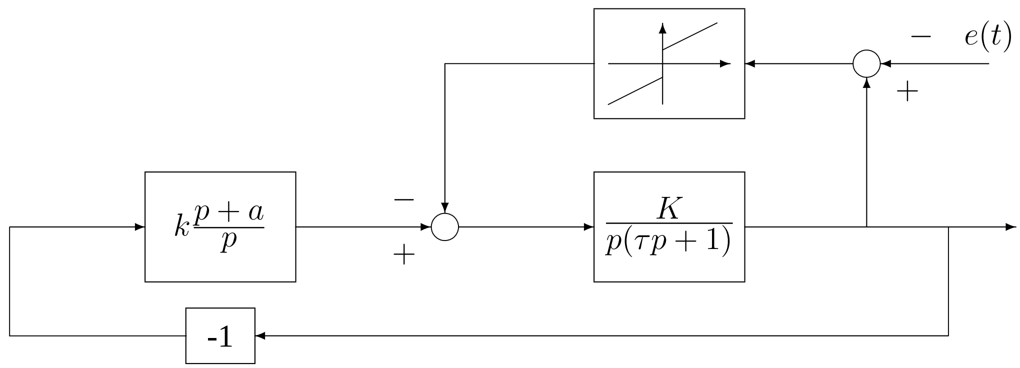


Figure 4: Système à analyser

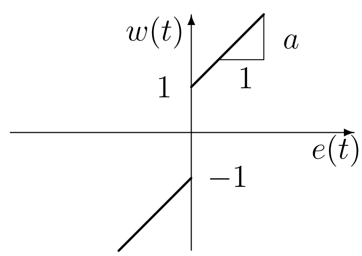


Figure 5: Non linéarité

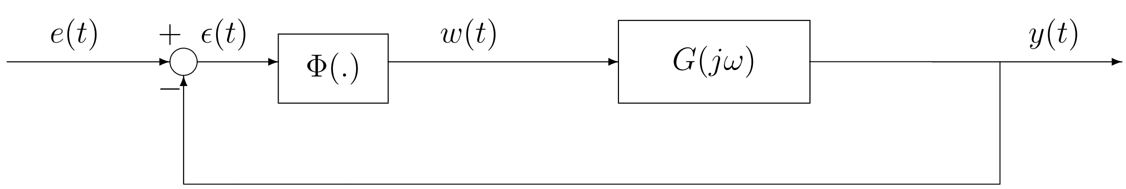


Figure 6: Système avec non linéarité séparable

2. Calcul du gain complexe équivalent

   (a) Déterminer la sortie $w(t)$ de la non linéarité Φ pour l'entrée

$$\forall t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}], \qquad \epsilon(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t).$$

   On donnera la fonction qui relie $w(t)$ à t pour $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ et on tracera l'allure de $w(t)$ sur la figure 7. *La feuille où se trouve la figure 7 sera jointe à la copie avec la*

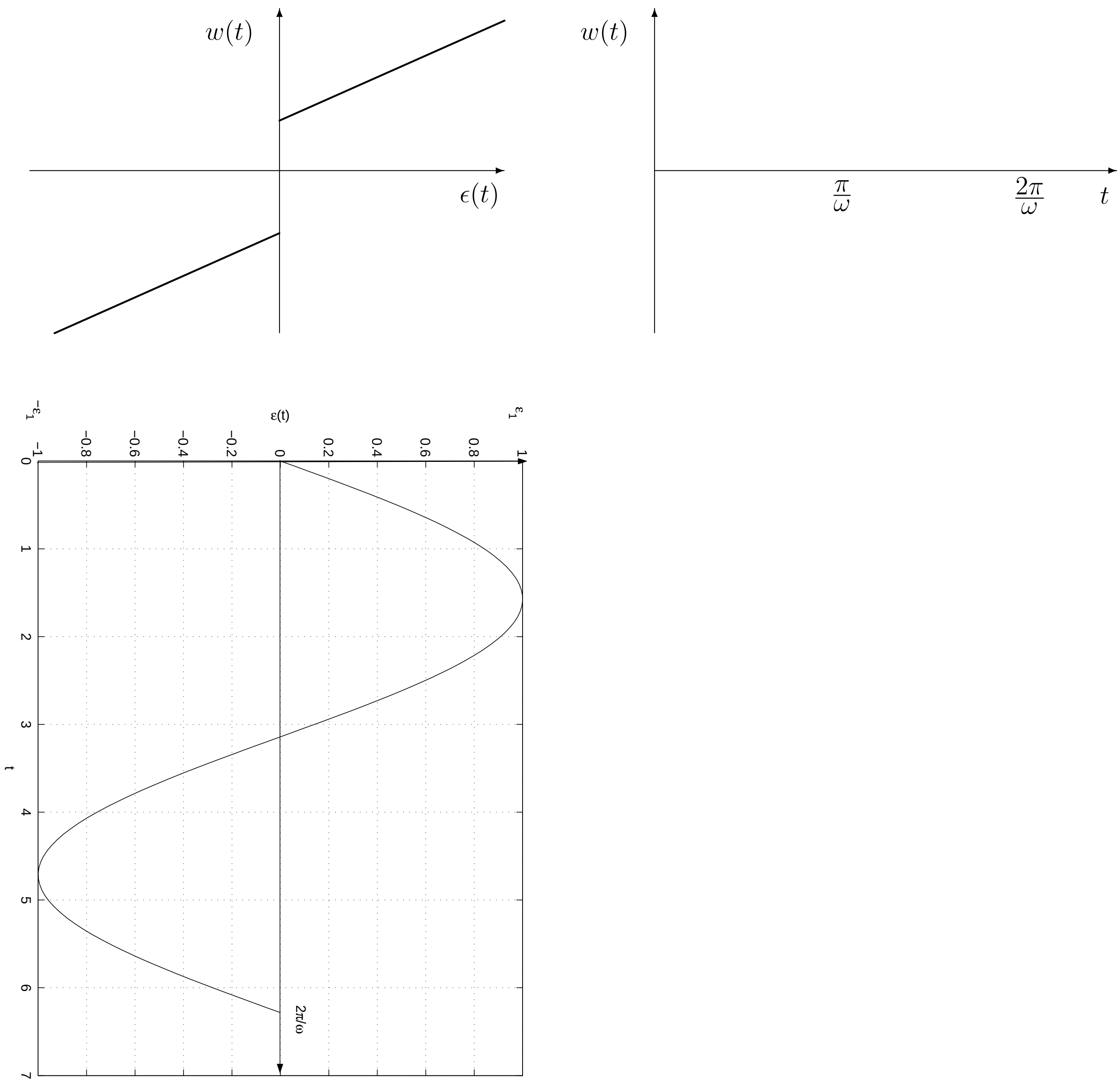


Figure 7: Système bouclé avec relais

   mention du numéro d'anonymat (numéro de place).

(b) A partir de l'expression de $w(t)$, montrer que

$$N(\epsilon_1) = 1 + \frac{4}{\pi\epsilon_1}.$$

3. On désire analyser le système bouclé représenté figure 6. Pour cela, on dispose du Diagramme de Nyquist de $G(p)$ représenté figure 8.

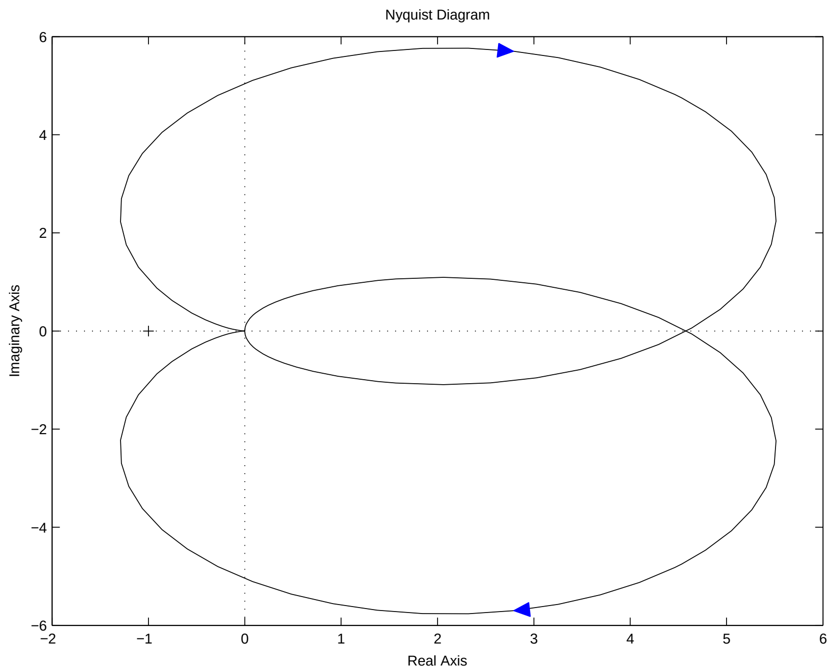


Figure 8: Diagramme de Nyquist de $G(p)$

(a) Représenter le lieu critique sur le diagramme figure 8. *La feuille où se trouve la figure 8 sera jointe à la copie avec la mention du numéro d'anonymat (numéro de place).*

(b) En régime libre ($e(t) = 0$), y-a-t-il oscillations ? Si oui, sont-elles stables ? Si elles existent, ne pas calculer la pulsation propre des oscillations.

Corrigé

1. La linéarisation du système non linéaire s'écrit :

$$\dot{\delta x} = -3\delta x^2$$

Ce système temps invariant a pour valeur propre 0 qui est sur l'axe imaginaire. On ne peut donc pas conclure sur la stabilité du point d'équilibre 0 du système non linéaire. Le bon choix est donc le troisième.

2. Dans le premier cas, pour des conditions initiales différentes, l'oscillation a toujours même amplitude : le système ne peut être que non linéaire. Dans le troisième cas, les

oscillations ne sont pas sinusoïdales et sont toujours de même amplitude pour deux conditions initiales différentes : le système ne peut être que non linéaire. Enfin, dans le second cas, les oscillations sont sinusoïdales et leur amplitude dépend de la condition initiale : le système est donc linéaire invariant.

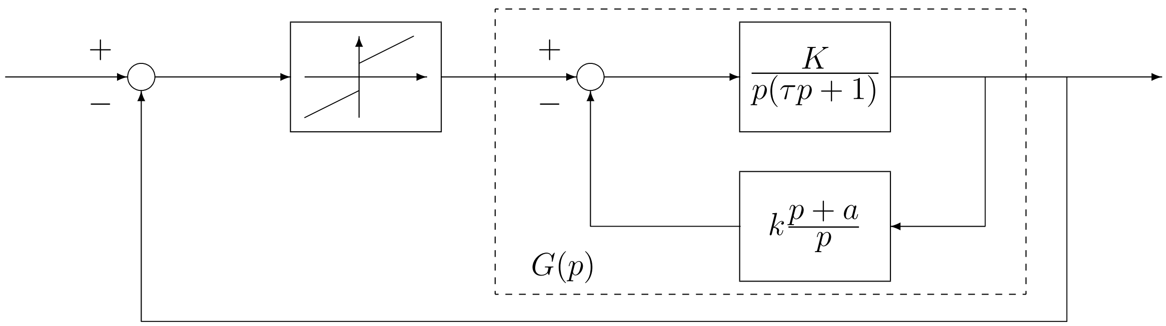


Figure 9: Schéma bloc équivalent

1. Le schéma bloc de la figure 4 peut se mettre sous la forme représentée figure 9. De ce schéma, on déduit que :

$$G(p) = \frac{Kp}{p^2(\tau p + 1) + kK(p + a)}$$

2. (a)

$$\begin{cases} \forall t \in [0,\ \pi] & w(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t) + 1 \\ \forall t \in [\pi,\ 2\pi] & w(t) = \epsilon_1 \sin(\omega t) - 1 \end{cases}$$

Dans la suite, on pose $u = \omega t$.

(b) La non linéarité est symétrique par rapport à 0 :

$$\begin{aligned} N(\epsilon_1) &= \frac{2j}{\pi\epsilon_1}\int_0^{\pi} w(\frac{u}{\omega})e^{-ju}d(u) \\ &= \frac{2j}{\pi\epsilon_1}\int_0^{\pi} (\epsilon_1 \sin(u) + 1)e^{-ju}d(u) \end{aligned}$$

Or

$$(\epsilon_1 \sin(u) + 1)\, e^{-ju} = \epsilon_1 \frac{1 - e^{-2ju}}{2j} + e^{-ju}$$

D'où

$$N(\epsilon_1) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}(1 - e^{-2ju})du}_{A} + \frac{2j}{\pi\epsilon_1}\underbrace{\int_0^{\pi} e^{-ju}du}_{B}$$

Or

$$A = \left[u + \frac{e^{-2ju}}{2j}\right]_0^{\pi} = \pi$$

et

$$B = \left[\frac{e^{-ju}}{-j}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{j}$$

Par suite,

$$N(\epsilon_1) = 1 + \frac{4}{\pi\epsilon_1}$$

3. Le tracé des lieux critiques est donné par

$$C(\epsilon_1) = \frac{-\pi\epsilon_1}{\pi\epsilon_1 + 4}$$

pour ϵ_1 allant de 0 à $+\infty$. Il recouvre donc l'axe des abscisses entre le point d'abscisse -1 et le point d'abscisse 0. Par suite, d'après la figure 8 il ne peut pas y avoir (auto) oscillation.